

Foi-nos dado que  $dx/dt = 1,5 \text{ m/s}$  e nos foi pedido para encontrar  $d\theta/dt$  quando  $x = 8$ . A equação que relaciona  $x$  e  $\theta$  pode ser escrita a partir da Figura 5:

$$\frac{x}{6} = \operatorname{tg} \theta, \quad x = 6 \operatorname{tg} \theta.$$

Derivando cada lado em relação a  $t$ , obtemos

$$\frac{dx}{dt} = 6 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

então

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{6} \cos^2 \theta \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{1}{6} \cos^2 \theta (1,5) = \frac{1}{4} \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

Quando  $x = 8$ , o comprimento do feixe é 10, logo  $\cos \theta = \frac{3}{5}$  e

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{5} \right)^2 = \frac{9}{100} = 0,09.$$

O holofote está girando a uma taxa de 0,09 rad/s.

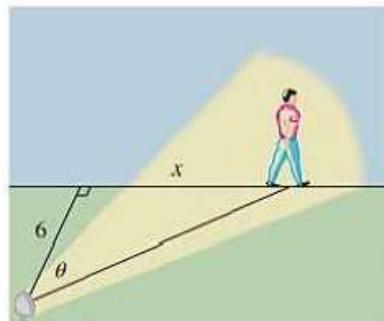


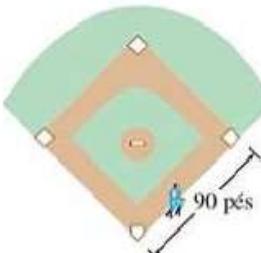
FIGURA 5

### 3.9 Exercícios

- ✓ 1. Se  $V$  for o volume de um cubo com aresta de comprimento  $x$  e, à medida que o tempo passa, o cubo se expandir, encontre  $dV/dt$  em termos de  $dx/dt$ .
- 2. (a) Se  $A$  é a área de um círculo com raio  $r$  e o círculo se expande à medida que o tempo passa, encontre  $dA/dt$  em termos de  $dr/dt$ .  
(b) Suponha que petróleo vaze por uma ruptura de um petroleiro e espalhe-se em um padrão circular. Se o raio do petróleo derramado crescer a uma taxa constante de 1 m/s, quão rápido a área do vazamento está crescendo quando o raio é igual a 30 m?
- ✓ 3. Cada lado de um quadrado está aumentando a uma taxa de 6 cm/s. A que taxa a área do quadrado está aumentando quando a área do quadrado for 16 cm<sup>2</sup>?
- 4. O comprimento de um retângulo está aumentando a uma taxa de 8 cm/s e sua largura está aumentando numa taxa de 3 cm/s. Quando o comprimento for 20 cm e a largura for 10 cm, quão rápido a área do retângulo está aumentando?
- ✓ 5. Um tanque cilíndrico com raio de 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de 3 m<sup>3</sup>/min. Quão rápido a altura da água está aumentando?
- 6. O raio de uma esfera está aumentando a uma taxa de 4 mm/s. Quão rápido o volume está aumentando quando o diâmetro for 80 mm?
- 7. O raio de uma bola esférica está crescendo a uma taxa de 2 cm/min. A que taxa a área da superfície da bola está crescendo quando o raio for 8 cm?
- 8. A área de um triângulo com lados de comprimentos  $a$  e  $b$  e ângulo internos  $\theta$  é
 
$$A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \theta$$
 (a) Se  $a = 2$  cm e  $b = 3$  cm, e  $\theta$  aumenta a uma taxa de 0,2 rad/min, quão rápido a área está crescendo quando  $\theta = \pi/3$ ?  
 (b) Se  $a = 2$  cm,  $b$  cresce a uma taxa de 1,5 cm/min e  $\theta$  cresce a uma taxa de 0,2 rad/min, quão rápido a área está crescendo quando  $b = 3$  cm e  $\theta = \pi/3$ ?  
 (c) Se  $a$  cresce a uma taxa de 2,5 cm/min,  $b$  cresce a uma taxa de 1,5 cm/min e  $\theta$  cresce a uma taxa de 0,2 rad/min, quão rápido a área está crescendo quando  $a = 2$  cm,  $b = 3$  cm e  $\theta = \pi/3$ ?
- ✓ 9. Suponha que  $y = \sqrt{2x + 1}$ , onde  $x$  e  $y$  são funções de  $t$ .
 (a) Se  $dx/dt = 3$ , encontre  $dy/dt$  quando  $x = 4$ .  
 (b) Se  $dy/dt = 5$ , encontre  $dx/dt$  quando  $x = 12$ .
- 10. Suponha que  $4x^2 + 9y^2 = 36$ , onde  $x$  e  $y$  são funções de  $t$ .
 (a) Se  $dy/dt = \frac{1}{3}$ , encontre  $dx/dt$  quando  $x = 2$  e  $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$ .  
 (b) Se  $dx/dt = 3$ , encontre  $dy/dt$  quando  $x = -2$  e  $y = \frac{1}{3}\sqrt{5}$ .
- ✓ 11. Se  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $dx/dt = 5$  e  $dy/dt = 4$ , encontre  $dz/dt$  quando  $(x, y, z) = (2, 2, 1)$ .
- 12. Uma partícula está se movimentando ao longo de uma hipérbole  $xy = 8$ . Quando atinge o ponto  $(4, 2)$ , a coordenada  $y$  está decrescendo a uma taxa de 3 cm/s. Quão rápido a coordenada  $x$  do ponto está variando nesse momento?
  - Quais são as quantidades dadas no problema?
  - Qual é a incógnita?

