Introducción a la Computación e Información Cuántica

Módulo 3: Entrelazamiento y más

6 al 10 de Octubre de 2025

Dr. Andres A. REYNOSO

XXIX Escuela Internacional de Ingeniería y Computación

Conceptos AYER

1. **Notación de Dirac**: seguimos como unitariedad, hermiticidad, evolucion cambios de bases, matrices de Pauli, otras direcciones de la esfera de Bloch
2. **Producto tensorial**: el poder de mas de un qubit
3. **Estados productos versus estados entrelazados**: Qiskit composer y CNOT

Contenidos

Producto tensorial aplicado al Sistema de Dos Qubits

Apliquemos el concepto a nuestro bloque fundamental: el qubit.

- El espacio de un solo qubit es $\mathbb{C}^2$, con la base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.
- Para un sistema de dos qubits, el espacio es $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$.

La Base Computacional de 2 Qubits

Construimos la nueva base de 4 estados combinando las bases de cada qubit:

$$
\begin{aligned}
|0\rangle \otimes |0\rangle &\equiv |00\rangle \\
|0\rangle \otimes |1\rangle &\equiv |01\rangle \\
|1\rangle \otimes |0\rangle &\equiv |10\rangle \\
|1\rangle \otimes |1\rangle &\equiv |11\rangle
\end{aligned}
$$

El conjunto $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ es la nueva **base computacional**. Estos estados son ortogonales entre sí.

De Dos a N Qubits: Crecimiento Exponencial

La verdadera potencia emerge cuando generalizamos el sistema.

El Espacio de Estados de N Qubits

El espacio de Hilbert para un sistema de n qubits es el producto tensorial de n espacios de un qubit:

$$\mathcal{H}_n = \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{n \text{ veces}} \cong \mathbb{C}^{2^n}$$

- La dimensión del espacio de estados es $d = 2^n$. ¡Crece **exponencialmente** con el número de qubits!
- Un estado base se escribe como $|x\rangle$, donde x es una cadena de n bits clásicos, $x \in \{0, 1\}^n$:

$$|x\rangle \equiv |x_{n-1}x_{n-2}...x_0\rangle = |x_{n-1}\rangle \otimes |x_{n-2}\rangle \otimes \cdots \otimes |x_0\rangle$$

La Consecuencia: El Poder del Paralelismo Cuántico

Este crecimiento exponencial no es solo una curiosidad matemática, es la fuente del poder de la computación cuántica.

- Un estado cuántico general de n qubits es una superposición de **todos** los 2^n estados base:

$$|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} a_x |x\rangle$$

- Para describir completamente este estado, ¡necesitamos especificar 2^n amplitudes complejas a_x!

300 qubits ya da un número impactante

- La dimensión del espacio de estados es $2^{300} \approx 10^{90}$. Este número es **mayor que el número estimado de átomos en el universo observable**.
- Es imposible almacenar el vector de estado de un sistema así en cualquier supercomputadora clásica, presente o futura.

No existe una descripción clásica sucinta para un estado cuántico general.

Producto Tensorial de Operadores: Forma Matricial

Regla General

Si un operador A (matriz $m \times m$) actúa sobre el primer sistema y un operador B (matriz $n \times n$) actúa sobre el segundo, el operador combinado $U = A \otimes B$ es una matriz $(mn) \times (mn)$ que tiene una estructura de bloques:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} de la matriz A se multiplica por la matriz completa B.

- Para dos operadores de un qubit (2×2), el resultado es una matriz 4×4.
- Esta matriz actúa sobre el vector de estado de 2 qubits (un vector de 4 componentes).

$$(A \otimes B)(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = (A|\psi\rangle) \otimes (B|\phi\rangle)$$

Ejemplo producto tensorial

Problema: Aplicar la compuerta H al qubit de la izquierda y la compuerta X al qubit de la derecha. El operador total sigue el orden de los qubits: $U_{total} = H \otimes X$.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{total} = H \otimes X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \cdot X & 1 \cdot X \\ 1 \cdot X & -1 \cdot X \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz 4×4 que un simulador cuántico calcula y aplica al vector de estado del sistema.

