Campus Araranguá
Curso de Engenharia da Computação
Disciplina de Álgebra Linear

APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR: ADMINISTRAÇÃO DE FLORESTAS

Gabriel Estevam de Oliveira
Vinícius Rodrigues Zannon

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

O PROBLEMA

- Estabelecer um modelo matricial para administrar uma floresta cuja árvores são agrupadas em classes conforme sua altura.

- Calcular o ***rendimento sustentável ótimo*** de um corte periódico quando as árvores de diferentes classes de altura podem ter diferentes valores econômicos.

- As árvores são classificadas por altura, que determinar seu valor econômico:

TABELA 1

Classe	Valor	Intervalo de altura
1 (muda)	$Nenhum$	$[0, h_1)$
2	p_2	$[h_1, h_2)$
3	p_3	$[h_2, h_3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	p_n	$[h_{n-1}, \infty)$

- Inicialmente a quantidade de árvores dada pelo vetor-coluna:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- E a quantidade total de árvores é fixa e corresponde a:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s$$

- Como parâmetro de crescimento por período, tem-se:
  para $i = 1, 2, \ldots, n - 1$

$$g_i\text{: } fração\ que\ cresce\ da\ i - ésima\ classe$$
$$para\ a\ (i + 1) - ésima.$$

$$1 - g_i\text{: } fração\ que\ permanece\ na\ i - ésima\ classe.$$

- Com isso, representa-se a ***matriz de crescimento***:

$$G = \begin{bmatrix} 1-g_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g_1 & 1-g_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-g_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & g_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicada por x, tem-se o vetor-coluna no final do período de crescimento:

$$Gx = \begin{bmatrix} (1-g_1)x_1 \\ g_1x_1 + (1-g_2)x_2 \\ \vdots \\ g_{n-2}x_{n-2} + (1-g_{n-1})x_{n-1} \\ g_{n-1}x_{n-1} + x_n \end{bmatrix}$$

- Para a remoção das árvores, representa-se o ***vetor de cortadas***:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- Para reposição, a matriz n x n é multiplicada por y:

$$Ry = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + \cdots + y_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Assim, tem-se a politica de corte sustentável:

$$\begin{bmatrix} configuração \\ no\ final\ do\ período \\ de\ crescimento \end{bmatrix} - [corte] + \begin{bmatrix} reposição \\ de\ mudas \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} configuração \\ no\ início\ do\ período \\ de\ crescimento \end{bmatrix}$$

- Matematicamente:

$$Gx - y + Ry = x$$

$$(I - R)y = (G - I)x$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g_1 & -g_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -g_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & g_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Forma-se o seguinte sistema de equações:

$$y_2 + \ldots + y_n = g_1 x_1$$

$$y_2 = g_1 x_1 - g_2 x_2$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1} = g_{n-2} x_{n-2} - g_{n-1} x_{n-1}$$

$$y_n = g_{n-1} x_{n-1}$$

- Logo:

$$g_1 x_1 \geq g_2 x_2 \geq \cdots \geq g_{n-1} x_{n-1} \geq 0$$

RENDIMENTO SUSTENTÁVEL ÓTIMO

- O rendimento total RT é dado por:

$$RT = p_2 y_2 + p_3 y_3 + \cdots + p_n y_n$$

Teorema: o rendimento sustentável ótimo é obtido cortando todas as árvores de uma classe de altura específica e nenhuma outra árvore de qualquer outra classe.

$y_i = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, com $i \neq 0$

$$\boxed{g_1 x_1 \geq g_2 x_2 \geq \cdots \geq g_{n-1} x_{n-1} \geq 0}$$

$$x_k = x_{k+1} = \cdots = x_{n-1} = 0$$

$$
\begin{aligned}
y_2 + \ldots + y_n &= g_1 x_1 \\
y_2 &= g_1 x_1 - g_2 x_2 \\
&\vdots \\
y_{n-1} &= g_{n-2} x_{n-2} - g_{n-1} x_{n-1} \\
y_n &= g_{n-1} x_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_k &= g_1 x_1 \\
0 &= g_1 x_1 - g_2 x_2 \\
0 &= g_2 x_2 - g_3 x_3 \\
&\vdots \\
0 &= g_{k-2} x_{k-2} - g_{k-1} x_{k-1} \\
y_k &= g_{k-1} x_{k-1}
\end{aligned}
$$

- Que também podem escritas como:

$$y_k = g_1 x_1 = g_2 x_2 = \cdots = g_{k-1} x_{k-1}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} x_2 &= g_1 x_1 / g_2 \\ x_3 &= g_1 x_1 / g_3 \\ &\vdots \\ x_{k-1} &= g_1 x_1 / g_{k-1} \end{aligned}$$

- Lembrando que:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s$$

obtêm-se

$$x_1 = \frac{s}{1 + \frac{g_1}{g_2} + \frac{g_1}{g_3} + \cdots + \frac{g_1}{g_{k-1}}}$$

- Para o rendimento sustentável RT_k:

$$\boxed{RT_k = p_2y_2 + p_3y_3 + \cdots + p_ny_n}$$

$$= p_ky_k$$

$$= p_kg_1x_1$$

$$= \frac{p_ks}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \cdots + \frac{1}{g_{k-1}}}$$

CONCLUSÃO

- O rendimento sustentável ótimo é o maior valor de

$$\frac{p_k s}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \cdots + \frac{1}{g_{k-1}}}$$

para $k = 2, 3, \dots, n$. O correspondente valor de k é o número da classe que é completamente cortada.

EXEMPLO

- Dada uma matriz de crescimento de uma floresta de pinheiros escoceses, com período de crescimento de 6 anos, qual classe deverá ser completamente cortada para obter o rendimento sustentável ótimo e qual é o rendimento? Suponha que os preços das árvores nas cinco classes de maior altura são:

$$p_2 = 50,\ p_3 = 100,\ p_4 = 150,\ p_5 = 200,\ p_6 = 250$$

- Matriz de crescimento:

$$G = \begin{bmatrix} 0,72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,28 & 0,69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,31 & 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,23 & 0,63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,37 & 1,00 \end{bmatrix}$$

- Da matriz G obtemos:

$$g_1 = 0{,}28, g_2 = 0{,}31, g_3 = 0{,}25, g_4 = 0{,}23, g_5 = 0{,}37$$

Determinando o Rendimento Total (RT) em termos de parâmetros econômicos e de crescimento conhecidos:

$$RT_2 = \frac{50s}{0{,}28^{-1}} = 14{,}0s$$

$$RT_3 = \frac{100s}{0{,}28^{-1} + 0{,}31^{-1}} = 14{,}7s$$

$$RT_4 = \frac{150s}{0{,}28^{-1} + 0{,}31^{-1} + 0{,}25^{-1}} = 13{,}9s$$

$$RT_5 = \frac{200s}{0{,}28^{-1} + 0{,}31^{-1} + 0{,}25^{-1} + 0{,}23^{-1}} = 13{,}2s$$

$$RT_6 = \frac{250s}{0{,}28^{-1} + 0{,}31^{-1} + 0{,}25^{-1} + 0{,}23^{-1} + 0{,}37^{-1}} = 14s$$

REFERÊNCIAS

- ANTON, H; RORRES, C. ***Álgebra Linear com Aplicações.*** 8.ed. Porto Alegre: Bookman; 2001.

Obrigado!

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA