Projeto 2 da Disciplina

Data de Entrega

O projeto deverá ser entregue até às 23h55 do dia 06 de julho de 2023. Entregar no Moodle dois arquivos: um arquivo mlx com o MATLAB Live Script e um pdf (gerado a partir do Live Script), com o relatório, contendo os resultados e as discussões pedidas. Documentar os códigos.

Introdução

O segundo projeto da disciplina continuará estudando as deflexões numa viga. Nesse projeto, no entanto, queremos determinar a deflexão da viga a partir da equação da linha elástica:

$$EI_{zz}\frac{d^2v_y(x)}{dx^2} = M_z(x)$$

em que E é o módulo de elasticidade do material da viga, I_{zz} é o segundo momento de área em relação ao eixo horizontal (z) que passa pelo seu centroide, v_y é a deflexão da viga e M_z é o momento fletor resultante. Como o momento fletor pode variar ao longo do comprimento da viga, então $M_z = M_z(x)$ e, portanto, também a deflexão da viga varia,$v_y = v_y(x)$.

Os métodos vistos em aula usando a família `ode` de integradores do MATLAB são apropriados para resolver Problemas de Valor Inicial (PVI), isto é, conhecido o valor da função e sua derivada em $x = 0$, podemos especificar:

$$EI_{zz}v_y(0) = v_i$$
$$EI_{zz}v_y'(0) = EI_{zz}\theta_z(0) = \theta_i$$

Em que $\theta_z = v_y'$ é a inclinação da viga. Conhecidas as duas condições iniciais, é possível utilizar os integradores do MATLAB para obter uma estimativa de $v_y(x)$ e $\theta_z(x) = v_y'(x)$ no intervalo $0 < x < L$, que corresponde ao comprimento da viga. Isso é um Problema de Valor Inicial.

Problema de Valor de Contorno

No entanto, como a equação diferencial acima é uma equação de segunda ordem, são necessárias duas condições de contorno para especificar resolver completamente o problema. Não necessariamente as duas condições de contorno podem ser conhecidas em $x = 0$. É possível especificar a deflexão $v_y(x)$ ou a inclinação $\theta_z(x)$ da viga em qualquer outro ponto x no intervalo $0 < x < L$. Na viga biapoiada, por exemplo, mostrada na Figura 1, como os apoios impedem a deflexão da viga, as condições de contorno apropriadas para se determinar a deflexão da viga são:

$$v_y(0) = 0$$
$$v_y(L) = 0$$

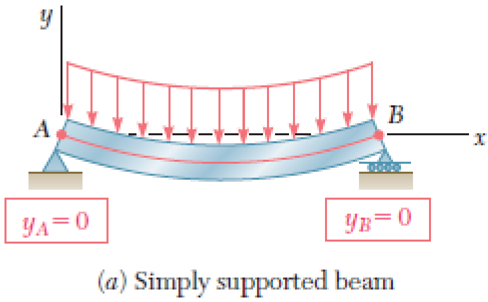


Figura 1 – Viga biapoiada: condições de contorno

Como são fornecidas duas condições da deflexão para diferentes valores da variável independente (x), este problema é chamado de Problema de Valor de Contorno (PVC). Existem diversos métodos numéricos que podem ser utilizados para resolver PVCs. Métodos de Diferenças Finitas, por exemplo, propõem substituir as derivadas na equação original por diferenças finitas, transformando a equação diferencial inicial num sistema de equações lineares que pode ser resolvido pelos métodos já discutidos anteriormente.

No entanto, um método diferente consiste em converter o PVC original num PVI equivalente e utilizar os métodos já vistos de integração numa estratégia do tipo tentativa-e-erro para que o PVI satisfaça as condições de contorno.

O método de Shooting

O método de shooting (*shooting method*) é um método que pode ser aplicado para resolver Problemas de Valor de Contorno reduzindo-o a um Problema de Valor Inicial e envolve encontrar soluções para o PVI equivalente até que as condições de contorno do problema original sejam satisfeitas. O termo *shooting method*, que pode ser traduzido livremente como *Método do Tiro* ou *Método do Chute*, tem esse nome pois o método "chuta" diversas trajetórias em diferentes direções a partir de um contorno até encontrar uma trajetória que "acerta" a outra condição de contorno.

