Actividades día 2: Entrelazamiento y Protocolos Cuánticos

Ejercicio 1

Supongamos que Alice y Bob comparten un par entrelazado en el estado,

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

Alice decide hacer una medición de su cubit en la base Z o en la base X,

- **Medir en Z** colapsará el sistema a los estados $\boxed{|00\rangle \text{ o } |11\rangle}$ con la misma probabilidad.
- **Medir en X** colapsará el sistema a los estado $\boxed{|++\rangle \text{ o } |--\rangle}$ con la misma probabilidad.

Ahora, en el caso común sin clonación, Bob podría medir su cubit en la base Z luego de esto y obtendría $|0\rangle$ o $|1\rangle$ sin descubrir ningún tipo de información sobre lo que hizo Alice. En cambio, si Bob pudiese clonar su cubit antes de realizar la medición en Z cuantas veces quiera, podría hacer tomografía sobre este. Si encuentra que su cubit colapsa siempre al mismo estado, eso significa que Alice midio en base Z, si no, Alice midio en base X.

Esto sería un ejemplo de comunicación superlumínica.

Ejercicio 2

a) Se pueden pensar los algoritmos de codificación superdensa y teletransportación como dos caras de la misma moneda por los recursos que toman y devuelven.

Su similitud está en que ambos algoritmos precisan un par entrelazado de cubits que serán destruidos para realizarlo, luego Alice tiene alguna información (En teletransportación el cubit y en superdense coding el par de bits) que será replicada por Bob utilizando su cubit del par y alguna otra información que brindará Alice.

Se pueden pensar como opuestos cuando vemos la información que Alice debe transportar a Bob y lo que construye con ella, en superdense coding se transporta el cubit modificado por Alice y Bob construye un par de bits mientras que en teletransportación se transportan el par de bit medidos y se reconstruye un cubit.

b) **Algoritmo de Teletransportación**:

Partimos del par entrelazado $|\phi+\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \rightarrow$$

Se introduce el cubit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ que se quiere teletransportar al sistema

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle(|00\rangle + |11\rangle) \rightarrow$$

Se aplica un CNOT de $|\psi\rangle$ al cubit de Alice

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle(|10\rangle + |01\rangle)) \rightarrow$$

Luego se aplica un Hadamard al cubit a teletransportar

$$\frac{1}{2}(\alpha(|0\rangle + |1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle)(|10\rangle + |01\rangle)) \rightarrow$$

Podemos reagrupar términos para obtener una expresión mas coherente

$$\frac{1}{2}(|00\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+|01\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)+|10\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)+|11\rangle(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle))$$

Con esta expresión, Bob puede determinar el estado de su cubit según el valor al que hayan colapsado los otros dos y así ajustarlo con las compuertas correspondientes para transformarlo en $|\psi\rangle$.

Algoritmo de codificación superdensa:

Este algoritmo depende de la información que quiera enviar Alice, según lo que quiera codificar aplica distintas compuertas a su cubit y se lo envía a Bob, luego este lo decodificará haciendo un CNOT y un Hadamard sobre el cubit que Alice le envió obteniendo un estado que siempre colapsa al par de bits que Alice quería enviar

$$00 \Rightarrow |\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|01\rangle) \to \frac{1}{2}(|00\rangle+|01\rangle+|00\rangle-|01\rangle) = |00\rangle$$

$$01 \Rightarrow Z|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle-|11\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle-|01\rangle) \to \frac{1}{2}(|00\rangle+|01\rangle-|00\rangle+|01\rangle) = |01\rangle$$

$$10 \Rightarrow X|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle+|10\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle+|10\rangle) \to \frac{1}{2}(|10\rangle-|11\rangle+|10\rangle+|11\rangle) = |10\rangle$$

$$11 \Rightarrow iY|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-|10\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle-|10\rangle) \to \frac{1}{2}(|10\rangle-|11\rangle-|10\rangle-|11\rangle) = -|11\rangle$$

c) Resuelto en TP2-Ej2c.ipynb

Ejercicio 3

Supongamos un escenario donde Alice y Bob tienen que medir propiedades de dos particulas, una cada uno. Alice mide A,A' y Bob mide B,B', las propiedades pueden tomar valores de ± 1.

La prueba consiste en observar el valor de $S = E(AB) + E(AB') + E(A'B) - E(A'B')$ donde E es el valor promedio.

a) En un escenario clásico donde las variables están ocultas pero definidas antes de la medición podemos pensar lo siguiente,
primero reordenamos estrategicamente el termino, $S(\lambda) = AB + AB' + A'B - A'B' = A(B + B') + A'(B - B')$.
(λ indica la variable oculta que determina todos los resultados de las mediciones)

Si $B = B'$	Si $B \neq B'$
$B + B' = \pm 2$	$B + B' = 0$
$B - B' = 0$	$B + B' = \pm 2$
$S(\lambda) = \pm 2A = \pm 2$	$S(\lambda) = \pm 2A' = \pm 2$

Para cualquier λ, $|S(\lambda)| \leq 2$, es claro entonces que se cumple también para el promedio, $|S| \leq 2$

b) Analicemos un caso utilizando mecánica cuántica, supongamos que Alice y Bob comparten un estado entrelazado,
$|\Psi^-\rangle = \dfrac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$.
y hacen mediciones de la siguiente manera, $A = \sigma_z, A' = \sigma_x, B = -\dfrac{\sigma_z + \sigma_x}{\sqrt{2}}, B' = \dfrac{\sigma_z - \sigma_x}{\sqrt{2}}$.

Algunos cálculos simples muestran que los valores promedios para los observables están dados por la notación $\langle . \rangle$ y son,

$$\langle AB \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \langle A'B \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \langle AB' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \langle A'B' \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Entonces,

$$S = E(AB) + E(AB') + E(A'B) - E(A'B') = \langle AB \rangle + \langle AB' \rangle + \langle A'B \rangle - \langle A'B' \rangle = 2\sqrt{2}$$

Hay un contradicción con lo observado en el escenario clásico, para resolver esta aparente paradoja nos remitimos a la experimentación que finalmente le dio la razón a la mecánica cuántica. Los resultados demuestran que el realismo y la localidad no pueden valer al mismo tiempo.