Interpretación de la Matriz del Operador

- Cada **columna** representa la transformación de un estado base de **entrada**.
- Cada **fila** corresponde a la amplitud de un estado base en la **salida**.

$$U_{total} = H \otimes X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \langle 00| & \langle 01| & \langle 10| & \langle 11| \end{array} \\ \begin{array}{c} |00\rangle \\ |01\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo de aplicacion a un estado

Para saber qué le pasa al estado de entrada $|01\rangle$, miramos la **segunda columna**:

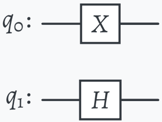
$$(H \otimes X)|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1|00\rangle + 0|01\rangle + 1|10\rangle + 0|11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$

Notación tensorial operadores en Qiskit

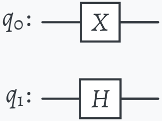
Convención de Qiskit

Qiskit ordena los qubits de izquierda a derecha segun los que aparecen desde abajo hacia arriba. Para un sistema de 2 qubits, el estado es $|q_1 q_0\rangle$.

- El **qubit 0** ($|q_0\rangle$) es el de la derecha o "de arriba".
- El **qubit 1** ($|q_1\rangle$) es el de la izquierda o "de abajo".



Representación Gráfica: Circuito Cuántico



- La línea inferior es el **qubit 1** (q_1), donde aplicamos la compuerta Hadamard (H).
- La línea inferior es el **qubit 0** (q_0), donde aplicamos la compuerta NOT (X).
- Este diagrama es la representación visual exacta del operador matricial que construimos:

$$U_{total} = H \otimes X$$

Estados Producto: Sistemas Separables

Definición

Un estado de un sistema compuesto es un **estado producto** si puede ser escrito como el producto tensorial de los estados de sus subsistemas. Para dos qubits A y B:

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$$

- **Interpretación Física:** Cada subsistema tiene su propio estado bien definido, independiente de los otros. Las propiedades del sistema A pueden ser descritas *sin ninguna referencia* al sistema B, y viceversa.
- Un estado producto tiene una descripción clásica "sencilla". Para n qubits, solo se necesitan $2n$ parámetros reales para definirlo, en lugar de los $2^n - 1$ complejos de un estado general.
- Alice puede preparar su qubit en el estado $|\psi\rangle_A$ y Bob el suyo en $|\psi\rangle_B$ localmente. La descripción del sistema global es simplemente la combinación de estas partes independientes.

Entrelazamiento Cuántico (Entanglement)

Definición de Entrelazamiento

Un estado puro de un sistema compuesto que **no puede** ser escrito como un estado producto se denomina **estado entrelazado** (entangled).

- En un estado entrelazado, es **imposible** asignar un estado individual a cada subsistema. El sistema cuántico debe ser descrito como un todo.
- Las partes del sistema están intrínsecamente conectadas. Los resultados de medición en un subsistema están correlacionados con los resultados en el otro, sin importar cuán lejos estén.
- NOTAR QUE esta es una propiedad puramente cuántica, sin análogo en la física clásica.
- **Crucial:** El entrelazamiento no puede ser creado por partes que actúan localmente y se comunican por canales clásicos (LOCC - Local Operations and Classical Communication).

Test de Separabilidad para caso de dos qubits

Sea $|\psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|11\rangle$ ¿Cómo sabemos si está entrelazado?