Em termos práticos, para o problema da viga biapoiada acima, podemos definir o método como: dado a equação diferencial sujeita às condições de contorno:

$$\frac{d^2 v_y(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI_{zz}} M_z(x)$$
$$v_y(0) = 0$$
$$v_y(L) = 0$$

Nós convertemos o problema acima num Problema de Valor Inicial, definindo a inclinação da viga como:

$$\frac{dv_y}{dx} = \theta_z$$

Com essa definição, nós podemos reescrever a equação diferencial original como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem (Como?). Se forem dadas as condições iniciais $v_y(0)$ e $\theta_z(0)$, é possível resolver o sistema de equações com qualquer família de integradores `ode`. No entanto, como conhecemos apenas um valor inicial, $v_y(0) = 0$, nós estimamos um valor para a inclinação inicial $\theta_z(0) = \theta_i$ e com esses dois valores, fazemos a integração.

Após completar a integração, nós temos um valor para v_y na outra extremidade da viga (em $x = L$). Chamemos esse valor de v_L. A não ser que nossa estimativa inicial tenha sido especialmente boa, esse valor será diferente do valor desejado $v_y(L) = 0$. Assim, nós podemos estimar um novo valor para θ_i e recalcular a deflexão da viga, até o valor correto seja obtido. Essa é a ideia do *método de shooting*.

Em termos práticos, o *método de shooting* pode ser definido como um problema de busca de raízes: encontrar o valor da inclinação inicial θ_i que satisfaça a condição de contorno $v_y(L) = v_L = 0$. A única diferença, no entanto, é que a obtenção do valor v_L não é a partir de uma função $v_L \neq f(x)$ e, sim, a partir da solução de um PVI.

Viga Biapoiada

O problema a ser resolvido nesse projeto está ilustrado na Figura 2.

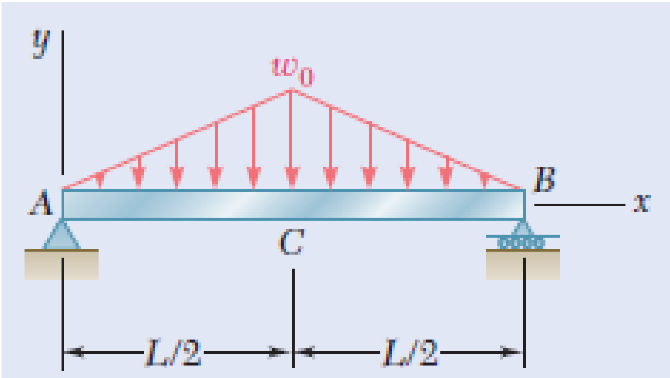


Figura 2 – Viga biapoiada: problema a ser resolvido

Note que este é um problema isostático e a viga está biapoiada e, portanto, o PVC pode ser especificado como:

$$\frac{d^2 v_y(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI_{zz}} M_z(x)$$
$$v_y(0) = 0$$
$$v_y(L) = 0$$

Para este carregamento, o momento fletor $M_z(x)$ pode ser escrito utilizando as funções de singularidade definidas no projeto anterior como:

$$M_z(x) = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^3 + \frac{1}{4}w_0 L x$$

A solução analítica do PVC fornece para a deflexão da viga:

$$EI_{zz}v_y(x) = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0}{30L}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^5 + \frac{1}{24}w_0 L x^3 - \frac{5}{192}w_0 L^3 x$$

Use esta expressão para comparar sua solução numérica com a solução esperada. Escreva o problema de busca de raízes e resolva a equação diferencial até que ambas as condições de contorno sejam satisfeitas.

