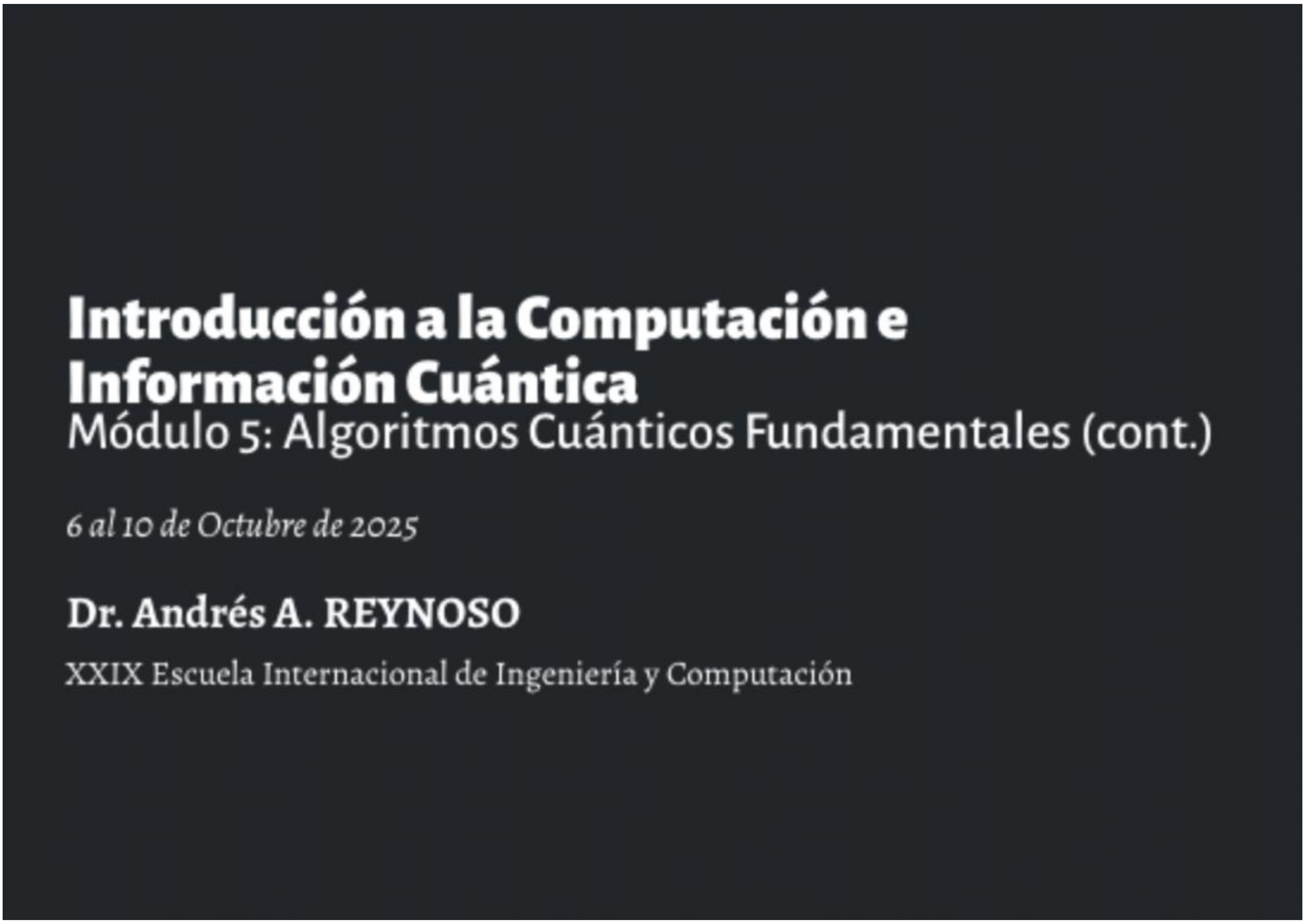


Figuras tomadas de por ejemplo

notebooks de algoritmos de IBM qiskit

https://quantum.cloud.ibm.com/learning/en/courses/fundamentals-of-quantum-algorithms

TP3: Explore explique y presente código a su gusto personal de esos notebooks.

Problema de Deutsch

Es un problema tipo promesa (se nos promete que hay funciones balancedas o constantes sobre todas las entradas posibles)

Dada función $f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$

Pregunta: ¿Es f constante o balanceada?

- **Constante:** $f(0) = f(1)$
- **Balanceada:** $f(0) \neq f(1)$

Solución clásica: Evaluar $f(0)$ y $f(1)$ (2 llamadas)

Solución cuántica: 1 evaluación de U_f

a	$f_1(a)$
0	0
1	0

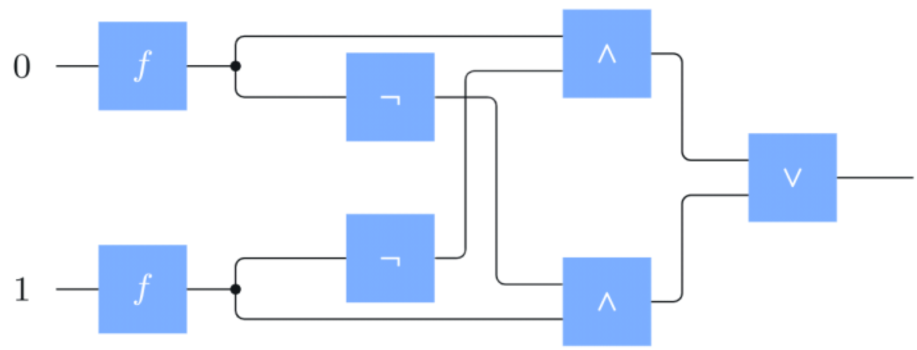
a	$f_2(a)$
0	0
1	1

a	$f_3(a)$
0	1
1	0

a	$f_4(a)$
0	1
1	1

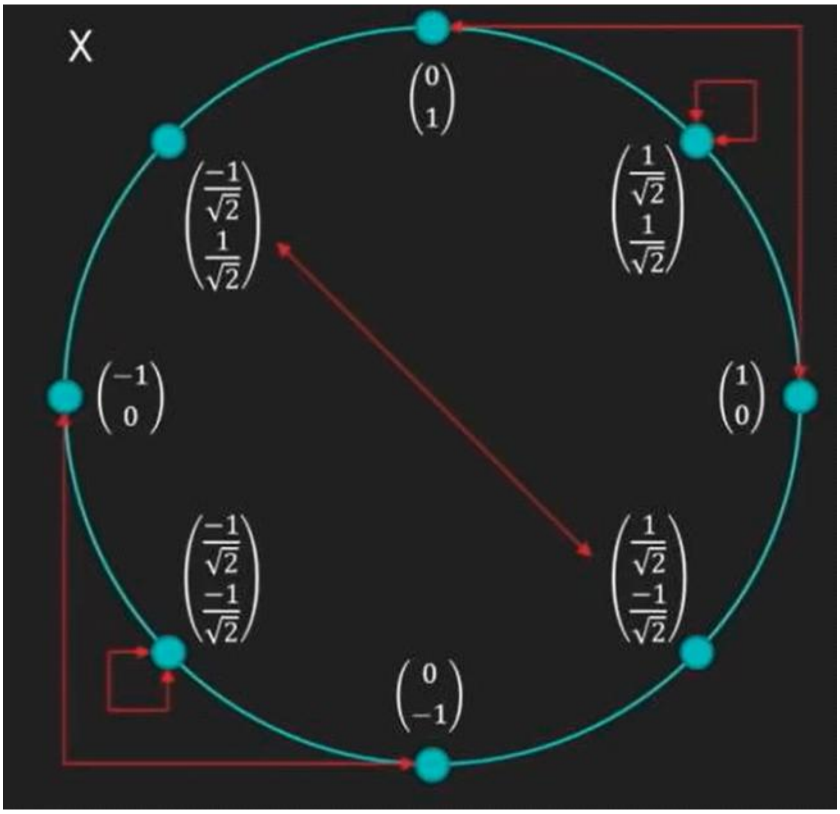
function	string
f_1	00
f_2	01
f_3	10
f_4	11