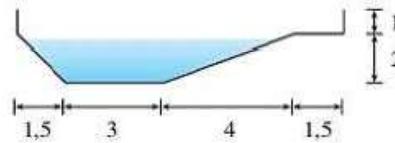


É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

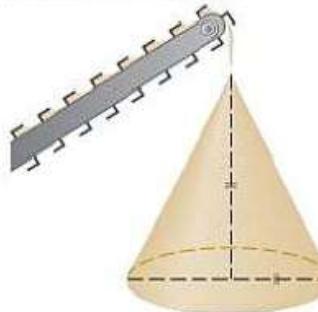
- (c) Faça um desenho da situação para qualquer instante  $t$ .  
 (d) Escreva uma equação que relate as quantidades.  
 (e) Termine a resolução do problema.
13. Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 2 km, a 800 km/h, e passa diretamente sobre uma estação de radar. Encontre a taxa segundo a qual a distância entre o avião e a estação aumenta quando ele está a 3 km além da estação.
14. Se uma bola de neve derrete de forma que a área de sua superfície decresce a uma taxa de  $1 \text{ cm}^2/\text{min}$ , encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro é 10 cm.
15. Uma luz de rua é colocada no topo de um poste de 6 metros de altura. Um homem com 2 m de altura anda, afastando-se do poste com velocidade de 1,5 m/s ao longo de uma trajetória reta. Com que velocidade se move a ponta de sua sombra quando ele está a 10 m do poste?
16. Ao meio-dia, o navio A está a 150 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o leste a 35 km/h e o navio B está navegando para norte a 25 km/h. Quão rápido a distância entre os navios está variando às 16h?
- 
17. Dois carros iniciam o movimento partindo de um mesmo ponto. Um viaja para o sul a 30 km/h e o outro viaja para o oeste a 72 km/h. A qual taxa a distância entre os carros está aumentando duas horas depois?
18. Um holofote sobre o solo ilumina uma parede a 12 m de distância. Se um homem de 2 m de altura anda da holofote em direção à parede a uma velocidade de 1,6 m/s, quão rápido o comprimento de sua sombra diminui sobre a parede quando ele está a 4 m dela?
19. Um homem começa a andar para o norte a 1,2 m/s a partir de um ponto  $P$ . Cinco minutos depois uma mulher começa a andar para o sul a 1,6 m/s de um ponto 200 m a leste de  $P$ . A que taxa as pessoas estão se distanciando 15 min após a mulher começar a andar?
20. Uma quadra de beisebol é um quadrado com um lado de 90 pés (27,432 m). Um batedor atinge a bola e corre em direção à primeira base com uma velocidade de 24 pés/s (7,3152 m/s).
- (a) A que taxa decresce sua distância da segunda base quando ele está a meio caminho da primeira base?  
 (b) A que taxa aumenta sua distância da terceira base no mesmo momento?
- 
21. A altura de um triângulo está aumentando a uma taxa de  $1 \text{ cm}/\text{min}$  enquanto a área do triângulo está aumentando a uma taxa de  $2 \text{ cm}^2/\text{min}$ . A que taxa a base do triângulo está variando quando a altura for 10 cm e a área for  $100 \text{ cm}^2$ ?
22. Um bote é puxado em direção ao ancoradouro por uma corda que está atada na proa do bote e que passa por uma polia sobre o ancoradouro (colocada 1 m mais alto que a proa). Se a corda for puxada a uma taxa de 1 m/s, quão rápido se aproxima o bote do ancoradouro, quando ele estiver a 8 m dele?



