

Linguaggi di Programmazione  
AA 2016-2017  
Gennaio 2017 Progetto E1P  
**Polinomi Multivariati**

Marco Antoniotti e Gabriella Pasi  
Dipartimento di Informatica, Sistemistica e Comunicazione  
Università degli Studi di Milano Bicocca

10 Novembre, 2016

## Scadenza

La consegna del progetto è fissata per il giorno 15 gennaio 2017 entro le 23:55 GMT+1.

## 1 Introduzione

Una delle prime e più importanti applicazioni dei calcolatori fu la manipolazione *simbolica* di operazioni matematiche. In particolare, i sistemi noti come *Computer Algebra Systems* (cfr., Mathematica, Maple, Maxima, Axiom, etc.) si preoccupano di fornire funzionalità per la manipolazione di *polinomi multivariati*.

Lo scopo di questo progetto è la costruzione di due librerie (in Prolog ed in Common Lisp) per la manipolazione – per l'appunto – di polinomi multivariati.

### 1.1 Polinomi multivariati

Un polinomio multivariato è un'espressione matematica che contiene diverse *variabili* a cui possono essere associati dei valori in un certo *dominio*<sup>1</sup>. Due esempi sono (con le solite regole di associatività):

$$x^2 + y^2,$$

$$42 \times x \times y^3 - z^2 \times y \times w \times x - x^3 \times w^3.$$

Il secondo polinomio viene normalmente riscritto in modo compatto come:

$$42xy^3 - z^2ywx - x^3w^3,$$

omettendo il simbolo di moltiplicazione  $\times$ .

Un polinomio è composto da *monomi*: i termini corrispondenti alle moltiplicazioni di *coefficienti* (elementi del dominio) e delle variabili (elevate a potenze). Nel secondo esempio qui sopra i monomi sono

$$42xy^3,$$

$$-z^2ywx,$$

$$-x^3w^3.$$

Notate anche che il polinomio qui sopra può anche essere scritto come

$$-w^3x^3 + 42xy^3 - wxyz^2,$$

ovvero *riordinando* i monomi (i quali a loro volta sono ordinati secondo un preciso schema).

*Buona parte di questo progetto consiste nel costruire delle procedure di riordinamento delle variabili (con le loro potenze) in un monomio e dei monomi in un polinomio.*

---

<sup>1</sup>Il dominio deve in realtà essere un *campo algebrico*  $\mathbf{F} = \langle U, +, \times \rangle$ .

## 2 Operazioni da implementare e rappresentazione

Le librerie che implementerete dovranno contenere alcune operazioni standard per la manipolazione di vari polinomi: estrazione dei coefficienti, calcolo del grado del polinomio, sua valutazione in un punto  $\mathbf{v} = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$  (dove  $k$  è il numero di variabili che compaiono nel polinomio), somma, moltiplicazione, etc, etc.

La rappresentazione di monomi e polinomi dovrà essere la seguente.

**Prolog.** I monomi devono essere rappresentati da termini siffatti:

`m(Coefficient, TotalDegree, VarsPowers)`

per i quali si può scrivere il predicato:

```
is_monomial(m(_C, TD, VPs)) :-  
    integer(TD),  
    TD >= 0,  
    is_list(VPs).
```

Tralasciamo al momento come controllare `Coefficient`. La lista `VarsPowers` contiene termini come il seguente:

`v(Power, VarSymbol)`

per i quali possiamo scrivere il predicato:

```
is_varpower(v(Power, VarSymbol)) :-  
    integer(Power),  
    Power >= 0,  
    atom(VarSymbol).
```

Ovvero la query seguente è verificata.

```
?- m(_, _, [v(2, x), v(2, y)] = m(_, _, VPs),  
|   foreach(member(VP, VPs), is_varpower(VP)).  
true
```

I polinomi sono rappresentati da termini più semplici.

