Curso: Bacharelado em Sistemas de Informação

Fundamentos da Matemática

Prof. Bráulio César de Oliveira

Date

29/04/2022

CEFET/RJ

Conjuntos

- Trata-se de uma noção primitiva, sem definição própria, podendo o conjunto ser considerado qualquer coleção de objetos ou entidades.
- Os objetos que compõem a coleção são os elementos do conjunto.
- Normalmente designados por letras maiúsculas os conjuntos e por letras minúsculas seus elementos.

CEFET/RJ

Conjuntos

- **Conjunto unitário:** conjunto que possui apenas um elemento.

a) $A = \{x \mid x$ é par compreendido entre 9 e 11$\} = \{10\}$

b) $B = \{x \mid x$ é satélite natural da Terra$\} = \{\text{Lua}\}$

- Conjunto vazio: é o que não possui elementos e denota-se por { } ou Ø.

a) $A = \{x \mid x^2 = 9$ e x é par$\} = \varnothing$

b) $B = \{x \mid x$ é ímpar e múltiplo de 2$\} = \varnothing$

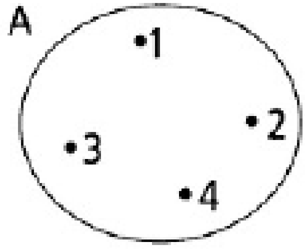
CEFET/RJ

Conjuntos

- **Diagrama de Euler-Venn:** Representação dos conjuntos por regiões planas interiores a uma curva fechada simples.
- Uma boa maneira de visualizar as relações entre conjuntos.

Exemplo:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$



CEFET/RJ

Conjuntos

- **Subconjuntos:** se todo elemento de um conjunto **A** também for elemento de um conjunto **B**, então pode-se dizer que **A** é um subconjunto de **B**.

  - $A \subset B$ (lê-se: A está contido em B);
  - $B \supset A$ (lê-se: B contém A);
  - A é parte de B.

  Se o conjunto A não for subconjunto de B, escreveremos $A \not\subset B$ (lê-se: A não está contido em B).

CEFET/RJ

Conjuntos

- **Observações:**

  - Todo conjunto é subconjunto dele mesmo $(A \subset A)$.
  - $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto $(\varnothing \subset A)$.
  - O total de subconjuntos que podemos formar a partir de um conjunto A, constituído por n elementos, é dado por 2^n, e denota-se por $\# A$ $(\# A = 2^n)$.
  - $A \subset B$ e $B \subset A$ se, e somente se, $A = B$.
  - A é *subconjunto próprio* de B se, e somente se, $A \subset B$ e $A \neq B$.

CEFET/RJ

Conjuntos

- **Conjunto das partes:** seja um conjunto **A.** Denomina-se *conjunto das partes* (P(**A**)) o conjunto formado por todos os subconjuntos de **A**.

Seja $A = \{1,2,3\}$. Então:

$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Observe que, por exemplo, $\{1,2\} \subset A$, mas $\{1,2\} \in P(A)$.

Conjuntos

Conjunto – é uma reunião de elementos

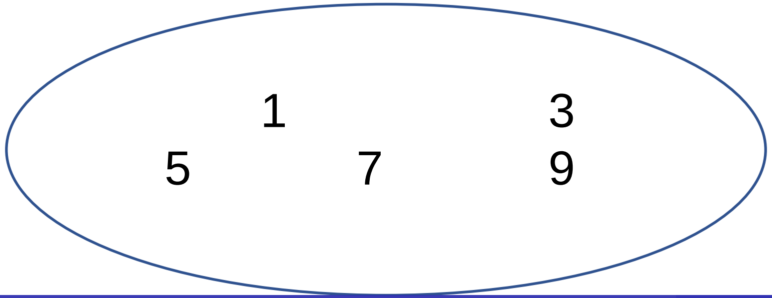
- Representação de conjuntos:

- A = {1, 3, 5, 7, 9}

- A = {x | x é ímpar e 0 < x < 11}, onde | significa "tal que", ou seja,

x tal que x é ímpar e x maior que zero e x menor que 11

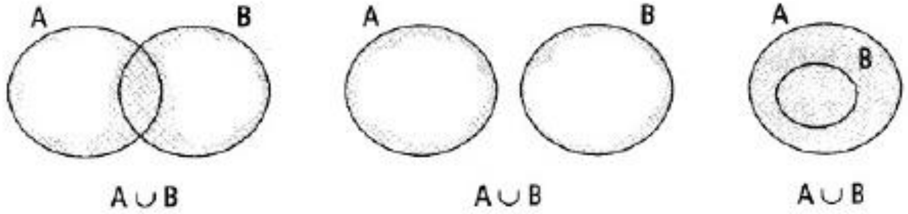
- **Diagrama de *Venn:***



Conjuntos - União

- **União (reunião) dos Conjuntos:** o conjunto **P** é a união dos conjuntos **A** e **B**, se todos os elementos de **A** e **B**, <u>e apenas estes</u>, estiverem presentes em **P**.