Hay entrelazamiento si $ad \neq bc$. Demostración

Partimos de un estado producto genérico $|\psi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$, donde:

$$|\alpha\rangle = \alpha_0\,|0\rangle + \alpha_1\,|1\rangle \quad , \quad |\beta\rangle = \beta_0\,|0\rangle + \beta_1\,|1\rangle$$

Expandiendo el producto tensorial:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= (\alpha_0\,|0\rangle + \alpha_1\,|1\rangle) \otimes (\beta_0\,|0\rangle + \beta_1\,|1\rangle) \\ &= \underbrace{(\alpha_0\beta_0)}_{a}|00\rangle + \underbrace{(\alpha_0\beta_1)}_{b}|01\rangle + \underbrace{(\alpha_1\beta_0)}_{c}|10\rangle + \underbrace{(\alpha_1\beta_1)}_{d}|11\rangle \end{aligned}$$

Ahora, comprobamos la condición con estos coeficientes:

- $a \cdot d = (\alpha_0\beta_0) \cdot (\alpha_1\beta_1) = \alpha_0\alpha_1\beta_0\beta_1$
- $b \cdot c = (\alpha_0\beta_1) \cdot (\alpha_1\beta_0) = \alpha_0\alpha_1\beta_0\beta_1$

Como ad y bc son idénticos, la condición de igualdad $ad = bc$ se cumple para cualquier estado producto **y de lo contrario** $|\psi\rangle$ **tiene entrelazamiento**.

Ejemplo: El estado de Bell $|\Phi^+\rangle$

Consideremos uno de los estados de Bell:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Sus coeficientes son: $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aplicamos el test:

- $a \cdot d = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$
- $b \cdot c = 0 \cdot 0 = 0$

Como $\frac{1}{2} \neq 0$, la condición no se cumple. Por lo tanto, el estado $|\Phi^+\rangle$ **está entrelazado**.

El Teorema de No Clonación

Declaración del Teorema

Es **imposible** construir un dispositivo u operación universal que pueda crear una copia idéntica de un estado cuántico **arbitrario y desconocido**.

Este es un resultado fundamental que distingue la información cuántica de la clásica (que puede ser copiada libremente).

$$U(|\psi\rangle \otimes |b\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

No es posible

El Teorema de No Clonación

Demostración por Contradicción

1. **Hipótesis:** Existe operador unitario U tal que:

$$U(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \quad y \quad U(|\phi\rangle \otimes |0\rangle) = |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

2. **Probemos con superposición:** Sea $|\xi\rangle = \alpha\,|\psi\rangle + \beta\,|\phi\rangle$
Por linealidad de U:

$$\begin{aligned} U(|\xi\rangle \otimes |0\rangle) &= U[(\alpha\,|\psi\rangle + \beta\,|\phi\rangle) \otimes |0\rangle] \\ &= \alpha\,|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle + \beta\,|\phi\rangle \otimes |\phi\rangle \end{aligned}$$

3. **¡Contradicción!** Si U fuera clonador debería dar:

$$|\xi\rangle \otimes |\xi\rangle = (\alpha\,|\psi\rangle + \beta\,|\phi\rangle) \otimes (\alpha\,|\psi\rangle + \beta\,|\phi\rangle)$$

$$= \alpha^2\,|\psi\psi\rangle + \alpha\beta\,|\psi\phi\rangle + \alpha\beta\,|\phi\psi\rangle + \beta^2\,|\phi\phi\rangle$$

4. **Los resultados son diferentes** a menos que $\alpha\beta = 0$ (no superposición).

Conclusión: La clonación es no-lineal, las unitarias son lineales → **INCOMPATIBLES**.

Contenidos

Estado Singlete: Invariancia Rotacional

Estado singlete en base z:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

¿Qué pasa si ambos rotan su sistema de referencia?

