Introducción a la Computación e Información Cuántica

Módulo 1: Fundamentos y Motivaciones

6 al 10 de Octubre de 2025

Dr. Andres A. REYNOSO

XXIX Escuela Internacional de Ingeniería y Computación

Contenidos

Límites Físicos de la Computación Clásica La Transición Inevitable hacia Nuevos Paradigmas

Ley de Moore: Saturación Inminente

- Escalado de transistores aproximándose al límite atómico (5 a 3 nm)
- Disipación térmica y efectos cuánticos como factores limitantes fundamentales
- Rendimientos marginales decrecientes en arquitecturas clásicas

Necesidad de Nuevos Sustratos Físicos

- Explotación de recursos informacionales cuánticos: superposición y entrelazamiento
- Computación basada en principios físicos fundamentalmente diferentes
- Ventajas asintóticas demostrables para clases específicas de problemas

Computación Cuántica como Paradigma Emergente

Transición del Bit Clásico al Qubit Cuántico

Evolución de los Modelos de Computación

- **Clásico**: Estados discretos (0/1), operaciones booleanas
- **Cuántico**: Estados continuos ($\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$), evoluciones unitarias
- **Ventaja**: Paralelismo cuántico inherente mediante superposición

Fundamentos Matemáticos Sólidos

- Álgebra lineal sobre espacios de Hilbert complejos
- Teoría de la probabilidad generalizada (amplitudes complejas)
- Grupos de Lie y geometría diferencial para dinámicas cuánticas

Ecosistema de Computación Cuántica Actual Infraestructura Empresarial y de Investigación

Plataformas Cloud Cuánticas Disponibles

- **IBM Quantum**: Arquitecturas superconductoras (Quantum Heron)
- **Google Quantum AI**: Procesadores Sycamore + framework Cirq
- **Microsoft Azure Quantum**: Soluciones híbridas integradas
- **Amazon Braket**: Acceso multi-proveedor vía AWS

Indicadores de Madurez Tecnológica

- Roadmaps tecnológicos públicos y verificables
- Inversión corporativa y gubernamental sostenida
- Publicaciones peer-reviewed con resultados reproducibles

Panorama de Oportunidades y Desafíos Análisis Estratégico del Ecosistema Cuántico

Oportunidades Estratégicas

- Simulación de materiales y fármacos
- Optimización de portfolios financieros
- Machine Learning con kernels cuánticos
- Criptografía cuántica (QKD)
- Ventajas algorítmicas asintóticas

Desafíos Críticos

- Corrección cuántica de errores (QEC)
- Escalabilidad de qubits físicos
- Decoherencia y ruido ambiental
- Migración criptográfica (PQC)
- Desarrollo de talento especializado

Relevancia para Ingenieros y Científicos — Preparación para la Próxima Revolución Computacional

Competencias Técnicas Esenciales

- Programación de sistemas cuánticos (Qiskit, Cirq, Q#)
- Diseño de algoritmos híbridos clásico-cuánticos
- Comprensión de límites de computabilidad
- Implementación de criptografía post-cuántica

Oportunidades de Liderazgo

- Posicionamiento en mercados emergentes
- Desarrollo de estándares industriales
- Investigación aplicada en problemas del mundo real
- Formación de equipos interdisciplinarios

Ejemplo 1: Actualidad Finanzas

Artículo 30 de Septiembre 2025 sobre finanzas y cuántica: Link a INFOBAE.
El autor es profesor de UBA y UNR, ex-presisente de CNV.

OPINIÓN >

La “amenaza cuántica” empieza a desplegarse con luces y sombras en el sistema financiero

El dominio de esta tecnología podría definir qué países y corporaciones controlarán las próximas generaciones de la infraestructura financiera

Por **Carlos Weitz** y **Daniel Díaz**

Ejemplo 1: Actualidad Finanzas

Artículo 30 de Septiembre 2025 sobre finanzas y cuántica: Link a INFOBAE.
El autor es profesor de UBA y UNR, ex-presisente de CNV.

OPINIÓN >

La "amenaza cuántica" empieza a desplegarse con luces y sombras en el sistema financiero

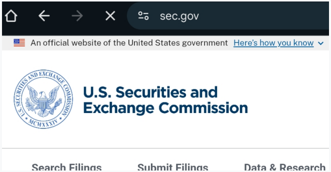
El dominio de esta tecnología podría definir qué países y corporaciones controlarán las próximas generaciones de la infraestructura financiera

Por **Carlos Weitz** y **Daniel Díaz**

El HSBC utilizó una computadora cuántica de IBM (procesadores Quantum Heron) para **mejorar la probabilidad de éxito de cotizaciones al negociar bonos corporativos.** Al combinar el poder de la computación cuántica con los sistemas clásicos, el banco informó haber obtenido una mejora de hasta el 34% en la precisión para estimar si operaciones de compra-venta de obligaciones europeas se concretarían al precio cotizado, **obteniendo de esa forma una ventaja competitiva al descubrir señales de precio "escondidas"** en los complejos y ruidosos datos del mercado que los modelos clásicos no pueden identificar.