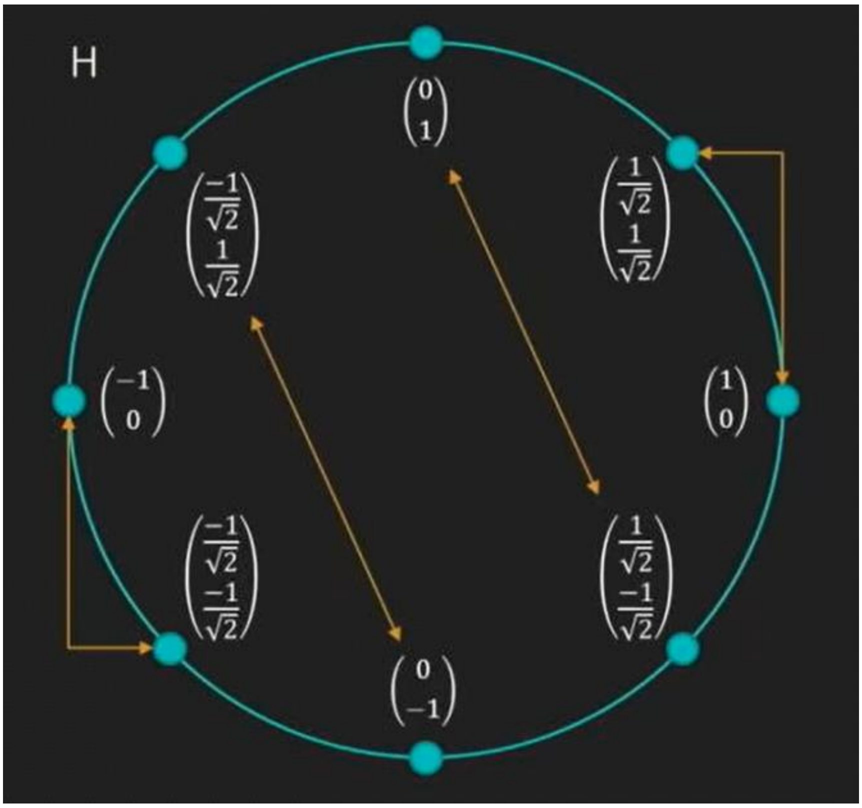
Para lograr clasificar si es balanceada o no un algoritmo clásico requiere dos queries de f(x)



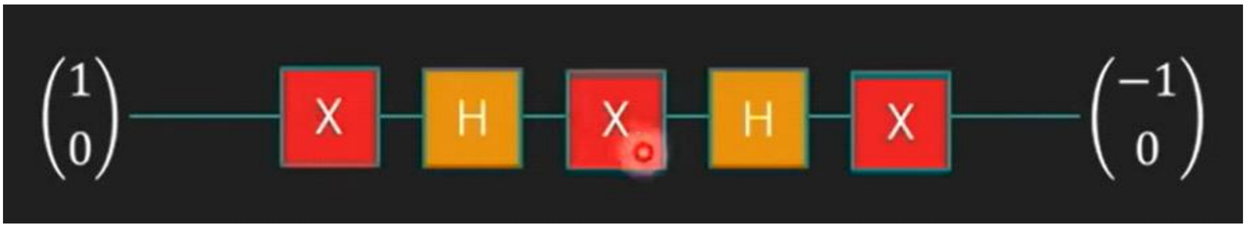
Ejercicio TP3 : Demuestre que la salida de estas operaciones clásicas distingue en funciones balanceadas o constantes

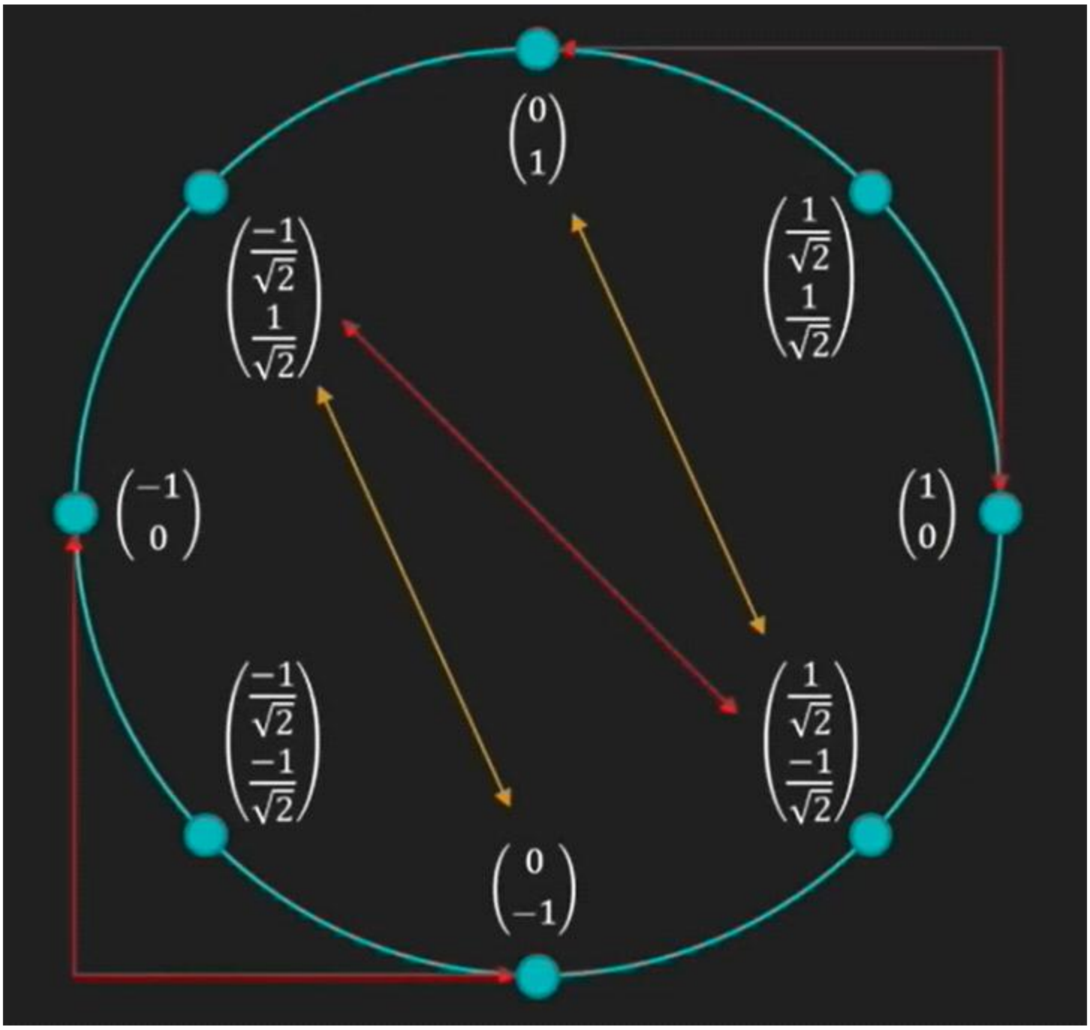
Forma visual de las transformaciones: uso del circulo unidad (estados con componente y nula: OJO que NO es directamente el corte de la esfera de Bloch tomando ny=0)



