

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA MECATRONICA**



**TRABAJO DE INVESTIGACIÓN**

**“ESTABILIZACIÓN DEL PÉNDULO INVERTIDO DE ALTURA VARIABLE BASADO EN  
ESTABILIDAD ENTRADA-ESTADO Y CONTROL POR MODO DESLIZANTE BAJO  
CONTACTO UNILATERAL Y SATURACIÓN DE ENTRADA”**

**PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE BACHILLER EN CIENCIAS CON  
MENCIÓN EN:**

**INGENIERÍA MECATRÓNICA**

**ELABORADO POR:**

**GABRIEL ENRIQUE GARCÍA CHÁVEZ**

**ASESOR:**

**IVÁN ARTURO CALLE FLORES**

**LIMA-PERÚ**

**2018**



## **DEDICATORIA**

A mis padres Gabriel e Inés, a mi hermana Dayana, a los profesores e investigadores que me apoyaron en la elaboración del trabajo, les dedico la presente investigación.

## TABLA DE CONTENIDO

<b>PRÓLOGO</b> .....	1
<b>CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN</b> .....	3
1.1. ANTECEDENTES REFERENCIALES.....	4
1.2. PLANTEAMIENTO DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA.....	5
1.3. OBJETIVO (GENERAL Y ESPECÍFICOS).....	7
1.4. HIPÓTESIS (GENERAL Y ESPECÍFICAS).....	8
 <b>CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO</b> .....	10
2.1. PUNTO CAPTURA .....	10
2.2. PÉNDULO INVERTIDO LINEAL.....	11
2.3. PÉNDULO INVERTIDO NO-LINEAL .....	13
2.4. CONTACTO UNILATERAL Y PÉNDULO INVERTIDO DE ALTURA VARIABLE .....	17
2.5. ENERGÍA ORBITAL.....	22
2.6. ESTABILIDAD ENTRADA-ESTADO ISS.....	23
2.7. CONTROL POR MODO DESLIZANTE .....	28
2.8. FUNCIONES BARRERAS .....	32
 <b>CAPÍTULO III: CÁLCULOS Y/O APLICACIONES Y OBTENCIÓN DE RESULTADOS</b> ....	34
3.1. ANÁLISIS EN EL PLANO DE FASE Y FUNCIONES BARRERAS .....	34
3.2. ISS DEL PÉNDULO INVERTIDO DE ALTURA VARIABLE .....	40
3.3. CONTROL POR MODO DESLIZANTE .....	43
3.4. SIMULACIONES .....	50
 <b>CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS</b> .....	54
4.1. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN.....	54
4.2. REGION DE ATRACCIÓN.....	57
4.3. ZONAS PARA EL PUNTO CAPTURA – REGIÓN DE CAPTURA.....	60
4.4. CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS.....	61
 <b>CONCLUSIONES</b> .....	63
<b>RECOMENDACIONES</b> .....	65

<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>67</b>
<b>ANEXO.....</b>	<b>69</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Péndulo Invertido Lineal Más Rueda Reacción .....	10
Figura 2.2: Modelo reducido de un robot humanoide bípedo arbitrario.....	11
Figura 2.3. Péndulo Invertido No-Lineal .....	14
Figura 2.4. a) Planificación de trayectorias en caminata usando Péndulos. b) Modelo de Péndulo Invertido de Altura Variable. ....	17
Figura 2.5. Plano de fase del sistema (23).....	26
Figura 2.6. Chattering producido cerca de la superficie $\sigma(x) = 0$ .....	31
Figura 3.1: Controlador por Modo Deslizante para las componentes $T$ en el eje $x$ y $z_c$ en el eje $y$ . ....	47
Figura 3.2. Flujo del procedimiento para realizar controlador del Péndulo Invertido de Altura Variable. ....	49
Figura 3.3. Situación inicial de Empuje y Recuperación.....	52
Figura 3.4. Gráficas de simulación del Péndulo Invertido de Altura Variable .....	53
Figura 4.1. Posiciones en $x$ y $z$ del sistema en los primeros 15s de tiempo. ....	55
Figura 4.2. Velocidades en $x$ y $z$ del sistema. ....	55
Figura 4.3. Señal de control y Fuerza de Reacción del sistema. ....	56
Figura 4.4. Superficie deslizante y su convergencia a cero. ....	57
Figura 4.5. Valores en el plano sagital de los físicamente posibles Punto Capturas.....	61

## PRÓLOGO

Esta investigación se ubica en la línea de las Ciencias de Ingeniería, con el propósito de estudiar un método de control no lineal para la estabilización del Péndulo Invertido de Altura Variable, modelo que representa a los robots caminantes para mantener el equilibrio al empujar un robot. El presente trabajo abarca cuatro capítulos más conclusiones y recomendaciones con detalles respaldados por las referencias bibliográficas y por el rigor científico-matemático usado en la investigación.

En el Primer Capítulo, la introducción, se detalla el estado del arte del problema de investigación, los objetivos y las hipótesis del presente trabajo, enfocándonos en un tema importante en la literatura: el Punto Captura, el lugar donde el robot debe poner sus pies para mantener el equilibrio y evitar la caída.

En el Segundo Capítulo se muestra el marco teórico, abarcando los conceptos técnicos investigados en los últimos años que permiten desarrollar adecuadamente el presente estudio, además de presentar fundamentos teóricos existentes sobre el sistema dinámico a controlar.

En el Tercer Capítulo se describe el análisis del sistema, se encuentra sus límites de control sobre los cuáles es posible actuar, además de mostrar algunas de sus características y diseñar la ley de control que estabilizará el sistema, donde la fuerza de reacción al suelo es la variable de entrada, considerando contacto unilateral y su saturación respectiva. Además, se mostrará la simulación de un caso particular de empuje.

En el Cuarto Capítulo se deriva la región de atracción del controlador, es decir, la región en la que estabiliza el sistema, a partir de ello, se encuentra las zonas del

plano sagital que son un Punto Captura, para una velocidad de empuje inicial dada. Finalmente se contrastan las hipótesis planteadas al inicio del trabajo de Investigación.

Posterior a estos capítulos, se presentan las respectivas Conclusiones, Recomendaciones y Referencias Bibliográficas utilizadas para la elaboración del presente Trabajo de Investigación.

**Palabras claves:** Péndulo Invertido de Altura Variable, Punto Captura, Plano de Fase, Control por Modo Deslizante, Humanoides, Estabilidad Entrada-Estado.



## **CAPÍTULO I**

### **INTRODUCCIÓN**

Mantener el equilibrio cuando un robot se empuja hacia adelante es fundamental para los robots caminantes. Un tema esencial en la literatura es el Punto Captura, el lugar donde el robot debe poner sus pies para mantener el equilibrio. En este trabajo, estudiamos el péndulo invertido de altura variable como modelo para un robot empujado. Encontramos todos los puntos y los posibles lugares que pueden ser un Punto Captura para las velocidades iniciales del centro de masa y las limitaciones del actuador dadas. También desarrollaremos un controlador para alcanzar ese Punto captura, usando la fuerza de reacción al suelo como variable de entrada. Consideramos asimismo el contacto unilateral y el valor máximo que puede tomar la fuerza de reacción del suelo. Primero, obtenemos las condiciones necesarias que deben cumplirse para poder alcanzar el equilibrio. Luego presentamos una ley de control para estabilizar el sistema y mostramos que la región de atracción es equivalente a la región donde físicamente se puede alcanzar el equilibrio. Finalmente discutimos brevemente los lugares físicos donde se puede lograr el equilibrio.

La Recuperación de Empuje (Recuperación de Empuje en inglés) en los últimos años es un tema importante en el estado del arte de los robots caminantes. Caminar en robótica es en general difícil, hay muchos problemas por resolver actualmente, por ejemplo, los robots debe llevar todo sus actuadores y fuentes

alimentación, que normalmente son pesados y grandes. La mayoría de los problemas se deben a que los robots andantes son sistemas de control subactuados [1]. Un robot que camina con las piernas debe mantener el equilibrio para evitar daños al caer después de un empujón, por lo que debe recuperar su estabilidad para permanecer de pie. Un tema estudiado en la literatura es Punto Captura, el punto en el piso donde un robot con piernas debe poner su pie para recuperar su estabilidad. Asimismo, la Región de Captura es el conjunto de todos los Puntos Captura.

### **1.1. ANTECEDENTES REFERENCIALES**

Todos estos temas se estudiaron bajo la consideración de suficiente fricción para evitar deslizamientos sobre el suelo del robot, y muchos de ellos tampoco tienen en cuenta las restricciones cinemáticas de los humanoides. También se ha investigado en la integración del Punto Captura y la recuperación en el robot completo. Los Puntos captura no solo funcionan en pisos planos y pueden ser generalizados a terrenos irregulares como Ramos et. al. hicieron en [2]. Solo hay un punto captura en el plano sagital si restringimos el centro de masa a una trayectoria lineal, o una altura constante, esa es la forma en que se ha realizado una gran cantidad de investigaciones de locomoción [3] [4]. El punto captura ha sido un tópico importante en los últimos diez años, especialmente por su conexión con el antiguo péndulo invertido lineal. Sin embargo, esto es muy restrictivo para la locomoción del robot, por lo que debemos evitar la trayectoria lineal clásica del centro de masa y generalizar por a otras trayectorias. Algunas investigaciones realizadas en [5] analizan la energía orbital no solo para el LIP, sino también para cualquier trayectoria con la forma  $z = f(x)$ . La integración del centro de masa no lineal y el Punto Captura se realizó en [2], donde los autores establecieron trayectorias

cuadráticas, encontrando incluso más puntos de captura para el péndulo invertido no lineal. Es posible mostrar que, con algún cambio de variables, que este sistema es el mismo sistema que mostró el Péndulo Invertido de Altura Variable en [6]. En esta investigación Koolen et. al. aplicando la energía orbital no lineal de [5] a las trayectorias cúbicas del centro de masa y teniendo en cuenta el contacto unilateral, desarrollaron un controlador solo-positivo que estabilizan el Péndulo Invertido de Altura Variable en toda la región donde es físicamente posible estabilizar el sistema. El contacto unilateral considera la fuerza de reacción solo-positiva, porque en el mundo real es imposible jalar hacia el suelo en condiciones normales. Además, en la discusión mencionan los dos principales problemas que debemos tratar ahora en el control del control de Péndulo Invertido de Altura Variable: las restricciones cinemáticas y los límites de actuación no han sido tomados en cuenta.

## **1.2. PLANTEAMIENTO DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA**

El problema que se estudiará en el presente trabajo de investigación es el control de un Péndulo Invertido de Altura Variable bajo saturación de entrada, el cual es resuelto con un análisis del comportamiento del sistema en el plano de fase usando dos variables reducidas que representan todo el sistema y un control por modo deslizante sobre dicho plano. Esto se considera la problemática debido a que en las investigaciones recientes se ha cubierto el tema considerando contacto unilateral, pero se ha mencionado que uno de los problemas abiertos ahora es la saturación de entrada.

La justificación del trabajo de investigación radica en que estamos ya en la era digital, robots caminantes son una realidad, y con estos son realidad también las caídas y daños que podrían recibir estos debido a un empuje. La

empresa Boston Dynamics de Google ha mostrado videos de los robots humanoides como el Atlas realizando maniobras y movimientos impresionantes y difíciles de realizar, sin embargo, no es fácil encontrar información técnica sobre cómo lo hacen, cómo sus controladores están diseñados, o sobre cómo físicamente dichos robots están estructurados, puesto que toda esa información es propiedad neta y propia de la empresa. En particular se busca la información de cómo un robot se estabiliza después de un empuje, una fuerza aplicada a su estructura que la desestabiliza.

Sin embargo, se tiene a disposición pública, o al menos accesible a través de pago, las publicaciones de los laboratorios de robots humanoides y locomoción tops del mundo, entre ellos, el Robot Locomotion Group, sobre avances y mejoras en el tema de Recuperación de Empuje. Como se mencionó anteriormente en la introducción, la realidad problemática en las investigaciones top más recientes del mundo es que no se tendrá siempre fuerza de reacción/actuación arbitraria en las piernas de un robot humanoide caminante, por lo que se debe resolver este problema mencionado.

La importancia del presente trabajo de investigación abarca el problema anteriormente mencionado, se resuelve parcialmente dicha problemática, saturando una variable que depende de la fuerza de reacción del suelo, y así se puede tener una estimación de esta fuerza, sin excederla. De esta manera, el trabajo es importante porque muestra un método para estabilizar el modelo reducido de un humanoide ante un empuje considerando una fuerza máxima de reacción en el suelo, y de esta manera, evitar la caída del robot que podría potencialmente causar un fuerte daño a la estructura o los dispositivos del mismo.

En esta investigación mostramos un análisis para resolver el problema del límite del actuador, dando un cambio de coordenadas para reducir el sistema de 4 a 2 variables. Mostramos que si estas 2 variables son estables, entonces todo el sistema es estable y se logra el equilibrio. También mostraremos una ley de control basadas en modo deslizante, la cual controla en toda la región posible donde la estabilización puede realizarse bajo la restricción que mostramos.

### 1.3. OBJETIVO (GENERAL Y ESPECÍFICOS)

#### 1.3.1. Objetivo General:

- Estabilizar el Péndulo Invertido de Altura Variable mediante la fuerza de reacción producida por la base del péndulo considerando contacto unilateral y Saturación parcial de Entra y usando de control por modo deslizante.

Variables Dependientes: Posición y velocidad del Péndulo.  $x, z, \dot{x}, \dot{z}$

Variable Independiente: Fuerza de la base (señal de control):  $u$

#### 1.3.2. Objetivos Específicos:

- Encontrar un cambio de variable donde se pueda realizar un análisis de estabilidad simple y con intuición geométrica.
- Entender el comportamiento del sistema bajo aplicación de fuerza de reacción de fuerza y bajo actuación cero en el plano de fase reducido.
- Encontrar una superficie en el espacio de estado sobre la cual las variables al estar restringidas en ellas, se mantengan estables y sea adecuada bajo la aplicación de alguna ley de Control por Modo Deslizante.

- Diseñar la ley de control que incluso al ser restringida a tomar valores solo positivos y saturadas, es decir, tomar valores menores a uno máximo, dirijan las variables de estado a la superficie anterior mencionada y estabilicen el sistema.
- Verificar que la ley de control estabilice al sistema bajo las condiciones planteadas en toda la región donde es físicamente posible alcanzar la estabilidad usando Funciones Barrera.

#### **1.4. HIPÓTESIS (GENERAL Y ESPECÍFICAS)**

##### **1.4.1. Hipótesis General:**

- El controlador diseñado en base a Control por Modo Deslizante logrará la estabilización del Péndulo Invertido de Altura Variable bajo las condiciones de contacto unilateral y saturación de entrada en toda la región donde es físicamente posible controlar.

##### **1.4.2. Hipótesis Específicas:**

- Existe un cambio de variables que reducen el sistema de cuatro, a al menos dos donde el sistema se puede analizar en el plano de fase y el sistema reducido es estable en el sentido de Estabilidad Entrada-Estado (ISS).
- Existe alguna superficie en el plano de fase reducido que es estable en la cual se puede aplicar la estrategia de control conocida como Control por Modo Deslizante.
- Es posible cambiar los parámetros de control, incluso hacerlos variables en función de los estados, para lograr la estabilidad bajo contacto unilateral y saturación de entrada.

- Se puede usar Funciones Barrera para mostrar que el sistema es estable con el controlador realizado en toda la región donde es físicamente posible estabilizar.

## **CAPÍTULO II**

### **MARCO TEÓRICO**

En este capítulo exploraremos los conceptos necesarios para el desarrollo del trabajo de investigación presente y así cumplir con los objetivos mencionados y verificar las hipótesis planteadas. Estos conceptos involucran tanto temas de hace más de 20 años, cuando Recuperación de Empuje empezó a ser un tema de importancia dentro del marco de los robots humanoides cuando ya se habían desarrollado algoritmos y estrategias de control para que estos puedan caminar, como también temas del estado del arte actual, los cuales son investigados a nivel mundial en laboratorios orientados a caminata y locomoción de robots autónomos.

#### **2.1. PUNTO CAPTURA.**

El Punto Captura fue estudiado por Jerry Pratt en 2006, con el objetivo de analizar modelos y definir una línea de investigación sobre el tema de, como se menciona en [7], “When and where to take a step” (Cuándo y dónde dar un paso). Se parte principalmente de la base de que los robots humanoides, al estar inmersos en un ambiente humano, están sujetos a posibles caídas como lo estamos todos. Es casi imposible que se detecten perfectamente todos los objetos de los alrededores, y siempre existe la posibilidad que se tropiecen con algún objeto no detectado, de manera similar en la que nosotros fallamos. Nosotros estamos adaptados para poder recuperarnos de una caída



En dicho artículo científico se definen los conceptos de Punto Captura y Región de Captura. El primero es definido como “un punto en el suelo donde el robot puede dar un paso para llevarse a sí mismo a un estado de reposo” [7]. La Región de Captura es “la colección de todos los puntos de captura” [7].

Dado que los robots humanoides suelen tener varios grados de libertad, son altamente no lineales, y están sujetos a fuerzas externas difíciles de modelar o calcular, como fricción o contacto unilateral, su estudio en general es difícil. Por esta razón se suele analizar los Punto Captura en los modelos simplificados de los humanoides, por ejemplo, el Péndulo Invertido Lineal, para el cual, al ser un modelo extremadamente simple, solo existe un Punto Captura en el plano Sagital. Los seres humanos para variar la velocidad de su centro de masa antes un empuje suelen rotar los brazos rápidamente, por lo que se puede considerar también el llamado “Linear Inverted Pendulum Plus Flywheel Model” (Péndulo Invertido Lineal Más Rueda Reacción) [7].

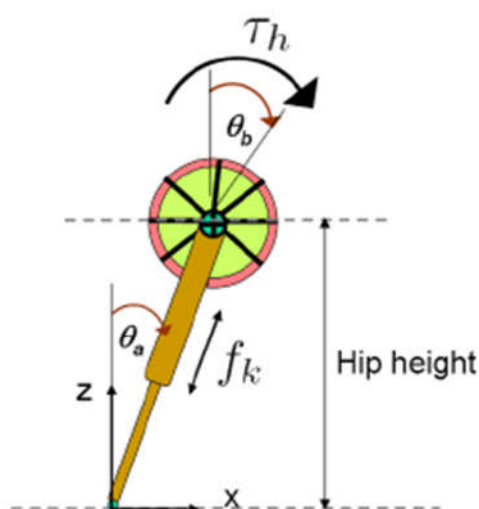


Fig. 1. Abstract model of a biped in the single support phase with a flywheel body and massless legs. The swing leg is not shown. The two actuators of the biped are located at the flywheel center (also the CoM of the biped) and the leg.

Fig. 2.1: Péndulo Invertido Lineal Más Rueda Reacción mostrado en [7]

## 2.2. PÉNDULO INVERTIDO LINEAL.

Con el objetivo de realizar planificación de movimiento para un robot humanoide, S. Kajita define el Modo de Péndulo Invertido Lineal en [3]. De esta manera desarrolla un esquema de control rústico para los bípedos en terreno no plano. Kajita en su investigación presenta un control por restricciones a un robot ideal para que se mueva en línea recta y tenga momento angular constante. Esto reduce la dinámica del robot a una lineal, lo cual permite facilidad en el entendimiento y la manipulación del robot, en especial para caminata.

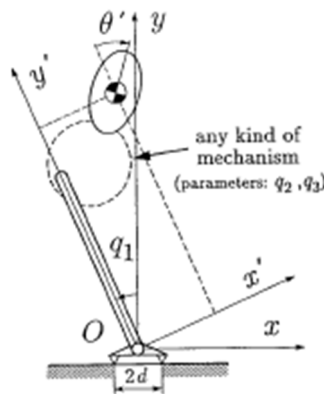


Fig.1 Generalized biped robot

Fig. 2.2: Modelo reducido de un robot humanoide bípedo arbitrario como se presenta en [3]

Se muestra a continuación algunos detalles importantes obtenidos en [3] Después de realizar la dinámica del robot se define tiene la siguiente ecuación:

$$m(y\ddot{x} - x\ddot{y}) + I\ddot{\theta} = u_1 + mgx \quad (1)$$

Con:

$u_1$ : Torque del tobillo

$x$ : Componente horizontal en coordenadas globales

$y$ : Componente vertical en coordenadas globales

$m$ : Masa del bípido.

$\theta$ : Valor angular cuya derivada es el momento angular.

$I$ : Momento de inercia

$g$ : Aceleración de la gravedad (actúa en eje  $y$ )

Esto de hecho, funciona para cualquier estructura con la forma de la Fig. 2.2. En particular, para el Péndulo Invertido Lineal, se tiene que el movimiento del centro de masa está restringido o sujeto a una línea horizontal y una velocidad angular constante, es decir:

$$y = kx + y_H \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \omega_c \quad (3)$$

Derivando las ecuaciones (2), (3) y reemplazando estas en (1) tenemos la ecuación que gobierna el Péndulo Invertido Lineal:

$$\ddot{x} = \frac{g}{y_H} x + \frac{1}{my_H} u_1 \quad (4)$$

Observamos que cuando  $u_1 = 0$  tenemos dos eigenvalues del sistema, los cuales son:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{y_H}} \quad (5)$$

El autovalor positivo debe ser eliminado, puesto que caso contrario, tendremos una dinámica inestable. Esto se logra cuando inicializamos su

autovector o coeficiente en 0. Para esto se necesita que las condiciones iniciales cumplan:

$$x_{CP} = -\dot{x}_0 \sqrt{\frac{y_H}{g}} \quad (6)$$

Este es el único Punto Captura para el Péndulo Invertido Lineal, vemos que mientras mayor es la velocidad inicial con la que es lanzado, mayor será la distancia necesaria dónde el robot deberá estirar su pie.

### 2.3. PÉNDULO INVERTIDO NO-LINEAL.

La restricción de mantener el centro de masa en una línea recta es, en la práctica, muy limitante, ya que se suele hacer realimentaciones de estados que pueden requerir alta energía, ser ineficientes, y ser antinaturales en el movimiento o en la estabilización ante un empuje. Por estas razones se ha investigado en [5, 2] la posibilidad de generalizar las trayectorias lineales del centro de masa a funciones arbitrarias. El trabajo orientado a Punto Captura se realizó en [2], donde Ramos et. al. definieron el Péndulo Invertido No-Lineal en 2D, donde el movimiento en la vertical del centro de masa se restringe a una curva  $z = z(x)$ , con la base fija y con momento angular constante.

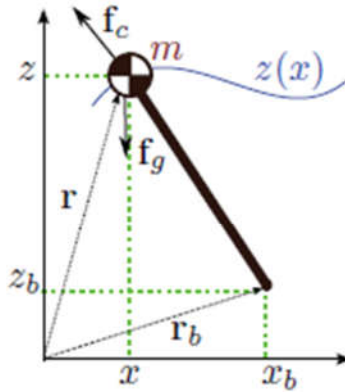


Fig. 2: Nonlinear Inverted Pendulum (NIP) in 2D, with fixed base and motion constrained to the curve  $z(x)$ .

Fig. 2.3. Péndulo Invertido No-Lineal como aparece en [2].

Los autores exponen algoritmos numéricos en los que, dada una trayectoria, se enumeran los Puntos Captura y las trayectorias del centro de masa respectiva, esta vez, a diferencia de trabajos anteriores, lo hacen para terrenos irregulares, no solo para un piso plano. Esto se logra ya que plantean trayectorias cuadráticas para el centro de masa y usan Métodos de Disparo aplicados al Péndulo Invertido No-Lineal para resolver las ecuaciones diferenciales generadas.

En la Fig. 2.3 se presentan las fuerzas existentes que se aplican al modelo. En este caso  $f_g$  representa la fuerza gravitatoria, y  $f_c$  la fuerza de reacción al suelo. En este caso, está orientada directamente al centro de masa, debido a que se asumió que se tiene momento angular constante.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}_{tot} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_g = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_b)f - m\mathbf{g} \quad (7)$$

Donde:

$m$ : Masa del sistema reducido

$f$ : Fuerza escalar

$g$ : es el vector gravedad

$r$ : Es el vector posición del centro de masa.

Observemos que  $u$  es dependiente de la fuerza de reacción del suelo y de la posición del centro de masa, por lo que no es equivalente a la fuerza aplicada al suelo.

Notemos además que en este modelo se considera que se tiene control directamente de la fuerza de reacción aplicada al suelo, a diferencia del Péndulo Invertido Lineal presentado por Kajita, el cual considera que, además de dicha reacción, se tiene control independiente del torque en el tobillo.

Ahora se procede a restringir la dinámica del Péndulo Invertido No-Lineal a una trayectoria con la forma  $z = z(x)$  siendo  $z(x)$  una función arbitraria. Separando componente a componente el vector  $r$  se obtiene:

$$m\ddot{r} = f_{tot} = (r - r_b)f + mg$$

$$m \left[ \frac{dz}{dx} \ddot{x} + \frac{d^2z}{dx^2} \dot{x}^2 \right] = \begin{bmatrix} (x - x_b) \\ (z - z_b) \end{bmatrix} f + m \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x - x_b)f \\ (z - z_b)f - mg \end{bmatrix} \quad (8)$$

Despejando la dinámica de  $x$  obtenemos:

$$\ddot{x} = \frac{(x - x_b) \left( g + \dot{x}^2 \frac{d^2z}{dx^2} \right)}{(z - z_b) - (x - x_b) \frac{dz}{dx}} \quad (9)$$

Observamos además que tenemos una singularidad en el punto donde:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z - z_b}{x - x_b} \quad (10)$$

Esta singularidad se puede entender como el instante en el cual la velocidad lineal del centro de masa tiene la misma pendiente, o equivalentemente, está

en dirección del vector  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_b$  que es el vector de la base del Péndulo Invertido No-Lineal al CdM (Centro de Masa).

Notemos que el caso  $z(x) = k(x - x_0) + z_0$  corresponde al caso del Péndulo Invertido Lineal, y si reemplazamos esta ecuación en (9) resultará la ecuación (4) con el caso de  $u_1 = 0$ , ya que en este modelo no se considera a parte el torque producido por el tobillo.

Los métodos numéricos dan en forma de recursión el Punto Captura en un terreno arbitrario en el plano sagital de una trayectoria arbitraria cuadrática. Esto se logra a partir de bisección en base a si en un punto dado existe subdisparo (cuándo el punto de apoyo está muy alejado y el cuerpo tiende a caerse hacia atrás) o si hay sobredisparo (el punto de apoyo está muy cerca y el robot cae hacia adelante).

De la misma manera, se desarrolla un algoritmo para el caso en el que se desee hacer que un punto arbitrario del suelo sea el Punto Captura para alguna trayectoria, encontrando los coeficientes de la curva, dos de ellos son determinados por las condiciones iniciales de velocidad y altura, y el otro es determinado por un algoritmo de bisección similar al anterior. Un detalle a resaltar es que este último algoritmo brinda cotas para el coeficiente restante.

El análisis presentado en el Péndulo Invertido No-Lineal como se puede observar restringe directamente la altura a una función definiendo para ello la fuerza de reacción del suelo en una forma cerrada. Esto produce ciertos inconvenientes ya que el robot al estar en contacto con el suelo solo puede aplicar una fuerza positiva sobre este, ya que “jalar” el suelo es imposible. Este es un detalle que no se toma en cuenta en casi ninguna investigación

anterior. A continuación, se procede a hablar más sobre el contacto unilateral y un modelo muy similar de Péndulo Invertido.

#### 2.4. CONTACTO UNILATERAL Y PÉNDULO INVERTIDO DE ALTURA VARIABLE.

Las estrategias de control y estabilización vistas hasta ahora pueden estar basadas en regular el Centro de Presión, regular el momento angular, o regular la fuerza de reacción en el suelo. Este último caso se ha analizado solo restringiendo la altura del CdM a una curva y calculando la fuerza respectiva que produce dicha restricción. En [6] se toma importancia en dicha fuerza de reacción y analiza el contacto unilateral existente en cualquier robot Humanoide usando el Péndulo Invertido No-Lineal anterior con un cambio de variable de traslación, llamando al nuevo modelo Péndulo Invertido de Altura Variable.

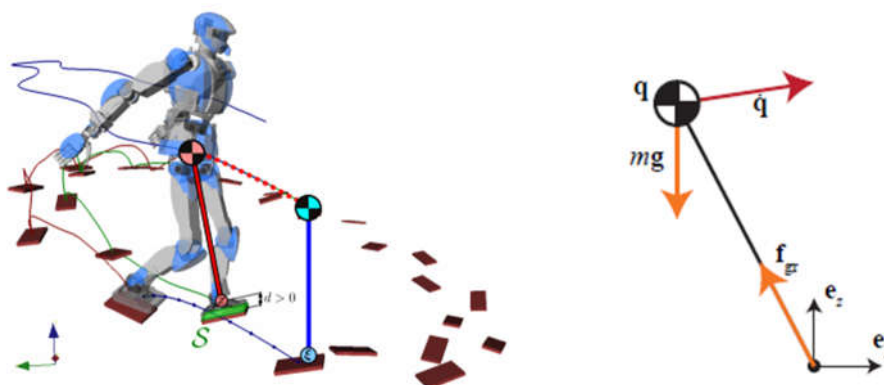


Fig. 2.4. a) Planificación de trayectorias en caminata usando Péndulos Invertidos según [8]. b)

Modelo de Péndulo Invertido de Altura Variable como aparece en [6].

El Péndulo Invertido de Altura Variable se puede usar tanto para Recuperación de Empuje, como también para planificación de trayectorias de



una caminata, como se muestra en la Fig. 2.4a. de tal forma que se puede considerar a la caminata como una caída continua controlada, donde el Punto Captura es el lugar donde se da el siguiente paso. Esta investigación se detalla en [8]. Notemos que la altura variable se puede interpretar como la flexión y extensión de la rodilla, lo cual ocasiona el acercamiento o alejamiento del centro de masa al pie.

Recordando la ecuación (7), se puede definir  $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_b$  como el nuevo sistema de coordenadas. En este caso se está definiendo el punto de contacto como el origen de coordenadas, y la dinámica del sistema se mantiene igual, con el valor de  $\mathbf{r}_b = 0$ . Esta vez no restringimos el valor de  $z$  a una curva, sino que en su lugar, le damos importancia y consideramos la entrada al sistema a la variable  $f$ , mientras que las salidas son los valores de los dos grados de libertad existentes,  $x$  y  $z$ . Nótese además que aún se está considerando momento angular constante en esta ecuación. Este sistema dinámico se denomina Péndulo Invertido de Altura Variable como se presenta en [6], y se presenta a continuación la ecuación (7) con  $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_b$ :

$$m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}f + m\mathbf{g} \quad (11)$$

Consideramos finalmente la nueva entrada de control como  $u = \frac{f}{m}$ , reemplazamos en (11) y obtenemos finalmente:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{g} + \mathbf{q}u \quad (12)$$

$$u \geq 0 \quad (13)$$

Estas dos son las ecuaciones (3) y (4) de [6], la cual representa la dinámica del Péndulo Invertido de Altura Variable bajo la restricción de contacto

unilateral. Las ecuaciones pueden ser desacopladas para ser vistas en cada coordenada o grado de libertad, como sigue:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = xu \quad (14)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + zu \quad (15)$$

Se tiene que:

$$x\dot{x} < 0 \quad (16)$$

Esto es debido a que al ser  $u \geq 0$ ,  $\text{sign}(\ddot{x}) = \text{sign}(x)$ . Si  $\dot{x}$  tuviera el signo de los anteriores, el sistema crecería (o decrecería) sin control.

Veremos ahora de manera sencilla aplicando dinámica simple, cómo se logra derivar la ecuación (12) a partir de la Fig. 2.4b considerando la reacción  $\mathbf{f}_{ground} = (f_x, f_z)$ :

Momentos angulares alrededor del CdM:

$$\sum M_{CoM} = I\alpha$$

$$zf_x - xf_z = I\ddot{\theta}$$

Tenemos la consideración de momento angular constante, por lo tanto se cumple:

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \rightarrow \ddot{\theta} = 0 \rightarrow zf_x - xf_z = 0$$

$$zf_x = xf_z \rightarrow f_x = \frac{x}{z}f_z$$

Si definimos  $f_z = mzu$  con  $u$  una variable auxiliar que después determinaremos tenemos:

$$f_z = mzu$$

$$f_x = mxu$$

Tenemos el vector reacción mostrado en la Fig. 2.4b:

$$\mathbf{f}_{ground} = (f_x, f_z) = m(x, z)u$$

$$\mathbf{f}_{ground} = (f_x, f_z) = m\mathbf{q}u$$

$$f_{ground} = \|m\mathbf{q}u\| = m\|\mathbf{q}\|u = m\sqrt{x^2 + z^2}u \rightarrow u = \frac{1}{m\sqrt{x^2 + z^2}} \mathbf{f}_{ground}$$

Sumatoria de Fuerzas en eje  $x$ :

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$f_x = m\ddot{x}$$

$$mxu = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = xu$$

Sumatoria de Fuerzas en eje  $z$

$$\Sigma F_z = ma_z$$

$$f_z - mg = m\ddot{z}$$

$$mzu - mg = m\ddot{z}$$

$$\ddot{z} = -g + zu$$

Las ecuaciones de  $\ddot{x}$  y  $\ddot{z}$  corresponden a las ecuaciones (14) y (15) del Péndulo Invertido de Altura Variable que se usa en la literatura y en el presente Trabajo de Investigación.

Koolen et. al. hallaron además la región donde es físicamente posible alcanzar el balance y dieron un controlador que estabiliza el sistema en dicha región que cumple además con (13), resolviendo así el problema de contacto unilateral. Sin embargo dejaron dos cuestiones abiertas: No se toman en cuenta las restricciones cinemáticas del humanoide y tampoco se consideran los límites de actuación ni de reacción. La región donde es físicamente alcanzar el equilibrio se obtiene a partir de la trayectoria balística del CdM, la cual es la trayectoria que describe bajo actuación nula, es decir,  $u = 0$ .

$$\mathbf{q}_{bal}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} x_{bal}(\mathbf{x}, t) \\ z_{bal}(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \dot{x}t \\ z + \dot{z}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

La ecuación (17) corresponde a la ecuación (6) de [6]. Se define el valor de:

$$T = -\frac{x}{\dot{x}} \rightarrow x_{bal}(\mathbf{x}, T) = 0 \quad (18)$$

Se define también el valor de  $z_{crit}(\mathbf{x}) = z_{bal}(\mathbf{x}, T) = z - \frac{\dot{z}x}{\dot{x}} - \frac{gx^2}{2\dot{x}^2}$ , que es el valor de la altura en la cual intercepta al eje  $z$  la trayectoria balística.

Supongamos ahora que  $z_{crit}(\mathbf{x}) \leq 0 \rightarrow \dot{x}(x\dot{z} - \dot{x}z) \geq -\frac{gx^2}{2}$

$$\frac{d}{dt}z_{crit}(\mathbf{x}) = u \frac{x}{\dot{x}} \frac{1}{\dot{x}^2} (gx^2 + \dot{x}(x\dot{z} - \dot{x}z)) \leq 0$$

Esto implica que  $z_{crit}(\mathbf{x})$  no puede crecer con la dinámica del sistema, por lo que  $z_{crit}(\mathbf{x}_f) = \frac{z_f}{2} > 0 > z_{crit}(\mathbf{x})$  nunca será alcanzable y la estabilidad nunca será lograda. Por esta razón se necesita necesariamente que:

$$z_{crit}(\mathbf{x}) > 0 \quad (19)$$

Este es un conjunto de estados que contiene al conjunto real de estados desde los cuales físicamente es posible alcanzar la estabilidad, y

posteriormente, se podrá tener en forma cerrada la posición de todos los posibles Punto Capturas bajo estas condiciones.

## 2.5. ENERGÍA ORBITAL.

Recordemos la ecuación (4) del Péndulo Invertido Lineal. Cuando se aplica un torque  $u_1 = 0$ , tenemos una ecuación con Integral:

$$E_{LIP} = -\frac{g}{2y_H}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

Observemos que:

$$\dot{E}_{LIP} = \dot{x} \left( \ddot{x} - \frac{g}{y_H}x \right) = 0$$

Esto implica que bajo torque de tobillo cero, la “Energía” se conserva. Puede ser visto como la energía total de una masa puntual unitaria junto con un resorte con constante negativa igual a  $-\frac{g}{y_H}$ . Esta energía se denomina “Energía Orbital” [7, 3, 4].

En [5] se generaliza el valor de  $E_{LIP}$  en forma cerrada, con excepto por un término integral, para cualquier trayectoria del centro de masa  $z = f(x)$ , la cual no necesariamente debe ser una línea recta o una parábola. Se toma en consideración la ecuación del Péndulo Invertido No-Lineal de (9), con la diferencia que se traslada el sistema de coordenadas a uno donde el punto de contacto sea el origen de coordenadas, muy similar al Péndulo Invertido de Altura Variable. Esto nos produce la siguiente ecuación:

$$\ddot{x} = \frac{g + f''(x)\dot{x}^2}{f(x) - f'(x)x}x \quad (20)$$

Aunque la ecuación pueda parecer tediosa, es posible obtener la energía orbital en este caso usando métodos de integración básicos. El resultado final viene dado por:

$$\begin{aligned}
 E_{orbit} &= \frac{1}{2} \dot{x}^2 h^2(x) + g x^2 f(x) - 3g \int_0^x f(\xi) \xi d\xi, h(x) \\
 &= f(x) - f'(x)x \\
 h(x) &= f(x) - f'(x)x
 \end{aligned} \tag{21}$$

Observemos que al tener en cuenta (20) y (21) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dE_{orbit}}{dt} = 0 \tag{22}$$

Este valor, aunque no le fue dada la importancia debida en su momento, es muy útil para analizar el movimiento de los humanoides en la caminata cuando tienen la altura restringida a una función arbitraria y bajo la consideración de que el torque aplicado puede actuar suficientemente en el sistema para mantener la altura en su lugar. Esto no necesariamente es cierto, puesto que no se toma en cuenta el contacto unilateral, límites de saturación o cinemáticos del bípedo. Sin embargo, sentaría las bases para que Koolen et. al. en [6] desarrollaran un controlador unilateral, la energía orbital de la función  $f(x)$  calculada al definirse esta como una función cúbica es de crucial importancia en el desarrollo del controlador unilateral.

## 2.6. ESTABILIDAD ENTRADA-ESTADO ISS.

Veamos el caso del siguiente sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} = -x + yx^2 \\ \dot{y} = -y \end{bmatrix} \tag{23}$$

Observamos que la dinámica de la variable  $y$  es asintóticamente estable y exponencial. Su solución incluso puede ser obtenida en forma cerrada, resolviendo la Ecuación Diferencial:

$$\dot{y} = -y \Rightarrow y(t) = y_0 e^{-t}$$

Vemos además que  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ . Dado que esto significa que eventualmente el valor de  $y(t)$  alcanzará valores extremadamente pequeños, es intuitivo y natural pensar que podemos reemplazar  $y = 0$  en la dinámica del primer estado, es decir:

$$\dot{x} = -x + yx^2 \approx -x + 0x^2 \approx -x$$

Esto a su vez implicaría:

$$x(t) \approx x_0 e^{-t}$$

Por lo que se tiene que ambas variables de estado tenderían a ser asintóticamente estables. Sin embargo, este concepto en la práctica es parcialmente aplicable, y puede llegar a ser contraintuitivo, ya que uno suele pensar que, aunque el valor de  $y$  sea muy alto, de todas formas va a tender a ser 0 por su caída exponencial y finalmente se estabilizará; la variable  $x$ , a su vez, presentará caída exponencial también y se estabilizará. El problema en este razonamiento es que existe el concepto de Escape en Tiempo Finito, que sucede cuando una variable del sistema dinámico se vuelve un valor infinito en un tiempo finito. Esto es común en los sistemas no lineales. Ejemplo de ello es:

$$\dot{x} = x^2, x_0 = 1 \rightarrow x(t) = \frac{1}{1-t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = \infty$$

Es decir, el sistema anterior diverge tan solo en el primer segundo de su evolución. El sistema  $\dot{x} = -x + yx^2$  tiene una componente  $x^2$ , así que es posible que diverja en tiempo finito. De hecho para valores grandes de  $y$  el sistema diverge, pero para valores pequeños es estable. En general no necesariamente el sistema debe tener un  $x^2$  esta forma para que tenga Escape en Tiempo Finito, de hecho es difícil determinar si al estabilizar una variable del sistema (como es  $y$ ), el resto se estabilizará también (como es  $x$ ). Para poder saber resolver este inconveniente se puede usar la definición de Estabilidad Entrada-Estado (ISS de sus siglas en inglés Entrada-Estado Stability).

En el sistema anterior, podemos considerar una cadena de sistemas dinámicos de la siguiente manera:

$$\dot{x} = f_1(x, u) = -x + ux^2 \quad (24)$$

$$\dot{y} = f_2(y) = -y \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(y) \end{bmatrix}$$

La primera ecuación puede ser vista como una planta con entrada  $u$  con una sola variable de estado. La solución ese sistema dinámico es la misma solución del primer sistema cuando nuestra señal de  $u(t) = y_0 e^{-t}$ . Esta señal tiene las características de que converge a cero y está acotada. Si el sistema dinámico reducido con la entrada  $u$  anterior se estabiliza, entonces el sistema total se estabilizará, caso contrario no. Esa es la noción básica de Estabilidad Entrada-Estado (ISS).



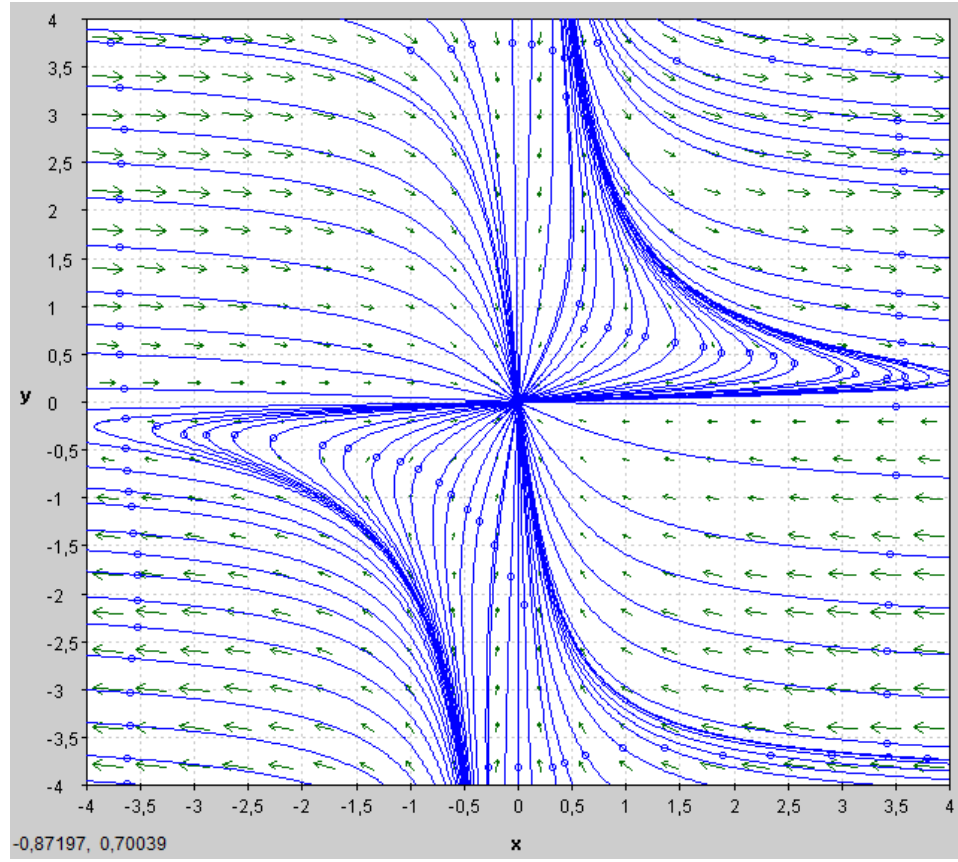


Fig. 2.5. Plano de fase del sistema (23). Vemos que algunas trayectorias del primer cuadrante divergen, como las que empiezan en el punto  $(x, y) = (3, 3)$ , puesto que  $x$  crece mucho más rápido de lo que  $y$  decrece.

Definimos el conjunto de las funciones continuas crecientes  $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \gamma(0) = 0$  como  $\mathcal{K}$ . Definimos también al conjunto  $\mathcal{KL}$  de las funciones  $\beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}, \forall t \geq 0$  y  $\beta(r, \cdot)$  continua y estrictamente decreciente  $\forall r \geq 0$ , además de  $\lim_{r \rightarrow \infty} \beta(r, \cdot) = 0$

Sea el sistema dinámico con  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (26)$$

El sistema (26) es 0-GAS el sistema correspondiente con entrada 0 es globalmente asintóticamente estable:

$$\dot{x} = f(x, 0) \quad (27)$$

Es decir si existe una función  $\beta \in \mathcal{KL}$ , tal que para cualquier condición inicial  $x_0$  y cualquier tiempo  $t$ :

$$|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t)$$

El sistema (26) es Estable Entrada-Estado si además de la función  $\beta \in \mathcal{KL}$ , existe una función  $\gamma \in \mathcal{K}$  tal que para cualquier condición inicial  $x_0$ , cualquier entrada  $u$  y cualquier tiempo  $t$  se cumple:

$$|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t) + \gamma(\|u\|_\infty)$$

En parte, la estabilidad ISS indica que si la entrada de un sistema dinámico está acotada, la salida también lo estará. Nótese que estabilidad ISS implica además que el sistema es 0-GAS, por lo que el sistema debe ser asintóticamente estable, sin embargo, lo inverso no siempre es cierto, puesto que, como se explicó anteriormente, el sistema puede tener divergencia en tiempo finito.

Una herramienta importante en el estudio de estabilidad ISS son las funciones de ISS-Lyapunov. Se define una función ISS-Lyapunov como una función  $V(x)$  continuamente diferenciable con:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x\|) &\leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \\ \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) &\leq -W(x), \forall \|x\| \geq \rho(\|u\|) \end{aligned} \quad (28)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ , donde:

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ : Siendo  $\mathcal{K}_\infty$  el conjunto de las funciones  $\gamma \in \mathcal{K}$  que crecen indefinidamente,  $\rho \in \mathcal{K}$  y  $W(x)$  es una función continua positiva definida

Como se demuestra en un teorema de [9], la existencia de una función ISS-Lyapunov automáticamente prueba la estabilidad en el sentido de Entrada-Estado para un sistema como el (26).

La definición de un sistema BIBO en Procesamiento digital de señales es, informalmente hablando, análoga o similar a la estabilidad ISS, ya que nos indica que para una entrada acotada a un sistema, la salida se mantendrá acotada. Esto implica que no existirá Escape en Tiempo Finito, y por consiguiente se podrá manipular arbitrariamente el valor de la entrada siempre y cuando su valor estacionario sea 0.

Puede manipularse incluso en la forma de una ecuación diferencial, es decir, que la variable  $u$  sea en realidad un estado de un sistema dinámico adicional estable, haciendo una especie de control en cadena. Esto es muy útil cuando se tiene sistemas de alto orden los cuales tienen algún subsistema independiente que en su estado estacionario estabiliza todo el sistema. Para esto se necesita necesariamente que el resto del sistema sea ISS, lo cual será una pieza importante en la construcción de la solución del presente trabajo de investigación.

## **2.7. CONTROL POR MODO DESLIZANTE.**

Visto desde el punto de vista geométrico, muchas veces se tienen sistemas de alto orden que pueden ser reducidos de orden intuitivamente al escoger porciones de todo el hiperplano de fase. Una manera de hacerlo es escoger una hipersuperficie, de dimensión menor a la del orden del sistema, en la cual el sistema evolucione y se establezca sin mayores consideraciones.

En Control por Modo Deslizante se define la hipersuperficie  $\sigma(x)$  de slide. En esta región o “modo”, al ser estable, las variables de estado se deslizarán hasta alcanzar la estabilidad. Para eso debe ser escogida adecuadamente y con criterio. Una vez que se tenga la hipersuperficie, se procede a realizar un controlador que dirija a las variables que estén en cualquier punto del espacio de estados a la hipersuperficie  $\sigma(x) = 0$ . Intuitivamente se puede decir que en el caso de  $\sigma \in \mathbb{R}$ , cuando el valor de  $\sigma(x)$  es positivo, se debe definir una ley de control  $u$  que produzca un  $\dot{\sigma}(x)$  negativo, y viceversa: Cuando  $\sigma(x)$  es negativo, se debe lograr que  $\dot{\sigma}(x)$  positivo.