Ejemplo 2: Post-Quantum Cryptography

En este contexto, organismos como el Banco de Pagos Internacionales (BIS) y el Fondo Monetario Internacional (FMI) destacan la urgencia de migrar hacia los nuevos estándares de Criptografía Post-Cuántica (PQC).



Post-Quantum Financial Infrastructure Framework (PQFIF)

A Roadmap for the Quantum-Safe Transition of Global Financial Infrastructure

Prepared for: U.S. Crypto Assets Task Force - SEC

Date: September 03, 2025

No solo esos organismos. La SEC de EEUU tiene un roadmap (Septiembre 2025) al respecto: link.

El Principio de von Neumann - Landauer: El Costo Físico de Borrar

- El Principio de von Neumann - Landauer establece una conexión fundamental entre la **información** (un concepto abstracto) y la **energía** (una cantidad física).
- Postula que **borrar información es un proceso irreversible** que tiene un costo energético mínimo e inevitable.
- Cualquier operación que destruya información debe disipar una cantidad mínima de energía en forma de **calor** hacia el entorno.

Información, Entropía y Calor

- La información está ligada a la **entropía**, una medida del desorden o la incertidumbre de un sistema.
- Borrar un bit (ej. forzarlo al estado 0) reduce su incertidumbre y, por lo tanto, disminuye su entropía.
- La **Segunda Ley de la Termodinámica** exige que la entropía total del universo no disminuya. Para compensar, la entropía del entorno debe aumentar, lo que ocurre mediante la disipación de calor.
- La energía mínima disipada al borrar 1 bit clásico es:

$$E_{diss} = k_B T \ln 2$$

Donde k_B es la constante de Boltzmann, T es la temperatura absoluta del entorno y el $\ln 2$ refleja los dos estados posibles del bit.

El Salto Cuántico: de Bits a Cúbits

- El principio es directamente aplicable a la **información cuántica**.
- La unidad de información es el **cúbit**, que puede existir en **superposición** de sus estados.
- La entropía de un sistema cuántico se describe mediante la **entropía de von Neumann**:
$$S = -k_B \mathrm{Tr}(\rho \ln \rho)$$
- A pesar de la mayor complejidad, el resultado es el mismo: borrar la información de un cúbit disipa una energía mínima de $k_B T \ln 2$.
- Este fenómeno ha sido verificado experimentalmente.

¿Por Qué Es Importante para la Computación?

- **Límites Fundamentales de la Computación:** Define la barrera física definitiva para la eficiencia energética de la computación clásica. Es un límite que no se puede superar con mejor ingeniería.
- **Computación Reversible:** Impulsó el desarrollo de la computación reversible, que busca realizar cálculos sin borrar información. En teoría, una computación totalmente reversible podría no disipar calor.
- **Computación Cuántica:** Las operaciones cuánticas (evoluciones unitarias) son inherentemente **reversibles**. Esta es una de las claves de la eficiencia energética teórica de los ordenadores cuánticos. El principio solo aplica en pasos irreversibles como la medición o el reinicio de cúbits.

- **La información es física**

- J.C. Maxwell, '1871
- J. von Neumann, '27
- L. Szilard, '29
- C. Shannon, '48
- L.N. Brillouin, '53
- L. Boltzmann, '1886
- E.T. Jaynes, '57
- R. Landauer, '61
- C.H. Bennett, '73
- J.D. Bekenstein, '73

i) *Los sistemas de procesamiento de información (hardware) deben obedecer las leyes de la física*

ii) *Un algoritmo de computación (software) podría tener un costo intrínseco de energía o entropía*

Contenidos

Pilar I: Mecánica Clásica

El Dominio del Movimiento

El universo era visto como un mecanismo de relojería predecible y determinista.

Protagonistas

Isaac Newton (S. XVII), J.L. Lagrange (S. XVIII), W.R. Hamilton (S. XIX)

La Ley Fundamental (Newton)

La relación entre fuerza, masa y aceleración lo explicaba todo, desde la caída de una manzana hasta la órbita de los planetas.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Formalismos Avanzados

La Mecánica Lagrangiana ($L = T - V$) y Hamiltoniana ($H = T + V$) proveyeron herramientas matemáticas de inmenso poder y elegancia.

Pilar II: Electromagnetismo

La Gran Unificación de Maxwell

En 1865, James Clerk Maxwell unificó la electricidad, el magnetismo y la óptica en una sola teoría.