Matriz de rotación para espín-1/2:

$$R(\theta) = e^{-i\theta\sigma_y/2} = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)\sigma_y$$

Aplicamos la misma rotación a ambas partículas:

$$\begin{aligned} R(\theta)\otimes R(\theta)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[&R(\theta)|\uparrow\rangle \otimes R(\theta)|\downarrow\rangle \\ &- R(\theta)|\downarrow\rangle \otimes R(\theta)|\uparrow\rangle] \end{aligned}$$

El Singlete es Invariante bajo Rotaciones Conjuntas

Usando las propiedades de rotación:

$$R(\theta)|\uparrow\rangle = \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle - \sin(\theta/2)|\downarrow\rangle$$
$$R(\theta)|\downarrow\rangle = \sin(\theta/2)|\uparrow\rangle + \cos(\theta/2)|\downarrow\rangle$$

Calculamos el producto tensorial:

$$R(\theta)|\uparrow\rangle \otimes R(\theta)|\downarrow\rangle =$$
$$[\cos(\theta/2)|\uparrow\rangle - \sin(\theta/2)|\downarrow\rangle] \otimes [\sin(\theta/2)|\uparrow\rangle + \cos(\theta/2)|\downarrow\rangle]$$

Expandimos:

$$= \cos(\theta/2)\sin(\theta/2)|\uparrow\uparrow\rangle + \cos^2(\theta/2)|\uparrow\downarrow\rangle$$
$$- \sin^2(\theta/2)|\downarrow\uparrow\rangle - \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)|\downarrow\downarrow\rangle$$

La Invariancia se Manifiesta

Similarmente para el otro término:

$$R(\theta)|\downarrow\rangle \otimes R(\theta)|\uparrow\rangle = \\ [\sin(\theta/2)|\uparrow\rangle + \cos(\theta/2)|\downarrow\rangle] \otimes [\cos(\theta/2)|\uparrow\rangle - \sin(\theta/2)|\downarrow\rangle]$$

Expandimos:

$$= \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)|\uparrow\uparrow\rangle - \sin^2(\theta/2)|\uparrow\downarrow\rangle \\ + \cos^2(\theta/2)|\downarrow\uparrow\rangle - \cos(\theta/2)\sin(\theta/2)|\downarrow\downarrow\rangle$$

Al restar ambos términos, los términos $|\uparrow\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\downarrow\rangle$ se cancelan, y recuperamos exactamente el estado singlete original.

Consecuencia: Correlación Perfecta

¡El estado singlete es INVARIANTE bajo rotaciones conjuntas!

$$R(\theta) \otimes R(\theta)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_\theta \downarrow_\theta\rangle - |\downarrow_\theta \uparrow_\theta\rangle) = |\psi\rangle$$

¡El estado no cambia porque es el único estado de espín total cero!

Consecuencia física fundamental:

- Si Alice y Bob acuerdan medir en **la misma dirección**
- No importa qué dirección elijan (x, y, z, o cualquier ϕ)
- Las mediciones siempre estarán **perfectamente anti-correlacionadas**
- $\langle \sigma_\phi \otimes \sigma_\phi \rangle = -1$ para **cualquier** ϕ

Esto explica por qué:

$$\langle \sigma_x \otimes \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \otimes \sigma_y \rangle = \langle \sigma_z \otimes \sigma_z \rangle = -1$$

Estado Singlete: Invariancia Rotacional

Estado singlete en base z:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

Propiedad clave: Anti-correlación perfecta en cualquier base

Ejemplo en base x:

$$\begin{aligned}\sigma_x \otimes \sigma_x|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x|\uparrow\rangle \otimes \sigma_x|\downarrow\rangle - \sigma_x|\downarrow\rangle \otimes \sigma_x|\uparrow\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) = -|\psi\rangle\end{aligned}$$

¡Siempre sin importar el eje elegido, mientras sea el mismo (aca es el caso de eje x) encuentran -1 es decir si Alice mide *up* bob mide *down* y viceversa!.