Ejemplo de ello el siguiente espacio de estados:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x) + u \end{cases} \quad (29)$$

Podemos definir  $\sigma(x) = x_2 + x_1$  como la región de Deslice.

Observemos que en  $\sigma(x) = 0$  se produce estabilidad, puesto que:

$$x_2 + x_1 = 0 \rightarrow \dot{x}_1 + x_1 = 0 \rightarrow x_1(t) = x_{10}e^{-t}$$

Se puede afirmar entonces que existe una hipersuperficie dentro de las variables de estado sobre la cual las variables son estabilizadas automáticamente. La tarea es ahora definir una acción  $u$  tal que:

$$\sigma(x) > 0 \rightarrow \dot{\sigma}(x) < 0 \text{ y } \sigma(x) < 0 \rightarrow \dot{\sigma}(x) > 0 \quad (30)$$

$$\dot{\sigma}(x) = x_2 + f(x) + u$$

Podemos entonces definir la siguiente ley de control:

$$u = \begin{cases} -1 - x_2 - f(x); \sigma(x) > 0 \\ 1 - x_2 - f(x); \sigma(x) < 0 \\ -x_2 - f(x); \sigma(x) = 0 \end{cases}$$

Se tiene entonces

$$\sigma(x) > 0 \rightarrow \dot{\sigma}(x) = -1$$

$$\sigma(x) < 0 \rightarrow \dot{\sigma}(x) = 1$$

$$\sigma(x) = 0 \rightarrow \dot{\sigma}(x) = 0$$

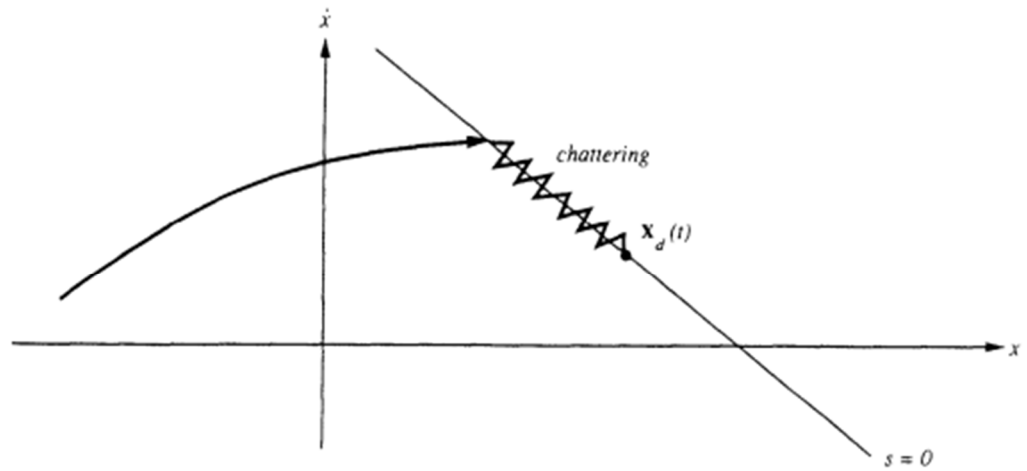
Observamos que  $\sigma(x)$  ideal y teóricamente alcanzará el valor de 0. Sin embargo, implementar el sistema en la realidad será muy problemático, incluso en la implementación en simulaciones con métodos numéricos, ya que existe una alta discontinuidad cuando  $\sigma(x) = 0$ , originándose el fenómeno de “chattering”.

Para evitar este indeseado fenómeno es preferible realizar acciones de control que cumplan con (30) pero que sean continuas. Una manera de hacerlo es realizar estabilidad exponencial de  $\sigma(x)$ , es decir:

$$\dot{\sigma}(x) = -k\sigma(x) \rightarrow \sigma(x) = \sigma_0 e^{-t}$$

$$\dot{\sigma}(x) = x_2 + f(x) + u = -k\sigma(x)$$

$$u = -k\sigma(x) - x_2 - f(x)$$



**Figure 7.4 :** Chattering as a result of imperfect control switchings

Fig. 2.6. Chattering producido cerca de la superficie  $\sigma(x) = 0$  mostrada como  $s = 0$  como se presenta en [10]

La ley de control  $u$  tiene la característica de ser continua. A pesar de que muchos Control por Modo Deslizante realizan control discontinuo, puesto que como se mencionó anteriormente, están constituido por partes que dependen del valor de la función  $\sigma$ , en el caso de que se tenga que cambiar de ley de control se realizará bruscamente. Con la ley de control anterior esto deja de ser un problema. En general, podemos usar la siguiente función de Lyapunov para definir un controlador que permita estabilidad en el espacio de estados hacia el modo deslizante de la siguiente manera:

$$V(x) = \frac{1}{2} \sigma(x)^T \sigma(x)$$

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, u)$$

$$\dot{V}(x) = \sigma(x)^T \dot{\sigma}(x) = \sigma(x)^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, u) < 0$$

El trabajo en este caso aquí se reduce a encontrar un controlador  $u$  que estabilice la función anterior.

## 2.8. FUNCIONES BARRERA.

Muchas veces se necesita evitar entrar en una región del espacio de estados donde se puede producir inestabilidad inevitablemente, sea por condiciones cinemáticas/físicas o por limitaciones de actuación. En el presente trabajo se produce ese caso: Hay zonas dentro del plano de fases donde la actuación, al estar saturada, no será suficiente para dirigir a las variables de estado a la zona de estabilización.

Seguiremos los pasos de definición de acuerdo a [1]. Definimos el conjunto  $X_0 \subset \mathbb{R}^n$  como todas las condiciones iniciales desde las cuales queremos evitar que el sistema se desestabilice. Definimos además  $X_u \subset \mathbb{R}^n$  como la región que no es segura para el sistema, es decir, la zona dentro del espacio de estados que deseamos evitar. Dada una ley de control para el sistema dinámico (26)  $u = u(x)$ , definimos una función barrera  $B(x)$  como aquella función que cumple:

$$B(x) < 0, \forall x \in X_0 \quad (31)$$

$$B(x) \geq 0, \forall x \in X_u \quad (32)$$

$$\frac{\partial B(x)}{\partial x} f(x, u(x)) < 0, \forall x \quad (33)$$

Dado que  $\frac{\partial B(x)}{\partial x} f(x, u(x)) = \dot{B}(x) < 0$ , se entiende que a lo largo de las trayectorias de  $\dot{x} = f(x, u(x))$  la función  $B(x)$  decrecerá siempre. Como empezamos en condiciones iniciales  $x \in X_0$ , tenemos que  $B(x_0) < 0$ , junto con  $\dot{B}(x) < 0 \rightarrow B(x) < 0$ . Como el valor de  $B(x)$  se mantendrá siempre

negativo, es imposible que llegue a entrar en  $X_u$  puesto que esa zona de acuerdo a (32) es positiva en la función barrera.

Notemos que estas condiciones suficientes para asegurar que el sistema no se dirigirá a una zona dada. Se puede suavizar las condiciones haciendo que (33) solo se cumpla en todas las trayectorias de  $X_0$ , no en el resto, o incluso solo en la frontera de  $X_0$ . Esto es más fácil y se mostrará más adelante en el trabajo.



## CAPÍTULO III

### CÁLCULOS Y/O APLICACIONES Y OBTENCIÓN DE RESULTADOS

En el presente capítulo se desarrollará el proceso de la obtención de las nuevas ecuaciones basados en un cambio de variable crucial, el análisis y entendimiento de estas variables, las regiones donde es físicamente estabilizar con contacto unilateral y saturación de entrada con una función barrera bastante simple, pero usada de todas formas para mantener formalidad. Se muestra además que el resto del sistema es ISS, por lo que estabilizar unas variables produce estabilización completa del sistema.

Posterior a esto viene la etapa de control. Se procede a definir una función de deslice estable, y se hace una estrategia de control para dirigir las variables a dicha superficie. Finalmente se realizan algunas simulaciones para mostrar el comportamiento del Péndulo Invertido de Altura Variable tanto en el plano de fase como en el plano sagital real.

#### 3.1. ANÁLISIS EN EL PLANO DE FASE Y FUNCIONES BARRERA.

Tenemos el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= xu \\ \ddot{z} &= -g + zu\end{aligned}\tag{34}$$

Con límites de entrada:

$$0 \leq u \leq u_{max}$$

Hacemos el siguiente cambio de variable para normalizar el sistema:

$$u = u_{max}v$$

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{u_{max}}}$$

$$z(\tau) = \frac{g}{u_{max}} z_2(\tau) = \frac{g}{u_{max}} z_f$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = xu$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = x \frac{u}{u_{max}}$$

$$\frac{g}{u_{max}} \frac{d^2z_2}{d\tau^2} = -\frac{g}{u_{max}} + \frac{g}{u_{max}} \frac{z_2 u}{u_{max}}$$

Finalmente, obtendremos el siguiente sistema normalizado:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= xu \\ \ddot{z} &= -1 + zu \end{aligned} \right\}; 0 \leq u \leq 1 \quad (35)$$

Ahora deseamos conducir  $z$  a  $z_f$ . Teniendo en cuenta la entrada de control, el estado estacionario de la segunda ecuación tenemos:

$$-1 + z_f u_f = 0 \rightarrow u_f = \frac{1}{z_f} \leq 1 \rightarrow z_f \geq 1$$

Por lo tanto, los valores de alturas posibles para el centro de masa del humanoide deben ser mayores a 1 en las nuevas coordenadas.

Deseamos además hallar el siguiente valor, puesto que tiene una propiedad especial:

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{x}}{x}$$

Aplicamos la Regla de l'Hôpital:

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{x}}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x}{\dot{x}} u = u_f \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x}{\dot{x}} = u_f \frac{1}{A} \rightarrow A = \pm \sqrt{u_f}$$

Por la ecuación (16) sabemos que  $x$  y  $\dot{x}$  tienen signos distintos, por lo tanto el valor límite de  $A$  será negativo por continuidad, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{x}}{x} = -\sqrt{u_f} = \frac{-1}{\sqrt{z_f}} \quad (36)$$

Ahora, realizaremos el siguiente cambio de variables:

$$T = -\frac{x}{\dot{x}} \quad (37)$$

$$z_c = z - \frac{x}{\dot{x}} \dot{z} - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\dot{x}} \right)^2 \quad (38)$$

Notemos que  $T$  y  $z_c$  poseen las siguientes propiedades:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T = \sqrt{z_f} \quad (39)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_c = \frac{z_f}{2} \quad (40)$$

Podemos interpretar a la variable  $T$  como el tiempo correspondiente que tarda el Péndulo Invertido de Altura Variable en alcanzar la posición  $x = 0$  o equivalentemente interceptar a la línea vertical en caída libre. Esto nos indica que, para lograr estabilidad, siempre debemos aplicar una fuerza que detenga la caída libre, retrasando el tiempo de alcance y manteniéndola siempre en un valor constante de  $\sqrt{z_f}$

Las variables  $T$  y  $z_c$  tienen una propiedad particular: son autónomas en sus variables. Vemos que sus derivadas satisfacen:

$$\dot{T} = -1 + T^2 u$$

$$\dot{z}_c = T \left( z_c - \frac{1}{2} T^2 \right) u$$

Podemos, además describir los dos estados restantes, la velocidad en cada componente de la siguiente manera:

$$\dot{x} = -\frac{1}{T} x$$

$$\dot{z} = \frac{1}{T} \left( z_c - z + \frac{1}{2} T^2 \right)$$

Así, describimos el sistema dinámico total del Péndulo Invertido de Altura

Variable de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} \dot{T} &= -1 + T^2 u \\ \dot{z}_c &= T \left( z_c - \frac{1}{2} T^2 \right) u \\ \dot{x} &= -\frac{1}{T} x \\ \dot{z} &= \frac{1}{T} \left( z_c - z + \frac{1}{2} T^2 \right) \end{aligned} \right\}; 0 \leq u \leq 1 \quad (41)$$

Encontramos los puntos de equilibrio para un valor de  $u$  estacionario:

$$(T, z_c, x, z) = \left( \sqrt{z_f}, \frac{z_f}{2}, 0, z_f \right); u = z_f^{-1/2}, z_f \in \mathbb{R} \quad (42)$$

Tomando los dos primeros estados, es fácil ver que es autónomo e independiente de las otras dos variables  $(x, z)$  y la entrada de control los afecta directamente. Por lo tanto, una estrategia para controlar el sistema puede ser primero para controlar este sistema  $2D$ , y luego con ellos, para controlar los estados  $x$  y  $z$ . Afortunadamente para nosotros, si manejamos  $z_c$  y  $T$  a sus valores de estado estacionario, el sistema dinámico resultante será estable.

De [6] sabemos que la condición  $u \geq 0$  implica:

$$x\dot{x} < 0 \rightarrow -\frac{x}{\dot{x}} > 0 \rightarrow T > 0$$

En el estado estacionario y considerando la saturación en el actuador tenemos:

$$\dot{T} = 0 \rightarrow u_f = \frac{1}{T_f^2} \leq 1 \rightarrow T_f \geq 1$$

$$\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}, u)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{T} = -1 + T^2 u \\ \dot{z}_c = T \left( z_c - \frac{1}{2} T^2 \right) u \end{array} \right\}; 0 \leq u \leq 1$$

Definimos ahora la función barrera  $B(\mathbf{z}) = 1 - T$  y también las regiones  $X_0 = \{T > 1, T \in \mathbb{R}\}$  y  $X_u = \{0 < T < 1, T \in \mathbb{R}\}$ . Notemos que  $T_f \in X_0$  a excepción de  $T_f = 1$  que es un caso peculiar. En la región  $X_u$

$$\dot{B}(\mathbf{z}) = 1 - T^2 u > 1 - \max_{T \in X_u} T^2 \max u = 1 - 1 = 0 \rightarrow \dot{B}(\mathbf{z}) > 0$$

Sin embargo, el estado estable del sistema requiere:  $B(\mathbf{z}_f) = 1 - T_f < 0$ , si el sistema inicia en  $X_u$ , nunca entrará a  $X_0$ , por empezar en un valor positivo y mantenerse en el valor positivo siempre. Por esta razón  $T$  nunca deberá estar en  $X_u$  y se tiene que si deseamos estabilidad, nuestro estado  $T$  debe cumplir:

$$T > 1 \leftrightarrow \mathbf{z} \in X_0$$

Supongamos ahora que  $z_c < \frac{1}{2}$ . Tenemos

$$z_c - \frac{1}{2} T^2 < 0 \rightarrow T \left( z_c - \frac{1}{2} T^2 \right) u < 0$$

$$\dot{z}_c < 0$$

Entonces, siempre que  $z_c < \frac{1}{2}$  el valor de  $z_c$  disminuirá. Pero  $z_{cf} = \frac{z_f}{2} \geq \frac{1}{2}$  por lo que no se puede alcanzar la posición estacionaria deseada. Esto implica que necesariamente:  $z_c \geq \frac{1}{2}$ .

Esto significa que la posible región donde se puede lograr el equilibrio bajo supuestos de límites de entrada en el plano de fase de  $T$  y  $z_c$  es:

$$D_s = \left\{ (T, z_c) : T \geq 1, z_c \geq \frac{1}{2} \right\} \quad (43)$$

Más adelante mostraremos que esta es la región aceptable. Si queremos imaginar esto en el espacio completo, los valores de  $x$  y  $z$  se pueden elegir arbitrariamente, mientras que los valores de  $\dot{x}$  y  $\dot{z}$  deben cumplir con las restricciones de  $T$  y  $z_c$  después de la transformación.

Ahora, dividiremos el sistema (41) en dos subsistemas. El primero tiene a  $x$  y  $z$  como variables de estado, y consideraremos  $T$  y  $z_c$  como "entradas" virtuales, mientras que en el segundo subsistema ambas son las variables de estado y la entrada es  $u$ . Esto lo podemos considerar como un sistema en cadena.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{T}x \\ \dot{z} &= \frac{1}{T} \left( z_c - z + \frac{1}{2}T^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{T} &= -1 + T^2u \\ \dot{z}_c &= T \left( z_c - \frac{1}{2}T^2 \right)u \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Además, podemos recordemos que el segundo subsistema es autónomo sobre sí mismo, es decir, no depende de las variables del primer subsistema, y la entrada de control  $u$  afecta solo a este. La idea ahora para realizar el balance es controlar el segundo subsistema, y al mismo tiempo, sus variables

de estado controlarán el primer subsistema, enviando  $x \rightarrow 0$  y  $z \rightarrow z_f$ , con  $z_f$  la altura final del centro de masa del humanoide.