Las Ecuaciones de Maxwell (forma diferencial)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{(Ley de Gauss para E)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{(No existen monopolos magnéticos)}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(Ley de Faraday)}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \qquad \text{(Ley de Ampère-Maxwell)}$$

El Triunfo Definitivo

La teoría predecía la existencia de ondas electromagnéticas que viajaban a la velocidad $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$. ¡La luz era una de estas ondas!

Pilar III: Termodinámica y Mecánica Estadística Del Átomo a lo Macroscópico

El puente entre el comportamiento microscópico de los átomos y las propiedades que medimos (temperatura, presión, etc.).

Protagonista

Ludwig Boltzmann (década de 1870)

La Idea Revolucionaria

Las leyes de la termodinámica emergen del comportamiento estadístico promedio de un número gigantesco de partículas.

La Ecuación de la Entropía

Grabada en su tumba, conecta la entropía S (desorden) con el número de microestados posibles W de un sistema.

$$S = k_B \ln W$$

Un Edificio (Casi) Terminado El Sentimiento a Finales del Siglo XIX

La sensación general era que los grandes descubrimientos ya se habían hecho. El futuro era solo medir con más precisión.

> *"Ya no queda nada nuevo por descubrir en física. Todo lo que resta son mediciones más y más precisas."*
>
> — Lord Kelvin (atribuido, ca. 1900)

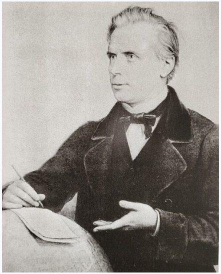
> *"La ciencia de la física está tan sustancialmente establecida que es muy improbable que se produzcan futuros descubrimientos de primera magnitud."*
>
> — Albert A. Michelson (1894)

El Consejo a un Joven Max Planck

Cuando Planck consideraba estudiar física, su consejero Philipp von Jolly le dijo:

> *en esta área, casi todo ya está descubierto, y todo lo que queda es rellenar algunos huecos sin importancia.*

(e) Max Planck.



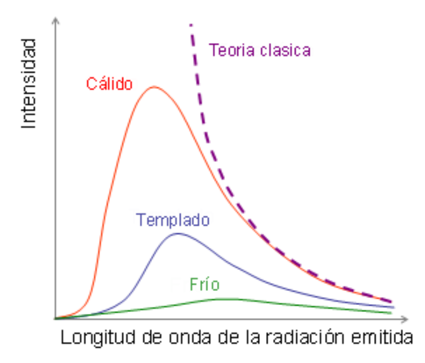
(f) Philipp von Jolly.

El Mundo en 1900

- **Física Clásica**: Mecánica de Newton + Electromagnetismo de Maxwell
- Se pensaba que la física estaba "casi completa"
- **Problemas sin resolver**:
  - Radiación del cuerpo negro
  - Efecto fotoeléctrico
  - Espectros atómicos discretos
  - Estabilidad del átomo

"Sólo quedan dos pequeñas nubes en el horizonte..." - Lord Kelvin (1900)

Problema 1: Radiación del Cuerpo Negro



El Problema:

- Un objeto caliente emite radiación electromagnética
- La teoría clásica predecía: **Catástrofe ultravioleta**
- A frecuencias altas $\rightarrow$ energía infinita

Problema 1: Radiación del Cuerpo Negro

Solución de Planck (1900):

- La energía está **cuantizada**
- $E = h\nu$
- $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J·s
- La energía viene en "paquetes"discretos

Nace la constante de Planck: h **(o** $\hbar = h/2\pi$**)**

Problema 2: Efecto Fotoeléctrico

Experimento:

- Luz incide sobre un metal
- Se emiten electrones
- **Extraño**: La energía de los electrones depende de la *frecuencia* de la luz, no de su intensidad

Einstein (1905):

- La luz son **partículas**: fotones
- Cada fotón tiene energía $E = h\nu$
- Un fotón arranca un electrón
- Premio Nobel 1921

Dualidad onda-partícula: La luz se comporta como onda *y* partícula

Problema 3: Espectros Atómicos

Observación:

- Los átomos emiten luz en frecuencias discretas
- Cada elemento tiene su çódigo de barras"
- Ejemplo: Hidrógeno tiene líneas en 656nm, 486nm, 434nm...

Modelo de Bohr (1913):

- Electrones en órbitas discretas
- Niveles de energía cuantizados: $E_n = -\frac{13{,}6\ \text{eV}}{n^2}$
- Saltos entre niveles $\rightarrow$ fotones
- $\Delta E = h\nu$

La energía en los átomos está cuantizada

La Nueva Mecánica Cuántica (1925-1927)

- **Schrödinger (1926)**: Ecuación de onda

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

- **Heisenberg (1925)**: Mecánica matricial
- **Born (1926)**: Interpretación probabilística

$$P(x) = |\psi(x)|^2$$

- **Principio de Incertidumbre de Heisenberg (1927)**:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

No se puede conocer simultáneamente posición y momento con precisión arbitraria

Principio de Exclusión de Pauli (1925)

- **Fermiones** (espín semientero: 1/2, 3/2, ...):
  - Electrones, protones, neutrones
  - Obedecen el principio de exclusión: *no pueden estar dos en el mismo estado*
  - Función de onda antisimétrica
- **Bosones** (espín entero: 0, 1, 2, ...):
  - Fotones, fonones
  - Pueden ocupar el mismo estado
  - Función de onda simétrica

Consecuencia: La estructura de la tabla periódica, la química, y ¡nuestra existencia!