Términos Cruzados: Cálculo Explícito (1)

Calculemos $\sigma_x \otimes \sigma_y|\psi\rangle$**:**

$$\sigma_x \otimes \sigma_y|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x|\uparrow\rangle \otimes \sigma_y|\downarrow\rangle - \sigma_x|\downarrow\rangle \otimes \sigma_y|\uparrow\rangle)$$

Acción de matrices Pauli:

$$\sigma_x|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle, \quad \sigma_x|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$$
$$\sigma_y|\uparrow\rangle = i|\downarrow\rangle, \quad \sigma_y|\downarrow\rangle = -i|\uparrow\rangle$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\sigma_x \otimes \sigma_y|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle \otimes (-i|\uparrow\rangle) - |\uparrow\rangle \otimes (i|\downarrow\rangle)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-i|\downarrow\uparrow\rangle - i|\uparrow\downarrow\rangle) = \frac{-i}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)\end{aligned}$$

Términos Cruzados: Cálculo Explícito (2)

Continuamos el cálculo:

$$\sigma_x \otimes \sigma_y|\psi\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$$

Ahora calculamos el valor esperado:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\sigma_x \otimes \sigma_y|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\uparrow\downarrow| - \langle\downarrow\uparrow|) \cdot \frac{-i}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle) \\ &= \frac{-i}{2}[\langle\uparrow\downarrow|\downarrow\uparrow\rangle + \langle\uparrow\downarrow|\uparrow\downarrow\rangle - \langle\downarrow\uparrow|\downarrow\uparrow\rangle - \langle\downarrow\uparrow|\uparrow\downarrow\rangle]\end{aligned}$$

Los únicos productos internos no nulos:

$$\langle\uparrow\downarrow|\uparrow\downarrow\rangle = 1, \quad \langle\downarrow\uparrow|\downarrow\uparrow\rangle = 1$$

$$\langle\psi|\sigma_x \otimes \sigma_y|\psi\rangle = \frac{-i}{2}[0 + 1 - 1 - 0] = 0$$

Completando los Términos Cruzados

Similarmente para $\sigma_y \otimes \sigma_x|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned}
\sigma_y \otimes \sigma_x|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_y|\uparrow\rangle \otimes \sigma_x|\downarrow\rangle - \sigma_y|\downarrow\rangle \otimes \sigma_x|\uparrow\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(i|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - (-i|\uparrow\rangle) \otimes |\downarrow\rangle) \\
&= \frac{i}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)
\end{aligned}$$

Valor esperado:

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\sigma_y \otimes \sigma_x|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\uparrow\downarrow| - \langle\downarrow\uparrow|) \cdot \frac{i}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle) \\
&= \frac{i}{2}[0 + 1 - 1 - 0] = 0
\end{aligned}$$

Resumen: Valores Esperados Conocidos

Hemos demostrado explícitamente:

$$\langle \sigma_x \otimes \sigma_x \rangle = -1$$
$$\langle \sigma_y \otimes \sigma_y \rangle = -1$$
$$\langle \sigma_x \otimes \sigma_y \rangle = 0$$
$$\langle \sigma_y \otimes \sigma_x \rangle = 0$$

Por invariancia rotacional, esto vale para cualquier par de ejes:

$$\langle \sigma_\phi \otimes \sigma_\phi \rangle = -1 \quad \text{(misma dirección)}$$
$$\langle \sigma_\phi \otimes \sigma_{\phi+\pi/2} \rangle = 0 \quad \text{(direcciones perpendiculares)}$$

Pero, y si miden en diferentes direcciones qué encuentran????

La fuente genera el estado cuántico entrelazado Tipo Singlete:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

- Dos partículas con espín $\frac{1}{2}$
- Alice mide en dirección ϕ_A
- Bob mide en dirección ϕ_B
- Suponemos que existe una diferencia angular: $\delta\phi = \phi_A - \phi_B$
- Resultados posibles de lo que cada uno mide sigue siendo: ± 1 (puesto que cada uno de ellos le asigna signo positivo a medir up y signo negativo a medir down).

Nuestro Objetivo: Calcular el valor esperado de $\langle \sigma_{\phi_A} \otimes \sigma_{\phi_B} \rangle$. Ya sabemos que en el singlete si $\delta\phi = 0$ entonces da -1 porque Alice y Bob estan midiendo en la misma dirección. Pero si $\delta\phi \neq 0$ qué pasaría?