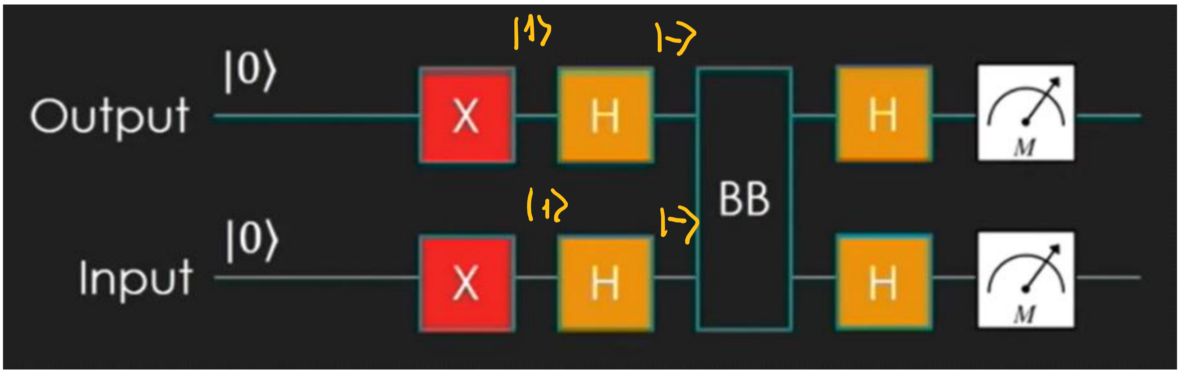


Viendo las transformaciones en circulo unidad (2)

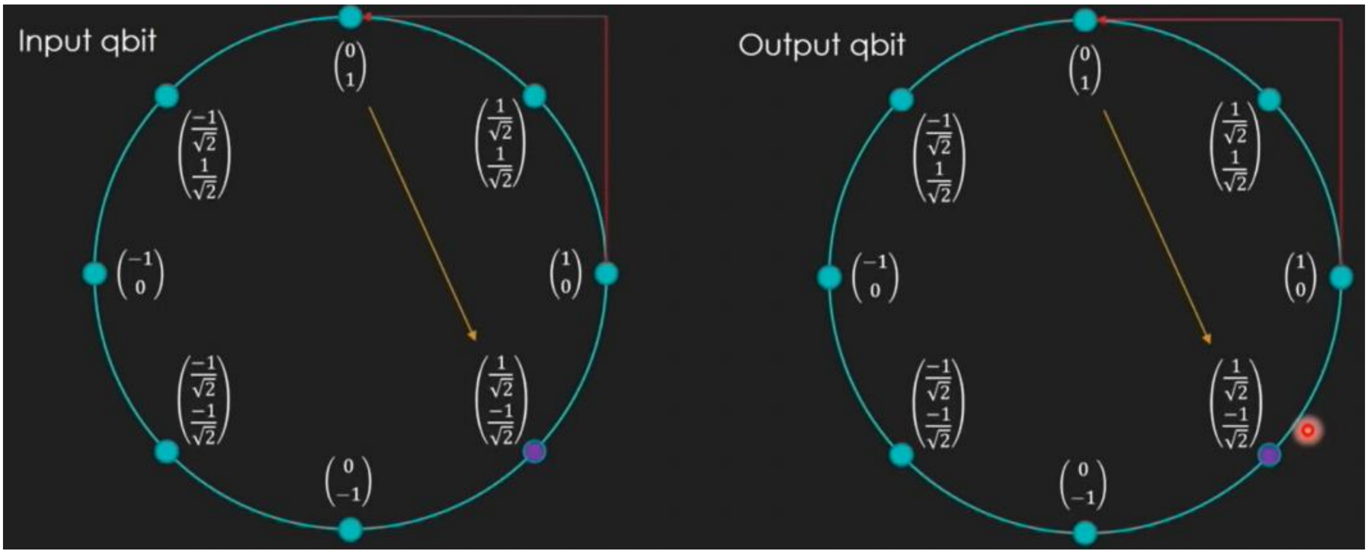




Algoritmo de para el problema de



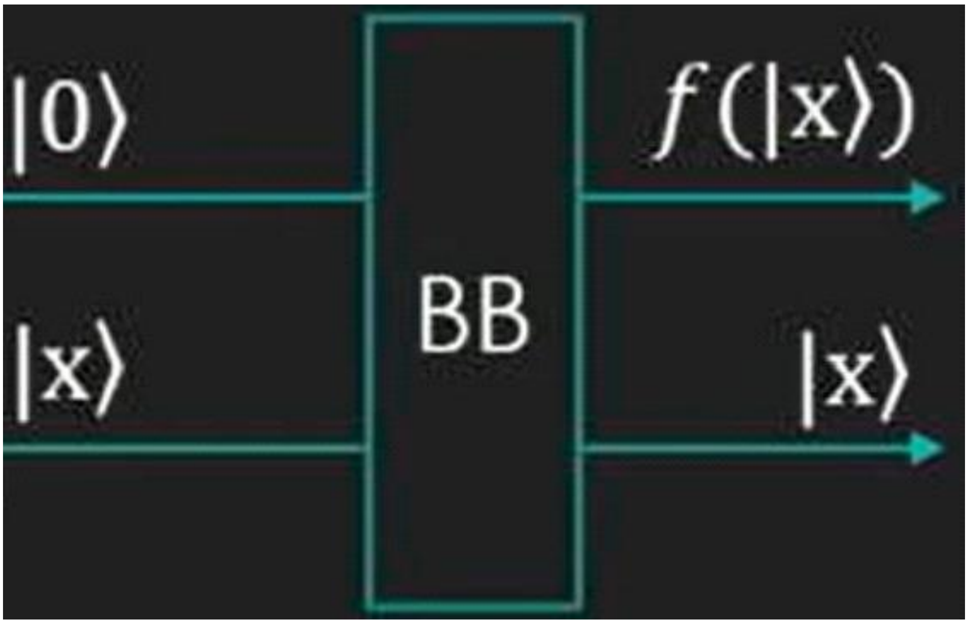
PREPROCESADO HASTA ANTES DE LA CAJA NEGRA