Contenidos

QED: Electrodinámica Cuántica

- Teoría cuántica del electromagnetismo
- Desarrollada por Feynman, Schwinger, Tomonaga (años 40-50)
- **La teoría física más precisa jamás verificada**

Momento magnético anómalo del electrón:

$$\begin{aligned} \text{Teoría:} \quad & 1{,}001\,159\,652\,181\,643(764) \\ \text{Experimento:} \quad & 1{,}001\,159\,652\,180\,73(28) \end{aligned}$$

¡Acuerdo hasta 12 cifras decimales!

Aplicaciones Tecnológicas de la Mecánica Cuántica

La tecnología moderna es cuántica:

- **Teoría de bandas** (1930s): Semiconductores
  - Explica conductores, aislantes, semiconductores
- **Transistor** (1947): Base de la computación moderna
  - Efecto túnel cuántico
  - Hoy: miles de millones en cada chip
- **Láser** (1960): Emisión estimulada
  - Telecomunicaciones, medicina, industria
- **Superconductividad** (explicada en 1957): Teoría BCS
  - Pares de Cooper, condensado bosónico
  - MRI, levitación magnética, computación cuántica

Impacto Histórico: Proyecto Manhattan

- **Fisión nuclear** (1938): Entendida mediante mecánica cuántica
- Túnel cuántico permite que núcleos se dividan
- **Bomba atómica (1945)**:
  - Primera aplicación masiva de física cuántica
  - Terminó la Segunda Guerra Mundial
  - Cambió la geopolítica del siglo XX

La mecánica cuántica no es sólo teoría abstracta:
Ha transformado el mundo en el que vivimos

Contenidos

¿Cómo Medimos lo Cuántico?

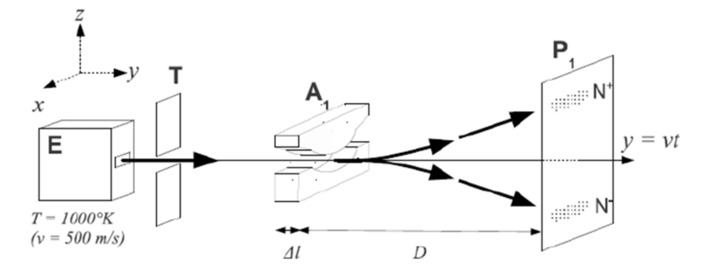
Problema: Los objetos cuánticos son microscópicos

Solución: Necesitamos experimentos que amplifiquen efectos cuánticos

Experimento de Stern-Gerlach (1922):

- Átomos de plata atraviesan un campo magnético inhomogéneo
- Los átomos tienen **espín** (momento angular intrínseco)
- El campo magnético los desvía según su espín

Resultado del Experimento de Stern-Gerlach



Resultado del Experimento de Stern-Gerlach

Predicción clásica:

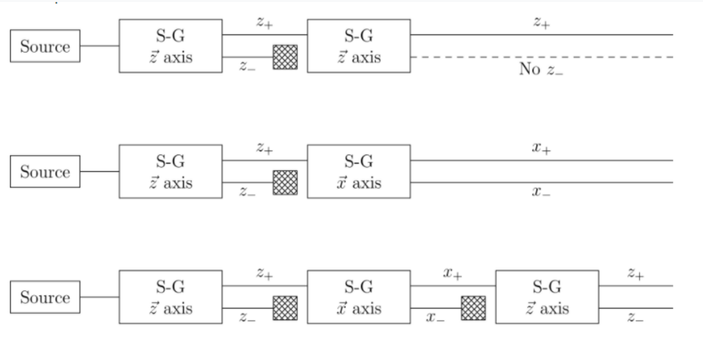
- El espín puede tener cualquier orientación
- Esperamos una distribución continua en la pantalla

Resultado experimental:

- **¡Solo dos manchas!**
- Espín “arriba"(↑) o espín “abajo"(↓)
- Los valores están **cuantizados**

El espín es un sistema de dos niveles: nuestro primer qubit

Midiendo en Diferentes Direcciones 1



Midiendo en Diferentes Direcciones 2

Pregunta: ¿Qué pasa si rotamos el imán?

