

1ª AVALIAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

1. (1,4 pt) A matriz dada representa uma matriz aumentada de um sistema linear.

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & -4 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

a) Escreva o sistema linear correspondente. (0,3 pt)

b) Resolva o sistema linear utilizando qualquer método válido (introduza parâmetros livres se necessário). (0,3 pt)

c) Escreva o sistema linear encontrado no item (a) na forma matricial $A\vec{x} = \vec{b}$, onde \vec{x} é a matriz coluna referente às incógnitas e \vec{b} é a matriz coluna referente aos termos constantes de cada equação. Depois, calcule $\det(A)$. (0,3 pt)

d) Sem tentar calcular explicitamente a inversa da matriz A , encontrada no item (c), responda: a matriz A é invertível? Explique como você chegou a esta conclusão. (0,2 pt)

e) Calcule a inversa da matriz A , caso A seja invertível, ou mostre explicitamente, também por meio da tentativa de cálculo da inversa, que ela não é invertível. (0,3 pt)

2. (1,4 pt) Usando as matrizes abaixo, calcule $(E^T + 3D)A$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. (1,4 pt) Supondo que as inversas envolvidas existam, prove as igualdades a seguir:

a) $C(DC)^{-1}C = D^{-1}C$ (0,5 pt)

b) $(C^{-1} + D^{-1})^{-1} = C(C + D)^{-1}D$ (0,5 pt)

c) $(C + DD^T)^{-1}D = C^{-1}D(I + D^T C^{-1}D)^{-1}$ (0,4 pt)

4. (1,4 pt) Verifique que $\det(A) = \det(A^T)$.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ (0,7 pt)

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (0,7 pt)

5. (1,4 pt) Encontre o determinante da matriz abaixo usando qualquer método válido.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$