Primeiro Momento de Área e Centroide

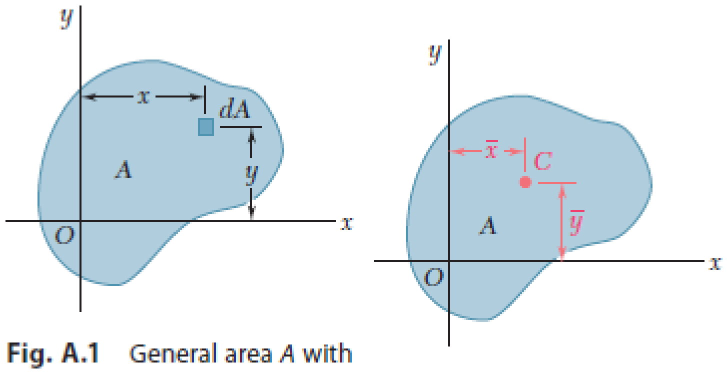


Fig. A.1 General area *A* with infinitesimal area *dA* referred to *xy* coordinate system.

Fig. A.2 Centroid of area *A*.

Figura 3 – Elemento diferencial dA é centroide da seção

A área da seção é definida como:

$$A = \int_A dA$$

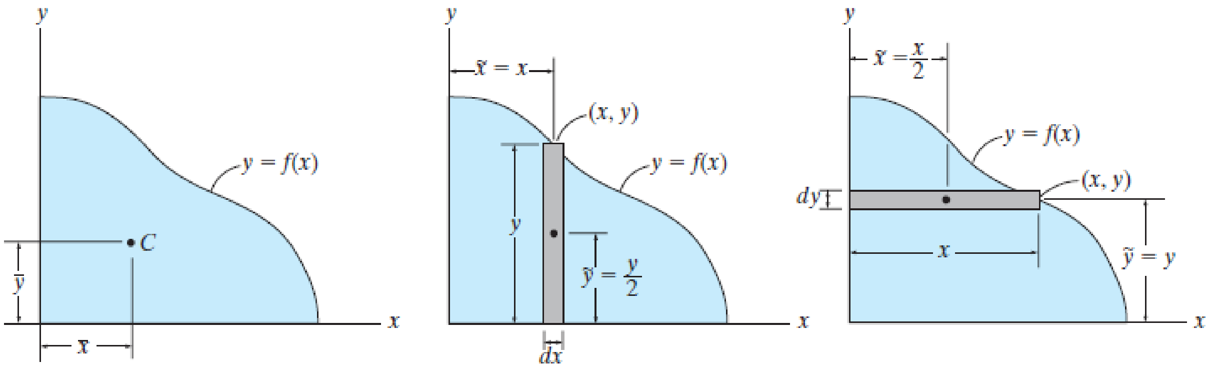
Define-se o primeiro momento de área A com relação aos eixos horizontal x e vertical y como:

$$Q_x = \int_A y dA\,, \quad Q_y = \int_A x dA$$

O centroide da área A é o ponto C cujas coordenadas (x_c, y_c) satisfazem a relação:

$$A y_c = Q_x, \quad A x_c = Q_y$$

Para resolver as integrais acima, é possível definir os elementos de área dependendo de como a seção transversal é definida. A Figura 4 ilustra os elementos de área tipo I e tipo II, que permitem determinar as integrais acima numa única integração (ao invés de fazer a integração dupla), ydx (tipo I) ou xdy (tipo II).



(a) (b) (c)

Figura 4 – Elementos de área tipo I e tipo II

Para o problema do projeto, considere que a seção da viga é aproximadamente cossenoidal, conforme ilustrado na figura abaixo:

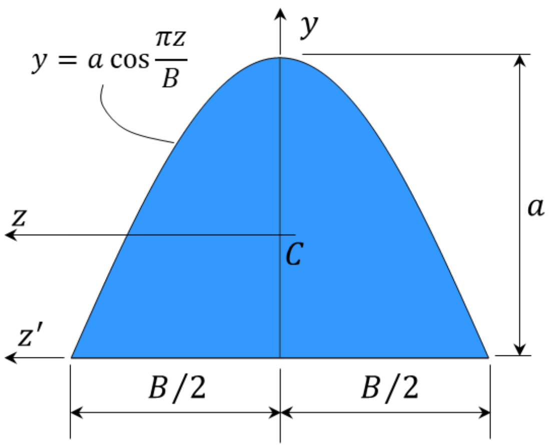


Figura 5 – Seção transversal da viga

Os eixos yz definidos na Figura 5 correspondem aos eixos coordenados utilizados para descrever a deflexão da viga (note que o eixo x está direcionado ao longo do comprimento da viga e é perpendicular à seção da viga). Para essa seção transversal, é conveniente definir elementos infinitesimais do tipo I. Assim, a área da seção transversal é:

$$A = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} a\cos\frac{\pi}{B} z\, dz$$

E o primeiro momento de área é:

$$Q_z = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} y dA = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \left(\frac{a}{2}\cos\frac{\pi}{B} z\right)\left(a\cos\frac{\pi}{B} z\right) dx = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \cos^2\frac{\pi}{B} z\, dz$$

Determine numericamente a localização do centroide da seção:

$$y_c = \frac{Q_z}{A}$$

Compare com o valor esperado:

$$y_c = \frac{\pi}{8} a$$

Compare também o valor do primeiro momento de área com o valor obtido da integral dupla:

$$Q_z = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} y dA = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \int_{0}^{a\cos\frac{\pi z}{B}} y\ dy\ dz$$

Qual integral é mais simples de implementar? Qual você espera que forneça resultados mais precisos?

Segundo Momento de Área

A determinação do centroide da seção é de vital importância em vigas, pois a deflexão calculada pela equação diferencial é a deflexão da linha neutra, a linha que passa pelo centroide da seção. Além disso, o produto EI_{zz} é chamado de rigidez flexural (ou rigidez à flexão) da viga, e I_{zz} é o segundo momento de área da seção da viga, definido como:

$$I_{zz} = \int_A \tilde{y}^2 dA$$

em que $\tilde{y}$ é medido a partir do centroide da seção. Os eixos yz' são utilizados para determinar a localização do centroide da seção, mas são os eixos yz que são utilizados nos cálculos da deflexão da viga.

Para se determinar o segundo momento de área, a integral acima deve ser avaliada. Novamente, a integral acima pode ser avaliada como uma integral dupla para os eixos yz:

$$I_{zz} = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \int_{-y_c}^{a\cos\frac{\pi z}{B} - y_c} y^2 \, dy \, dz$$

Utilizando o Teorema dos Eixos Paralelos, no entanto, o cálculo acima pode ser ligeiramente simplificado. Primeiramente, para a seção cossenoidal mostrada anteriormente, calculamos o segundo momento de área com relação ao eixo z' horizontal, através da integração:

$$I_{z'z'} = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} dI_{zz} = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \frac{1}{3} y^3 dz = \frac{1}{3} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \left(a\cos\frac{\pi}{B} z\right)^3 dz = \frac{a^3}{3} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \cos^3 \frac{\pi}{B} z \, dz$$

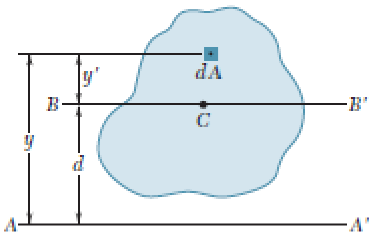


Fig. 9.9 The moment of inertia of an area *A* with respect to an axis *AA'* can be determined from its moment of inertia with respect to the centroidal axis *BB'* by a calculation involving the distance *d* between the axes.

Figura 6 – Teorema dos Eixos Paralelos

Do teorema dos eixos paralelos, temos que:

$$I_{z'z'} = I_{zz} + Ad_y^2$$

Em que I_{zz} é o segundo momento de área com relação aos eixos centroidais, A é a área da seção e d_y é a distância vertical do eixo até o eixo centroidal (no caso, $d_y = y_c$). A integral $I_{z'z'}$ já foi calculada e também foi determinada a área da seção e a localização do centroide. Logo,

$$I_{zz} = I_{z'z'} - Ay_c^2$$

Esse é o valor a ser utilizado como segundo momento de área I_{zz}. Compare com o valor esperado:

$$I_{zz} = \frac{4}{9\pi} a^3 B - \frac{\pi}{32} a^3 B = \frac{(128 - 9\pi^2)}{288\pi} Ba^3$$

Determine I_{zz} das duas maneiras (através da integração dupla e da integração simples + teorema dos eixos paralelos) e compare os resultados. Qual é mais simples de se calcular?