`poly(Monomials)`

dove `Monomials` è una lista di monomi. Ovvero possiamo scrivere:

```
is_polynomial(poly(Monomials)) :-  
    is_list(Monomials),  
    foreach(member(M, Monomials), is_monomial(M)).
```

**Common Lisp.** I monomi devono essere rappresentati (analogamente al caso del Prolog) con oggetti siffatti:

`(m coefficient total-degree vars-n-powers)`

per i quali si può scrivere il predicato:

```
(defun is-monomial (m)  
  (and (listp m)  
        (eq 'm (first m))  
        (let ((mtd (monomial-total-degree m))  
              (vps (monomial-vars-and-powers m))  
              )  
          (and (integerp mtd)  
                (>= mtd 0)  
                (listp vps)  
                (every #'is-varpower vps))))))
```

Sorvoliamo anche in questo caso su come controllare **coefficient**. La lista **vars-n-powers** contiene termini come il seguente:

```
(v power var-symbol)
```

per i quali possiamo scrivere il predicato:

```
(defun is-varpower(vp)
  (and (listp vp)
        (eq 'v (first vp))
        (let ((p (varpower-power vp))
              (v (varpower-symbol vp)))
          (and (integerp p)
                (>= p 0)
                (symbolp v))))))
```

Anche nel caso Common Lisp, i polinomi sono rappresentati da termini più semplici.

```
(poly monomials)
```

Ovvero possiamo scrivere:

```
(defun is-polynomial (p)
  (and (listp p)
        (eq 'poly (first p))
        (let ((ms (poly-monomials p)))
          (and (listp ms)
                (every #'is-monomial ms))))))
```

(Naturalmente possiamo aggiungere altri test di consistenza delle strutture dati).

## 2.1 Operazioni da implementare

Le vostre librerie dovranno implementare le operazioni seguenti.

**Prolog.** I predicati che dovrete implementare (oltre a quelli descritti sopra) servono a ispezionare le strutture dati e a fare calcoli simbolici con i polinomi.

**Predicate *coefficients*(*Poly*, *Coefficients*)**

Il predicato **coefficients** è vero quando *Coefficients* è una lista dei – ovviamente – coefficienti di *Poly*.

**Predicate *variables*(*Poly*, *Variables*)**

Il predicato **variables** è vero quando *Variables* è una lista dei simboli di variabile che appaiono in *Poly*.

**Predicate *monomials*(*Poly*, *Monomials*)**

Il predicato **monomials** è vero quando *Monomials* è la lista – *ordinata*, si veda sotto – dei monomi che appaiono in *Poly*.

**Predicate *maxdegree*(*Poly*, *Degree*)**

Il predicato **maxdegree** è vero quando *Degree* è il massimo grado dei monomi che appaiono in *Poly*.

**Predicate *mindegree*(*Poly*, *Degree*)**

Il predicato **mindegree** è vero quando *Degree* è il minimo grado dei monomi che appaiono in *Poly*.

**Predicate *polyplus*(*Poly1*, *Poly2*, *Result*)**

Il predicato **polyplus** è vero quando *Result* è il polinomio somma di *Poly1* e *Poly2*.

**Predicate** `polyminus`(*Poly1*, *Poly2*, *Result*)

Il predicato `polyminus` è vero quando *Result* è il polinomio differenza di *Poly1* e *Poly2*.

**Predicate** `polytimes`(*Poly1*, *Poly2*, *Result*)

Il predicato `polytimes` è vero quando *Result* è il polinomio risultante dalla moltiplicazione di *Poly1* e *Poly2*.

**Predicate** `as_monomial`(*Expression*, *Monomial*)

Il predicato `as_monomial` è vero quando *Monomial* è il termine che rappresenta il monomio risultante dal “parsing” dell’espressione *Expression*; il monomio risultante deve essere appropriatamente ordinato (si veda sotto).

**Predicate** `as_polynomial`(*Expression*, *Polynomial*)

Il predicato `as_polynomial` è vero quando *Polynomial* è il termine che rappresenta il polinomio risultante dal “parsing” dell’espressione *Expression*; il polinomio risultante deve essere appropriatamente ordinato (si veda sotto).

**Predicate** `polyval`(*Polynomial*, *VariableValues*, *Value*)

Il predicato `polyval` è vero quando *Value* contiene il valore del polinomio *Polynomial* (che può anche essere un monomio), nel punto *n*-dimensionale rappresentato dalla lista *VariableValues*, che contiene un valore per ogni variabile ottenuta con il predicato `variables/2`.

