Actividades día 1
Fundamentos del Qubit

Introducción a la Computación Cuántica, CACIC 2025
XXIX Escuela Internacional de Ingeniería y Computación
Uiversidad Nacional de Rio Negro, Viedma, Rio Negro

Objetivos

En esta asignación trabajarás con:

- Bases alternativas para el qubit (X, Y, Z)
- Notación de Dirac y productos internos
- Matrices de Pauli y sus propiedades
- Estados de espín en direcciones arbitrarias

Notación

Usaremos la notación estándar:

- Base computacional (Z): $|0\rangle = |S_z, +\rangle$ (espín arriba) y $|1\rangle = |S_z, -\rangle$ (espín abajo)
- Los estados se pueden escribir como vectores columna:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Bases Alternativas

1.1. Base X

Los estados propios de la medición en el eje X son:

$$|S_x, +\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |S_x, -\rangle = |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

a) Escribe $|+\rangle$ y $|-\rangle$ como vectores columna.
b) Verifica que son ortonormales calculando:

$$\langle +|+\rangle, \quad \langle -|-\rangle, \quad \langle +|-\rangle$$

c) Verifica la relación de completitud:

$$|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -| = \mathbb{I}$$

Calcula explícitamente las matrices $|+\rangle \langle +|$ y $|-\rangle \langle -|$ y suma.

1.2. Base Y

Los estados propios de la medición en el eje Y son:

$$|S_y, +\rangle = |{+i}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i\,|1\rangle), \quad |S_y, -\rangle = |{-i}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i\,|1\rangle)$$

a) Escribe $|{+i}\rangle$ y $|{-i}\rangle$ como vectores columna.
b) Verifica que son ortonormales.
c) Expresa el estado $|+\rangle$ (de la base X) en términos de la base Y, es decir, encuentra α y β tales que:

$$|+\rangle = \alpha\,|{+i}\rangle + \beta\,|{-i}\rangle$$

Pista: Usa que $|+\rangle = \langle{+i}|+\rangle\,|{+i}\rangle + \langle{-i}|+\rangle\,|{-i}\rangle$

2. Matrices de Pauli

2.1. Forma Matricial

Sabemos que las matrices de Pauli se pueden escribir en notación de Dirac como:

$$\begin{aligned} X &= |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| \\ Y &= |{+i}\rangle\langle{+i}| - |{-i}\rangle\langle{-i}| \\ Z &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \end{aligned}$$

a) Usando los resultados del Problema 1, calcula explícitamente la forma matricial de:

$$X = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

b) Calcula explícitamente:

$$Y = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

c) Calcula (es la más fácil):

$$Z = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

2.2. Propiedades

a) Calcula X^2, Y^2, Z^2. ¿Qué obtienes?
b) Verifica que X, Y, Z son hermíticas, es decir, que $X^\dagger = X$ (y análogo para Y, Z).
Recordatorio: $(A^\dagger)_{ij} = (A_{ji})^*$
c) Calcula la traza de cada matriz de Pauli:

$$\mathrm{Tr}(X) = ?, \quad \mathrm{Tr}(Y) = ?, \quad \mathrm{Tr}(Z) = ?$$

2.3. Anticonmutación

Verifica que las matrices de Pauli anticonmutan calculando:

$$XY + YX = ?$$

Si obtienes la matriz cero, entonces anticonmutan: $XY = -YX$.

3. Estados en Dirección Arbitraria

3.1. Construcción del Estado

Un vector unitario arbitrario en coordenadas esféricas se escribe:

$$\hat{n} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$$

El estado de espín .ªrriba.ᵉⁿ dirección $\hat{n}$ es:

$$|S\cdot\hat{n},+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle$$

a) Para $\theta = \pi/2$ y $\phi = 0$ (dirección $+\hat{x}$), calcula $|S\cdot\hat{n},+\rangle$. ¿Reconoces este estado?
b) Para $\theta = \pi/2$ y $\phi = \pi/2$ (dirección $+\hat{y}$), calcula $|S\cdot\hat{n},+\rangle$. ¿Reconoces este estado?
c) Para $\theta = 0$ (dirección $+\hat{z}$), calcula $|S\cdot\hat{n},+\rangle$. ¿Qué obtienes?

3.2. Verificación como Autovector

La matriz de Pauli en dirección arbitraria $\hat{n}$ es:

$$\hat{\sigma}_n = \sin\theta\cos\phi\,X + \sin\theta\sin\phi\,Y + \cos\theta\,Z$$

a) Para el caso $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$ (dirección X), escribe explícitamente la matriz $\hat{\sigma}_n$.
b) Verifica que tu estado del Problema 3a es autovector de esta matriz con autovalor +1, es decir, calcula:

$$\hat{\sigma}_n\,|S\cdot\hat{n},+\rangle = ?$$

y verifica que obtienes $+1\cdot|S\cdot\hat{n},+\rangle$.

Sobre las soluciones.

- Entrega? Durante la semana o al final en un formulario de google que se anunciará (entregaran algunos ejercicios y los trabajos en qiskit).
- Cuando entregue hagalo digital (escaneado o links de colab, etc). Incluya todos los pasos de cálculo, indicando claramente cada problema y subproblema.

Recursos

- Slides del Día 1
- Nielsen & Chuang, Capítulo 2
- Qiskit Textbook: `qiskit.org/textbook`