TEC O Visual 3.1 usa um escopo de inclinação para ilustrar essa fórmula.

Derivada da Função Exponencial Natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

Assim, a função exponencial $f(x) = e^x$ tem a propriedade de ser sua própria derivada. O significado geométrico desse fato é que a inclinação da reta tangente à curva $y = e^x$ é igual à coordenada y do ponto (veja a Figura 7).

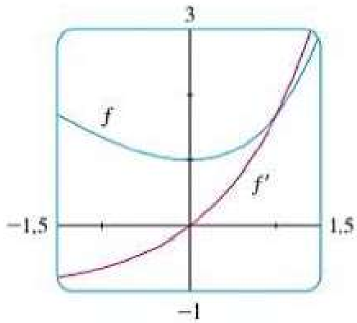

FIGURA 8

EXEMPLO 8 Se $f(x) = e^x - x$, encontre f' e f''. Compare os gráficos de f e f'.

SOLUÇÃO Usando a Regra da Subtração, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1.$$

Na Seção 2.8 definimos a segunda derivada como a derivada de f', de modo que

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x.$$

A Figura 8 exibe os gráficos da função f e sua derivada f'. Observe que f tem uma tangente horizontal quando $x = 0$, o que corresponde ao fato de que $f'(0) = 0$. Observe também que, para $x > 0$, $f'(x)$ é positivo e f é crescente. Quando $x < 0$, $f'(x)$ é negativo e f é decrescente.

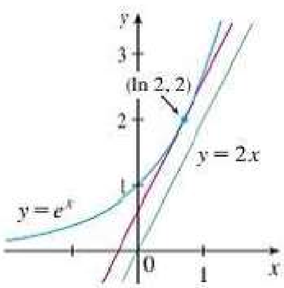

FIGURA 9

EXEMPLO 9 Em que ponto da curva $y = e^x$ sua reta tangente é paralela à reta $y = 2x$?

SOLUÇÃO Uma vez que $y = e^x$, temos $y' = e^x$. Denote a coordenada x do ponto em questão por a. Então a inclinação da reta tangente nesse ponto é e^a. Essa reta tangente será paralela à reta $y = 2x$ se ela tiver a mesma inclinação, ou seja, 2. Igualando as inclinações, obtemos

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

Portanto, o ponto pedido é $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$ (veja a Figura 9).

3.1 Exercícios

1. (a) Como é definido o número e?
(b) Use uma calculadora para estimar os valores dos limites

$$\lim_{h \to 0} \frac{2{,}7^h - 1}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0} \frac{2{,}8^h - 1}{h}$$

com precisão até a segunda casa decimal. O que você pode concluir sobre o valor de e?

2. (a) Esboce, à mão, o gráfico da função $f(x) = e^x$, prestando particular atenção em como o gráfico cruza o eixo y. Que fato lhe permite fazer isso?
(b) Que tipos de funções são $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^e$? Compare as fórmulas de derivação para f e g.
(c) Qual das funções da parte (b) cresce mais rapidamente quando x é grande?

3–32 Derive a função.

3. $f(x) = 186{,}5$

4. $f(x) = \sqrt{30}$

5. $f(x) = 5{,}2x + 2{,}3$

6. $g(x) = \frac{7}{4}x^2 - 3x + 12$

7. $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 4t$

8. $f(t) = 1{,}4t^5 - 2{,}5t^2 + 6{,}7$

9. $g(x) = x^2(1 - 2x)$

10. $H(u) = (3u - 1)(u + 2)$

11. $y = x^{-2/5}$

12. $B(y) = ay^{-3}$

13. $F(r) = \dfrac{5}{r^3}$

14. $y = x^{5/3} - x^{2/3}$

15. $R(a) = (3a + 1)^2$

16. $h(t) = \sqrt[4]{t} - 4e^t$

17. $S(p) = \sqrt{p} - p$

18. $y = \sqrt[3]{x}\,(2 + x)$

19. $y = 3e^x + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

20. $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$

21. $h(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu$

22. $y = \dfrac{\sqrt{x} + x}{x^2}$

23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

24. $G(t) = \sqrt{5t} + \dfrac{\sqrt{7}}{t}$

25. $j(x) = x^{2,4} + e^{2,4}$

26. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

27. $G(q) = (1 + q^{-1})^2$

28. $F(z) = \dfrac{A + Bz + Cz^2}{z^2}$

É necessário uma calculadora gráfica ou computador

29. $f(v) = \dfrac{\sqrt[3]{v} - 2ve^v}{v}$ **30.** $D(t) = \dfrac{1 + 16t^2}{(4t)^3}$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$ **32.** $y = e^{x+1} + 1$

33–36 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

33. $y = 2x^3 - x^2 + 2, \quad (1, 3)$ **34.** $y = 2e^x + x, \quad (0, 2)$

35. $y = x + \dfrac{2}{x}, \quad (2, 3)$ **36.** $y = \sqrt[4]{x} - x, \quad (1, 0)$

37–38 Encontre equações para a reta tangente e para a reta normal à curva no ponto dado.