- **Eje Z**: Obtenemos $|0\rangle$ arriba: UP o $|1\rangle$ abajo: DOWN (equivalentes a $|S_z, +\rangle$ y $|S_z, -\rangle$)
- **Eje X**: Obtenemos $|+\rangle$ o $|-\rangle$ (equivalentes a $|S_x, +\rangle$ y $|S_x, -\rangle$)
- **Eje Y**: Obtenemos $|+i\rangle$ o $|-i\rangle$ (equivalentes a $|S_y, +\rangle$ y $|S_y, -\rangle$)

Experimento sorprendente:

1. Mido en Z $\rightarrow$ obtengo $|0\rangle$ es decir $|S_z, +\rangle$ (UP en z)
2. Lo anterior los mido en X $\rightarrow$ obtengo $|S_x, +\rangle$ y $|S_x, -\rangle$ (50 %-50 %)
3. Mido nuevamente en Z $\rightarrow$ **¡Ya no es “arriba´´ con certeza!**

Las mediciones cuánticas perturban el sistema

Mediciones Incompatibles

Concepto clave: Hay observables que no se pueden medir simultáneamente

- S_z y S_x son **incompatibles** (no conmutan)
- Similar a posición y momento: $[x, p] = i\hbar$
- Para el espín: $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$ (y permutaciones cíclicas)

Consecuencia:

- Si sé el valor de S_z con certeza
- Entonces S_x y S_y son completamente inciertos
- No es limitación experimental: **es fundamental**

Contenidos

La Ecuación de Schrödinger es Lineal

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

Propiedad crucial: Si ψ_1 y ψ_2 son soluciones, entonces también lo es:

$$\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

Esto implica:

- Un sistema puede estar en **superposición** de estados
- No es üno u otro", es **.ªmbos simultáneamente"**
- Ejemplo: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

El Estado Cuántico General

Estado más general de un qubit:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Interpretación:

- $|0\rangle$ y $|1\rangle$ forman una **base ortonormal**
- $|\alpha|^2$ = probabilidad de medir $|0\rangle$
- $|\beta|^2$ = probabilidad de medir $|1\rangle$

Regla de Born: La probabilidad viene del módulo cuadrado de la amplitud

$$P(\text{resultado}) = |\text{amplitud}|^2$$

Ejemplo Concreto: Stern-Gerlach

Estado inicial: Átomo con espín en dirección +X

$$|S_x, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Medimos en la base Z:

- Probabilidad de $|0\rangle$: $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$
- Probabilidad de $|1\rangle$: $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$

Después de la medición:

- Si obtuvimos $|0\rangle \rightarrow$ el estado colapsa a $|0\rangle$
- Si obtuvimos $|1\rangle \rightarrow$ el estado colapsa a $|1\rangle$
- **La superposición desaparece**

El Qubit: Sistema Cuántico de Dos Niveles

Definición: Un qubit es cualquier sistema cuántico con dos estados distinguibles

Ejemplos físicos:

- Espín de un electrón: $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$
- Polarización de fotón: $|H\rangle$, $|V\rangle$
- Niveles de energía de un átomo: $|g\rangle$, $|e\rangle$
- Estado de carga de un punto cuántico: $|0e\rangle$, $|1e\rangle$
- Flujo magnético en un SQUID superconductor: $|\circlearrowleft\rangle$, $|\circlearrowright\rangle$

Notación estándar: $|0\rangle$ y $|1\rangle$ (base computacional)

Diferencia con un Bit Clásico

Bit Clásico:

- Estado: 0 o 1
- **Un bit**: 2 estados posibles
- **N bits**: 2^N estados posibles
- Solo puede estar en *uno* a la vez

Qubit:

- Estado: $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
- **Un qubit**: ∞ estados (esfera de Bloch)
- **N qubits**: describe 2^N amplitudes simultáneamente
- Está en **superposición**

¡La superposición es el recurso fundamental para la computación cuántica!

Contenidos

Vectores de Estado: Kets

Paul Dirac introdujo una notación elegante para estados cuánticos

Ket: $|\psi\rangle$ representa un vector columna en el espacio de Hilbert

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Superposición:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Normalización: $\langle\psi|\psi\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Vectores Duales: Bras

Bra: $\langle\psi|$ es el vector fila (dual, conjugado hermítico)

$$\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, entonces:

$$\langle\psi| = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix}$$

Producto interno ("bracket"):

$$\langle\phi|\psi\rangle = \text{número complejo}$$

Ortogonalidad: $\langle 0|1\rangle = 0$, $\langle 0|0\rangle = 1$

Producto Externo y Operadores

Producto externo: $|\psi\rangle \langle\phi|$ es una **matriz**

Ejemplo:

$$|0\rangle \langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle \langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Relación de completitud:

$$\mathbb{I} = |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta identidad es fundamental para cambios de base

Las Matrices de Pauli

Operadores fundamentales para qubits:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- Hermíticas: $\sigma^\dagger = \sigma$
- Unitarias: $\sigma^\dagger \sigma = I$
- Autovalores: ± 1
- Traza: $\mathrm{Tr}(\sigma) = 0$ (excepto I)
- Anticonmutan: $XY = -YX$, etc.