**Predicate** `pprint_polynomial`(*Polynomial*)

Il predicato `pprint_polynomial` risulta vero dopo aver stampato (sullo “standard output”) una rappresentazione **tradizionale** del termine polinomio associato a *Polynomial*. Si può omettere il simbolo di moltiplicazione.

**Common Lisp.** Le funzioni che dovreste implementare (oltre a quelle descritti sopra) servono a ispezionare le strutture dati e a fare calcoli simbolici con i polinomi.

Si noti che in Common Lisp sarà necessario costruire anche delle funzioni che servono ad estrarre parti delle varie strutture dati che rappresentano monomi e polinomi. In Prolog possiamo usare l’unificazione per ottenere questo risultato, in Common Lisp no<sup>2</sup>.

**Function** `varpowers` *Monomial* → *VP-list*

Data una struttura *Monomial*, ritorna la lista di *varpowers* *VP-list*.

**Function** `var-of` *Monomial* → *Variable*

Data una struttura *Monomial*, ritorna la variabile *Variable*.

**Function** `monomial-degree` *Monomial* → *TotalDegree*

Data una struttura *Monomial*, ritorna il suo grado totale *TotalDegree*.

**Function** `monomial-coefficient` *Monomial* → *Coefficient*

Data una struttura *Monomial*, ritorna il suo coefficiente *Coefficient*.

**Function** `coefficients` *Poly* → *Coefficients*

La funzione `coefficients` ritorna una lista *Coefficients* dei – ovviamente – coefficienti di *Poly*.

---

<sup>2</sup>A meno di implementare un “unificatore” per CL, ovviamente.

**Function variables** *Poly* → *Variables*

La funzione **variables** ritorna una lista *Variables* dei simboli di variabile che appaiono in *Poly*.

**Function monomials** *Poly* → *Monomials*

La funzione **monomials** ritorna la lista – *ordinata*, si veda sotto – dei monomi che appaiono in *Poly*.

**Function maxdegree** *Poly* → *Degree*

La funzione **maxdegree** ritorna il massimo grado dei monomi che appaiono in *Poly*.

**Function mindegree** *Poly* → *Degree*

La funzione **mindegree** ritorna il minimo grado dei monomi che appaiono in *Poly*.

**Function polyplus** *Poly1 Poly2* → *Result*

La funzione **polyplus** produce il polinomio somma di *Poly1* e *Poly2*.

**Function polyminus** *Poly1 Poly2* → *Result*

La funzione **polyplus** produce il polinomio differenza di *Poly1* e *Poly2*.

**Function polytimes** *Poly1 Poly2* → *Result*

La funzione **polytimes** ritorna il polinomio risultante dalla moltiplicazione di *Poly1* e *Poly2*.

**Function as-monomial** *Expression* → *Monomial*

La funzione **as-monomial** ritorna la struttura dati (lista) che rappresenta il monomio risultante dal “parsing” dell’espressione *Expression*; il monomio risultante deve essere appropriatamente ordinato (si veda sotto).

**Function as-polynomial** *Expression* → *Polynomial*

La funzione **as-polynomial** ritorna la struttura dati (lista) che rappresenta il monomio risultante dal “parsing” dell’espressione *Expression*; il polinomio risultante deve essere appropriatamente ordinato (si veda sotto).

**Function polyval** *Polynomial VariableValues* → *Value*

La funzione **polyval** restituisce il valore *Value* del polinomio *Polynomial* (che può anche essere un monomio), nel punto *n*-dimensionale rappresentato dalla lista *VariableValues*, che contiene un valore per ogni variabile ottenuta con la funzione **variables**.

**Function pprint-polynomial** *Polynomial* → *NIL*

La funzione **pprint-polynomial** ritorna *NIL* dopo aver stampato (sullo “standard output”) una rappresentazione **tradizionale** del termine polinomio associato a *Polynomial*. Si può omettere il simbolo di moltiplicazione.