### 3.2. ISS DEL PÉNDULO INVERTIDO DE ALTURA VARIABLE.

A partir de la idea final del apartado anterior, y recordando (42), debemos estar seguros de que estabilizar el segundo subsistema, es decir, enviar  $T \rightarrow \sqrt{z_f}$  y  $z_c \rightarrow \frac{z_f}{2}$  es suficiente para estabilizar el primero, porque mientras  $T$  y  $z_c$  estén lejos de esos valores, es posible que el primer subsistema tenga Escape en Tiempo Finito, y el control se haga más difícil. Afortunadamente para nosotros ese no es el caso, y recordando el tema del Capítulo 2, mostraremos ahora que el primer subsistema es ISS (Estable Entrada-Estado) y esto implica que para los valores acotados de las "entradas" virtuales  $T$  y  $z_c$ , los estados  $x$  y  $z$  permanecerán acotados. Como sabemos, estabilizar el segundo subsistema mantendrá los límites de  $T$  y  $z_c$ , y finalmente es posible lograr el equilibrio de esa manera.

Para probar que el primer subsistema es ISS definimos un error de altura de la siguiente manera:

$$z_e = z - z_f \quad (46)$$

Y también realizaremos el siguiente cambio de variables, teniendo en cuenta que  $T$  y  $z_c$  son dos "entradas" virtuales para el subsistema (44):

$$\begin{aligned} T &= u_1 + \sqrt{z_f} \\ z_c &= u_2 + \frac{z_f}{2} \end{aligned} \quad (47)$$

Notemos que en la estabilidad  $(u_1, u_2) \rightarrow (0,0)$ . Definimos ahora el vector de entrada  $\mathbf{u}_p = (u_1, u_2)^T$

Las entradas  $u_1$  y  $u_2$  tienen las siguientes restricciones en consecuencia de los límites de  $D_s$ :

$$D_u = \left\{ (u_1, u_2) : u_1 \geq 1 - \sqrt{z_f}, u_2 \geq \frac{1 - z_f}{2} \right\} \quad (48)$$

Así que tenemos la siguiente equivalencia considerando (43) y (47):

$$(T, z_c) \in D_s \equiv \mathbf{u}_p \in D_u \quad (49)$$

Reemplazando ambos cambios en el subsistema físico (44) y considerando además (46):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{u_1 + \sqrt{z_f}} x \\ \dot{z} &= -\frac{1}{u_1 + \sqrt{z_f}} z_e + \frac{\frac{1}{2}u_1^2 + u_2 + u_1\sqrt{z_f}}{u_1 + \sqrt{z_f}} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Ahora vamos a considerar el vector de estados del subsistema físico definido como  $\mathbf{x} = (x, z_e)^T$ . Utilizaremos ahora la siguiente función ISS Lyapunov  $V$  y considerando también  $\|\mathbf{u}_p\|_\infty \leq \delta$ :

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{2} (x^2 + z_e^2)$$

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) = \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2$$

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(\mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|)$$

$$W_\delta(\|\mathbf{x}\|) = \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2(\delta + \sqrt{z_f})}$$

Notemos que  $W_\delta(\|\mathbf{x}\|)$  y  $V(\mathbf{x})$  son positivas definidas. El valor de  $\delta$  puede ser escogido arbitrariamente, con la restricción únicamente de ser mayor al valor



máximo que toman las variables  $u_1$  y  $u_2$  bajo la transformación (47) de los valores extremos de  $T$  y  $z_c$  cuando se ejecuta un controlador  $u$  al sistema dinámico (41)

$$\rho(\|\mathbf{u}_p\|) = \|\mathbf{u}_p\|^2 + 2(\sqrt{z_f} + 1)\|\mathbf{u}_p\|$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = -\frac{1}{u_1 + \sqrt{z_f}}(x^2 + z_e^2) + \frac{\frac{1}{2}u_1^2 + u_2 + u_1\sqrt{z_f}}{u_1 + \sqrt{z_f}}z_e$$

Estabilidad ISS trabaja con valores de  $\mathbf{x}$  que cumplen con  $\|\mathbf{x}\| > \rho(\|\mathbf{u}_p\|)$ .

Procedemos a acotar la segunda componente en suma de  $\dot{V}$ :

$$\left| \frac{\frac{1}{2}u_1^2 + u_2 + u_1\sqrt{z_f}}{u_1 + \sqrt{z_f}}z_e \right| < \frac{(\|\mathbf{u}_p\|^2 + 2(\sqrt{z_f} + 1)\|\mathbf{u}_p\|)\|\mathbf{x}\|}{2(u_1 + \sqrt{z_f})} \leq \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2(u_1 + \sqrt{z_f})}$$

Por consiguiente y considerando  $u_1 \leq \|\mathbf{u}_p\|_\infty \leq \delta$ :

$$\dot{V} < -\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2(u_1 + \sqrt{z_f})} \leq -\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2(\delta + \sqrt{z_f})} = -W_\delta(\|\mathbf{x}\|)$$

Vemos entonces que las funciones definidas previamente cumplen con las condiciones mostradas en (28), por lo que el subsistema (44) es Local ISS estable con las “entradas” virtuales  $T$  y  $z_c$ , o dicho informalmente, mientras  $T$  y  $z_c$  estén acotadas,  $x$  y  $z$  también lo estarán. Esta localidad se mantiene en las condiciones asumidas, es decir, cuando  $\|\mathbf{u}_p\|_\infty \leq \delta$ ,  $\mathbf{u}_p \in D_u$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .

Debemos tener en cuenta que el valor de  $\delta$  es arbitrariamente positivo, solo afecta la velocidad de convergencia ya que está en el denominador, pero a pesar de eso, para cualquier valor positivo  $\delta$  el subsistema físico es ISS, que

es nuestro principal objetivo por ahora. Podemos elegir cualquier valor  $\delta \rightarrow \infty$ , y finalmente aumentar la región a:  $\mathbf{u}_p \in D_u$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .

Entonces, teniendo en cuenta la equivalencia de las regiones dadas en (49), llegamos a la conclusión de que el subsistema físico es Estable Entrada-Estado para  $(x, z) \in \mathbb{R}^2$  y  $(T, z_c) \in D_s$

Recordemos que  $D_s$  es la región donde es posible lograr el equilibrio, por lo que, considerando la propiedad de [9]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u}_p(t) = 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Regresando a las variables originales, tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} T(t) \\ z_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{z_f} \\ \frac{z_f}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_f \end{bmatrix}$$

Una declaración similar podemos encontrar en [11]. En otras palabras, estabilizar el segundo subsistema con la entrada de control original  $u$  producirá una estabilización y balance satisfactorio para el humanoide bajo la saturación de entrada y su contacto unilateral.

### 3.3. CONTROL POR MODO DESLIZANTE DEL PÉNDULO INVERTIDO DE ALTURA VARIABLE.

El control por modo deslizante es un enfoque para tratar con sistemas no lineales. En el caso del Péndulo Invertido de Altura Variable reducido, en la ecuación (45), es fácil de aplicar porque tenemos un sistema de 2 dimensiones, y tenemos un entendimiento intuitivo y común de la forma que puede tomar.

Vamos a utilizar una superficie deslizante de la siguiente forma:

$$z_c = f(T)$$

Donde  $f$  es una función que cumple:

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{2} \\ f(\sqrt{z_f}) &= \frac{z_f}{2}, \\ f(T) &> \frac{1}{2}T^2; \quad 1 < T < \sqrt{z_f} \\ f(T) &< \frac{1}{2}T^2; \quad \sqrt{z_f} < T \end{aligned} \tag{51}$$

Definir ahora la función  $\sigma(\mathbf{z})$ , es decir, el modo, es un poco más complicado de lo común. Lo definiremos de la siguiente forma para evitar singularidades:

$$\sigma(\mathbf{z}) = \frac{1}{T}(z_c - f(T)) \tag{52}$$

Para facilitar los cálculos definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} s(T) &= \frac{f(T)}{T} \\ \dot{\sigma}(\mathbf{z}) &= \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \sigma}{\partial z_c} \dot{z}_c + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \dot{T} = \left(z_c - \frac{1}{2}T^2\right)u + (-1 + T^2u) \left(-\frac{1}{T^2} - \frac{\partial s}{\partial T}\right) \\ \dot{\sigma}(\mathbf{z}) &= \left(\frac{z_c}{T^2} + \frac{\partial s}{\partial T}\right) - uT^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\partial s}{\partial T}\right) \end{aligned} \tag{53}$$

Deseamos alcanzar estabilidad asintótica a la superficie  $\sigma(\mathbf{z}) = 0$  de tal manera que sea suave. Deseamos ahora que el sistema se comporte de la siguiente manera:

$$\dot{\sigma}(\mathbf{z}) = -k(\mathbf{z})\sigma(\mathbf{z}) \tag{54}$$

Donde  $k(\mathbf{z})$  es una función que corresponde a la tasa de convergencia de  $\sigma(\mathbf{z})$ . Si restringimos  $k(\mathbf{z}) \geq k_{min}, \forall \mathbf{z} \in D_s$ , tenemos la solución a la ecuación diferencial (54):

$$\frac{\dot{\sigma}(\mathbf{z})}{\sigma(\mathbf{z})} = -k(\mathbf{z}) \rightarrow \sigma(\mathbf{z}) = \sigma(\mathbf{z}_0) e^{-\int_0^t k(\mathbf{z}) dt}$$

Dado que el sistema se mueve sólo en  $D_s$  y que  $k(\mathbf{z}) \geq k_{min}$ :

$$\int_0^t k(\mathbf{z}) dt > k_{min} t \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^t k(\mathbf{z}) dt} = 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(\mathbf{z}) = 0$$

Haremos  $k(\mathbf{z})$  variable, porque evitará que el sistema salga de los límites de la región de estabilización  $D_s$ , aumentando su valor según sea necesario sin divergir.

Sea  $U(\mathbf{z})$  la ley de control que produce el comportamiento del sistema como se muestra en (54), realizando realimentación de las ecuaciones (53) y (54) tenemos:

$$U(\mathbf{z}) = \frac{\left(\frac{z_c}{T^2} + \frac{\partial s}{\partial T}\right) + k(\mathbf{z})\sigma(\mathbf{z})}{T^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\partial s}{\partial T}\right)} \quad (55)$$

Teniendo en cuenta los límites de entrada tenemos:

$$u(\mathbf{z}) = \max(\min(U(\mathbf{z}), 1), 0) \rightarrow 0 \leq u(\mathbf{z}) \leq 1 \quad (56)$$

Escoger las funciones  $f(T)$  y  $\sigma(\mathbf{z})$  en general es un proceso difícil. Aquí se mostrarán los resultados directamente. En particular, la  $\sigma(\mathbf{z})$  escogida genera una singularidad en los puntos donde:

$$\frac{1}{2} + \frac{\partial s}{\partial T} = 0$$

La función  $f$  se debe escoger de tal manera que no se cumpla la ecuación anterior para ningún punto  $T \in D_s$ . Podemos escoger la función  $f$  definida como:

$$f(T) = \frac{\sqrt{z_f} + 1}{2} (T - 1) + \frac{1}{2} \quad (57)$$

$$s(T) = \frac{f(T)}{T} = \frac{\sqrt{z_f} + 1}{2} - \frac{\sqrt{z_f}}{2T}$$

Vemos que:

$$\frac{1}{2} + \frac{\partial s}{\partial T} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{z_f}}{2T^2} > \frac{1}{2} \quad (58)$$

Por lo que en (55) nunca ocurrirá una singularidad debido al denominador mostrado. Procedemos ahora a definir la función  $k(z)$ . El razonamiento es simple: Mientras más cerca esté de la frontera de  $D_s$   $\frac{1}{2} - z_c = 0$  menor debe ser el valor de  $U(z)$ , ya que en esa zona si se quiere mantener la estabilidad  $u = 0$ . De manera similar, mientras más cerca esté de la otra frontera de  $D_s$   $1 - T = 0$  mayor debe ser el valor de  $U(z)$ , ya que en esa zona deseamos  $u = 1$ .

En la frontera  $T = 1$  tenemos:

$$U(z)|_{T=1} = \frac{\left(z_c + \frac{\sqrt{z_f}}{2}\right) + k(z) \left(z_c - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1 + \sqrt{z_f}}{2}\right)} \geq 1 \quad \forall z_c \geq \frac{1}{2} \quad (59)$$

$$\rightarrow \lim_{T \rightarrow 1^+} u(z) = 1$$

No tenemos muchas dificultades con zonas cercanas a  $T = 1$ . Sin embargo, hay problemas con la región  $z_c = \frac{1}{2}$ . Para lidiar con este caso agrupamos los términos de la función  $U(z)$ .

$$U(z) = \frac{\frac{\sqrt{z_f} + 1}{2} (1 + k(z)T(1 - T)) + (k(z)T + 1) \left(z_c - \frac{1}{2}\right)}{T^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{z_f}}{2T^2}\right)}$$

Debemos mantener  $U(z) \leq 0$  incluso cuando  $z_c \rightarrow \frac{1}{2}^+$  y  $T \rightarrow 1^+$ . Vemos que es imposible con  $k(z)$  acotado, por lo que debemos producir una singularidad en el extremo  $T \rightarrow 1^+$  para mantener los valores negativos del primer sumando

Definimos entonces  $k(z) = 1 + \frac{1}{T-1} = \frac{T}{T-1} > 1 = k_{min}$

Por lo que finalmente tenemos el controlador:

$$U(z) = \frac{\frac{\sqrt{z_f} + 1}{2}(1 - T^2) + \left(\frac{T^2}{T-1} + 1\right)\left(z_c - \frac{1}{2}\right)}{T^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{z_f}}{2T^2}\right)} \quad (60)$$

$$u(z) = \max(\min(U(z), 1), 0)$$

Verificamos ahora que para  $T > 1$ :

$$\lim_{z_c \rightarrow \frac{1}{2}^+} U(z) = \frac{\frac{\sqrt{z_f} + 1}{2}(1 - T^2)}{T^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{z_f}}{2T^2}\right)} < 0 \rightarrow \lim_{z_c \rightarrow \frac{1}{2}^+} u(z) = 0 \quad (61)$$

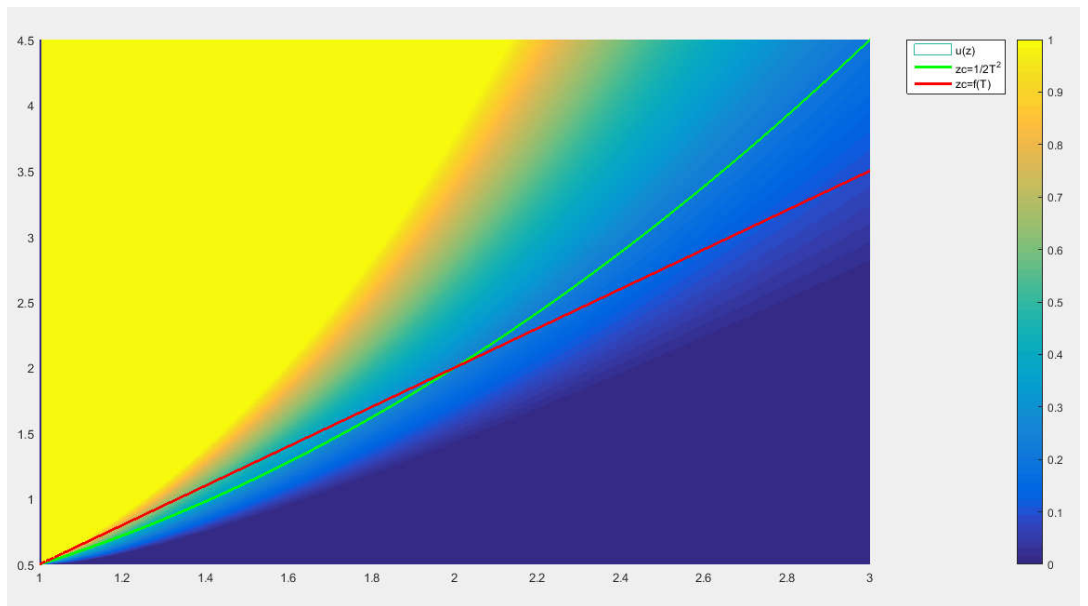


Fig. 3.1: Controlador por Modo Deslizante para las componentes  $T$  en el eje  $x$  y  $z_c$  en el eje  $y$ , con isóclina horizontal mostrada en verde y Superficie de Deslice  $\sigma(z) = 0$  mostrada en rojo.