Nos queda entrando al Oráculo: $|-\rangle \otimes |-\rangle$

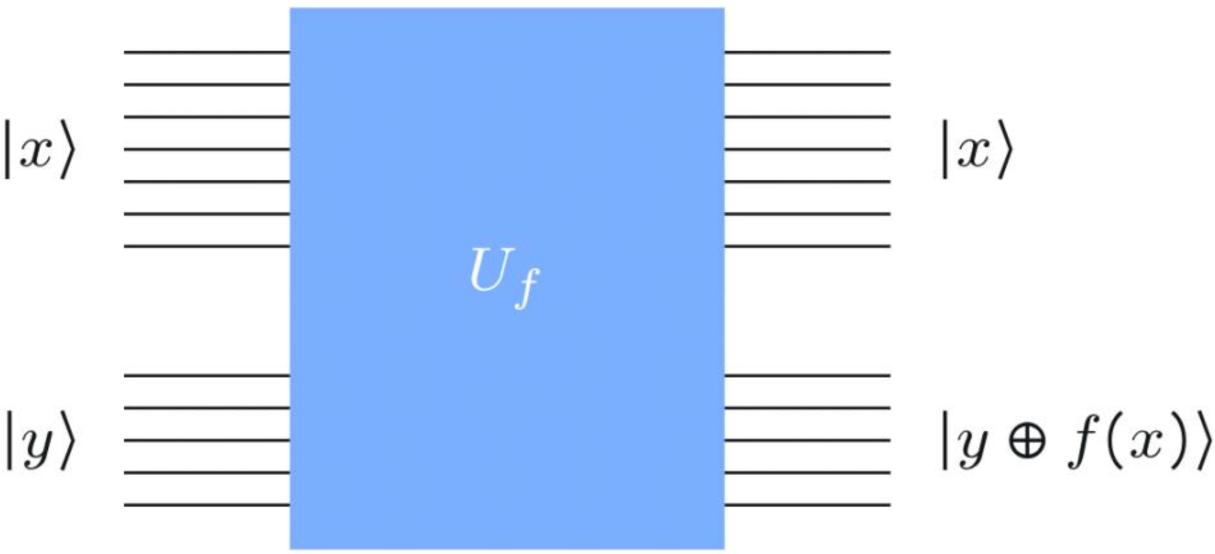
Caja negra con función desconocida , sobre la que queremos saber su paridad: Evaluar la función en x implicaria poner y=0

:



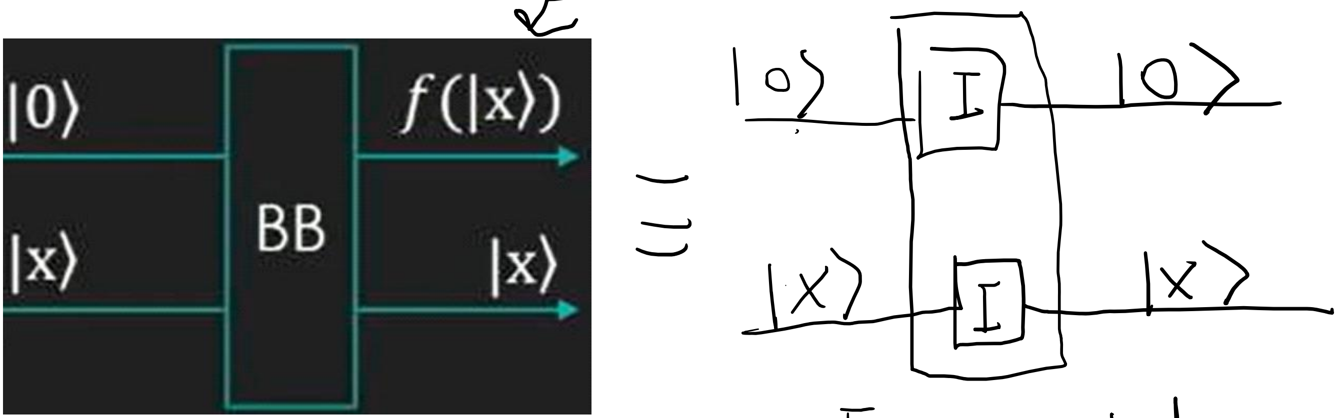
Donde hemos usado la forma de evaluar una funcion booleana arbitraria en un contexto cuántico y unitario reversible (solo que está dado vuelta el input) :