### 3 Ordinamento di monomi e polinomi multivariati

Un polinomio univariato è normalmente scritto in ordine decrescente (o crescente) delle potenze della variabile. Ad esempio:

$$y^4 - 3y^2 - 42y + 123.$$

I monomi ed i polinomi multivariati possono essere invece scritti e “ordinati” in molti modi diversi; ognuno di questi ordinamenti ha una sua funzione in *Computer Algebra*. Per questo progetto dovreste implementare il seguente ordinamento.

**Ordinamento di un monomio.** Un monomio deve essere ordinato in *ordine lessicografico crescente* delle variabili. Ovvero:

$$y^{42}x^4sz^2t^2 \Rightarrow st^2x^4y^{42}z^2.$$

Si noti come l'esponente non modifichi l'ordinamento.

**Ordinamento di un polinomio.** Dato un insieme di monomi (ordinati), il polinomio risultante sarà ordinato prima in *ordine decrescente del grado dei monomi* con spareggi determinati dalle variabili (questa è la ragione per tener traccia del grado complessivo di un monomio). Ad esempio:

$$y^4zx^5 - yzr + y^4rz^5 \Rightarrow ry^4z^5 + x^5y^4z - ryz.$$

## Indicazioni per l'implementazione

I vostri predicati `as_monomial`, `as_polynomial` e le vostre funzioni `as-monomial` e `as-polynomial` dovranno tenere presenti questi ordinamenti. I predicati di libreria SWI `sort/4` e `msort` serviranno a questa bisogna; lo stesso dicasi per la funzione Common Lisp `sort`<sup>3</sup>. La produzione di strutture dati che non rispettano questi ordinamenti risulterà in voti insufficienti.

## 4 “Parsing” di polinomi

I predicati `as_monomial`, `as_polynomial` e le funzioni `as-monomial` e `as-polynomial` si preoccupano di trasformare un monomio e un polinomio nella rappresentazione canonica interna. Il loro ruolo è quello di fare il *parsing* di una rappresentazione superficiale di monomi e polinomi. Queste rappresentazioni sono diverse per Prolog e Common Lisp.

**Prolog** In questo caso la rappresentazione superficiale di monomi e polinomi è quella normale, con moltiplicazioni e potenze esplicite. Per semplicità potete sempre aspettarvi di avere il coefficiente come primo elemento; il coefficiente 1 può sempre essere omissso. Ad esempio:

```
?- as_monomial(3 * y * w * t^3, M).
M = m(3, 5, [v(3, t), v(1, w), v(1, y)]).
```

```
?- as_monomial(y * s^3 * t^3, M).
M = m(1, 7, [v(3, s), v(3, t), v(1, y)]).
```

```
?- as_polynomial(y * s^3 * t^3 - 4 + x * y, P).
P = poly([m(1, 7, [v(3, s), v(3, t), v(1, y)]),
          m(1, 2, [v(1, x), v(1, y)]),
          m(-4, 0, [])])
```

(N.B. L'ultimo esempio è stato indentato manualmente per facilitare la lettura).

**Common Lisp** In questo secondo caso, la rappresentazione superficiale di monomi e polinomi utilizza la semplice sintassi prefissa Common Lisp. Anche in questo caso, potete sempre aspettarvi che il primo coefficiente di un monomio sia il primo elemento e che il coefficiente 1 può sempre essere omissso. Ad esempio:

```
cl-prompt> (as-monomial '(* 3 y w (expt t 3)))
(M 3 5 ((V 3 T) (V 1 W) (V 1 Y)))
```

```
cl-prompt> (as-monomial '(* y (expt s 3) (expt t 3)))
(M 1 7 ((V 3 S) (V 3 T) (V 1 Y)))
```

---

<sup>3</sup>Attenzione che la `sort` di Common Lisp è una funzione cosiddetta “distruttiva”; è sempre bene *copiare* il suo input prima di invocarla.

```
cl-prompt> (as-polynomial '(+ (* y (expt s 3) (expt t 3)) -4 (* x y)))
(P ((M 1 7 ((V 3 S) (V 3 T) (V 1 Y)))
  (M 1 2 ((V 1 X) (V 1 Y)))
  (M -4 0 NIL)))
```

(N.B. L'ultimo esempio è stato indentato manualmente per facilitare la lettura).