23. Ao meio-dia, o navio A está a 100 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o sul a 35 km/h e o navio B está navegando para norte a 25 km/h. Quão rápido a distância entre os navios está variando às 16h?
24. Uma partícula move-se ao longo da curva  $y = 2 \operatorname{sen}(\pi x/2)$ . Quando a partícula passa pelo ponto  $(\frac{1}{2}, 1)$ , sua coordenada  $x$  cresce a uma taxa de  $\sqrt{10} \text{ cm/s}$ . Quão rápido a distância da partícula à sua origem está variando nesse momento?
25. Está vazando água de um tanque cônico invertido a uma taxa de  $10.000 \text{ cm}^3/\text{min}$ . Ao mesmo tempo, água está sendo bombeada para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem 6 m de altura e o diâmetro no topo é de 4 m. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de  $20 \text{ cm/min}$  quando a altura da água for 2 m, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada para dentro do tanque.
26. Um cocho tem 6 m de comprimento, e suas extremidades têm a forma de triângulos isósceles com 1 m de base e 50 cm de altura. Se o cocho for preenchido com água a uma taxa de  $1,2 \text{ m}^3/\text{min}$ , quão rápido o nível da água estará subindo quando ela tiver 30 cm de profundidade?
27. Um cocho de água tem 10 m de comprimento e uma secção transversal com a forma de um trapezóide isósceles com 30 cm de comprimento na base, 80 cm de extensão no topo e 50 cm de altura. Se o cocho for preenchido com água a uma taxa de  $0,2 \text{ m}^3/\text{min}$ , quão rápido o nível da água estará subindo quando ela tiver 30 cm de profundidade?
28. Uma piscina tem 5 m de largura por 10 m de comprimento, 1 m de profundidade na parte rasa e 3 m na parte mais funda. Sua secção transversal está mostrada na figura. Se a piscina for enchida a uma taxa de  $0,1 \text{ m}^3/\text{min}$ , quão rápido o nível da água sobre quando sua profundidade no ponto mais profundo for de 1 m?



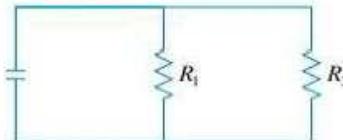
29. Uma esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de  $3 \text{ m}^3/\text{min}$ , constituindo uma pilha na forma de cone com o diâmetro da base e altura sempre igual. Quão rápido a altura da pilha cresce quando está a 3 m de altura?



30. Uma pipa a 50 m acima do solo move-se horizontalmente a uma velocidade de 2 m/s. A que taxa decresce o ângulo entre a linha e a horizontal depois de 100 m de linha serem soltos?
31. Os lados de um triângulo equilátero estão crescendo a uma taxa de 10 cm/min. A que taxa a área do triângulo está crescendo quando os lados têm 30 cm de comprimento?
32. Quão rápido o ângulo entre o solo e a escada está variando no Exemplo 2 quando a parte de baixo da escada estiver a 3 m da parede?
- ✓ 33. O topo de uma escada desliza, por uma parede vertical a uma taxa de 0,15 m/s. No momento em que a base da escada está a 3 m da parede, ela afasta-se da parede à velocidade de 0,2 m/s. Qual o comprimento da escada?
34. De acordo com o modelo que usamos para resolver o Exemplo 2, o que acontece quando o topo da escada se aproxima do chão? O modelo é apropriado para valores pequenos de  $y$ ?
35. Se o ponteiro dos minutos de um relógio tem comprimento  $r$  (em centímetros), encontre a taxa na qual ele varre área como função de  $r$ .
- ✉ 36. Uma tomeira está preenchendo uma pia hemisférica de 60 cm de diâmetro com água a uma taxa de 2 L/min. Encontre a taxa na qual a água está aumentando na pia quando estiver cheia até a metade. [Use os seguintes fatos: 1 L é 1 000 cm<sup>3</sup>. O volume de uma porção de uma esfera de raio  $r$  com altura  $h$  a partir da base é  $V = \pi(rh^2 - \frac{1}{3}h^3)$ , como será mostrado no Capítulo 6.]
- ✓ 37. A Lei de Boyle afirma que quando uma amostra de gás está sendo comprimida a uma temperatura constante, a pressão  $P$  e o volume  $V$  satisfazem a equação  $PV = C$ , onde  $C$  é uma constante. Suponha que, em um certo momento, o volume seja de 600 cm<sup>3</sup>, a pressão de 150 kPa, e a pressão cresça a uma taxa de 20 kPa/min. A que taxa está decrescendo o volume nesse instante?
38. Quando o ar se expande adiabaticamente (sem ganhar ou perder calor), sua pressão  $P$  e volume  $V$  estão relacionados pela equação  $PV^{1.4} = C$ , onde  $C$  é uma constante. Suponha que em um certo instante o volume seja de 400 cm<sup>3</sup> e a pressão, 80 kPa, e esteja decrescendo a uma taxa de 10 kPa/min. A que taxa está crescendo o volume nesse momento?
- ✓ 39. Se dois resistores com resistências  $R_1$  e  $R_2$  estão conectados em paralelo, como na figura, então a resistência total  $R$ , medida em ohms ( $\Omega$ ), é dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