Interpretación Física de las Matrices de Pauli

Compuerta X (NOT cuántico):

$$X|0\rangle = |1\rangle, \quad X|1\rangle = |0\rangle$$

Compuerta Z (cambio de fase):

$$Z|0\rangle = |0\rangle, \quad Z|1\rangle = -|1\rangle$$

Compuerta Y:

$$Y|0\rangle = i|1\rangle, \quad Y|1\rangle = -i|0\rangle$$

En notación de Dirac:

$$X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|, \quad Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

Estados Propios de las Matrices de Pauli

Base Z (computacional):

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base X:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Base Y:

$$|+i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i\,|1\rangle), \quad |-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i\,|1\rangle)$$

La Esfera de Bloch

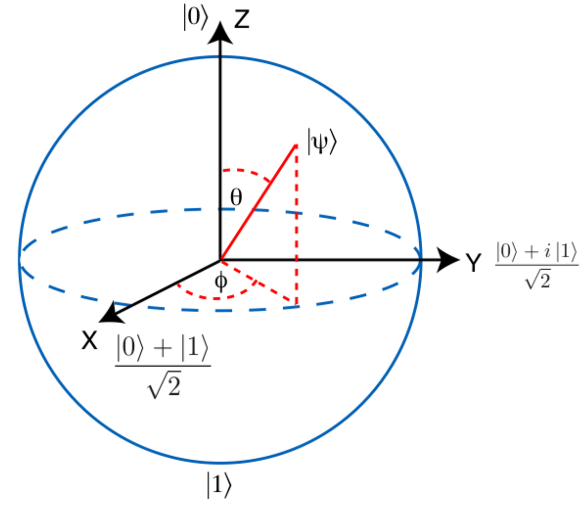
Todo estado puro de un qubit se puede escribir:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

donde $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$

- Cada punto en una esfera = un estado cuántico
- Polo norte: $|0\rangle$
- Polo sur: $|1\rangle$
- Ecuador: superposiciones equitativas
- Estados opuestos = ortogonales

La Esfera de Bloch



Esfera de Bloch

Dirección Arbitraria: $|S \cdot \hat{n}, \pm\rangle$

Vector unitario arbitrario:

$$\hat{n} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$$

Estados propios del espín en dirección $\hat{n}$:

$$|S \cdot \hat{n}, +\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

$$|S \cdot \hat{n}, -\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|0\rangle - e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

Operador de Pauli en dirección $\hat{n}$:

$$\hat{\sigma}_n = \sin\theta\cos\phi\,X + \sin\theta\sin\phi\,Y + \cos\theta\,Z$$

Tiene autovalores ± 1 con autovectores $|S \cdot \hat{n}, \pm\rangle$

Contenidos

Los 4 Postulados Fundamentales

Postulado 1: El estado de un sistema cuántico se describe por un vector $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert

Postulado 2: La evolución temporal está dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

Solución: $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi(0)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle$

$\hat{U}$ es un operador **unitario**: $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \mathbb{I}$

La evolución cuántica sin medición es unitaria y reversible

Los 4 Postulados Fundamentales (cont.)

Postulado 3: Cada observable físico está asociado a un operador hermítico $\widehat{A}$

- Los resultados posibles son los autovalores de $\widehat{A}$
- Después de medir y obtener a_i, el estado colapsa al autoestado $|a_i\rangle$

Postulado 4 (Regla de Born): La probabilidad de obtener a_i al medir $\widehat{A}$ en el estado $|\psi\rangle$ es:

$$P(a_i) = |\langle a_i|\psi\rangle|^2$$

Valor esperado: $\langle\widehat{A}\rangle = \langle\psi|\widehat{A}|\psi\rangle$

Operadores Hermíticos y sus Propiedades

Operador hermítico: $\widehat{H}^\dagger = \widehat{H}$

Teorema: Los autovalores de un operador hermítico son reales

Demostración:

$$\begin{aligned} \widehat{H}\,|\psi\rangle &= \lambda\,|\psi\rangle \\ \langle\psi|\,\widehat{H}\,|\psi\rangle &= \lambda\,\langle\psi|\psi\rangle = \lambda \\ \langle\psi|\,\widehat{H}^\dagger\,|\psi\rangle &= (\langle\psi|\,\widehat{H}\,|\psi\rangle)^* = \lambda^* \\ \text{Pero } \widehat{H}^\dagger = \widehat{H} &\Rightarrow \lambda = \lambda^* \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Consecuencia: Los observables físicos tienen valores medibles reales

