CEFET/RJ – Maria da Graça
Profª: Patrícia Manso

1ª LISTA DE ÁLGEBRA LINEAR
(Sistemas Lineares e Matrizes)

1. Em cada parte, encontre o conjunto de soluções da equação linear usando um parâmetro, se necessário.

(a) $7x - 5y = 3$

(b) $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$

2. Em cada parte, encontre a matriz aumentada do sistema de equações lineares dado.

(a) $\begin{aligned} -2x_1 &= 6 \\ 3x_1 &= 8 \\ 9x_1 &= -3 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 6x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 5x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 2x_2 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 6 \end{aligned}$

(d) $x_1 - x_5 = 7$

3. Em cada parte, determine se a matriz está em forma escalonada, em forma escalonada reduzida, ambas ou nenhuma.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

4. Em cada parte, resolva o sistema linear por eliminação de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x - 3w &= -3 \end{aligned}$

5. Em cada parte, resolva o sistema linear dado por qualquer método.

(a) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 &= 9 \\ I_1 - 2I_3 + 7I_4 &= 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 &= 8 \\ 2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I_4 &= 10 \end{aligned}$

6. Determine os valores de a com os quais o sistema não tem solução, tem exatamente uma solução ou tem uma infinidade de soluções.

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

6.5. (a) Mostre que se $ad - bc \neq 0$, então a forma escalonada reduzida por linhas de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Use o resultado da parte (a) para mostrar que se $ad - bc \neq 0$, então o sistema linear

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= 1 \end{aligned}$$

tem exatamente uma solução.

7. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) $-3(D + 2E)$ (b) $2B - C$ (c) $\mathrm{tr}(D - 3E)$

(d) BA (e) $A(BC)$ (f) $\mathrm{tr}(C^TA^T + 2E^T)$

(g) $(-AC)^T + 5D^T$

8. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Use o método das linhas ou das colunas (como for apropriado) para encontrar

(a) a primeira linha de AB.

(b) a segunda coluna de AB.

9. Usando as matrizes A e B do Exercício 8,

(a) expresse cada vetor coluna de AA como uma combinação linear dos vetores coluna de A.

(b) expresse cada vetor coluna de BB como uma combinação linear dos vetores coluna de B.

10. Em cada parte, encontre matrizes A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ que expressem o sistema de equações lineares dado como uma única equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e escreva essa equação matricial.

(a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 - 8x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$

11. Encontre todos os valores de k, se houver, que satisfazem a equação.

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

12. Resolva a equação matricial em termos de a, b, c e d.

$$\begin{bmatrix} a & 3 \\ -1 & a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & d - 2c \\ d + 2c & -2 \end{bmatrix}$$

13. Encontre a inversa de $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

14. Use as matrizes A, B e C para verificar que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

15. Sejam $p_1(x) = x^2 - 9$, $p_2(x) = x + 3$ e $p_3(x) = x - 3$. Mostre que $p_1(A) = p_2(A)p_3(A)$, com a matriz dada.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

16. Supondo que todas as matrizes sejam $n \times n$ e invertíveis, resolva para D.

$$C^T B^{-1} A^2 B A C^{-1} D A^{-2} B^T C^{-2} = C^T$$

17. Simplifique

$$(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$$

18. Mostre que se A, B e $A + B$ forem matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então

$$A(A^{-1} + B^{-1})B(A + B)^{-1} = I$$

19. Em cada parte, encontre uma operação com linhas e a matriz elementar correspondente que retorna a matriz elementar dada à matriz identidade.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20. Em cada parte, são dadas uma matriz elementar E e uma ma triz A. Escreva as operações elementares com linhas correspondentes a E e mostre que, aplicando essas operações a A, resultado é o produto EA.

(a) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

(b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

21. Encontre uma matriz elementar E que satisfaça a equação.

(a) $EA = B$ (b) $EA = C$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

22. Em cada parte, use o algoritmo de inversão para encontrar a inversa da matriz dada, se essa inversa existir.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

23. Escreva a matriz dada como um produto de matrizes elementares.

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

24. Resolva o sistema invertendo a matriz de coeficientes e usando o Teorema .

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + y - 4z &= 10 \\ -4x + y + z &= 0 \end{aligned}$

TEOREMA *Se A for uma matriz invertível $n \times 1$, então para cada matriz* **b** *de tamanho $n \times 1$, o sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução, a saber,* $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

25. Determine, se houver, as condições que as constantes b devem satisfazer para garantir a consistência do sistema linear dado.

(a) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 &= b_2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$

26. Em cada parte, encontre todos os valores das constantes desconhecidas que tornam a matriz A simétrica.

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ a+5 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

27. Em cada parte, encontre uma matriz diagonal A que satisfaz a condição dada.

(a) $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $A^{-2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

28. Verifique o item (b) do Teorema para o produto AB, com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

TEOREMA

(a) *A transposta de uma matriz triangular inferior é triangular superior, e a transposta de uma matriz triangular superior é triangular inferior.*

(b) *O produto de matrizes triangulares inferiores é triangular inferior, e o produto de matrizes triangulares superiores é triangular superior.*

(c) *Uma matriz triangular é invertível se, e só se, suas entradas diagonais são todas não nulas.*

(d) *A inversa de uma matriz triangular inferior invertível é triangular inferior, e a inversa de uma matriz triangular superior invertível é triangular superior.*

29. Prove que se $A^TA = A$, então A é simétrica e $A = A^2$.

30. Dizemos que uma matriz quadrada A é ***antissimétrica*** se $A^T = -A$. Prove cada afirmação dada.

(a) Se A for uma matriz antissimétrica invertível, então A^{-1} é antissimétrica.

(b) Se A e B são antissimétricas, então também o são A^T, $A + B$, $A - B$ e kA, com qualquer escalar k.

(c) Toda matriz quadrada A pode ser expressa como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica. [*Sugestão*: observe a identidade $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.]