$$P = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



Exemplos:

a) Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,4,6\}$, então $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$.

b) Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{1,4\}$, então $A \cup B = \{1,2,3,4\} = A$.

c) Se $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{4,5,6\}$, então $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Conjuntos - União

União de conjuntos - Considere os conjuntos abaixo:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } B = \{4, 5, 6\}$$

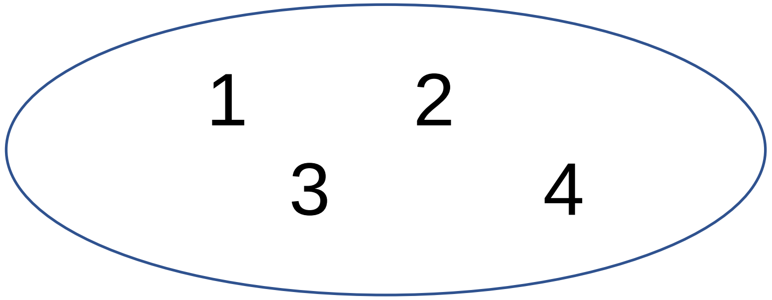
A união é representada pela junção dos elementos dos dois grupos e é dada pela letra **U:**

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

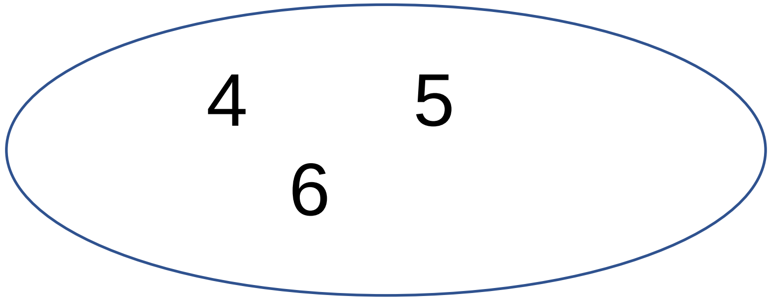
Conjuntos - União

União através de diagramas:

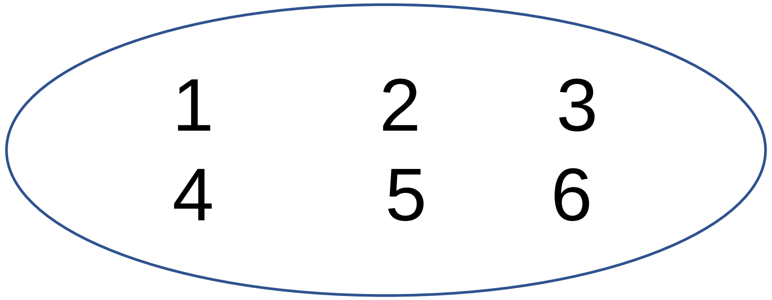
A



B



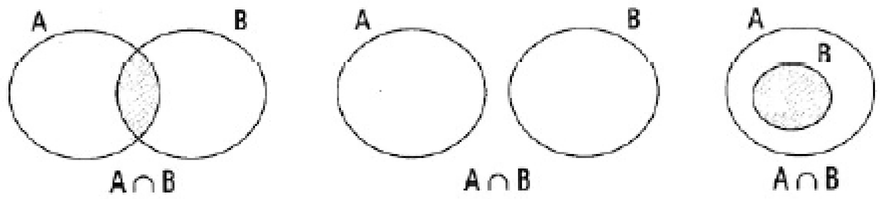
A **U** B



Conjuntos - Interseção

- **Interseção de conjuntos: P** é o conjunto interseção de **A** e **B**, se ele for composto por todos os elementos comuns de **A** e **B**, <u>ao mesmo tempo</u>.

$$P = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



a) Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,4,6\}$, então $A \cap B = \{2,4\}$.

b) Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{1,4\}$, então $A \cap B = \{1,4\} = B$.

c) Se $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{4,5,6\}$, então $A \cap B = \varnothing$. Nesse caso, A e B são chamados *conjuntos disjuntos*.

Conjuntos - Interseção

Interseção de conjuntos – consiste em selecionar os elementos em comum entre os conjuntos.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ e } B = \{5, 6, 7\}$$

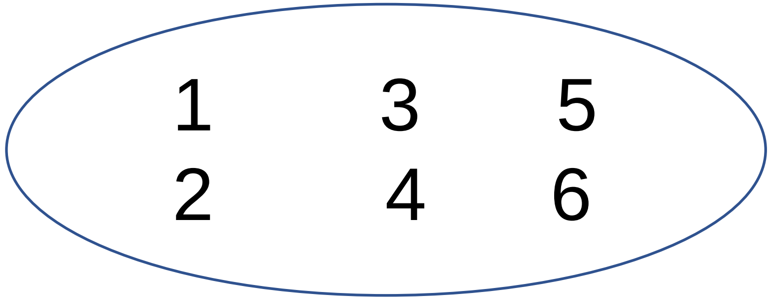
A interseção é representada pela seleção dos elementos comuns aos dois grupos e é dada pela letra ∩:

$$A \cap B = \{5, 6\}$$

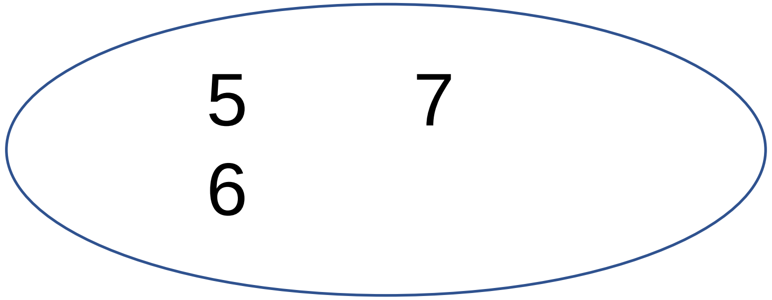
Conjuntos - Interseção

Interseção através de diagramas:

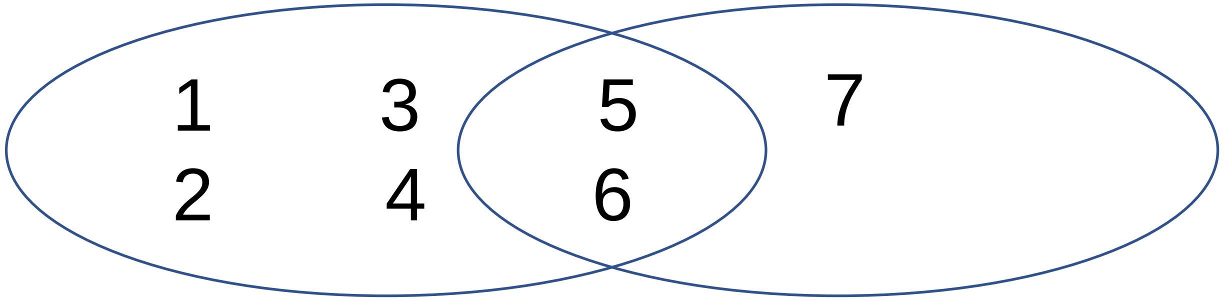
A



B



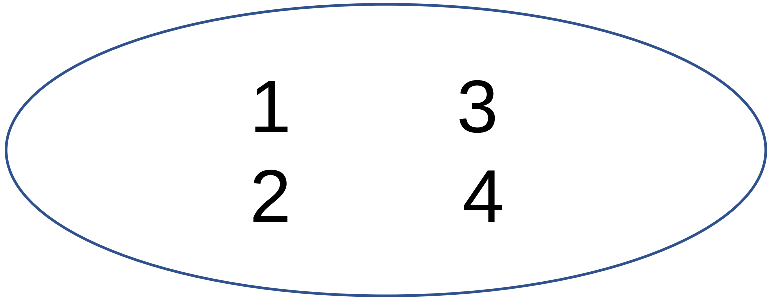
A ∩ B



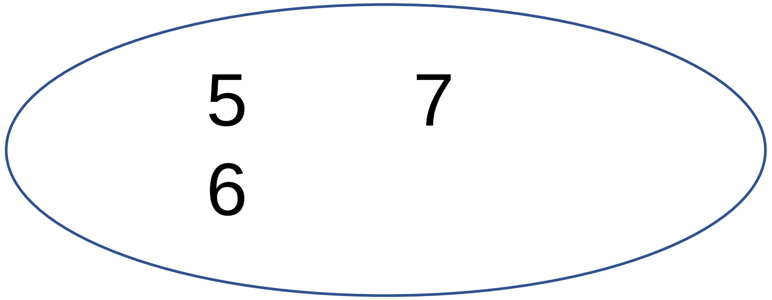
Conjuntos - Interseção

Vale destacar que se os conjuntos não possuírem elementos em comum, a intersecção será um conjunto <u>vazio</u>.

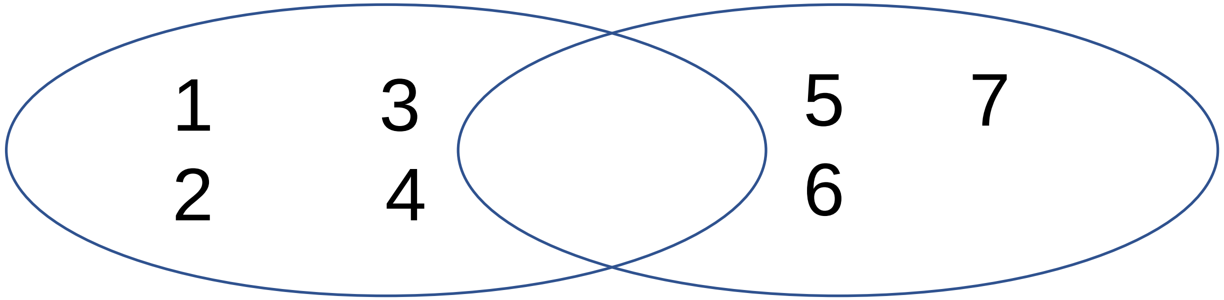
A



B



A ∩ B



Conjuntos – Interseção - Propriedades

Propriedades da intersecção:

1) A intersecção de um conjunto por ele mesmo é o próprio conjunto:

$$A \cap A = A$$

2) A propriedade comutativa é válida para a intersecção:

$$A \cap B = B \cap A$$

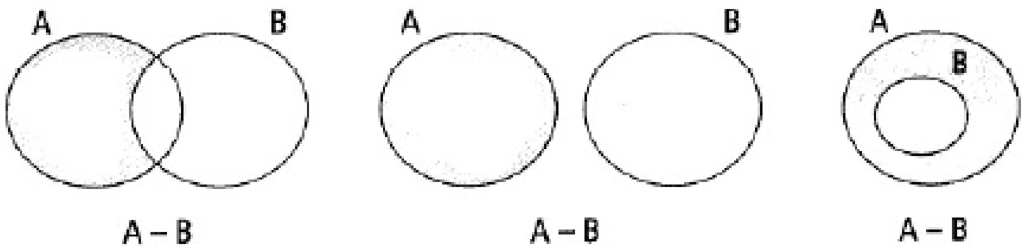
3) A propriedade associativa na intersecção é definida como:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Conjuntos - Diferença

- **Conjunto diferença: P** é o conjunto diferença de **A** e **B**, se ele for composto por todos elementos de **A** que <u>não são elementos</u> de **B**.

$$P = A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



Exemplo:

Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,4,6\}$, então $A - B = \{1,3\}$ e $B - A = \{6\}$.

Conjuntos – Propriedades

- **Propriedades**

União 1	$A \cup A = A$
União 2	$A \cup \varnothing = A$
União 3	$A \cup B = B \cup A$
União 4	$A \cup U = U$

Interseção 1	$A \cap A = A$
Interseção 2	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Interseção 3	$A \cap B = B \cap A$
Interseção 4	$A \cap U = A$

Diferença 1	$A - A = \varnothing$
Diferença 2	$A - \varnothing = A$
Diferença 3	$A - B \neq B - A$, em geral
Diferença 4	$U - A = A'$

Complementar 1	$(A')' = A$
Complementar 2	$\varnothing' = U$
Complementar 3	$U' = \varnothing$
Complementar 4	$(A \cup B)' = A' \cap B'$
Complementar 5	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Conjuntos Numéricos

Conjuntos numéricos – é uma reunião de números que possuem alguma característica em comum. Como exemplo: naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.

- Conjunto dos números naturais: todos os números **inteiros positivos** incluindo-se o **zero**.

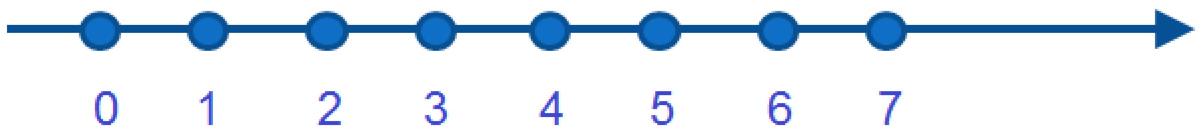
$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

O primeiro elemento é o **zero** e o conjunto é **infinito**.

Conjuntos Numéricos

Os conjuntos também podem ser representados geometricamente por meio de uma reta numerada.

Assim, o conjunto dos naturais seria representado como:



A formação da reta é feita escolhendo-se um ponto de origem, um intervalo fixo e uma orientação (normalmente da esquerda para a direita).

Conjuntos Numéricos

Subconjuntos pertencentes aos números naturais:

- Conjunto dos números naturais não nulos:

$$N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Obs: O asterisco (*) é indicativo da exclusão do número <u>zero</u> de um determinado conjunto.

- Conjunto dos números primos:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$$

- Outros conjuntos seriam: os conjuntos dos números <u>pares</u> (Np), <u>ímpares</u> (Ni), entre outros.

Conjuntos Numéricos

Propriedades:

- Os números naturais apresentam a propriedade do fechamento para a adição e para a multiplicação:
  - $1 + 1 = 2$
  - $1 \times 3 = 3$

$$\boxed{\forall m, n \in N, m + n \in N \ e \ m \times n \in N}$$

Obs: Essa propriedade pode ser válida para a subtração e para a divisão:

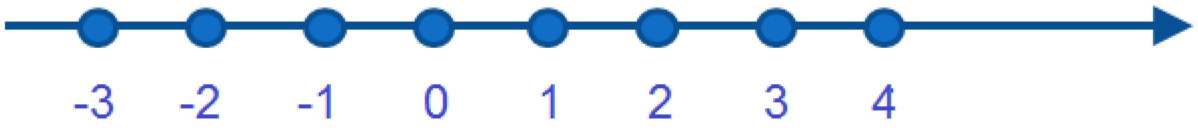
- $1 - 5 = -4$ --- não é válida

Conjuntos Numéricos

- <u>Conjunto dos números inteiros</u>: todos os números **inteiros positivos e negativos** incluindo-se o **zero**.

$$Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

O conjunto é **infinito** inferiormente e superiormente. Não existe primeiro e nem último elemento no conjunto dos números inteiros.



Conjuntos Numéricos

Subconjuntos pertencentes aos números inteiros:

- Conjunto dos números inteiros não nulos:

$$Z^* = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

- Conjunto dos números inteiros não negativos:

$$Z_+ = N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

- Outros conjuntos seriam: os conjuntos dos números inteiros positivos (Z_+^*), conjuntos dos números inteiros não positivos, entre outros.

Conjuntos Numéricos

Propriedades:

- Os números inteiros apresentam a propriedade do <u>fechamento</u> para a adição, a multiplicação e a subtração:
  - 1 + 1 = 2
  - 1 x 3 = 3
  - 1 – 5 = - 4

$$\boxed{\forall m, n \in Z, m + n \in Z;\ m \times n \in Z \text{ e } m - n \in Z}$$

Obs: Essa propriedade pode ser válida para a divisão:

Conjuntos Numéricos

- <u>Conjunto dos números racionais</u>: todos os números que podem ser expressos na forma de uma **fração**. O numerador e o denominador são números **inteiros**.

$$Q = \{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots, \pm\frac{p}{q}\}$$

Onde: $Q=\{\frac{p}{q} \mid p \in Z \text{ e } q \in Z^{*}\}$

Conjuntos Numéricos

- Conjunto dos números irracionais: todos os números que não podem ser expressos na forma de uma **fração**. Como exemplo, tem-se as dízimas não periódicas.

$$I = \{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{11}, \sqrt{113}, \ldots\}$$

Propriedades:

- Todas as dízimas não periódicas são irracionais;
- Todas as raízes inexatas são irracionais;
- A soma de um número racional com um número irracional.

Deve-se atentar para as operações.

Exemplo:

$\sqrt{2}$ x $\sqrt{2}$ é natural

Conjuntos Numéricos

- Conjunto dos números reais: são todos os números pertencentes aos conjuntos dos Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais.

Propriedades:

- Associativa: $(x+y)+z = x+(y+z)$ e $(x.y).z = x.(y.z)$;
- Comutativa: $x+y = y+x$ e $x.y = y.x$;
- Elemento neutro: $x+0 = 0+x = x$ e $x.1 = 1.x = x$;
- Simétrico: $x+(-x) = (-x)+x = 0$;
- Distributiva: $x.(y+z) = x.y + x.z$

Conjuntos Numéricos

- Obs: Nem todo número é um número real. Por exemplo:

$$\sqrt{-4},\ \sqrt{-8},\ \sqrt[4]{-1}$$

Conjuntos Numéricos

- **Números Naturais (N):**

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}.$$

- **Números Inteiros (Z):**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}.$$

Conjuntos Numéricos

- **Números Fracionários ou Racionais (Q) :**

Exemplos:

a) 2

b) -7

c) $\frac{2}{3}$

d) $0{,}6$

e) $1{,}37$

f) $0{,}222...$

g) $1{,}5999...$

h) $0{,}212121...$

i) $\sqrt{36}$

- **Números Irracionais (decimais Infinitos)(I):**

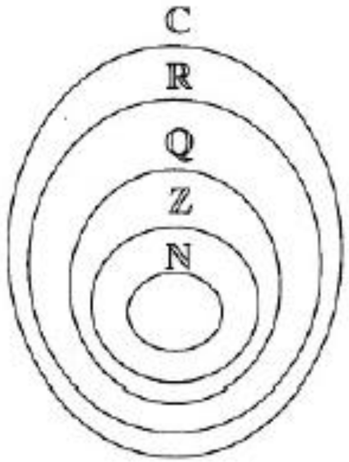
a) $\pi = 3{,}14159265...$ b) $\sqrt{2} = 1{,}4142135624...$ c) $e = 2{,}718281828...$

CEFET/RJ

Conjuntos Numéricos

- **Números Reais (R)**

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \text{ onde } \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$$



- **Números Complexos (C)**

São os números que não são reais, isto é, as raízes de números negativos.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Conjuntos Numéricos

- **Propriedades básicas**

•	Adição	$a+b$
•	Multiplicação	$a \times b$ ou $a \cdot b$
•	Subtração	$a-b$ ou $[a+(-b)]$
•	Divisão	a/b ou $a \cdot \frac{1}{b}$

Conjuntos Numéricos

Propriedades Estruturais em números Reais

- Fechamento

  Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $(a + b) \in \mathbb{R}$
  Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $(a \times b) \in \mathbb{R}$

- Propriedade comutativa

  $a + b = b + a$

  $a \times b = b \times a$

- Propriedade associativa

  $a + (b + c) = (a + b) + c$

  $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

- Propriedade distributiva

  $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

- Elemento neutro

  Na adição $a + 0 = a$

  Na multiplicação $a \times 1 = a$

- Existência de simétrico ou oposto

  $a + (-a) = 0$ Todo número real tem oposto.

- Existência de inverso ou recíproco

  Se $a \neq 0$, então $a \times \frac{1}{a} = a \times a^{-1} = 1$.

CEFET/RJ

Conjuntos – Intervalos Numéricos

- **São Subconjuntos de R, determinados por desigualdades.**

  - Intervalo **aberto** de **a** a **b**, denotado por **(a, b)**, é o conjunto de todos os números reais, tais que **a < x < b**.

  - Intervalo **fechado** de **a** a **b**, denotado por **[a, b]**, é o conjunto de todos os números reais, tais que **a ≤ x ≤ b**.

  - Intervalo **semi-aberto** à esquerda de **a** a **b**, denotado por **(a, b]**, é o conjunto de todos os números reais, tais que **a < x ≤ b**.

  - Intervalo **semi-aberto** à direita de **a** a **b**, denotado por **[a, b)**, é o conjunto de todos os números reais, tais que **a ≤ x < b**.

CEFET/RJ

Conjuntos – Intervalos Numéricos

- Outros intervalos:

a) $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty) = [0, +\infty[$

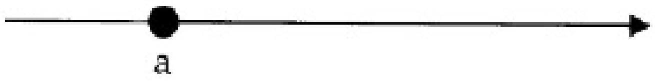
b) $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty) =]\, 0, +\infty[$

c) $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0] =]-\infty, 0]$

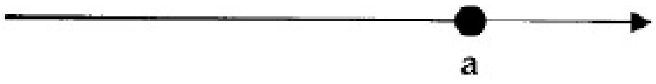
d) $\mathbb{R}_-^* = (-\infty, 0) =]-\infty, 0[$

e) $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) =]-\infty, +\infty[$

f) $[a, +\infty) = [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$



g) $(-\infty, a] =]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



h) $(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

i) $(-\infty, a) =]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

CEFET/RJ

Conjuntos – Intervalos Numéricos

Intervalos numéricos: conjunto que contém cada número real entre dois extremos indicados e, possivelmente, os próprios extremos.

Notações de um intervalo: um intervalo numérico pode ser simbolizado por:

- Colchetes “[...]” – quando os extremos pertencem ao intervalo;
- Parênteses “(...)” ou colchetes invertidos “]...[” – quando os extremos não pertencem ao intervalo.

Conjuntos – Intervalos Numéricos

Exemplo: Considere dois números reais "a" e "b", tal que $a \leq b$. O intervalo $I = (a,b]$ ou $]a,b]$ representa o conjunto X dos números, pertencentes aos reais, tais que: $a < X \leq b$. Vale destacar que a não pertence ao intervalo.

Por meio da reta numerada esse conjunto seria representado como:

Onde o círculo "vazio" indica que o extremo não pertence ao intervalo e o

Conjuntos – Intervalos Numéricos

Tipos de intervalos: dados os números reais "a" e "b", tal que $a \leq b$, "x" pertence ao intervalo e "c" é o comprimento do intervalo e pode ser definido por $c = b - a$. Os intervalos podem ser classificados como:

- Intervalo fechado e de comprimento finito:

$$[a,b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$$

- Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita de comprimento finito:

$$[a,b[= [a,b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$$

Conjuntos – Intervalos Numéricos

- Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de comprimento finito:

$$(a,b] =]a,b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$$

- Intervalo aberto de comprimento finito:

$$]a,b[= (a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$$

- Intervalo aberto à direita de comprimento infinito:

$$]-\infty,b[= (-\infty,b) = \{x \in R \mid x < b\}$$

Conjuntos – Intervalos Numéricos

- Intervalo fechado à direita de comprimento infinito:

$$]-\infty,b] = (-\infty,b] = \{x \in R \mid x \leq b\}$$

- Intervalo fechado à esquerda de comprimento infinito:

$$[a,+\infty) = [a,+\infty[= \{x \in R \mid a \leq x\}$$

- Intervalo aberto à esquerda de comprimento infinito:

$$]a,+\infty[= (a,+\infty) = \{x \in R \mid x > a\}$$

Conjuntos – Intervalos Numéricos

- Intervalo aberto de comprimento infinito:

$$]-\infty,+\infty[\, = (-\infty,+\infty) = R$$

- Intervalo fechado de comprimento nulo:

$$a = b = \{a\}$$

Conjuntos – Intervalos Numéricos

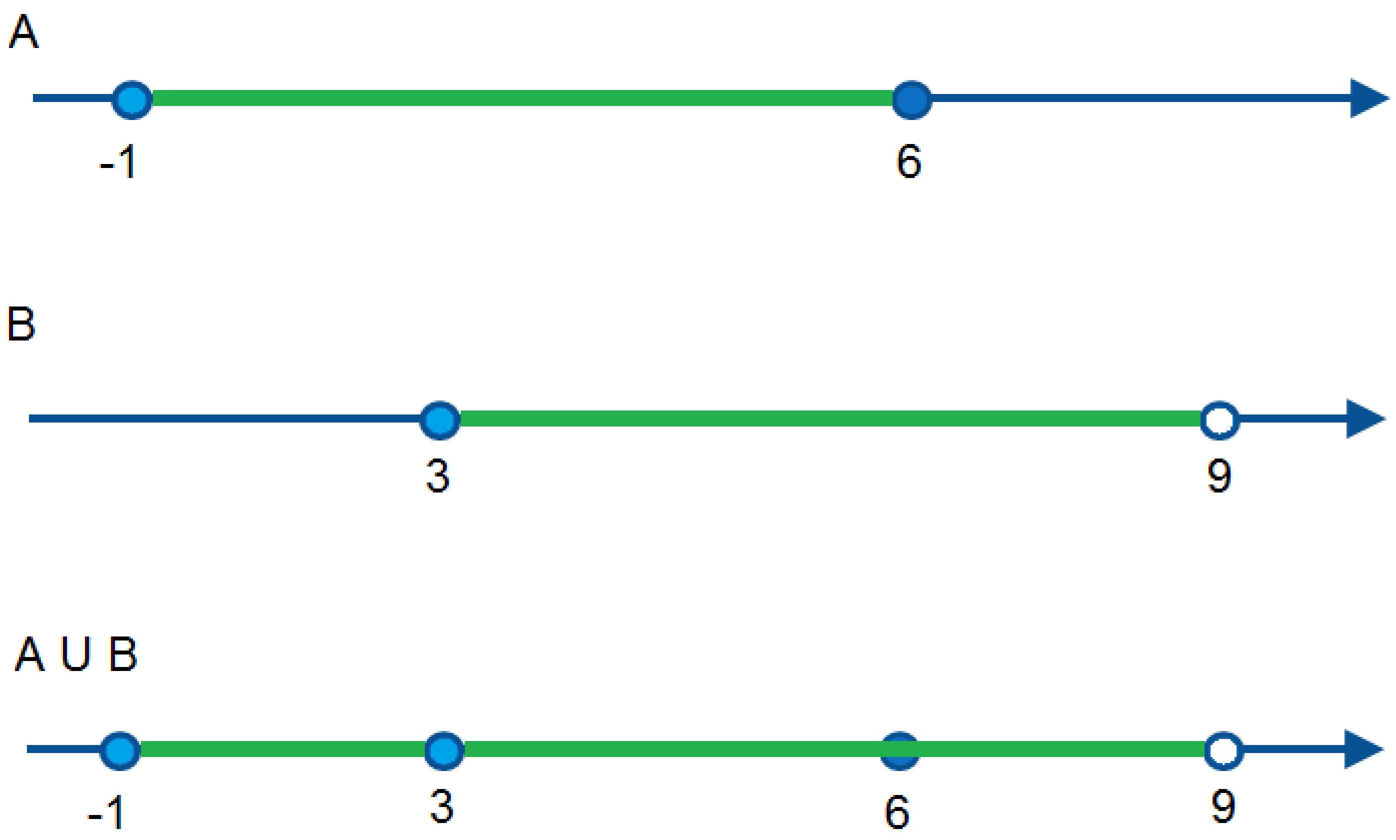
União e intersecção de intervalos: como os intervalos também são conjuntos, é possível realizar as operações de união e intersecção com eles de maneira gráfica.

Sejam A = [-1, 6] e B = [3, 9).