Autovectores de Distintos Autovalores son Ortogonales

Teorema: Si $\hat{H}\left|\psi_1\right\rangle = \lambda_1 \left|\psi_1\right\rangle$ y $\hat{H}\left|\psi_2\right\rangle = \lambda_2 \left|\psi_2\right\rangle$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\left\langle\psi_1\right| \hat{H} \left|\psi_2\right\rangle &= \lambda_2 \langle\psi_1|\psi_2\rangle \\
\left(\left\langle\psi_1\right| \hat{H} \left|\psi_2\right\rangle\right)^* &= \left\langle\psi_2\right| \hat{H}^\dagger \left|\psi_1\right\rangle = \left\langle\psi_2\right| \hat{H} \left|\psi_1\right\rangle \\
&= \lambda_1 \langle\psi_2|\psi_1\rangle = \lambda_1 \langle\psi_1|\psi_2\rangle^* \\
\Rightarrow \lambda_2 \langle\psi_1|\psi_2\rangle &= \lambda_1 \langle\psi_1|\psi_2\rangle^* = \lambda_1 \langle\psi_1|\psi_2\rangle \\
(\lambda_2 - \lambda_1) \langle\psi_1|\psi_2\rangle &= 0
\end{aligned}
$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$

Operadores Unitarios

Operador unitario: $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \mathbb{I}$

Teorema: Los autovalores de un operador unitario tienen módulo 1: $\lambda = e^{i\phi}$

Demostración:

$$\begin{aligned} \hat{U}\left|\psi\right\rangle &= \lambda\left|\psi\right\rangle \\ \left\langle\psi\right|\hat{U}^\dagger\hat{U}\left|\psi\right\rangle &= |\lambda|^2\left\langle\psi|\psi\right\rangle \\ \left\langle\psi\right|\mathbb{I}\left|\psi\right\rangle &= |\lambda|^2 \\ 1 &= |\lambda|^2 \Rightarrow |\lambda| = 1 \end{aligned}$$

Propiedades importantes:

- Los operadores unitarios preservan el producto interno
- Representan evoluciones temporales y compuertas cuánticas

Proyectores

Proyector: $\widehat{P}^2 = \widehat{P}$ y $\widehat{P}^\dagger = \widehat{P}$

Teorema: Los autovalores de un proyector son 0 o 1

Demostración:

$$\begin{aligned} \widehat{P}\,|\psi\rangle &= \lambda\,|\psi\rangle \\ \widehat{P}^2\,|\psi\rangle &= \widehat{P}(\lambda\,|\psi\rangle) = \lambda\widehat{P}\,|\psi\rangle = \lambda^2\,|\psi\rangle \\ \text{Pero } \widehat{P}^2 = \widehat{P} &\Rightarrow \lambda\,|\psi\rangle = \lambda^2\,|\psi\rangle \\ &\Rightarrow \lambda = \lambda^2 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$

Ejemplo: $\widehat{P}_0 = |0\rangle\langle 0|$ proyecta sobre $|0\rangle$

Traza de un Operador

Definición: $\mathrm{Tr}(\hat{A}) = \sum_i \langle i| \hat{A} |i\rangle$ (suma de elementos diagonales)

Propiedad cíclica: $\mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \mathrm{Tr}(\hat{B}\hat{C}\hat{A}) = \mathrm{Tr}(\hat{C}\hat{A}\hat{B})$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) &= \sum_i \langle i| \hat{A}\hat{B}\hat{C} |i\rangle \\
&= \sum_{i,j,k} \langle i|j\rangle \langle j| \hat{A} |k\rangle \langle k|l\rangle \langle l| \hat{B} |m\rangle \langle m|n\rangle \langle n| \hat{C} |i\rangle \\
&= \sum_{j,k,l} \langle j| \hat{A} |k\rangle \langle k| \hat{B}\hat{C} |j\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{B}\hat{C}\hat{A})
\end{aligned}$$

Consecuencia: $\mathrm{Tr}(\hat{U}^\dagger \hat{A}\hat{U}) = \mathrm{Tr}(\hat{A})$

La traza es independiente de la base (invariante bajo transformaciones unitarias)

Ejemplo: Traza de las Matrices de Pauli

Calculamos explícitamente:

$$\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0$$

$$\mathrm{Tr}(Y) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0$$

$$\mathrm{Tr}(Z) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 + (-1) = 0$$

$$\mathrm{Tr}(I) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

Observación: Todas las matrices de Pauli (excepto I) tienen traza cero

Cambios de Base

Pregunta: ¿Cómo expresar $|+\rangle$ en la base Y?