Come potete notare i polinomi in sintassi Common Lisp sono molto semplici: hanno un + come operatore principale, **expt** per indicare le potenze e l'eventuale segno di sottrazione - è inglobato nel coefficiente. La sintassi superficiale dei polinomi è la seguente:

```
polynomial ::= '(' '+' monomial+ ')')

monomial   ::= number
            | '(' '*' [coefficient] var-expt* ')'

var-expt   ::= variable
            ::= '(' 'expt' variable exponent ')'

variable   ::= symbol

exponent   ::= non-negative integer
```

## 5 Esempi

Questi sono alcuni esempi di come si può usare questa libreria. NB. Dovete naturalmente essere preparati a calcolare anche altri esempi.

### Common Lisp

```
cl-prompt> (setf qd (as-monomial 42))
(M 42 0 NIL)

cl-prompt> (setf m1 (as-monomial '(* y (expt s 3) (expt t 3))))
(M 1 7 ((V 3 S) (V 3 T) (V 1 Y)))

cl-prompt> (setf p1 (as-polynomial '(+ (* -1 x) (* x w))))
(P ((M 1 2 ((V 1 W) (V 1 X))) (M -1 1 ((V 1 X)))))

cl-prompt> (setf p2 (as-polynomial '(+ (* y (expt s 3) (expt t 3)) -4 (* x y))))
(P ((M 1 7 ((V 3 S) (V 3 T) (V 1 Y))) (M 1 2 ((V 1 X) (V 1 Y))) (M -4 0 NIL)))

cl-prompt> (polytimes m1 p1) ; Output formattato per leggibilità.
(P ((M 1 9 ((V 3 S) (V 3 T) (V 1 W) (V 1 X) (V 1 Y)))
  (M -1 8 ((V 3 S) (V 3 T) (V 1 X) (V 1 Y)))))

cl-prompt> (pprint-polynomial *)
S^3 T^3 W X Y + -1 S^3 T^3 X Y
NIL
```

## Prolog

```
?- as_monomial(42, QD).
QD = m(42, 0, []).

?- as_polynomial(-1 * x + x * y, P1).
P1 = poly([m(1, 2, [v(1, x), v(1, y)]), m(-1, 1, [v(1, x)])])

?- as_polynomial(-1 * x + x * y, P1), variables(P1, Vs).
P1 = poly([m(1, 2, [v(1, x), v(1, y)]), m(-1, 1, [v(1, x)])]),
Vs = [x, y]

?- as_polynomial(y * s^3 * t^3 - 4 + x * y, P2).
%% Formattato per leggibilità.
P2 = poly([m(1, 7, [v(3, s), v(3, t), v(1, y)]),
           m(1, 2, [v(1, x), v(1, y)]),
           m(-4, 0, [])])

?- as_monomial(y * s^3 * t^3, M1),
| as_polynomial(-1 * x + x * y, P1),
| polytimes(M1, P1, R),
| pprint_polynomial(R).

S^3 * T^3 * X * Y^2 + -1 * S^3 * T^3 * X * Y

M1 = m(1, 7, [v(3, s), v(3, t), v(1, y)]),
P1 = poly([m(1, 2, [v(1, x), v(1, y)]), m(-1, 1, [v(1, x)])]),
R = poly([m(1, 9, [v(3, s), v(3, t), v(1, x), v(2, y)]),
          m(-1, 8, [v(3, s), v(3, t), v(1, x), v(1, y)])]).
```

## 6 Suggerimenti

Si suggerisce di procedere inizialmente con la costruzione dei predicati `as...` e delle funzioni `as...` e con il predicato `pprint_polynomial` e la funzione `pprint-polynomial`, al fine di avere una base su cui poi costruire le operazioni successive. Le funzionalità di ordinamento di Prolog, (`sort`, `msort`, ...) e di Common Lisp (`sort`) sono senz'altro utili per il progetto. Per Prolog sarà utile anche `list_to_set`; per Common Lisp potrete anche considerare `remove-duplicates`.

## 7 Conclusioni

La libreria di funzioni che avrete costruito è un primo passo verso la costruzione di un sistema di *Computer Algebra* quali Mathematica<sup>TM</sup> Maxima, Axiom etc.