$$x \in \Sigma^n \text{ and } y \in \Sigma^m$$

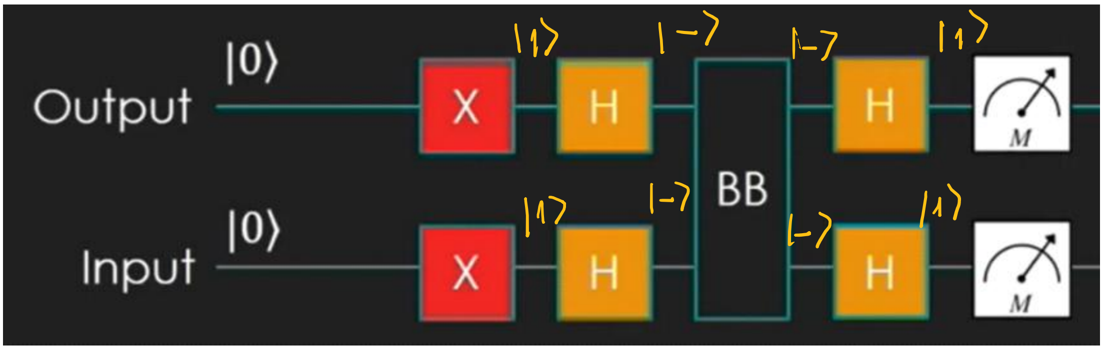


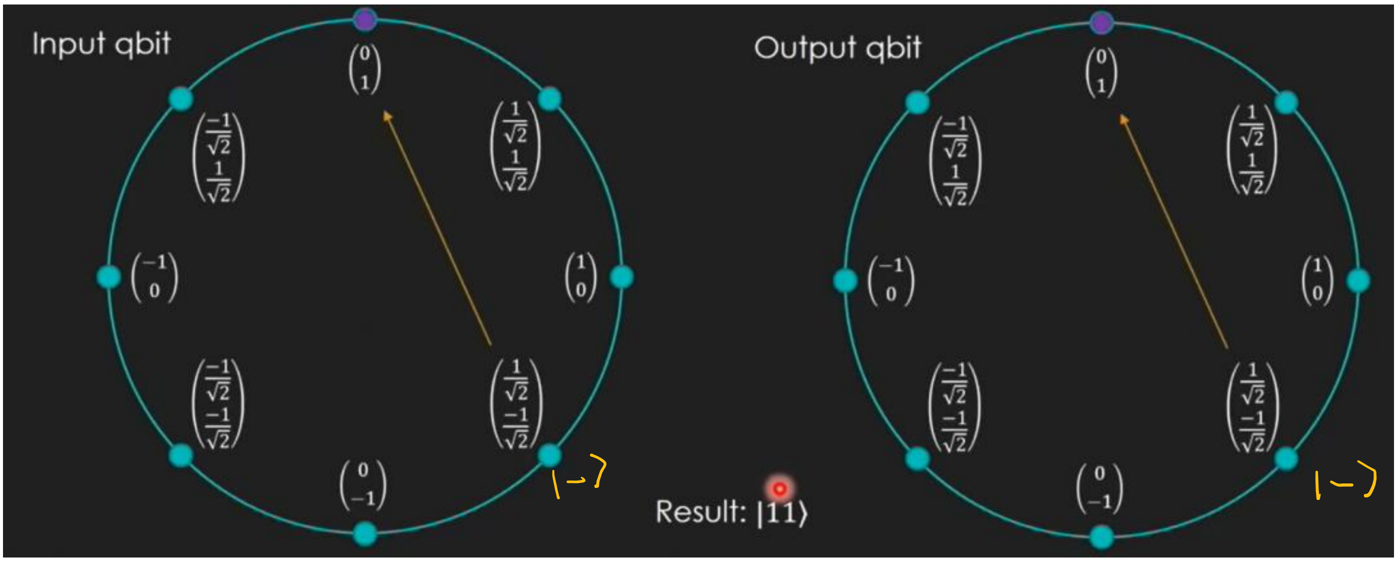
Supongamos que la funcion en la caja negra es f=constante = 0

Eso quiere decir que f no depende de x



I: identidad
(no hacer nada)

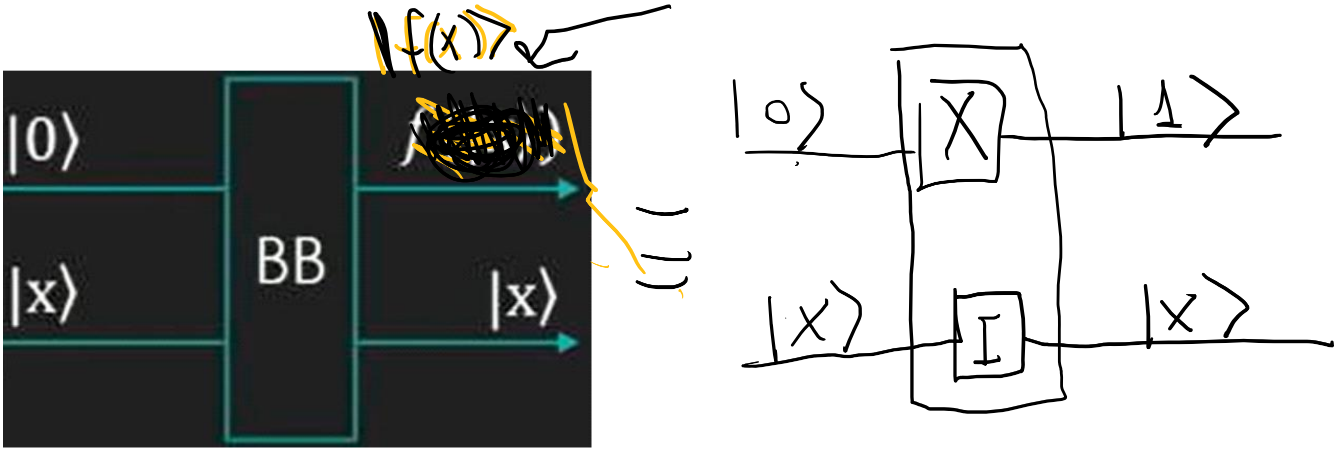


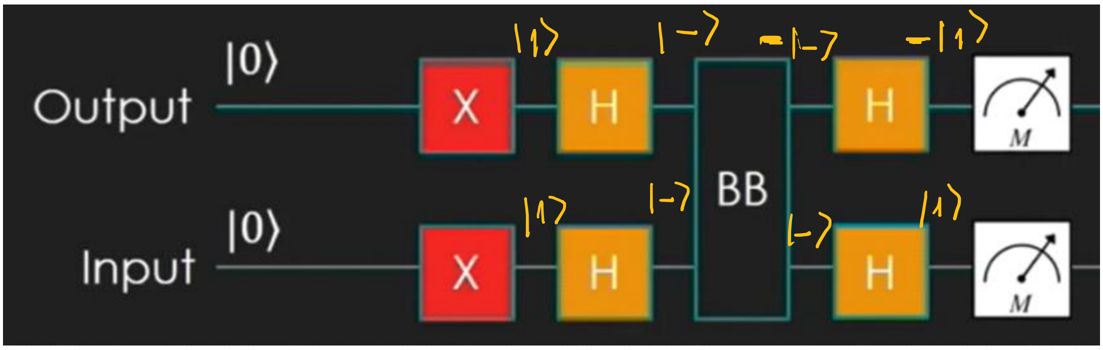


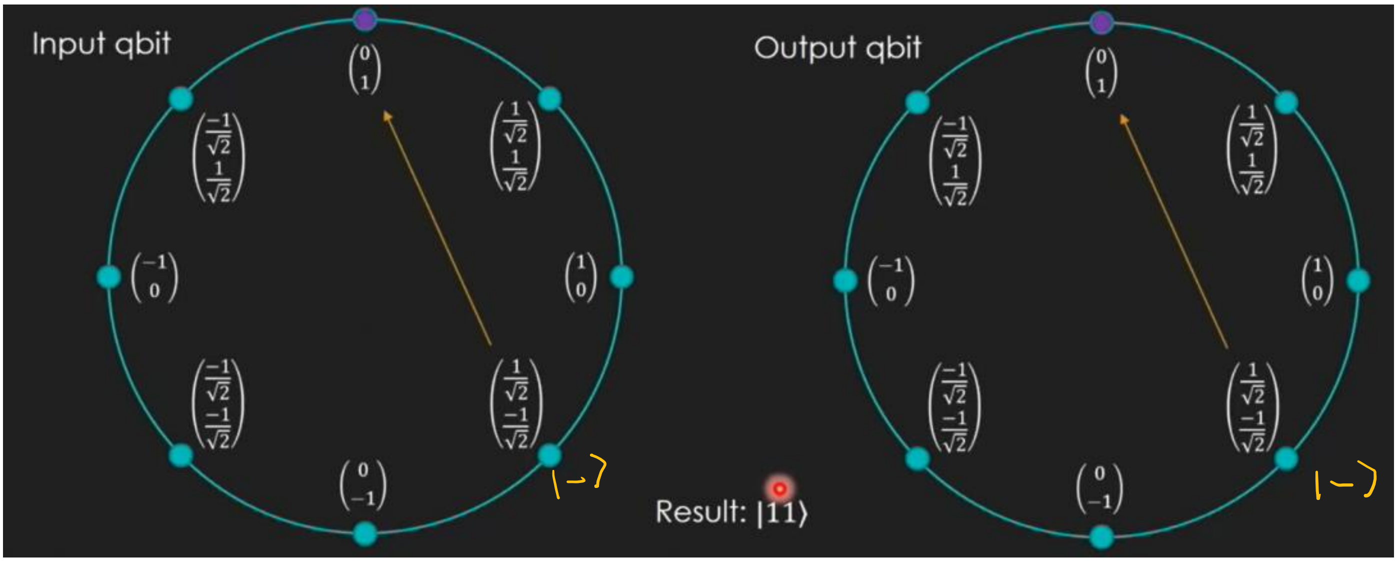
Si f=cte=0 la lectura de bits es 11.

