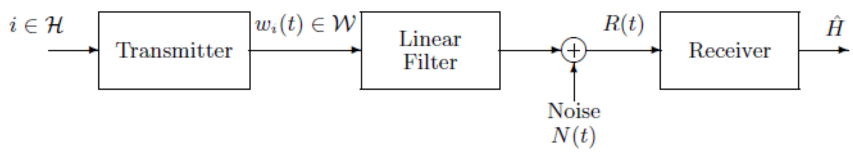
Comunicaciones Digitales: Simulador con Notas adicionales.

Abril de 2019

Preliminares

Las comunicaciones digitales es un campo dentro de la ingeniería que involucra diversas áreas como la teoría de probabilidad, procesos estocásticos, álgebra lineal y análisis de Fourier. Un objetivo clave es entender como comunicarse a través de un canal modelado como el que siguiente:



La fuente elige un mensaje reprsentado en la figura por la letra i, la cual proviene de la variable aleatoria $\mathscr{H}$ que toma valores en un alfabeto finito $\mathscr{H} = \{0, 1, ..., m-1\}$. El mensaje está representado por una secuencia de bits, pero para una notación mas conveniente resulta sencillo etiquetar a tal mensaje con un índice. El transmisor mapea el mensaje i en una señal $w_i \in \mathscr{W}$ donde $\mathscr{W}, \mathscr{H}$ tienen la misma cardinalidad.

El canal filtra la señal y le añade ruido Gaussiano $N(t)$. El receptor toma el mensaje basado en la salida del canal, i.e. $R(t)$; por lo que $\hat{\mathscr{H}}$ es la estimación de $\mathscr{H}$ (Debido al comportamiento aleatorio del ruido, $\hat{\mathscr{H}}$ es una variable aleatorio incluso bajo la suposición de que $\mathscr{H} = i$).

El objetivo principal es maximizar el número de bits por segundo a comunicar, manteniendo la probabilidad de error bajo algún umbral. Estas condiciones se pueden expresar en términos de la potencia de señal y el ancho de banda. El ruido se dice que es Gaussiano porque proviene de la contribución de varias fuentes; en tanto que el justificativo del filtrado por parte del canal se puede hacer de dos formas:

- Conceptual: Bandas de frecuencia licensiadas
- Física: Reflexiones y corrimientos

Por lo que una expresión correcta del canal es decir que es un canal Gaussiano de banda limitada. Matematimáticamente el transmisor mapea, en una relación uno-a-uno, el conjunto de mensajes con el conjunto de señales. Sin pérdida de generalidad, sea el conjunto de mensajes $\mathscr{H} = \{0, 1, ..., m-1\}$ para algún entero $m \geq 2$, para el canal modelado anteriormente, el cojunto de señales $\mathscr{W} = \{w_0(t), w_1(t), ..., w_{m-1}(t)\}$ consiste de señales continuas y de energía finita. (Podemos ver las señales como un estímulo que se utiliza para exitar la entrada del canal, por parte del transmisor (Tx).

Incluso si el modelo dela fuente produce un índice de $\mathscr{H} = \{0, 1, ..., m-1\}$ en vez de de una secuencia de bits, podemos aún medir la tasa de comunicación en términos de **`bits por segundo (bps)`**

Si podemos enviar una señal cada T segundos, entonces, la tasa de mensajes es $\frac{1}{T}$[msg/seg] y la tasa de bit es $\frac{log_2 m}{T}$ [bps].

Cabe aclarar, que una señal puede ser descripta por un número, n de parámetroscon respecto a una elección apropiada de un sistema de referencia, denominado base ortonormal. Si elegimos cada coordenada como una función de un cierto número de bits, cuantas más coordenadas n tengamos, más bits podremos transmitir. Sin embargo, Nyquist establece que para que no se produzca una interferencia intersímbólica, (ISI), por lo que si una señal está confinada a un intervalo específico de tiempo cuya duración es T segundos, un intervalo de frecuencia de ancho B, entonces, el entero n puede elegirse de acuerdo a:

$$\eta BT$$

Esta expresión proviene del hecho que, analizando una transmición PCM (Pulse Code Modulation - Modulación de pulsos codificados) con:

- n es el número de símbolos por palabras.
- $T_s = \frac{1}{\omega_s}$ tiempo entre muestras
- $T = \frac{T_s}{n}$ duración de un símbolo
- $\eta = \frac{1}{T}$ tasa de símbolos por segundo

De acuerdo a la condición de ISI:

$$B \geq \frac{\eta}{2} = B \geq \frac{1}{2T} \rightarrow 2BT \geq \eta$$

Para determinar el número máximo de bits que se pueden transportar con una señal, Hartley introdujo dos condiciones:

- Los símbolos no pueden tomar valores arbitrarios extremadamente grandes en el conjunto $\mathbb{R}$
- El receptor no puede estimar un símbolo con presición infinita

Por ello, los símbolos deberían tomar valores en un subconjunto discreto de algún intervalo $[-A, A]$.
Si $\pm\Delta$ es la presición del receptor, entonces los símbolos deben tomar algún valor de un alfabeto $\{a_0, ..., a_{m-1}\} \subset [-A, A]$ tal que:

$|a_i - a_j| \geq 2\Delta, i \neq j$

Esto implica que el tamaño del alfabeto puede ser a lo sumo;

$$m = 1 + \frac{A}{\Delta}$$

Puesto que hay m^n secuencias distintas de n longitud con símbolos de un alfabeto de tamaño m, y si deasemos trasmitir una secuencia de k bits, tenemos 2^k distintas secuencias y cada una debe ser mapeada un símbolo distinto. Implica que:

$$2^k \leq m^n$$

Al reemplazar $m = 1 + \frac{A}{\Delta}$ y $n = 2BT$, tenemos de acuerdo a lo anterior:

$$\frac{k}{T} \leq 2Blog_2(1 + \frac{A}{\Delta})$$

Que es la cantidad máxima de bps que pueden ser enviados de acuerdo a las características antes mensionadas.

Hartley no tuvo en cuenta un factor muy importante: el ruido. En 1926 Johnson, descubrio que todo conductor está afectado por ruido térmico. La idea que la señal recibida debería ser modelada como la suma de la señal trasminitda además del ruido proviene del trabajo de Wiener (1942).

Antes de la revolucionaria publicación de Shannon en 1948, era común creer que la probabilidad de error inducida por el ruido se podía reducir solamente incrementando la potencia de la señal o reduciendo el bit rate. Shannon demostró que el ruido puede imponer un límite del número de bps que el transmisor puede enviar de forma confiable, pero a medida que nos comunicamos debajo de ese límite, la probabilidad de error se puede hacer tan pequeña como deseemos sin modificar la potencia de señal y el ancho de banda. El limite al bit rate se denomina capacidad del canal.

Para la configuración de interés para nosotros es el lado derecho de:

$$\frac{k}{T} \leq Blog_2\left(1 + \frac{P}{N_0 B}\right)$$

Donde:

- P es la potencia de la señal trasmitida
- $\frac{N_0}{2}$ es la densidad de potencia espectral del ruido (Asuminedo que sea blanco y Gaussiano)

Esta fórmula es sólamente un caso especial de una fórmula general obtenida por Shannon. Hay dos conceptos que deben quedar fijos para poder avanzar:

- La esencia de la fuente es su comportamiento aleatorio. Si el receptor sabe exactamente lo que dice el emisor, no hay necesidad de escuchar.
- Para cada fuente,, existe un codificador de la misma que convierte la salida de la fuente en una cadena más corta (en promedio) de dígitos binarios y un decodificador de fuente que reconstruye esta codificación.