Más en general podemos definir un controlador con:

$$k(\mathbf{z}) = k_1 + \frac{k_2}{T-1} \quad (62)$$

Tenemos ahora el hecho de que estaremos restringidos a la región dada por  $\sigma(\mathbf{z}) = 0 \rightarrow z_c = f(T)$ . Veremos ahora porque esta región es estable en  $D_s$ .

Encontraremos primero los valores de  $U|_{z_c=f(T)}$  necesarios para mantenernos en la superficie una vez que estemos allí. Resolvemos para el valor de  $u$  que se requiere para mantener el sistema en  $\sigma(\mathbf{z}) = 0$  o equivalentemente  $z_c = f(T)$ :

$$\frac{\dot{z}_c}{T} = \frac{T\left(z_c - \frac{1}{2}T^2\right)U}{-1 + T^2U} = \frac{\sqrt{z_f} + 1}{2} \rightarrow U = \frac{\sqrt{z_f} + 1}{(\sqrt{z_f} + T^2)T} \rightarrow 1 > U > 0$$

$$u(\mathbf{z})|_{z_c=f(T)} = U(\mathbf{z})|_{z_c=f(T)}$$

Observamos que, por la igualdad anterior, siempre nos podremos mantener en la superficie  $\sigma(\mathbf{z}) = 0$  en cualquier parte de la región  $D_s$  donde físicamente es posible alcanzar estabilidad, ya que los límites de actuación no afectan nuestra elección, al estar  $U|_{z_c=f(T)}$  entre 0 y 1.

Recordemos que por (45):

$$\dot{z}_c = T\left(z_c - \frac{1}{2}T^2\right)u = T\left(f(T) - \frac{1}{2}T^2\right)u$$

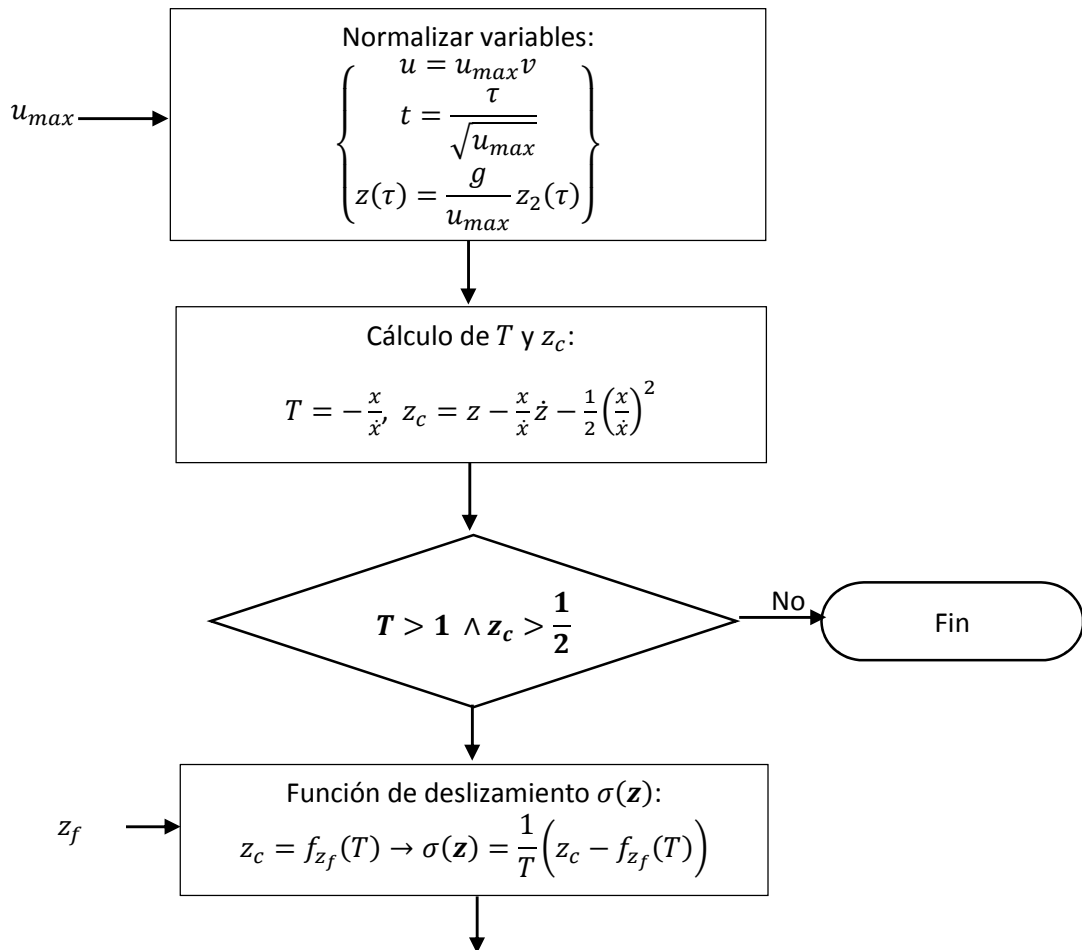
Por (51):

$$\begin{aligned} f(T) &> \frac{1}{2}T^2; \quad 1 < T < \sqrt{z_f} \\ f(T) &< \frac{1}{2}T^2; \quad \sqrt{z_f} < T \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \dot{z}_c &> 0; 1 < T < \sqrt{z_f} \\ \dot{z}_c &< 0; \sqrt{z_f} < T \end{aligned}$$

El estado medio entre estas dos condiciones es  $T = \sqrt{z_f}$ , es este punto recordemos que  $z_c = f(\sqrt{z_f}) = \frac{z_f}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{z_f})^2 \rightarrow \dot{z}_c = 0$ , por lo que nos mantendremos en el punto  $z = z_f$  y como el subsistema (44) es ISS respecto a las variables o entradas virtuales  $z$  del subsistema (45)





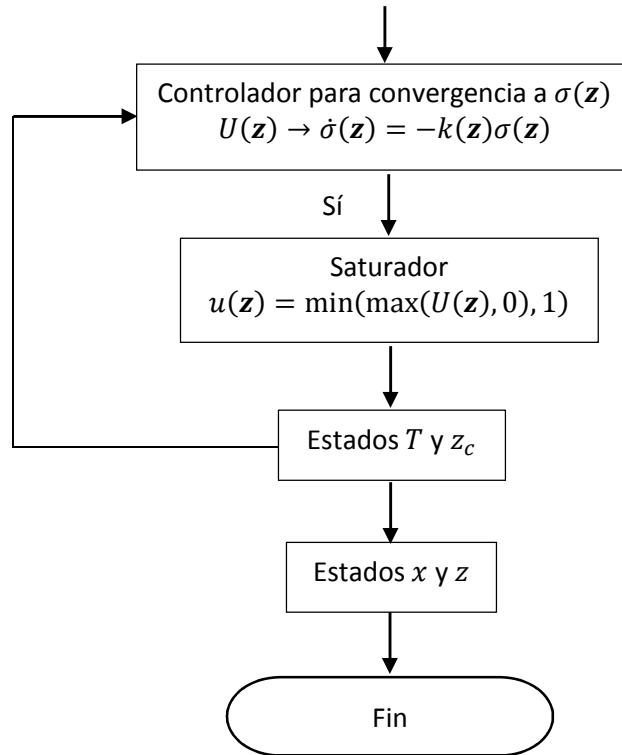


Fig. 3.2. Flujo del procedimiento para realizar controlador del Péndulo Invertido de Altura Variable.

### 3.4. SIMULACIONES.

Se procedió a realizar una simulación con los siguientes valores iniciales:

$$\dot{x}_0 = 4.1 \text{ m/s}$$

$$\dot{z}_0 = -2 \text{ m/s}$$

$$f_{gr-max} = 1600 \text{ N}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$m = 60 \text{ kg}$$

Consideraremos ahora, como es una aproximación, que el valor a utilizar de fuerza máxima del suelo es 10% menos que la real, es decir:

$$f_{gr-max} = 0.9 * 1600 N = 1440 N$$

Tenemos entonces que la velocidad inicial a la que fue empujado el robot es el vector  $(4.1, -2)m/s$ , es decir, es empujado hacia adelante y hacia abajo. En este caso se debe aplicar una fuerza de reacción alta y saturada en el suelo para estabilizarnos y realizar Recuperación de Empuje. Además consideramos que el robot puede aplicar una fuerza máxima de reacción de  $1440 N$  y que pesa  $60 kg$ . Escogemos, por arbitrariedad, el Punto Captura hacia adelante y abajo desde el CdM para ubicar el pie como  $(1.05, -1.3)m$ . Transformando coordenadas para que el pie esté en el origen tenemos los estados del sistema o del Centro de Masa:

$$x_0 = -1.05 (m)$$

$$z_0 = 1.3 (m)$$

$$\dot{x}_0 = 4.1 m/s$$

$$\dot{z}_0 = -2 m/s$$

Además tenemos la nueva variable de control saturada, asumiendo como máxima longitud del centro de masa al pie  $1.5m$ .

$$u_{max} = \frac{f_{gr-max}}{m\sqrt{x_0^2 + z_0^2}} = \frac{1440N}{60kg * 1.5m} = 16 (N/kgm)$$

Asumimos finalmente que deseamos que la altura final del Centro de Masa sea  $1.1$ .

$$z_{f0} = 1.1 (m)$$

Realizamos la transformación de coordenadas inicial para calcular los valores de  $T$  y  $z_c$  en el sistema normalizado, los cuales son:

$$T_0 = 1.0244 > 1$$

$$z_{c0} = 0.7602 > \frac{1}{2}$$

Estas condiciones se ubican en la región donde es físicamente posible estabilizar, así que continuamos con el cálculo del controlador y de la saturación correspondiente.

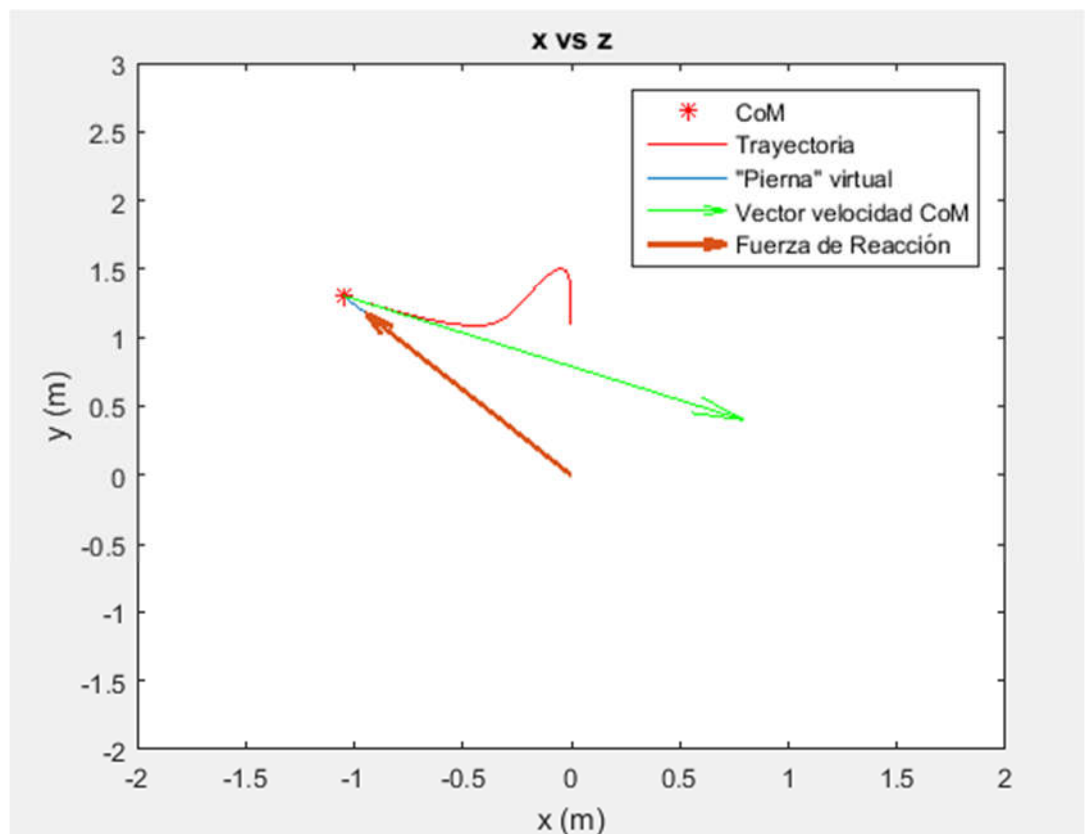


Fig. 3.3. Situación inicial de Empuje y Recuperación.

Se observa en la Fig. 3.3 la alta velocidad a la cual fue lanzado el centro de masa del robot, el pie ubicado en el origen, la fuerza de reacción

estrechamente relacionada con la actuación saturada  $u$  y la trayectoria del Centro de Masa en su camino a la estabilización.

En la Fig. 3.4 se puede observar la posición para diversos tiempos del CdM mientras la simulación es realizada. Se observa también las anteriores características graficadas y se observa que la estabilización se realiza en los primeros 5 segundos de iniciado el control.

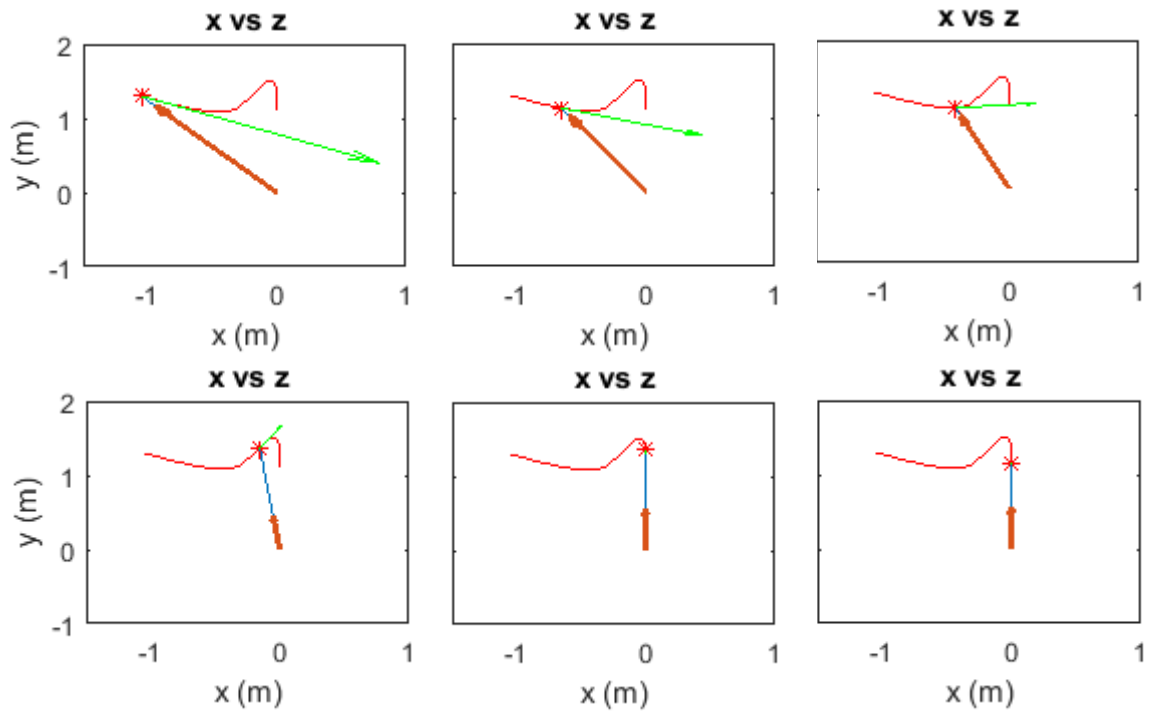


Fig. 3.4. Gráficas de simulación del Péndulo Invertido de Altura Variable para  $t = 0, 0.13, 0.25$  s en la parte superior, y en la inferior para  $t = 1.25, 2.25, 4.88$  s

## **CAPÍTULO IV**

### **ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS**

Se procederá ahora a definir la Región de Atracción del controlador expuesto anteriormente en la sección 4.1. Así como también mostrar la forma de la Región de Captura en el plano sagital en la sección 4.2 para valores de empuje inicial dados en forma de velocidades en dicho plano. Finalmente se procede a contrastar las hipótesis planteadas en el capítulo 1 del presente Trabajo de Investigación.