Usamos la relación de completitud: $|+\rangle = (|+i\rangle\langle +i| + |-i\rangle\langle -i|)\,|+\rangle$
$= \langle +i|+\rangle\,|+i\rangle + \langle -i|+\rangle\,|-i\rangle$

Calculamos los productos internos:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$
$$|+i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i\,|1\rangle)$$
$$\langle +i|+\rangle = \frac{1}{2}(1 + 1 - i + i) = \frac{1}{2}(1 - i)$$

Similarmente: $\langle -i|+\rangle = \frac{1}{2}(1+i)$

$\Rightarrow |+\rangle = \frac{1-i}{2}\,|+i\rangle + \frac{1+i}{2}\,|-i\rangle$

Contenidos

Propiedades del Producto Interno

Un producto interno hermitiano $(|v\rangle, |w\rangle) \equiv \langle v|w\rangle$ satisface:

1. **Linealidad en el segundo argumento**: $\langle w| \sum_i \lambda_i v_i\rangle = \sum_i \lambda_i \langle w|v_i\rangle$
2. **Simetría hermítica**: $\langle w|v\rangle = \langle v|w\rangle^*$
3. **Positividad**: $\langle v|v\rangle \geqslant 0, \quad \langle v|v\rangle = 0 \Leftrightarrow |v\rangle = 0$

Antilinealidad en el Primer Argumento

Pregunta: ¿Qué pasa con $\langle \sum_i \lambda_i w_i | v \rangle$?

Demostración:

$$\begin{aligned}
\langle \sum_i \lambda_i w_i | v \rangle &= \left(\langle v | \sum_i \lambda_i w_i \rangle \right)^* && \text{(por simetría hermítica)} \\
&= \left(\sum_i \lambda_i \langle v | w_i \rangle \right)^* && \text{(por linealidad)} \\
&= \sum_i \lambda_i^* \langle v | w_i \rangle^* \\
&= \sum_i \lambda_i^* \langle w_i | v \rangle
\end{aligned}$$

Conclusión: El producto interno es **antilineal** en el primer argumento: $\langle \sum_i \lambda_i w_i | = \sum_i \lambda_i^* \langle w_i |$

Ejemplo Numérico

Sean: $|v\rangle = |0\rangle + 2i\,|1\rangle$ y $|w\rangle = 3\,|0\rangle - i\,|1\rangle$

Calculamos $\langle w|v\rangle$:

$$
\begin{aligned}
\langle w|v\rangle &= \langle 3\cdot 0 - i\cdot 1|\,(|0\rangle + 2i\,|1\rangle) \\
&= (3\,\langle 0| + i\,\langle 1|)(|0\rangle + 2i\,|1\rangle) \\
&= 3\,\langle 0|0\rangle + 6i\,\langle 0|1\rangle + i\,\langle 1|0\rangle - 2\,\langle 1|1\rangle \\
&= 3 + 0 + 0 - 2 = 1
\end{aligned}
$$

Verificamos $\langle v|w\rangle$: $\langle v|w\rangle = \langle w|v\rangle^* = 1^* = 1$

En este caso $\langle v|w\rangle = \langle w|v\rangle$ porque el resultado es real

Contenidos

Ideas principales de hoy

Bloque 1: Contexto Histórico

- Crisis de la física clásica (1900-1925)
- Cuantización: Planck, Einstein, Bohr
- Mecánica cuántica: Schrödinger, Heisenberg, Born
- Aplicaciones: QED, transistores, láseres, superconductores

Bloque 2: Fundamentos Cuánticos

- Experimento de Stern-Gerlach: cuantización del espín
- Superposición y el qubit
- Notación de Dirac: bras, kets, productos internos/externos
- Matrices de Pauli y la esfera de Bloch
- Postulados de la mecánica cuántica
- Álgebra lineal: operadores hermíticos, unitarios, proyectores, traza

Conceptos Clave para Recordar

1. **Superposición**: Un qubit puede estar en $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
2. **Medición**: Colapsa el estado, resultado probabilístico según $|\alpha|^2$
3. **Observables incompatibles**: No se pueden medir simultáneamente
4. **Evolución unitaria**: Sin medición, el sistema evoluciona reversiblemente
5. **Matrices de Pauli**: Operadores fundamentales con autovalores ± 1
6. **Notación de Dirac**: Lenguaje elegante para estados y operadores

¡Estos conceptos son la base para todo lo que sigue!

Próximos Días

- Producto tensorial
- Estados entrelazados (Bell, GHZ)
- Desigualdad de CHSH
- Teleportación cuántica
- Criptografía cuántica (QKD)
- Deutsch-Jozsa, Simon
- Grover (búsqueda)
- Shor (factorización)
- Corrección de errores cuánticos *
- Machine learning cuántico **

Hoja de problemas

Asignación 1: Ejercicios sobre bases alternativas y matrices de Pauli

- Verificar ortogonalidad de bases
- Cambios de base entre X, Y, Z
- Calcular matrices de Pauli explícitamente
- Estados de espín en dirección arbitraria
- Verificar autovectores y autovalores

Recursos adicionales:

- Nielsen & Chuang: "Quantum Computation and Quantum Information"

¡Gracias!

Preguntas

Mañana comenzamos con programación en IBM qiskit

(lo de hoy también se puede)