O projeto

O projeto consiste em estudar a deflexão de uma viga biapoiada, utilizando algumas das funções já vistas no projeto anterior, bem como a implementação do *método de shooting* como estratégia para solução do PVC.

Parte 0 – Dados de Entrada (1,0 pt)

Os parâmetros do problema necessárias para as simulações serão dados em função do RA do aluno. Os parâmetros necessários são:

L: comprimento da viga (m)

B: largura da viga (m)

a: altura da viga (m)

w_0: intensidade do carregamento (N/m)

E: módulo de elasticidade do material da viga (Pa)

A partir dos valores de B e a, é possível determinar a partir do cálculo descrito acima o segundo momento de área I_{zz} e, na sequência, a rigidez flexural da viga EI_{zz}.

Os valores a serem utilizados serão fornecidos num arquivo `.mat` junto com as instruções do projeto. Esse arquivo contém uma única variável do tipo table. A tabela contém 6 colunas. A primeira coluna é uma coluna de `strings` com o RA de cada aluno da disciplina. As 5 colunas subsequentes contêm os valores das variáveis acima descritas, já nas unidades SI.

Escreva uma função que receba uma string `RA` e a variável tabela `T` fornecida, faça a busca do seu RA na tabela e retorne as variáveis acima descritas.

```
RA = '123456';
load input.mat


function [L,B,a,w0,E] = dados_de_entrada(RA,T)
    %
    % seu código aqui
    %
end
```

Parte 1 – Propriedades Geométricas (3,0 pt)

Com os valores de a e B da seção transversal da viga, determine:

a) A área da seção transversal, A;
b) O primeiro momento de área, Q_z;
c) A localização do centroide, y_c;
d) O segundo momento de área, I_{zz}.

Compare o cálculo de Q_z e I_{zz} através da integral dupla e da maneira alternativa proposta.

Discuta:

- Como a integração numérica foi realizada?
- Qual função utilizou? Por que?
- Quais as diferença em se realizar uma única integração e uma integral dupla?
- Há erros nos cálculos, se comparado com os valores analíticos esperados? Esses erros obtidos da aproximação numérica são aceitáveis? Como diminuir os erros obtidos?

Parte 2 – Deflexão da viga (5,0 pt)

Com a rigidez flexural da viga, é possível calcular a deflexão da viga, resolvendo-se a equação da linha elástica. A maneira proposta nessa atividade é pelo *método de shooting*, descrito anteriormente. Implemente o método para determinar a deflexão da viga e compare com o valor analítico esperado. Plote a resposta numérica e analítica no mesmo gráfico e compare ambos.

Discuta:

- Como a equação diferencial de segunda ordem foi reduzida para um sistema de primeira ordem?
- Qual integrador do MATLAB foi utilizado para determinar $v_y(L)$? Por que você escolheu esse?
- Como foi determinado o algoritmo de busca para encontrar o valor de θ_i apropriado, no *método de shooting*?
- Quais parâmetros foram necessários determinar/estimar para encontrar a solução do problema de valor de contorno?

Relatório (1,0 pt)

O relatório deve conter todos os resultados obtidos e uma discussão dos resultados, conforme solicitado em cada parte do projeto. Adicione ainda ao relatório uma discussão explicando brevemente cada algoritmo implementado e como escolheu as funções e os parâmetros utilizados. Gere o pdf do relatório a partir do seu Live Script. O feedback do professor será dado em cima do relatório entregue no Moodle. Lembre-se de documentar todas as funções. Entregue também o script .mlx.

Avaliação do curso

Responda de forma anônima à avaliação do curso: https://forms.gle/3f1gK9YDubXtgPjM9