#### **4.1. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN.**

En la Fig. 4.1 se puede observar las variables de posición del sistema mientras el controlador lleva los estados a la estabilidad. Se puede observar la caída exponencial de  $x$  y las maniobras realizadas en la altura del CdM, en la variable  $z$  para lograr la estabilidad.

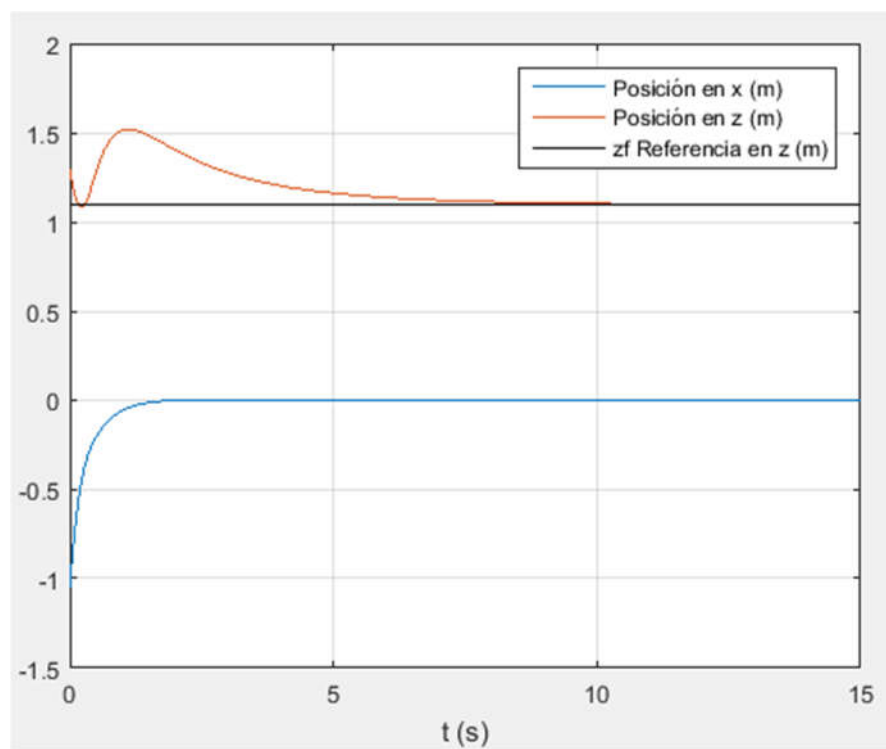


Fig. 4.1. Posiciones en  $x$  y  $z$  del sistema en los primeros 15s de tiempo.

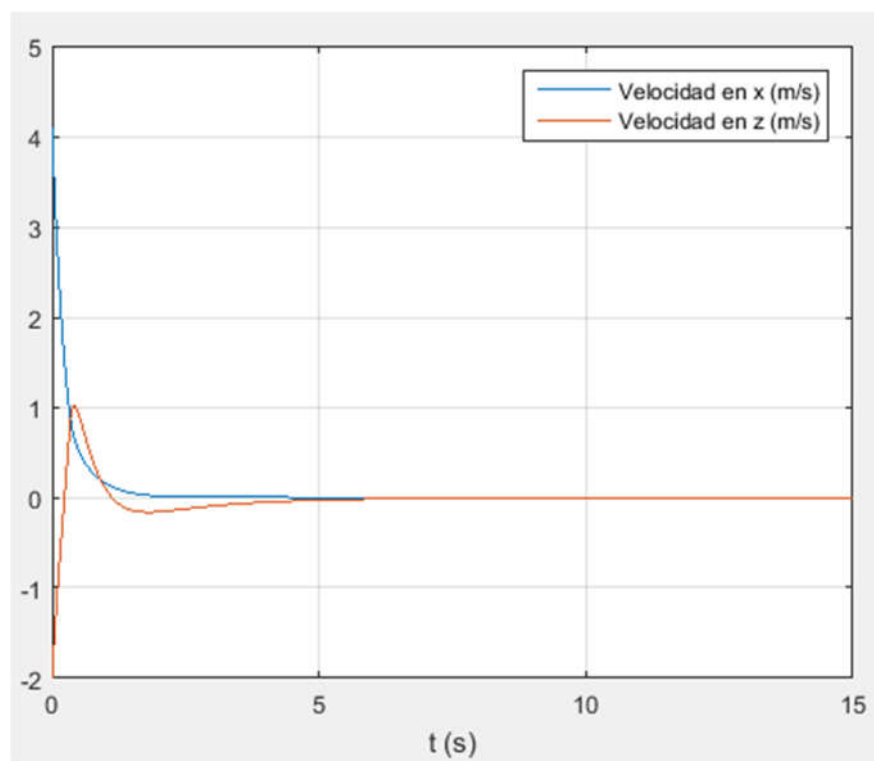


Fig. 4.2. Velocidades en  $x$  y  $z$  del sistema.

En la Fig. 4.2 se puede observar también las variables del sistema correspondientes a las velocidades reales. Vemos que la velocidades iniciales decaen, en  $x$  se frena directamente al robot para que no caiga, y en  $z$  realiza maniobras para lograr la estabilidad.

Podemos observar también en la Fig. 4.3. la saturación de la actuación  $u$  en menos del primer medio segundo y la consiguiente regularización de su valor hasta alcanzar su valor final. Variando valores se obtiene también que en algunos casos la saturación sucede, por lo cual es eficiente el presente método de control.

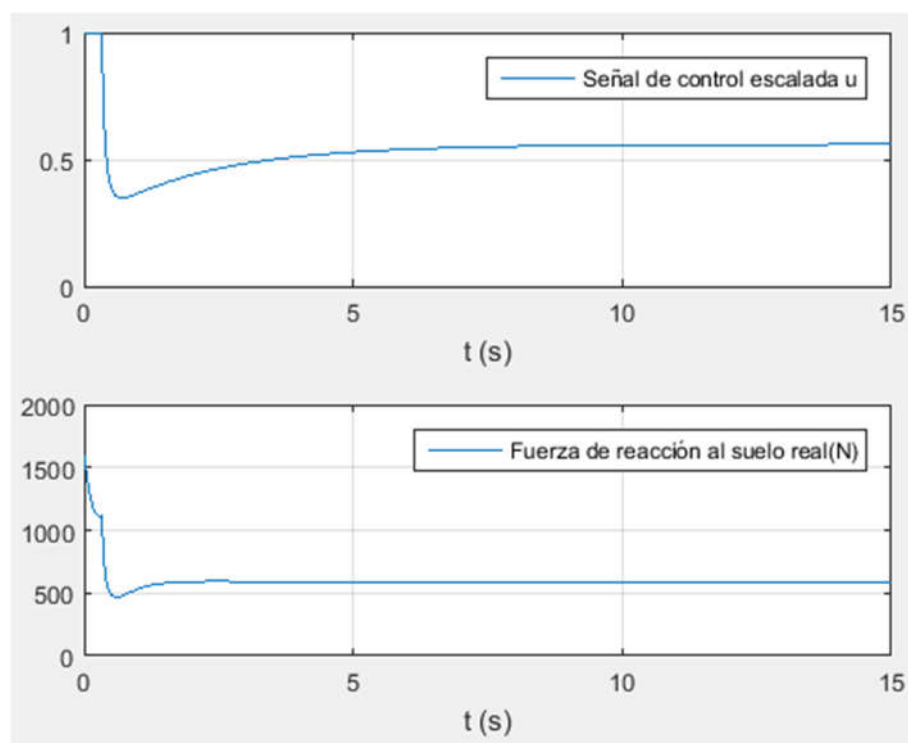


Fig. 4.3. Señal de control y Fuerza de Reacción del sistema.

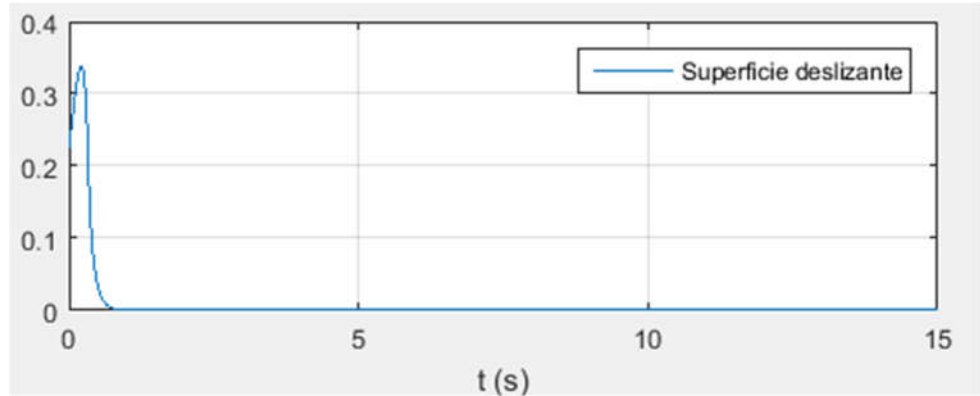


Fig. 4.4. Superficie deslizante y su convergencia a cero

En la Fig. 4.4. observamos que la superficie deslizante  $\sigma(z)$  mostrada en (52) inicialmente incrementa su valor debido a la saturación de la actuación. Después de esos primeros instantes (menos del primer segundo), la superficie deslizante empieza a dirigirse a cero, cumpliendo con la clásica condición de un controlador por modo deslizante:  $\sigma(z) > 0 \rightarrow \dot{\sigma}(z) < 0$ . Observamos además que, por la condición mencionada en (54), la superficie no presenta chattering y se dirige a 0 exponencialmente. Con esto queda mostrado que el control por modo deslizante indicado en (55) y (56) estabiliza el sistema y la simulación presente.

#### 4.2. REGIÓN DE ATRACCIÓN.

Ahora queremos definir la región del plano sagital en la que se puede lograr la estabilización en dos dimensiones. Una forma de determinar esto es obtener las velocidades iniciales del robot cuando es empujado, las cuales pueden obtenerse mediante sensores cinéticos en el centro de masa del robot. Sabemos que  $T$  y  $z_c$  determinan la región de estabilización, y son funciones de  $x$ ,  $z$ ,  $\dot{x}$  y  $\dot{z}$ . Entonces, al fijar la altura final del robot, la región de estabilización en las coordenadas  $x - z$  estará limitada por las ecuaciones



implícitas de  $T$  y  $z_c$  dadas por  $D_s$ . Asumamos ahora que el robot es empujado hacia adelante  $\dot{x}_0 > 0$ :

$$D_s = \left\{ (T, z_c) : T \geq 1, z_c \geq \frac{1}{2} \right\}$$

Recordemos ahora la función barrera  $B(\mathbf{z}) = 1 - T$ . Esta vez definiremos  $X_0 = \{T > 1, (T, z_c) \in \mathbb{R}^2\}$  y  $X_u = \{0 < T < 1, (T, z_c) \in \mathbb{R}^2\}$ . Vemos que  $X_0$  y  $X_u$  son conjuntos conexos, separados por la línea  $(T, z_c) = (1, z_c), z_c \in \mathbb{R}$ . Observemos que en  $X_0$ :

$$B(\mathbf{z}) = 1 - T < 1 - 1 = 0$$

Además en  $X_u$ :

$$B(\mathbf{z}) = 1 - T > 1 - 1 = 0$$

De acuerdo a (59) tenemos  $\lim_{T \rightarrow 1^+} u(\mathbf{z}) = 1$ , de hecho  $u(\mathbf{z})$  toma el valor de 1 ya que se ve en (59) que  $U(\mathbf{z}) > 1$  por lo que

$$\lim_{T \rightarrow 1^+} \dot{B}(\mathbf{z}) = \lim_{T \rightarrow 1^+} 1 - T^2 u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 1 - (1 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\varepsilon = 0^-$$

Con este argumento podemos ver que en una vecindad de la frontera de  $X_0$  se cumple:

$$\dot{B}(\mathbf{z}) = \frac{\partial B}{\partial \mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}} < 0$$

Observamos que estas condiciones son análogas a las planteadas en (31), (32) y (33), solo que la tercera condición sólo se cumple en la frontera. Se puede demostrar de la misma manera con la ecuación (60) que la función  $B(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} - z_c$ , con  $X_0 = \{z_c > \frac{1}{2}, (T, z_c) \in \mathbb{R}^2\}$  y  $X_u = \{z_c < \frac{1}{2}, (T, z_c) \in \mathbb{R}^2\}$  es una función barrera en los conjuntos mencionados. Vemos además que  $X_0$  y

$X_u$  son conexos, separados por la línea  $(T, z_c) = \left(T, \frac{1}{2}\right), T \in \mathbb{R}^+$ . Esto, junto con la función barrera anterior, implica que si empezamos en el conjunto:

$$D = \left\{ (T, z_c) \in \mathbb{R}^2, z_c > \frac{1}{2}, T > 1 \right\}$$

Entonces nos mantendremos en ese conjunto. Notemos que este conjunto es prácticamente el mismo que  $D_s$  de (43), excepto frontera, por lo que podemos afirmar que:

$$\mathbf{z}(t_0) \in D_s \rightarrow \mathbf{z}(t) \in D_s$$

Sólo queda probar que estar en  $D_s$  implicará que nos iremos a  $\sigma(\mathbf{z}) = 0$  y luego a nuestro punto de estabilidad. La única opción de que no pase esto es que el sistema diverja en  $D_s$  o se forme algún ciclo límite. Esto lo descartamos usando la siguiente función en  $\mathbf{z} \in D_s$ :

$$V(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{z})^2 \rightarrow \dot{V} = \sigma(\mathbf{z})\dot{\sigma}(\mathbf{z}) = -k\sigma(\mathbf{z})^2 \rightarrow \dot{V}(\mathbf{z}) \leq 0 \quad (63)$$

Es decir:

$$V(\mathbf{z}) \leq V_0 \rightarrow -|\sigma_0| < \sigma(\mathbf{z}) \leq |\sigma_0| \rightarrow f(T) - |\sigma_0|T < z_c < f(T) + |\sigma_0|T$$

Si el sistema divergiera, sólo lo haría bajo esta última restricción. Si  $T$  está acotado,  $z_c$  también lo está y el sistema no diverge. Entonces  $T$  debería alcanzar valores divergentes obligatoriamente y, en particular, en algún instante se cumpliría  $z_c < f(T) + |\sigma_0|T < \frac{1}{2}T^2$ . En esa zona tenemos  $\dot{z}_c \leq 0$ , por lo que los valores de  $z_c$  no pueden crecer más. Notemos ahora que según Fig. 3.1 y según la ecuación (60):  $\lim_{T \rightarrow \infty} u(\mathbf{z}) = 0$ , por lo que el controlador  $u$  para  $z_c$  fijo y  $T$  creciente tiene tendencia a dirigirse a 0, lo cual a su vez implica  $\dot{T} = -1 < 0$  y en consecuencia  $T$  no crecerá más. Concluimos que, por

contradicción, es imposible que el sistema diverja. La función anterior mostrada en (63) prueba que el sistema se dirige a  $V(\mathbf{z}) = 0 \rightarrow \sigma(\mathbf{z}) = 0 \rightarrow z_c = f(T)$  que a su vez, se probó que era un modo deslizante hacia  $(T, z_c) = (\sqrt{z_f}, \frac{z_f}{2})$ , y esto producía estabilización de  $(x, z)$  en el subsistema físico. En conclusión la región de atracción es:

$$D = \left\{ (T, z_c) \in \mathbb{R}^2, z_c > \frac{1}{2}, T > 1 \right\}$$

#### 4.3. ZONAS PARA EL PUNTO CAPTURA – REGION DE CAPTURA.

De  $T$  obtenemos:

$$-\frac{x}{\dot{x}} \geq 1 \rightarrow -x \geq \dot{x}$$

De  $z_c$  obtenemos:

$$z - \frac{x}{\dot{x}}\dot{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\dot{x}}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \rightarrow z \geq \frac{1}{2} + \frac{\dot{z}}{\dot{x}}x + \frac{1}{2\dot{x}^2}x^2$$

La primera región es un límite para el valor máximo de  $x$  (mínimo), si el robot se empuja hacia adelante (hacia atrás) y los valores  $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$  y  $\frac{1}{2\dot{x}^2}$  inicialmente son constantes, por lo que, en consecuencia, la segunda región es la parte convexa de una parábola. La intersección de las dos regiones nos da la región donde el centro de masa puede permanecer en las coordenadas con el pie de aterrizaje en (0,0)

Ahora, dado el centro de masa en (0,0) a un sistema de coordenadas, usando simétrico, podemos encontrar todos los puntos posibles en  $(x, z)$  en ese sistema donde es posible lograr el equilibrio, con el pie de aterrizaje en ese

punto. Usando simetría, sabemos que los puntos son  $(-x_0, -z_0)$ , por lo que reemplazando  $x = -x_0$  y  $z = -z_0$  en (37) y (38) obtenemos:

$$x_0 \geq \dot{x}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{\dot{z}}{\dot{x}} x_0 - \frac{1}{2\dot{x}^2} x_0^2 \geq z_0$$

Podemos trazar las regiones de la siguiente manera:

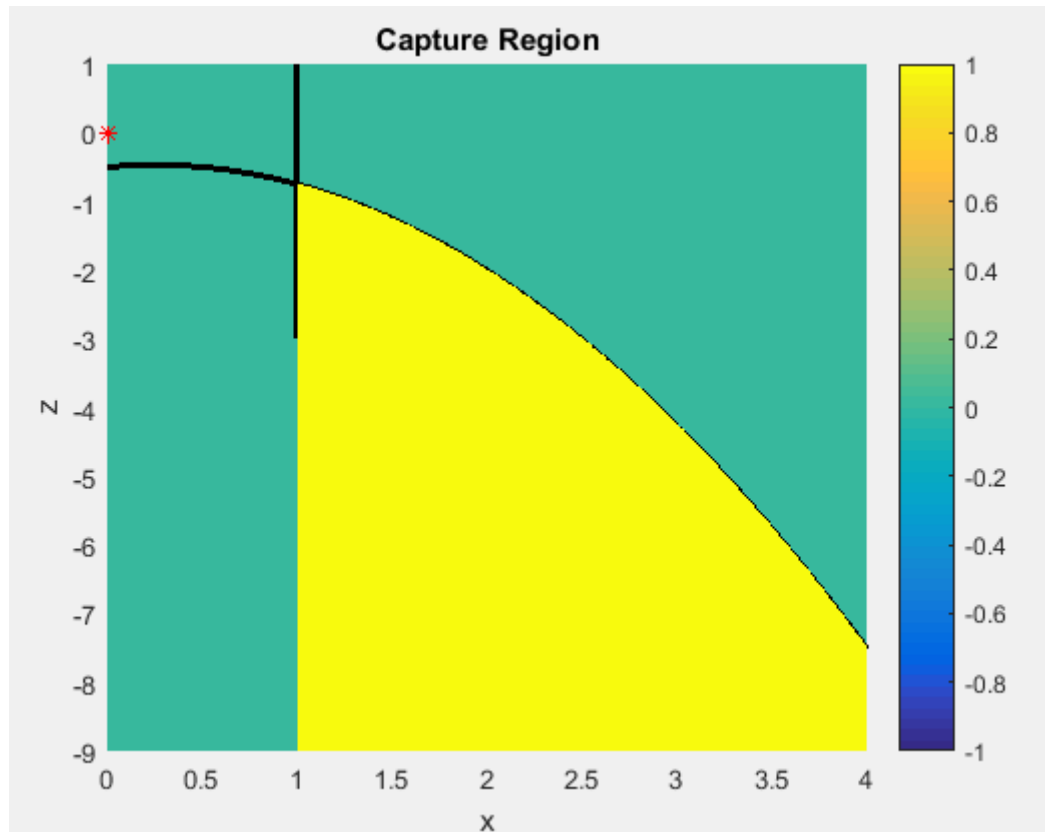


Fig. 4.5. Valores en el plano sagital de los físicamente posibles Punto Capturas. Región de Captura mostrada en Amarillo. CdM en  $(x, z) = (0,0)$ . Valores para  $\dot{x} = 1, \dot{z} = \frac{1}{4}$

#### 4.4. CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS.

Se puede observar que se han verificado en el capítulo 3 las hipótesis específicas enumeradas en el capítulo 1. Más detalladamente:

- Confirmamos que existe un cambio de variables que reducen el sistema de cuatro a dos variables mostrado en (45), las cuales son autónomas y el resto del sistema es ISS como lo prueba la ecuación (50) del capítulo 3.2.

- Sí existe una superficie en el plano de fase reducido estable donde se puede aplicar Control por Modo Deslizante, como es (57), la cual además tiene la característica de no tener polos o singularidades en la zona de trabajo. Esto se observa en la sección 3.3

- Se pudo lograr estabilidad bajo la restricción de contacto unilateral y saturación de entrada haciendo cambios en los parámetros de control comúnmente usados, más exactamente se hizo el valor de ganancia  $k$  variable en función de los estados como se ve en (62).

- En la sección 4.1 se prueba que se puede estabilizar en toda la región donde es físicamente posible hacerlo con las restricciones planteadas, en particular se realiza con funciones barrera simples, junto con observaciones y funciones para demostrarlo.

En general afirmamos entonces que la hipótesis general es cierta: Existe un controlador basado en Control por Modo Deslizante que estabiliza el Péndulo Invertido de Altura Variable bajo condiciones de contacto unilateral y saturación de entrada en la región donde es físicamente posible controlarlo.

## CONCLUSIONES

Podemos concluir entonces que hemos cumplido con los objetivos planteados inicialmente como se detallan a continuación:

- 1) Se ha logrado estabilizar el Péndulo Invertido de Altura Variable con las restricciones presentadas desde el inicio de la investigación: Considerar contacto unilateral y Saturación de Entrada, como se demuestra en las subsecciones 3.3 y 4.2. Hay que notar que esta entrada no es exactamente fuerza de reacción del suelo, sino una función de esta. Esto se menciona más adelante en Recomendaciones.
- 2) Es posible y útil analizar el sistema de 4 variables de estado  $(x, z, \dot{x}, \dot{z})$  en otras 2 más simples  $(T, z_c)$  y entender cómo se comporta el sistema aquí. El resto del sistema es ISS, dicho informalmente mientras acotemos las dos variables  $(T, z_c)$ , todo el sistema estará acotado como se demuestra en la subsección 3.2.
- 3) Existe un Control por Modo Deslizante en función a la altura final deseada que estabiliza el sistema aún bajo saturación de entrada, el cuál además escogiendo apropiadamente ganancias, controla en todo el espacio donde es posible físicamente estabilizar. Este control se indica en la subsección 3.3.
- 4) Respecto a la saturación, concluimos que es eficiente usar una ganancia mayor o igual a una constante mínima, que incremente su valor mientras más cerca está de la frontera de estabilización  $D_S$ . Esto se demostró usando

funciones barrera y los límites respectivos de los valores que toma la ley de control  $u(\mathbf{z})$  en dicha frontera, como se detalla en la subsección 3.3 .

## RECOMENDACIONES

- 1) Estamos saturando al sistema por medio de la variable  $u$  en la ecuación (34).

Sin embargo, dada la ecuación (7) podemos ver fácilmente que saturar  $u$  no es igual a saturar la fuerza de reacción al suelo, ya que para masa unitaria tenemos:

$$f_{ground} = \|qu\| = \|q\|u = \sqrt{x^2 + z^2}u \rightarrow u = \frac{f_{ground}}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

Esta ecuación nos indica que estamos en realidad saturando la fuerza de reacción dividida entre el radio instantáneo del Péndulo Invertido de Altura Variable, es decir, la distancia del punto de contacto al suelo al centro de masa, el cual por obvias razones no es constante, pero sí se puede acotar en valores máximos y mínimos. El máximo correspondería al robot estirado completamente, con las componentes que influyen en la masa lo más alejadas del suelo posible, es decir, un humanoide parado con los brazos extendidos hacia arriba. El punto mínimo correspondería al robot contraído sin embargo, en la práctica este valor se podría considerar la mitad del valor máximo. Así, se tiene una buena estimación de la fuerza de reacción máxima aplicable.

- 2) Un tema que no se ha abarcado son las restricciones cinemáticas del robot que no se están teniendo en cuenta. Un ejemplo de ellas es que los valores que pueden tomar  $x$  y  $z$  son acotados, mientras que el controlador del presente trabajo de investigación, si bien puede controlar en toda la región



donde es físicamente posible estabilizar, debe muchas veces enviar el valor de  $z$  a números extremadamente altos para alcanzar el balance.

- 3) Se recomienda asimismo analizar otros posibles valores de la función  $\sigma(z)$  o de  $f(T)$  en particular, ya que se puede tener un performance distinto al cambiar dicha función. Sin embargo, se debe tomar muy en cuenta la singularidad que se presentó en el controlador  $u(z)$  como se ve en la ecuación (55). Escoger  $f(T)$  puede ser difícil, pero es posible encontrar otras funciones que no tienen dicha singularidad en la región de interés  $D_s$ .

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] R. Tedrake, «Underactuated Robotics | edX,» [En línea]. Available: <https://www.edx.org/es/course/underactuated-robotics-mitx-6-832x-0>. [Último acceso: 3 Octubre 2018].
- [2] O. E. Ramos y K. Hauser, «Generalizations of the capture point to nonlinear center of mass paths and uneven terrain,» *Humanoid Robots (Humanoids), 2015 IEEE-RAS 15th International Conference on*, p. 851–858, Nov 2015.
- [3] S. Kajita y K. Tani, «Study of dynamic biped locomotion on rugged terrain-derivation and application of the linear inverted pendulum mode.,» *Proceeding of IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, vol. 2, pp. 1405-1411, 1991.
- [4] S. Kajita, K. Tani y A. Kobayashi, «Dynamic Walk Control of a Biped Robot along the Potential Energy Conserving Orbit,» *Proceedings of International Workshop on Intelligent Robots and System (IROS '90)*, pp. 789-794, 1990.
- [5] J. E. Pratt y S. V. Drakunov, «Derivation and application of a conserved orbital energy for the inverted pendulum bipedal walking model,» *Robotics and Automation, 2007 IEEE International Conference on*, p. 4653–4660, Abril 2007.
- [6] T. Koolen, M. Posa y R. Tedrake, «Balance control using center of mass height variation: limitations imposed by unilateral contact,» *Humanoid Robots (Humanoids), 2016 IEEE-RAS 16th International Conference*, pp. 8-15, 2016.
- [7] J. Pratt, J. Carff, S. Drakunov y A. Goswami, «Capture Point: A Step toward Humanoid Push Recovery,» *Proceedings of the IEEE-RAS/RSJ International Conference on Humanoid Robots*, pp. 200-207, 2006.
- [8] S. Caron y A. Kheddar, «Dynamic Walking over Rough Terrains by Nonlinear Predictive Control of the Floating-base Inverted Pendulum,» *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp. 5017-5024, 2017.
- [9] H. K. Khalil, «College of Engineering, Michigan State University,» [En línea]. Available: [https://www.egr.msu.edu/~khalil/NonlinearSystems/Sample/Lect\\_19.pdf](https://www.egr.msu.edu/~khalil/NonlinearSystems/Sample/Lect_19.pdf). [Último acceso: 02 Octubre 2018].

- [10] J.-J. E. SLOINE, Applied Nonlinear Control, New Jersey, USA: Prentice-Hall, 1991.
- [11] S. Fadali, «University of Nevada, Reno - Wolfweb Websites,» University of Nevada, Reno, [En línea]. Available:  
<https://wolfweb.unr.edu/~fadali/EE776/InstanceStateStab.pdf>. [Último acceso: 03 Octubre 2018].

# **ANEXO**

## ANEXO: CÓDIGO EN MATLAB.

```
clc, clear all, close all,
%% Condiciones Iniciales y cambio de variables
simp=1;
umax=16;
g=9.81;

x0=-1.05;
z0=1.3;
zf0=1.1;
xd0=4.1;
zd0=-2;

x=x0;
z=z0*umax/g;
xd=xd0/sqrt(umax);
zd=zd0*sqrt(umax)/g;
zf=zf0*umax/g;

Ts=-x/xd
Zc=z-x/xd*zd-1/2*(x/xd)^2

g=1;

%% Definición de tiempo en simulación

T=0.00025;
tf=60;
it=(1:tf/T)*T;

Ts=-x/xd
Zc=z-x/xd*zd-1/2*(x/xd)^2
%% Control, Saturación e Integración por Euler
figure(1)

k2=(sqrt(zf)+1)/2;

for i=1:tf/T
Ts=-x/xd;
Zc=z-x/xd*zd-1/2*(x/xd)^2;
k=1+1./(Ts-1);
u=min(max((1+k.*Ts.*(1-Ts))*k2+(k.*Ts+1).*(Zc-1/2))./(Ts.^4 ...
    .* (1/2+sqrt(zf)./(2*Ts.^2))),0,1);

xdd=x*u;
zdd=-g+z*u;
xd=xd+T*xdd;
zd=zd+T*zdd;
x=x+T*xd;
z=z+T*zd;

X(:,i)=[x;z];
Xd(:,i)=[xd;zd];
XR(:,i)=[x;z*9.81/umax];
```

```

XRd(:,i)=[xd*sqrt(umax);zd*9.81/sqrt(umax)];

U(i)=u;
end
Ts=-X(1,:)./Xd(1,:);
Zc=X(2,:)-X(1,:)./Xd(1,:).*Xd(2,:)-1/2*(Ts).^2;
%% Gráfico de simulación
Tdis=0.1;
if simp
for i=0:round((tf/Tdis)/2)
    hold off
plot(XR(1,round(1+i*Tdis/T)),XR(2,round(1+i*Tdis/T)),'*r');
hold on
plot(XR(1,:),XR(2:,:), 'r')
line([XR(1,round(1+i*Tdis/T)) 0],[XR(2,round(1+i*Tdis/T)) 0])
DX=0.5*XRd(1,round(1+i*Tdis/T));DY=0.5*XRd(2,round(1+i*Tdis/T));
quiver(XR(1,round(1+i*Tdis/T)),XR(2,round(1+i*Tdis/T)),DX,DY, ...
'g','MaxHeadSize',0.4)
quiver(0,0,XR(1,round(1+i*Tdis/T))*U(round(1+i*Tdis/T)),XR(2, ...
round(1+i*Tdis/T))*U(round(1+i*Tdis/T)), 'linewidth',2, ...
'MaxHeadSize',0.4)
%legend('CoM', 'Trayectoria', '"Pierna" virtual', ...
%      'Vector velocidad CoM','Fuerza de Reacción')
axis([-1.5 1 -1 2])
title('x vs z')
xlabel('x (m)'),ylabel('y (m)'),
drawnow
%pause
pause(Tdis/sqrt(umax))
end
end
%% Gráfico de Salidas: Posición
figure(2)
plot(it/sqrt(umax),XR(1,:)), hold on
plot(it/sqrt(umax),XR(2,:))
plot(it/sqrt(umax),zf0*ones(size(it)),'k')
xlabel('t (s)')
legend('Posición en x (m)','Posición en z (m)' ...
,'zf Referencia en z (m)')
grid on
%% Gráfico de Salidas: Velocidades
figure(3)
plot(it/sqrt(umax),XRd(1:,:), hold on
plot(it/sqrt(umax),XRd(2:,:))
xlabel('t (s)')
legend('Velocidad en x (m/s)','Velocidad en z (m/s)')
grid on
%% Gráfico de Entradas: Señal de control
figure(4)
subplot(211)
plot(it/sqrt(umax),U), hold on
axis([0 15 0 1])
xlabel('t (s)')
legend('Señal de control escalada u')
grid on
subplot(212)
plot(it/sqrt(umax),umax*60*U.*sqrt(XR(1,:).^2+XR(2,:).^2)), hold on

```

```
xlabel('t (s)')
legend('Fuerza de reacción al suelo real(N)')
grid on
%% Gráfico de Superficie deslizando
figure(5)
plot(it/sqrt(umax), (1./Ts).*(Zc-((sqrt(zf)+1)*(Ts-1)/2+1/2))), hold
on
xlabel('t (s)')
legend('Superficie deslizando')
grid on
```