37. $y = x^2 - x^4, \quad (1, 0)$ **38.** $y^2 = x^3, \quad (1, 1)$

39–40 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado Ilustre com o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

39. $y = 3x^2 - x^3, \quad (1, 2)$ **40.** $y = x - \sqrt{x}, \quad (1, 0)$

41–42 Encontre $f'(x)$. Compare os gráficos de f e f' e use-os para explicar por que sua resposta é razoável.

41. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ **42.** $f(x) = x^5 - 2x^3 + x - 1$

43. (a) Faça o gráfico da função

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$$

na janela retangular $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.

(b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar as inclinações, faça um esboço, à mão, do gráfico de f'. (Veja o Exemplo 1 da Seção 2.8.)

(c) Calcule $f'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de f'. Compare com seu esboço da parte (b).

44. (a) Faça o gráfico da função $g(x) = e^x - 3x^2$ na janela retangular $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.

(b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar as inclinações, faça um esboço, à mão, do gráfico de g'. (Veja o Exemplo 1 da Seção 2.8.)

(c) Calcule $g'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de g'. Compare com seu esboço da parte (b).

45–46 Encontre a primeira e a segunda derivadas da função.

45. $f(x) = 0{,}001x^5 - 0{,}02x^3$ **46.** $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

47–48 Encontre a primeira e a segunda derivadas da função. Verifique se suas respostas são razoáveis, comparando os gráficos de f, f' e f''.

47. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$ **48.** $f(x) = e^x - x^3$

49. A equação de movimento de uma partícula é $s = t^3 - 3t$, em que s está em metros e t, em segundos. Encontre

(a) a velocidade e a aceleração como funções de t,

(b) a aceleração depois de 2 s e

(c) a aceleração quando a velocidade for 0.

50. A equação de movimento de uma partícula é $s = t^4 - 2t^3 + t^2 - t$, onde s está em metros e t, em segundos.

(a) Encontre a velocidade e a aceleração como funções de t.

(b) Encontre a aceleração depois de 1 s.

(c) Trace o gráfico das funções de posição, velocidade e aceleração na mesma tela.

51. Biólogos propuseram um polinômio cúbico para modelar o comprimento L do bodião do Alasca na idade A:

$$L = 0{,}0155A^3 - 0{,}372A^2 + 3{,}95A + 1{,}21$$

onde L é medido em polegadas e A, em anos. Calcule

$$\left.\frac{dL}{dA}\right|_{A=12}$$

e interprete sua resposta.

52. O número de espécies de árvores S em uma dada área A na Reserva Florestal de Pasoh na Malásia foi modelado pela função potência

$$S(A) = 0{,}882A^{0{,}842}$$

onde A é medida em metros quadrados. Encontre $S'(100)$ e interprete sua resposta.

Fonte: Adaptado de K. Kochummen et al., Floristic Composition of Pasoh Forest Reserve, A Lowland Rain Forest in Peninsular Malaysia, *Journal of Tropical Forest Science* 3 (1991):1–13.

53. A Lei de Boyle diz que, quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura contante, a pressão P do gás é inversamente proporcional ao volume V do gás.

(a) Suponha que a pressão de uma amostra de ar que ocupa $0{,}106\ m^3$ a 25 °C seja de 50 kPa. Escreva V como uma função de P.

(b) Calcule dV/dP quando $P = 50$ kPa. Qual o significado da derivada? Quais são suas unidades?

54. Os pneus de automóveis precisam ser inflados corretamente porque uma pressão interna inadequada pode causar um desgaste prematuro. Os dados na tabela mostram a vida útil do pneu L (em milhares de quilômetros) para um certo tipo de pneu em diversas pressões P (em kPa).

P	179	193	214	242	262	290	311
L	80	106	126	130	119	113	95

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para modelar a vida do pneu como uma função quadrática da pressão.

(b) Use o modelo para estimar dL/dP quando $P = 200$ e quando $P = 300$. Qual o significado da derivada? Quais são suas unidades? Qual é o significado dos sinais das derivadas?

55. