PUC-Rio
Departamento de Informática
Prof. Marcus Vinicius S. Poggi de Aragão
Período: 2017.1
16 de abril de 2017
Horário: 2as-feiras e 4as-feiras de 9 às 11 horas

Estruturas Discretas (INF 1631)

1^o Trabalho de Implementação

Data de Entrega: 15 de Maio de 2017

Descrição

Este trabalho prático consiste em desenvolver códigos para diferentes algoritmos e estruturas de dados para resolver os problemas descritos abaixo e, principalmente, analisar o desempenho das implementações destes algoritmos com respeito ao tempo de CPU. O desenvolvimento destes códigos e a análise devem seguir os seguintes roteiros:

- Descrever os algoritmos informalmente.
- Demonstrar o entendimento do algoritmo explicando, em detalhe, o resultado que o algoritmo deve obter e justificá-lo.
- Explicar a fundamentação do algoritmo e justificar a sua corretude apresentando a prova por indução matemática que leva ao algoritmo.
- Apresentar as tabelas dos tempos de execução obtidos pelos algoritmos sobre as instâncias testadas.
- Documente o arquivo contendo o código fonte de modo que cada passo do algoritmo esteja devidamente identificado e deixe claro como este passo é executado e sua relação com a prova por indução apresentada.
- Para a medida de tempo de CPU das execuções utilize as funções disponíveis no link correspondente na página do curso, um exemplo de utilização é apresentado. Quando o tempo de CPU for inferior à 5 segundos, faça uma repetição da execução tantas vezes quantas forem necessárias para que o tempo ultrapasse 5 s (faça um while), conte quantas foram as execuções e reporte a média.

A corretude código deverá ser testada sobre um conjunto de instâncias. O trabalho entregue deve conter:

- Um documento contendo o roteiro de desenvolvimento dos algoritmos (e dos códigos), os itens pedidos acima, comentários e análises sobre a implementação e os testes realizados (papel).
- Um e-mail para poggi@inf.puc-rio.br (é obrigatório o uso do ASSUNTO (ou SUBJECT) ED171T1 deve ser enviado contendo os arquivos correspondentes ao trabalho. O NÃO ENVIO DESTE E-MAIL IMPLICA QUE O TRABALHO NÃO SERÁ CONSIDERADO.
- O trabalho pode ser feito em grupo de até 3 alunos.

1. Considere o teorema abaixo e a sua prova.

Teorema 1 *: $x^n - y^n$ é divisível por $x - y$ para quaisquer x e y inteiros e todos o valores de n inteiros e maiores que zero.*

Prova 1 *A prova é feita por indução matemática utilizando k como parâmetro de indução. O teorema 1 pode ser enunciado:*

Teorema 1 *(k): $x^k - y^k$ é divisível por $x - y$ para quaisquer x e y inteiros e todos o valores de k inteiros e maiores que zero.*

Teorema do Caso Base: 1 *Seja $k = 1$ (o menor valor para o qual k tem que ser verdade). Nesse caso temos que provar que $x - y$ é divisível por $x - y$ para qualquer valor de x e y. O que é trivialmente verdade, sendo o quociente, q_1, igual a 1.*

Teorema do Passo Indutivo: 1 *Desejamos provar que se o teorema 1 é verdade para um k fixo, isto é, podemos assumir que:*

$$x^k - y^k = q_k.(x - y)$$

onde q_k é um inteiro, então é possivel mostrar que

$$x^{k+1} - y^{k+1} = q_{k+1}.(x - y)$$

para q_{k+1} inteiro. Ou seja, temos que mostrar é verdade também para $k + 1$. Isto é, que podemos obter q_{k+1} inteiro a partir de q_k se o teorema 1 é verdade para k.

Como:

$$x^{k+1} - y^{k+1} = x^{k+1} - x^k.y + x^k.y - y^{k+1} = x^k(x - y) + y(x^k - y^k)$$

Como, pela hipótese indutiva, temos que $x^k - y^k = q_k.(x - y)$, podemos escrever:

$$x^{k+1} - y^{k+1} = x^k(x - y) + y(x^k - y^k) = x^k(x - y) + y.\mathbf{q_k}.(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (x^k + y.q_k)(x - y)$$

Como x é inteiro, x^k é inteiro. Como y e q_k são inteiros seu produto também é inteiro. Portanto $(x^k + y.q_k)$ é inteiro e $q_{k+1} = (x^k + y.q_k)$ é inteiro, ou seja:

$$x^{k+1} - y^{k+1} = (x^k + y.q_k)(x - y) = q_{k+1}.(x - y)$$

O teorema acima resolve o problema de determinar o quociente entre $x^k - y^k$ e $x - y$. Assim deseja-se um algoritmo que dados x, y, e k inteiros determine esse quociente.

(a) Escreva o algoritmo resultante da prova acima.

(b) Implemente este algoritmo e teste para vários valores de x, y, e k.

2. Seja $G = (V, E)$ um grafo denso, i.e., $\forall\, v, w \in V$, $d(v) + d(w) \geq n$, onde $d(v) = |\{u|(u, v) \in E\}|$ (o grau de v) e $n = |V|$.

   Um ciclo Hamiltoniano em G é um ciclo que inicia em um vértice $v(v = 1$, por exemplo), passa exatamente um vez em cada um dos demais vértices de G e retorna ao vértice v.

   Considere o teorema abaixo:

   Teorema 2 *: Seja $G = (V, E)$ um grafo denso. Sabe-se encontrar um caminho Hamiltoniano em G onde $|V| \leq 3$*

   (a) Defina o parâmetro de indução e apresente uma prova para o Teorema 2 por indução matemática.

   (b) Apresente o algoritmo correspondente à prova do Teorema 2 apresentada e a sua respectiva implementação.

   (c) Teste o algoritmo na instâncias disponibilizadas, apresentando o ciclo Hamiltoniano obtido e o tempo de processamento.

   Dica: Manber, seção 7.12.2.

3. Seja um conjunto de n de equipes $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Deseja-se construir as $n - 1$ rodadas de um campeonato onde todos jogam contra todos. Assuma que $n = 2^k$ para algum k. Enuncia-se abaixo o teorema de que sabe-se construir as $n - 1$ rodadas de $n/2$ jogos cada.

   Teorema 3 *(k): Sabe-se construir $2^k - 1$ rodadas de 2^{k-1} jogos onde cada equipe enfrenta uma equipe diferente em cada rodada.*

   (a) Apresente a prova por indução matemática no parâmetro k do Teorema 3;

   (b) Apresente o algoritmo correspondente à prova do Teorema 3 apresentada e a sua respectiva implementação.

   (c) Teste o algoritmo para valores de k. Qual o maior valor para o qual o seu algoritmo gera as rodadas? Qual o tempo de processamento para cada valor de k?