

## Exercícios

- 1) Considere as concatenações de símbolos do alfabeto da Lógica Proposicional dadas a seguir. Identifique aquelas que são fórmulas da Lógica Proposicional. Considere a forma simplificada de representação de fórmulas, onde os símbolos de pontuação podem ser omitidos.
  - a)  $(PQ \vee \text{true})$
  - b)  $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow P) \vee \neg \neg R)$
  - c)  $\neg \neg P$
  - d)  $\vee Q$
  - e)  $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow \neg R))$
- 2) Responda as questões a seguir, justificando suas respostas.
  - a) Existe fórmula sem símbolo de pontuação?
  - b) Quantos tipos de símbolos possui o alfabeto da Lógica Proposicional? Quais são estes símbolos?
  - c) Existe fórmula da Lógica Proposicional com algum conectivo, mas sem símbolo de pontuação?
- 3) Determine o comprimento e as subfórmulas das fórmulas a seguir.
  - a)  $((\neg \neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \wedge \text{true}$
  - b)  $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
  - c)  $((P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P) \vee Q$
  - d)  $\neg(P \rightarrow \neg P)$
- 4) Elimine o maior número possível de símbolos de pontuação das fórmulas a seguir, mantendo a representação da fórmula original.
  - a)  $((\neg(\neg P)) \leftrightarrow ((\neg(\neg(\neg(P \vee Q)))) \rightarrow R)) \wedge P$
  - b)  $(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg \neg R \vee \neg P))$
  - c)  $((P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (\neg Q)))$
- 5) Considere as concatenações de símbolos a seguir. A partir da introdução de símbolos de pontuação, identifique quais fórmulas da Lógica Proposicional é possível obter.
  - a)  $P \vee \neg Q \rightarrow R \leftrightarrow \neg R$
  - b)  $Q \rightarrow \neg P \wedge Q$
  - c)  $\neg P \vee Q \leftrightarrow Q$
  - d)  $\neg \neg P \rightarrow Q \leftrightarrow P \wedge P \rightarrow \neg \neg R$
- 6) Conforme a definição de fórmula, os conectivos proposicionais diferentes de  $\neg$  devem ser escritos na forma infixa. Isto é, o conectivo  $\wedge$  por exemplo, deve ser escrito entre dois símbolos proposicionais ou duas fórmulas. A definição de fórmula na Lógica Proposicional poderia ser modificada, possibilitando escrever os conectivos na notação prefixa, conforme indicado pelas correspondências a seguir.  
 $(\neg P)$  corresponde à  $\neg P$  na notação prefixa. Neste caso, apenas os símbolos de pontuação são omitidos.  
 $(P \wedge Q)$  corresponde a  $\wedge PQ$ . Neste caso, o conectivo  $\wedge$  é colocado no início da fórmula e os símbolos de pontuação são omitidos.  
 $(P \vee Q)$  corresponde a  $\vee PQ$ ,  
 $(P \rightarrow Q)$  corresponde a  $\rightarrow PQ$  e  
 $(P \leftrightarrow Q)$  corresponde a  $\leftrightarrow PQ$ .

A utilização dos conectivos na forma prefixa determina uma notação denominada notação polonesa.

- Escreva as fórmulas dos exercícios 3 e 4 utilizando a notação polonesa.
- Determine quais seqüências de símbolos, indicadas a seguir, são fórmulas da Lógica Proposicional que utilizam a notação polonesa. No caso em que a seqüência de símbolos é uma fórmula, reescreva-a utilizando a notação convencional.

$$\begin{aligned} \vee \rightarrow PQ &\leftrightarrow R \rightarrow \vee PQ \neg S \\ \rightarrow \leftrightarrow PQ \vee \rightarrow PQ &\rightarrow \neg RR \\ \rightarrow \neg P \neg QR \wedge \wedge PQ \vee \neg R \neg P & \\ \leftrightarrow \rightarrow \neg P \vee QR \leftrightarrow \wedge PQ \vee \neg \neg R \neg P & \end{aligned}$$

- Responda, justificando sua resposta.

- É possível encontrar uma fórmula  $H$ , da Lógica Proposicional, que corresponda a duas fórmulas diferentes escrita na notação polonesa?
  - É possível encontrar uma fórmula  $H$  escrita na notação polonesa, que corresponda a duas fórmulas diferentes da Lógica Proposicional?
- Faça os exercícios 6 e 7 considerando a notação pós-fixa, indicada pelas correspondências.
    - ( $\neg P$ ) corresponde a  $P \neg$ ,
    - ( $P \wedge Q$ ) corresponde a  $PQ\wedge$ ,
    - ( $P \vee Q$ ) corresponde a  $PQ\vee$ ,
    - ( $P \rightarrow Q$ ) corresponde a  $PQ\rightarrow$  e
    - ( $P \leftrightarrow Q$ ) corresponde a  $PQ\leftrightarrow$ .
  - Qual a paridade do número de símbolos de pontuação de uma fórmula da Lógica Proposicional?
  - Seja  $H$  uma fórmula que não contém o conectivo  $\neg$ .
    - Qual a paridade de  $\text{comp}[H]$ ?
    - Qual a relação entre  $\text{comp}[H]$  e o número de conectivos de  $H$ ?

## Sugestões e soluções de exercícios selecionados

- a) Não é fórmula.  
b) É fórmula.  
c) É fórmula.  
d) Não é fórmula.  
e) É fórmula.
- a) Sim, por exemplo, as fórmulas  $P$ , *true* etc.  
c) Não.
- a) 11
- a)  $\neg\neg P \leftrightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \rightarrow R) \wedge P)$
- c)  $((\neg P) \vee (Q \leftrightarrow Q))$
- a) A fórmula do item a) do exercício 4 é escrita como:  
 $\leftrightarrow \wedge \neg \rightarrow \neg \neg \vee P Q R P \neg \neg P$   
b)  $\leftrightarrow \rightarrow \neg P \vee Q R \leftrightarrow \wedge P Q \vee \neg \neg R \neg P$