Análise e modelagem de uma Dual Digital Call Option Cash-or-Nothing

L: Prêmio definido no contrato;
S_1: Valor do primeiro ativo-objeto;
S_2: Valor do segundo ativo-objeto;
K_1: Strike price do primeiro ativo-objeto;
K_2: Strike price do segundo ativo-objeto;
ρ : Correlação entre os ativos-objeto;
T : Instante de exercício da opção da opção;
r: Taxa livre de risco;
σ_i: Volatilidade do ativo i;
$\phi(t_1, t_2)$: Função cumulativa da distribuição;
$N(X, \mu, \Sigma)$ Distribuição multivariável normal do vetor X;
μ : Vetor média;
V: Valor da Dual Digital
Σ : Matriz de covariância;
t: Instante de compra da opção.

É possível modelar opções como a combinação linear de opções binárias asset-or-nothing e cash-or-nothing. Ou seja:

$$V = \sum a_i \zeta(S, t, T, \xi_i) + \sum b_i \psi(S, t, T, \xi_i)$$

Onde ζ representa o valor de uma unidade monetária (no instante t de compra) recebida no instante T se, e somente se, o evento ξ_i ocorrer e ψ representa o valor de uma unidade do ativo-objeto (no instante t de compra) recebida no instante T se, e somente se, o evento ξ_i ocorrer.

Modelaremos aqui uma *Dual Digital call option cash-or-nothing* de prêmio L. Desse modo, o valor da opção não dependerá de opções binárias asset-or-nothing. Além disso, com intuito de se realizar uma análise simplificada, considere que os ativos-objeto não geram dividendos ao longo do período de exercício da opção. O evento ξ para a Dual Digital é definido por:

$$\xi = \{S_1(T) > K_1 \cap S_2(T) > K_2\}$$

Portanto, o valor da opção será dado por:

$$V = L\zeta(S_1, S_2, t, T, S_1(T) > K_1 \cap S_2(T) > K_2)$$

E, de maneira análoga ao modelo de Black-Scholes (tomando o termo relacionado ao retorno fixo e analisando a distribuição de probabilidade da intersecção de dois eventos aleatórios correlacionados):

$$V = Le^{-r(T-t)}\phi(d_1, d_2)$$

Em que d_1 e d_2 são definidos pela expressão abaixo:

$$d_i = \frac{ln(S_i/K_i) + (r - \frac{1}{2}\sigma_i^2)(T-t)}{\sigma_i\sqrt{T-t}}$$

A distribuição bivariável normal de duas variáveis aleatórias correlacionadas e de média 0 é dada por:

$$N(X = (x_1, x_2), \mu = (0, 0), \Sigma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} exp[\frac{-X\Sigma^{-1}X^T}{2}]$$

Onde:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Desse modo, a função cumulativa da distribuição será dada por:

$$\phi(d_1, d_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \int_{-\infty}^{d_2} \int_{-\infty}^{d_1} exp[\frac{-X\Sigma^{-1}X^T}{2}] \, dx_1 \, dx_2$$

Por fim:

$$V = \frac{Le^{-r(T-t)}}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \int_{-\infty}^{d_2} \int_{-\infty}^{d_1} exp[\frac{-X\Sigma^{-1}X^T}{2}] \, dx_1 \, dx_2$$