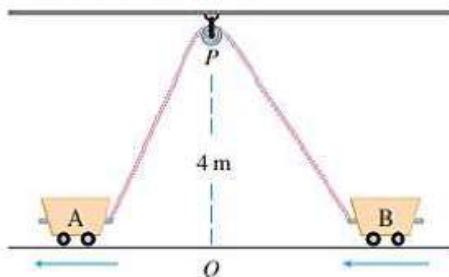
Se  $R_1$  e  $R_2$  estão aumentando a taxas de 0,3  $\Omega/\text{s}$  e 0,2  $\Omega/\text{s}$ , respectivamente, quão rápido  $R$  está variando quando  $R_1 = 80 \Omega$  e  $R_2 = 100 \Omega$ ?



40. Nos peixes, o peso  $B$  do cérebro como uma função do peso corporal  $W$  foi modelado pela função potência  $B = 0,007W^{2/3}$ , onde  $B$  e  $W$  são medidos em gramas. Um modelo para o peso corporal como uma função de comprimento de corpo  $L$  (medido em centímetros) é  $W = 0,12L^{2.53}$ . Se, em 10 milhões de anos, o comprimento médio de uma certa espécie de peixes evoluiu de 15 cm para 20 cm a uma taxa constante, quão rápido estava crescendo o cérebro dessa espécie quando o comprimento médio era de 18 cm?

41. Dois lados de um triângulo têm comprimento de 12 m e 15 m. O ângulo entre eles está aumentando a uma taxa de 2°/min. A que taxa o comprimento de um terceiro lado está aumentando quando o ângulo entre os lados de comprimento fixo for 60°?

42. Duas carretas, A e B, estão conectadas por uma corda de 12 m que passa por uma polia  $P$  (veja a figura). O ponto  $Q$  no chão está 4 m diretamente abaixo de  $P$  e entre as carretas. A carreta A está sendo puxada para longe de  $Q$  a uma velocidade de 0,5 m/s. A que velocidade a carreta B está se movendo em direção a  $Q$  no instante em que a carreta A estiver 3 m de  $Q$ ?



43. Uma câmera de televisão está posicionada a 1.200 m de uma base de lançamento de foguete. O ângulo de elevação da câmera deve variar a uma taxa na qual possa focalizar o foguete. O mecanismo de foco da câmera também deve levar em conta o aumento da distância entre a câmera e o foguete em subida. Vamos supor que o foguete suba verticalmente e com velocidade de 200 m/s quando já tiver subido 900 m.

- (a) Quão rápido estará variando a distância da câmera ao foguete naquele momento?  
 (b) Se a câmera de televisão se mantiver sempre na direção do foguete, quão rápido estará variando seu ângulo de elevação naquele mesmo momento?

44. Um farol está localizado em uma pequena ilha, e a distância entre ele e o ponto  $P$  mais próximo em uma costa reta do continente é de 3 km. Seu feixe de luz realiza quatro revoluções por minuto. Quão rápido o feixe de luz está se movendo ao longo da costa quando ele estiver a 1 km de  $P$ ?

45. Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 5 km e passa diretamente sobre um telescópio no chão. Quando o ângulo de elevação for  $\pi/3$ , esse ângulo estará diminuindo a uma taxa de  $\pi/6$  rad/min. A que velocidade o avião está viajando naquele instante?

46. Uma roda-gigante com raio de 10 m está girando a uma taxa de uma revolução a cada dois minutos. Quão rápido um passageiro estará subindo quando seu assento estiver 16 m acima do nível do solo?

47. Um avião voando a uma velocidade constante de 300 km/h passa sobre uma estação de radar no solo a uma altitude de 1 km e subindo em um ângulo de 30°. A que taxa está crescendo a distância do avião em relação à estação de radar 1 minuto mais tarde?

48. Duas pessoas começam a andar a partir do mesmo ponto. Uma anda para o leste a 4 km/h e a outra anda para nordeste a 2 km/h. Quão rápido a distância entre as pessoas está variando após 15 minutos?

49. Um velocista corre numa pista circular com raio de 100 m numa velocidade constante de 7 m/s. O amigo do corredor está parado a uma distância 200 m do centro da pista. Quão rápido a distância entre os amigos está variando quando a uma distância entre eles é de 200 m?

50. O ponteiro dos minutos de um relógio mede 8 mm, enquanto o das horas tem 4 mm de comprimento. Quão rápido está variando a distância entre a ponta dos ponteiros à 1 hora?