Supongamos que la funcion en la caja negra es constante = 1

Eso quiere decir que no depende de x



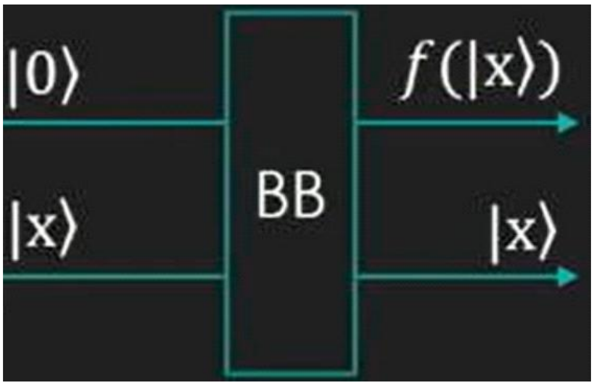




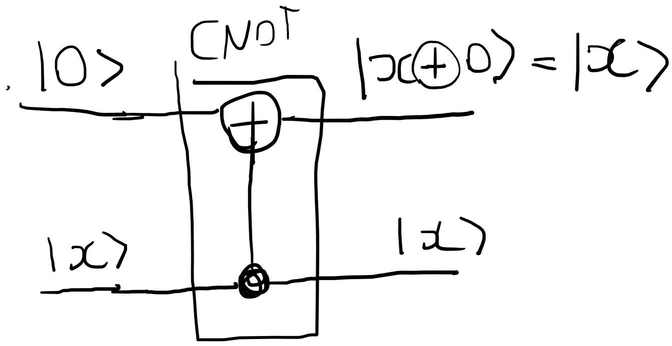
Si f=cte=0 la lectura de bits es 11.

Supongamos que la funcion en la caja negra es f(0)=0 , f(1) = 1

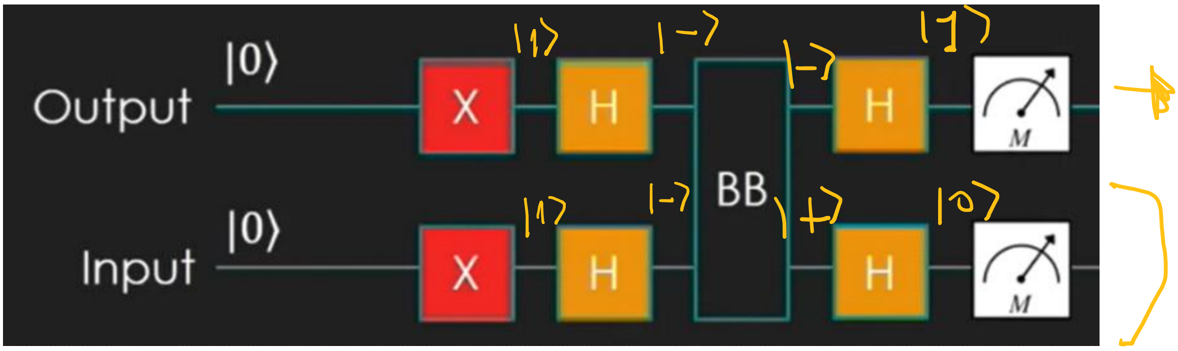
Eso quiere decir que f(x)=x



=



Modulo 4 página 34



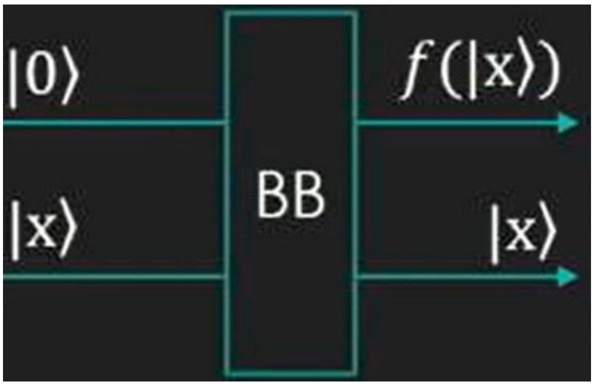
Se mide $|0\rangle \otimes |1\rangle$;

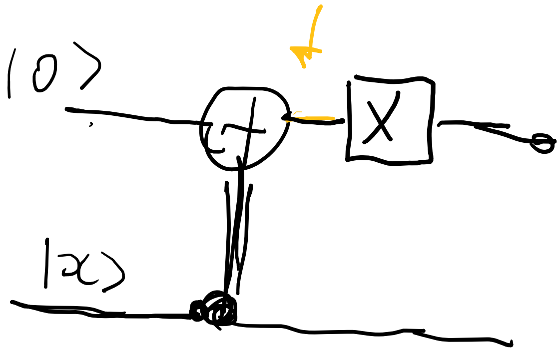
Si f(x)=x la lectura de bits es 01.

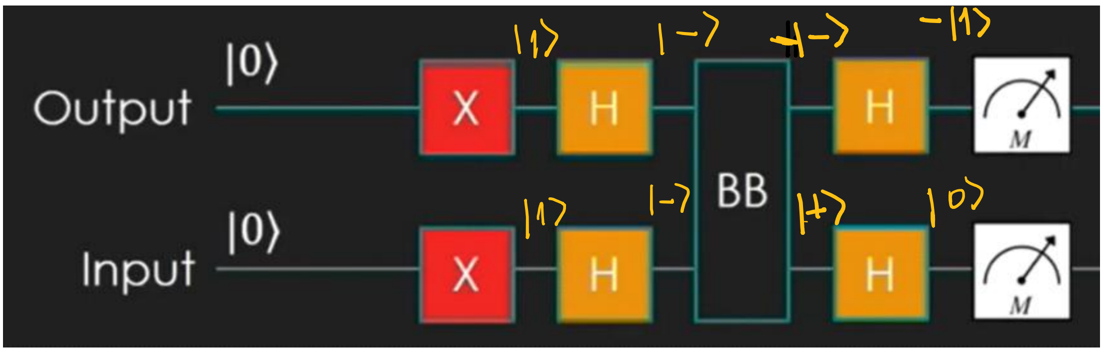
$|-\rangle$ $|-\rangle$

Supongamos que la funcion en la caja negra es f(0)=1 , f(1) = 0

Eso quiere decir que f(x)=NOT(x)







Si f(x)=Not(x) la lectura de bits es 01.

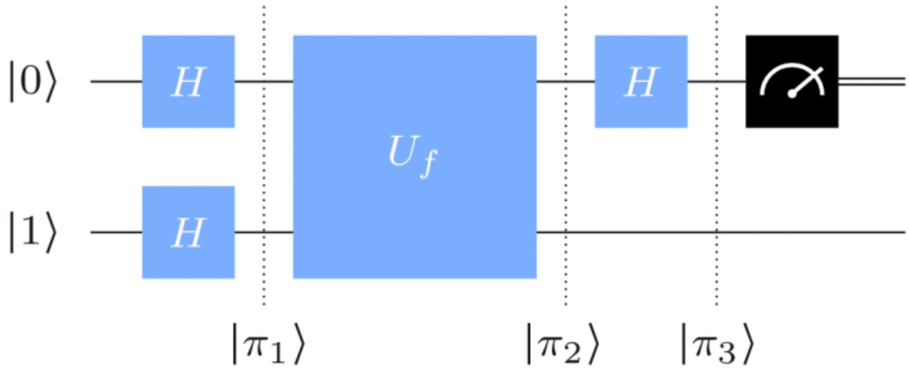
La medición del segundo qubit (el de arriba), el de la salida del oraculo siempre es 1. No da info.

|−⟩

En cambio, la medida del qubit que es la entrada de la función del oraculo (puesta en |-> para generar kick back phase) es 0 o 1 segun si es paridad balanceada o constante, respectivamente.

Esto muestra que la cuantica requiere un solo query a la funcion desconocida

Algoritmo de Deutsch resuelve si f es constante o balanceada con un soloquery al oraculo / caja negra



$$|\pi_1\rangle = |-\rangle|+\rangle = \frac{1}{2}\big(|0\rangle - |1\rangle\big)|0\rangle + \frac{1}{2}\big(|0\rangle - |1\rangle\big)|1\rangle.$$

$$|\pi_2\rangle = \frac{1}{2}\big(|0 \oplus f(0)\rangle - |1 \oplus f(0)\rangle\big)|0\rangle + \frac{1}{2}\big(|0 \oplus f(1)\rangle - |1 \oplus f(1)\rangle\big)|1\rangle.$$

$$|0 \oplus 0\rangle - |1 \oplus 0\rangle = |0\rangle - |1\rangle = (-1)^0\big(|0\rangle - |1\rangle\big)$$
$$|0 \oplus 1\rangle - |1 \oplus 1\rangle = |1\rangle - |0\rangle = (-1)^1\big(|0\rangle - |1\rangle\big)$$
$$|0 \oplus a\rangle - |1 \oplus a\rangle = (-1)^a\big(|0\rangle - |1\rangle\big)$$

$$\begin{aligned}|\pi_2\rangle &= \frac{1}{2}(-1)^{f(0)}\big(|0\rangle - |1\rangle\big)|0\rangle + \frac{1}{2}(-1)^{f(1)}\big(|0\rangle - |1\rangle\big)|1\rangle \\ &= |-\rangle\left(\frac{(-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\pi_2\rangle &= (-1)^{f(0)}|-\rangle\left(\frac{|0\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \begin{cases}(-1)^{f(0)}|-\rangle|+\rangle & \text{if } f(0)\oplus f(1) = 0 \\ (-1)^{f(0)}|-\rangle|-\rangle & \text{if } f(0)\oplus f(1) = 1.\end{cases}\end{aligned}$$

$$|\pi_3\rangle = \begin{cases}(-1)^{f(0)}|-\rangle|0\rangle & \text{if } f(0)\oplus f(1) = 0 \\ (-1)^{f(0)}|-\rangle|1\rangle & \text{if } f(0)\oplus f(1) = 1,\end{cases}$$

https://quantum.cloud.ibm.com/learning/en/courses/fundamentals-of-quantum-algorithms/quantum-query-algorithms/deutsch-algorithm

Generalización a n bits

Función $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$

Promesa: f es constante o balanceada

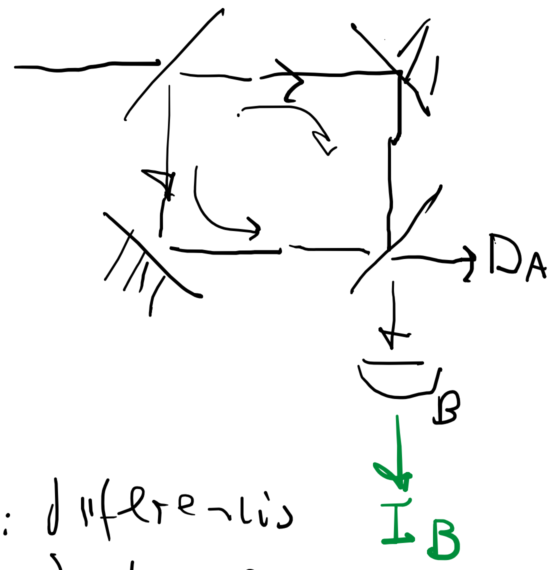
- **Constante:** $f(x) = c$ para todo x
- **Balanceada:** $f(x) = 0$ para exactamente 2^{n-1} valores, $f(x) = 1$ para los otros 2^{n-1}

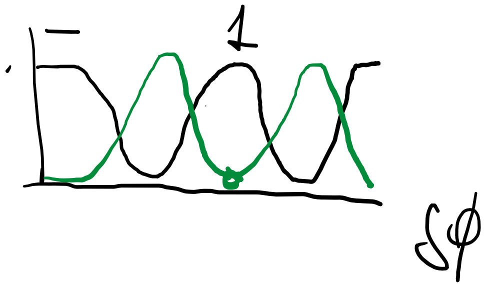
Clásicamente: Hasta $2^{n-1} + 1$ evaluaciones (peor caso)

Cuánticamente: 1 evaluación independiente de n

Interferencia! Juego de fases

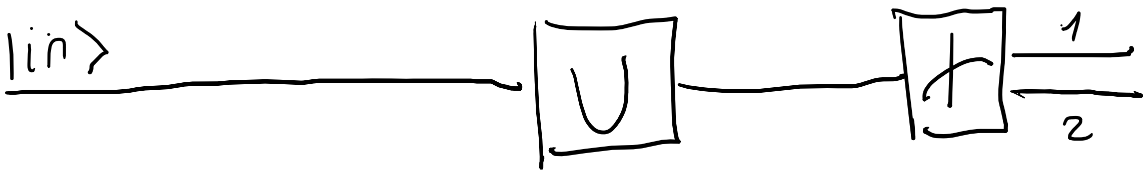
$I_A = |A|^2 \quad I_B = 1 - |A|^2$





$\delta\phi$: diferencia de fases entre caminos!