- $A \cup B$
- $A \cap B$

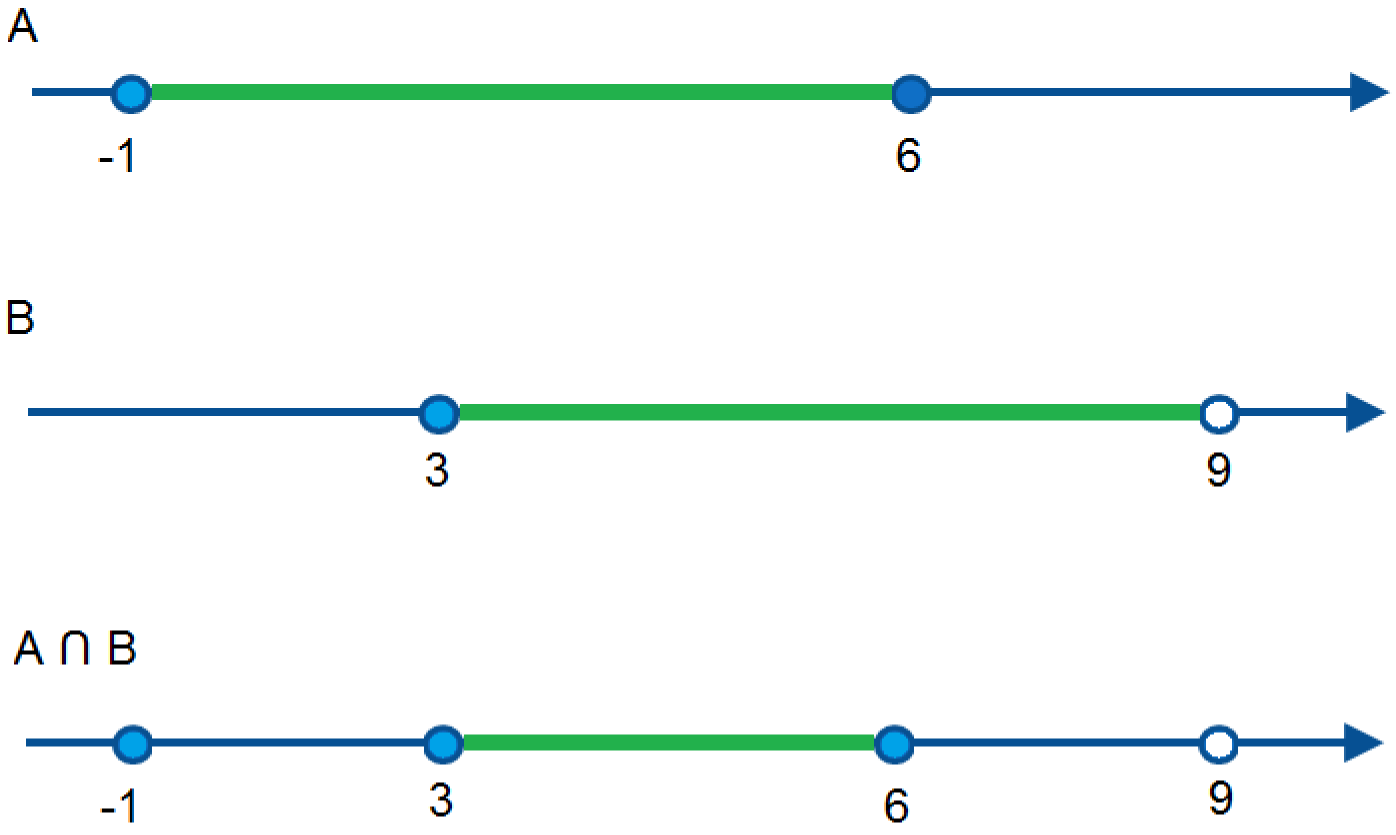
Conjuntos – Intervalos Numéricos

- A U B = [-1, 9) = [-1, 9[



Conjuntos – Intervalos Numéricos

- $A \cap B = [3, 6]$



Desigualdades

- **Desigualdades:**

$a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \leq b$ são chamadas *desigualdades*.

- **Propriedades**
  - Se $a < b$ *e* $b < c$, então $a < c$.
    Exemplo: $3 < 6$ e $6 < 14$, então $3 < 14$.
  - Se $a > b$ *e* $b > c$, então $a > c$.
    Exemplo: $6 > 3$ e $3 > 2$, então $6 > 2$.
  - Se $a < b$, então $a + c < b + c$.
    Exemplo: $-1 < 2$, então $(-1) + (-3) < 2 + (-3)$, isto é, $-4 < -1$.

Desigualdades - Propriedades

- Se $a > b$, então $a + c > b + c$.

  Exemplo: $2 > -1$, então $2 + (-3) > (-1) + (-3)$, isto é, $-1 > -4$.

- Se $a < b$ *e* $c < d$, então $a + c < b + d$.

  Exemplo: $4 < 7$ e $-4 < -2$, então $4 + (-4) < 7 + (-2)$, isto é, $0 < 5$.

- Se $a > b$ *e* $c > d$, então $a + c > b + d$.

  Exemplo: $7 > 4$ e $-2 > -4$, então $7 + (-2) > 4 + (-4)$, isto é, $5 > 0$.

- Se $a < b$ *e* $c > 0$, então $ac < bc$.

  Exemplo: $-5 < -3$, então $(-5) \times 2 < (-3) \times 2$, isto é, $-10 < -6$.

- Se $a > b$ *e* $c > 0$, então $ac > bc$.

  Exemplo: $-3 > -5$, então $(-3) \times 2 > (-5) \times 2$, isto é, $-6 > -10$.

- Se $a < b$ *e* $c < 0$, então $ac > bc$.

  Exemplo: $-5 < 1$, então $(-5) \times (-2) > 1 \times (-2)$, isto é, $10 > -2$.

- Se $a > b$ *e* $c < 0$, então $ac < bc$.

  Exemplo: $1 > (-5)$, então $1 \times (-2) < (-5) \times (-2)$, isto é, $-2 < 10$.

- Se $0 < a < b$ *e* $0 < c < d$, então $ac < bd$.

  Exemplo: $0 < 4 < 7$ e $0 < 8 < 9$, então $4 \times 8 < 7 \times 9$, isto é, $32 < 63$.

- Se $a > b > 0$ *e* $c > d > 0$, então $ac > bd$.

  Exemplo: $7 > 4 > 0$ e $9 > 8 > 0$, então $7 \times 9 > 4 \times 8$, isto é, $63 > 32$.

CEFET/RJ

Obrigado pela Atenção

CEFET/RJ