Paso 1: Descomposición de los Operadores de Medida

Operador de espín en dirección ϕ:

$$\sigma_{\phi} = \cos\phi\ \sigma_x + \sin\phi\ \sigma_y$$

Producto tensorial para Alice y Bob:

$$\sigma_{\phi_A} \otimes \sigma_{\phi_B} = (\cos\phi_A\ \sigma_x + \sin\phi_A\ \sigma_y) \otimes (\cos\phi_B\ \sigma_x + \sin\phi_B\ \sigma_y)$$

Expandimos el producto:

$$\begin{aligned}\sigma_{\phi_A} \otimes \sigma_{\phi_B} = {} & \cos\phi_A \cos\phi_B\ (\sigma_x \otimes \sigma_x) \\ & + \cos\phi_A \sin\phi_B\ (\sigma_x \otimes \sigma_y) \\ & + \sin\phi_A \cos\phi_B\ (\sigma_y \otimes \sigma_x) \\ & + \sin\phi_A \sin\phi_B\ (\sigma_y \otimes \sigma_y)\end{aligned}$$

Paso 4: Combinación y Resultado Final

Sustituimos los valores esperados:

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{\phi_A} \otimes \sigma_{\phi_B} \rangle = {} & \cos\phi_A \cos\phi_B \, (-1) \\ & + \cos\phi_A \sin\phi_B \, (0) \\ & + \sin\phi_A \cos\phi_B \, (0) \\ & + \sin\phi_A \sin\phi_B \, (-1)\end{aligned}$$

Simplificamos: $\langle \sigma_{\phi_A} \otimes \sigma_{\phi_B} \rangle = -\cos\phi_A \cos\phi_B - \sin\phi_A \sin\phi_B$

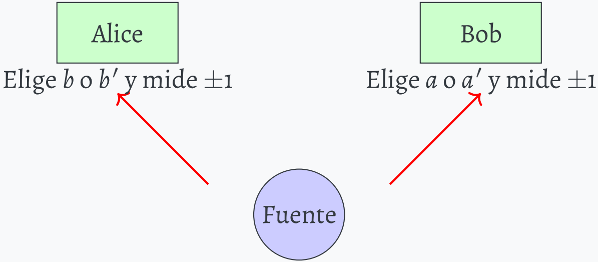
Usamos identidad trigonométrica:
$\cos\phi_A \cos\phi_B + \sin\phi_A \sin\phi_B = \cos(\phi_A - \phi_B) = \cos(\delta\phi)$.

Resultado final:

$$\langle \sigma_{\phi_A} \otimes \sigma_{\phi_B} \rangle = -\cos(\delta\phi)$$

.

Desigualdad CHSH-Bell: Configuración



- Fuente emite pares **entrelazados**
- Alice mide aleatoriamente en dirección a o a' que son ejes ortogonales, es decir $a \perp a'$, por ejemplo $a =$eje x y $a' =$eje z.
- Bob mide en dos direcciones b o b' también a 90 grados entre ellas; $b \perp b'$.
- Cada medición da resultado ± 1
- Las elecciones de Alice y Bob son **independientes**

Límite Clásico: CHSH, valor absoluto siempre $\leqslant 2$

Variable oculta λ determina todos los resultados:

- Las mediciones de Alice están fijadas; $A(a,\lambda) = \pm 1, \quad A(a',\lambda) = \pm 1$
- Y las mediciones de Bob están fijadas: $B(b,\lambda) = \pm 1, \quad B(b',\lambda) = \pm 1$

Cantidad CHSH para cada λ:

$$\begin{aligned} S(\lambda) = &A(a,\lambda)B(b,\lambda) - A(a,\lambda)B(b',\lambda) \\ &+ A(a',\lambda)B(b,\lambda) + A(a',\lambda)B(b',\lambda) \end{aligned}$$

¡Reorganización clave!

$$\begin{aligned} S(\lambda) = &A(a,\lambda)[B(b,\lambda) - B(b',\lambda)] \\ &+ A(a',\lambda)[B(b,\lambda) + B(b',\lambda)] \end{aligned}$$

¿Por qué clásicamente $|S(\lambda)| \leqslant 2$?

