Análise e modelagem de uma Dual Digital Option Cash-or-Nothing

L: Prêmio definido no contrato;
S_1: Valor do primeiro ativo-objeto;
S_2: Valor do segundo ativo-objeto;
K_1: Strike price do primeiro ativo-objeto;
K_2: Strike price do segundo ativo-objeto;
ρ : Correlação entre os ativos-objeto;
T : Instante de exercício da opção da opção;
r: Taxa livre de risco;
σ_i: Volatilidade do ativo i;
$\phi(t_1, t_2)$: Função cumulativa da distribuição;
$N(X, \mu, \Sigma)$ Distribuição multivariável normal do vetor X;
μ : Vetor média;
V: Valor da Dual Digital
Σ : Matriz de covariância;
t: Instante de compra da opção.

É possível modelar a *Dual Digital Option* como a combinação linear de dois ativos, um deles associado a uma call option regular e o outro associado a um payout fixo. Por fins de simplicidade, modelaremos aqui uma *Dual Digital Option cash-or-nothing* de prêmio L. Desse modo, o valor da opção não dependerá de uma call option regular de payout variável, mas sim de uma função de payout fixo. Além disso, com intuito de se realizar uma análise simplificada, considere que os ativos-objeto não geram dividendos ao longo do período de exercício da opção. Feitas as considerações, o valor da Dual Digital será dado por:

$$V = Le^{-r(T-t)}\phi(d_1, d_2)$$

d_1 e d_2 são definidos pela expressão abaixo:

$$d_i = \frac{ln(S_i/K_i) + (r - \frac{1}{2}\sigma_i^2)(T-t)}{\sigma_i\sqrt{T-t}}$$

A distribuição bivariável normal de duas variáveis aleatórias correlacionadas e de média 0 é dada por:

$$N(X = (x_1, x_2), \mu = (0, 0), \Sigma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} exp[\frac{-X\Sigma^{-1}X^T}{2}]$$

Onde:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Desse modo, a função cumulativa da distribuição será dada por:

$$\phi(d_1, d_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \int_{-\infty}^{d_2}\int_{-\infty}^{d_1} exp[\frac{-X\Sigma^{-1}X^T}{2}]\, dx_1\, dx_2$$