Caso cuántico



$$|in\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\phi_1}|1\rangle\right)$$

$\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\} \rightarrow$ base ortonormal en la que quiero medir

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\phi_2}|1\rangle\right)$$

$$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-e^{-i\phi_2}|0\rangle + |1\rangle\right)$$

Cumple $\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$

Defino projectores $\Pi_j = |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$

$$P(j) = \mathrm{Tr}\big(\hat{\Pi}_j \underbrace{|in\rangle\langle in|}_{\rho_{in}}\big)$$

$$P(j) = |\langle \varphi_j | in\rangle|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 \pm \cos(\phi_1 - \phi_2)\right)$$

$$\mathrm{Tr}(\hat{\Pi}_j |in\rangle\langle in|)$$

$$\sum_i \langle i| \Pi_j |in\rangle\langle in| i\rangle$$

$$\sum_i \langle in|i\rangle\langle i|\Pi_j|in\rangle$$

$$\langle in| \sum_i |i\rangle\langle i| \Pi_j |in$$

$$\langle in|\Pi_j|in\rangle$$

$$\langle in|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|in\rangle$$

$$|\langle\varphi_j|in\rangle|^2 \qquad \langle i|j\rangle = \delta_{ij}$$

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = \hat{\Lambda} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

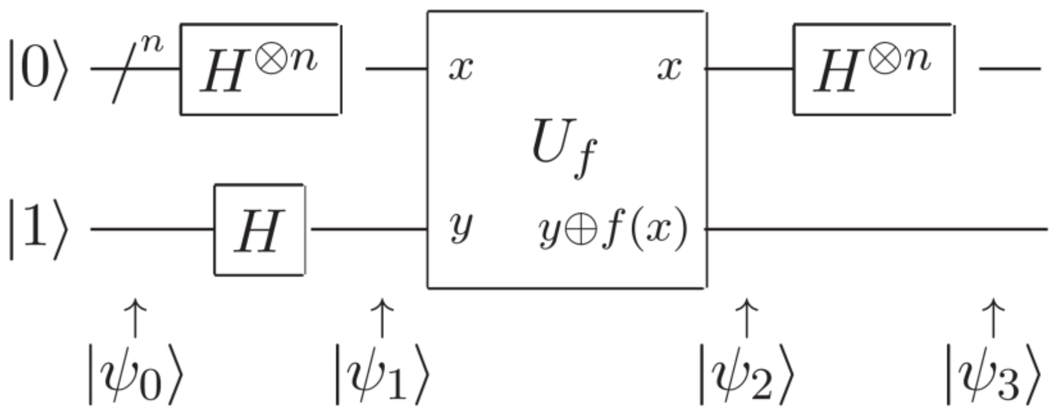
$$\Lambda_{jk} = \langle j|\Lambda|k\rangle = \delta_{jk}$$

Generalizacion a cuando el dominio de f es de dimension n , con n par, es decir x son 2^n strings posibles

El oraculo (es decir el input que nosotros desconocemos y del cual queremos decir algo) puede tomar alguna de las funciones f(x) que produce un bit de salida, trabajando bajo la promesa es que estas f pueden ser de dos tipos o balanceadas o constantes .

Nuestro algoritmo debe distinguir esos dos casos y no preocuparse por casos en los que la f no cumple la promesa (fs que no son ni constantes ni balanceadas son DON'T CARE INPUTS)	

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n}|1\rangle$$



$$|\psi_1\rangle = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{|x\rangle}{\sqrt{2^n}} \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right].$$

Demo

$$H|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{(-1)^a}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{b=0,1} (-1)^{ba} |b\rangle}_{\text{para } a=0 \;\; \sum_{b=\{0,1\}} |b\rangle}$$

Si $a=0$
ambos b positivos
$H|0\rangle = |+\rangle$

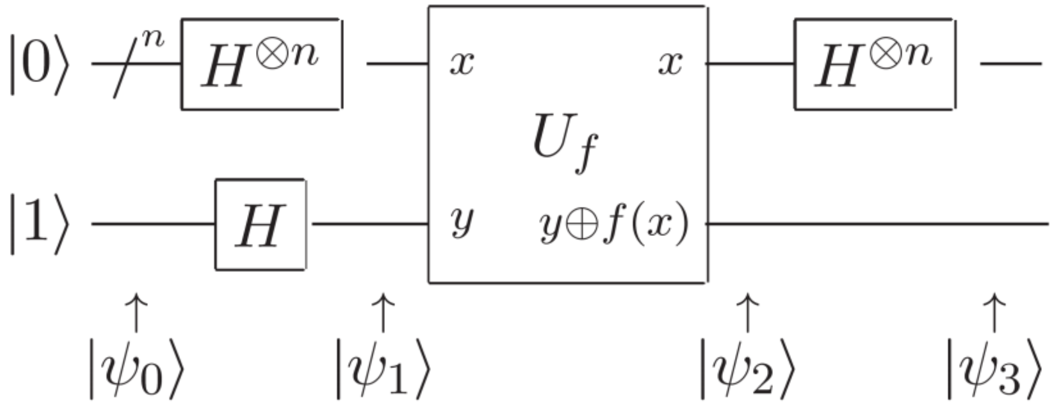
Si $a=1$
$b=0$ positivo
$b=1$ negativo
$H|1\rangle = |+\rangle$

$$H^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n}$$

$$(H|0\rangle) \otimes (H|0\rangle) \otimes \dots \otimes (H|0\rangle) = \sum_{b_{n-1}, b_{n-2} \dots b_1, b_0} |b_{n-1}\rangle \otimes |b_{n-2}\rangle \otimes \dots \otimes |b_1\rangle \otimes |b_0\rangle$$

$$= \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$$

Algoritmo de Deutsch-Jozsa



$$|\psi_1\rangle = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{|x\rangle}{\sqrt{2^n}} \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right].$$

g $U_f : |x, y\rangle \to |x, y \oplus f(x)\rangle$, giving

$$|\psi_2\rangle = \sum_{x} \frac{(-1)^{f(x)}|x\rangle}{\sqrt{2^n}} \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right].$$

$$|\psi_3\rangle = \sum_{z}\sum_{x} \frac{(-1)^{x\cdot z + f(x)}|z\rangle}{2^n} \left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right].$$

$$H^{\otimes n}|x\rangle = \frac{\sum_z (-1)^{x\cdot z}|z\rangle}{\sqrt{2^n}},$$

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{x_{n-1}\cdots x_0\in\Sigma^n} (-1)^{f(x_{n-1}\cdots x_0)}\right|^2 = \begin{cases} 1 & \text{if } f \text{ is constant} \\ 0 & \text{if } f \text{ is balanced} \end{cases}$$

Resultado del algoritmo

Medida del registro de n qubits:

- Si medimos $|0\rangle^{\otimes n}$ (todos ceros): f es constante
- Si medimos cualquier otro estado: f es balanceada

Ventaja cuántica:

Clásico	Cuántico
$O(2^n)$ evaluaciones	$O(1)$ evaluación
Determinista	Determinista

Separación exponencial (aunque con promesa)