Para cada λ, $B(b, \lambda)$ y $B(b', \lambda) = \pm 1$

Caso 1: $B(b, \lambda) = B(b', \lambda)$

- $B(b, \lambda) - B(b', \lambda) = 0$
- $B(b, \lambda) + B(b', \lambda) = \pm 2$
- $S(\lambda) = A(a', \lambda) \times (\pm 2) = \pm 2$

Caso 2: $B(b, \lambda) \neq B(b', \lambda)$

- $B(b, \lambda) - B(b', \lambda) = \pm 2$
- $B(b, \lambda) + B(b', \lambda) = 0$
- $S(\lambda) = A(a, \lambda) \times (\pm 2) = \pm 2$

¡Siempre $|S(\lambda)| = 2$**!** $\Rightarrow$ Promedio $|S| \leqslant 2$

CHSH usando el singlete

Para cuando Alice y Bob cada uno mide un qbit del estado singlete encuentran como valor medio:

$$\langle \sigma_{\phi_A} \otimes \sigma_{\phi_B} \rangle = -\cos(\phi_A - \phi_B)$$

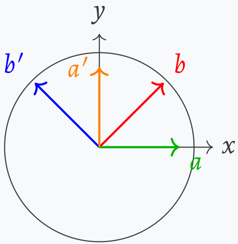
Configuración CHSH cuántica:

- Alice: direcciones a y a'
- Bob: direcciones b y b'
- Valor CHSH: $S = E(a,b) - E(a,b') + E(a',b) + E(a',b')$

$$S = -\left(\cos\delta\phi_{a,b} + \cos\delta\phi_{a',b} + \cos\delta\phi_{a',b'} - \cos\delta\phi_{a,b'}\right)$$

Elegimos direcciones que más se apartan del caso clásico

$$S = -\left(\cos\delta\phi_{a,b} + \cos\delta\phi_{a',b} + \cos\delta\phi_{a',b'} - \cos\delta\phi_{a,b'}\right)$$



Por un lado $\delta\phi_{a,b'} = 3\pi/4$ y su coseno es negativo que como esta cambiado de signo va a aportar a favor de los tres términos con angulos menores que tienen;

$$\delta\phi_{a',b'} = \delta\phi_{a',b} = \delta\phi_{a,b} = \pi/4$$

esos tres cosenos en el parentesis son positivos. Luego con esta eleccion aportan $3\cos(\pi/4)$, quedando

$$S = -4\frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \approx -2{,}828$$

Resultado Final: Violación Cuántica

¡Violación de la desigualdad CHSH!

$$\text{Clásico: } |S| \leqslant 2$$
$$\text{Cuántico: } |S| = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828 > 2$$

Y los experimentos tienen la ultima palabra han demostrado que la cuantica viola la suposicion de realismo impuesto por variables ocultas clasicas que ya esten fijadas antes de que se realice el experimento. EL reasultado demuestra que realismo y localidad al mismo tiempo no pueden valer. Alain Aspect recibio premio nobel por sus experimentos en desigualdades de Bell.

Espacio para trabajar el TP2 en clases

- Teleportación cuántica
- Criptografía cuántica (QKD)

Próximos días continuaremos con:

- Algoritmos: jueves
- Corrección de errores cuánticos *
- Machine learning cuántico **

IBM Qiskit - Composer

Recursos adicionales:

- Nielsen & Chuang: "Quantum Computation and Quantum Information"
- Popular info PREMIO NOBEL 2025 Physics (hoy) link
- IBM composer link