La rappresentazione di polinomi e monomi non è necessariamente la migliore e sono molte le variazioni sul tema; lo scopo di questa rappresentazione è di coniugare semplicità e flessibilità, oltre ad essere facile da manipolare<sup>4</sup>. Qualora si vogliano fare operazioni più sofisticate sui polinomi, ad esempio, calcolare il `gcd` di due polinomi o calcolare una *base di Gröbner*, allora sarà necessario adottare delle rappresentazioni e degli ordinamenti diversi.

---

<sup>4</sup>Specie per il correttore.



## 8 Da consegnare...

LEGGERE ATTENTAMENTE LE ISTRUZIONI QUI SOTTO  
(IN ITALIANO!).

PRIMA DI CONSEGNARE, CONTROLLATE **ACCURATAMENTE**  
CHE TUTTO SIA NEL FORMATO E CON LA STRUTTURA DI CARTELLE  
RICHIESTI.

Dovete consegnare:

Uno **.zip** file dal nome `<Cognome>.<Nome>.<matricola>mvpoli.LP.201701.zip` *che conterrà una cartella dal nome* `<Cognome>.<Nome>.<matricola>mvpoli.LP.201701`.

Se il vostro nome e cognome sono: Gian Giacomo Pier Carl Luca Serbelloni Lupmann Vien Dal Mare Il nome del file sarà:

`Serbelloni_Lupmann_Vien_Dal_Mare_Gian_Giacomo_Pier_Carl_Luca_123456_mvpoli.LP.201701.zip`.

Inoltre...

- Nella cartella dovete avere due sottocartelle: una di nome **Lisp** e l'altra di nome **Prolog**.
- Nella directory **Lisp** dovete avere:
  - un file dal nome **mvpoli.lisp** che contiene il codice di della libreria.
    - \* Le prime linee del file **devono essere dei commenti con il seguente formato**, ovvero devono fornire le necessarie informazioni secondo le regole sulla collaborazione pubblicate su Moodle.

```
;;; <Matricola> <Cognome> <Nome>
;;; <eventuali collaborazioni>
```

Il contenuto del file deve essere ben commentato.
    - Un file **README** in cui si spiega come si possono usare le funzioni definite nel programma.
  - Nella directory **Prolog** dovete avere:
    - un file dal nome **mvpoli.pl** che contiene il codice di della libreria.
      - \* Le prime linee del file **devono essere dei commenti con il seguente formato**, ovvero devono fornire le necessarie informazioni secondo le regole sulla collaborazione pubblicate su Moodle.

```
%%% <Matricola> <Cognome> <Nome>
%%% <eventuali collaborazioni>
```

Il contenuto del file deve essere ben commentato.
      - Un file **README** (si! Anche qui anche se è una ripetizione) in cui si spiega come si possono usare i predicati definiti nel programma.

**ATTENZIONE!** Consegnate solo dei files e directories con nomi costruiti come spiegato. Niente spazi extra e soprattutto niente **.rar** or **.7z** o **.tgz** – solo **.zip**!  
**Repetita juvant! NON CONSEGNARE FILES .rar!!!!**

**Esempio:**

File .zip:

Antoniotti\_Marco\_424242\_mvpoli\_LP\_201701.zip

Che contiene:

```
prompt$ unzip -l Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701.zip
```

Archive: Antoniotti\_Marco\_424242\_mvpoli\_LP\_201701.zip

Length	Date	Time	Name
0	12-02-16	09:59	Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701/
0	12-04-16	09:55	Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701/Lisp/
4783	12-04-16	09:51	Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701/Lisp/mvpoli.lisp
10598	12-04-16	09:53	Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701/Lisp/README.txt
0	12-04-16	09:55	Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701/Prolog/
4623	12-04-16	09:51	Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701/Prolog/mvpoli.pl
10622	12-04-16	09:53	Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701/Prolog/README.txt
30626			7 files

## 8.1 Valutazione

Il programma sarà valutato sulla base di una serie di test standard. In particolare si valuterà la copertura e correttezza delle operazione di base sui polinomi.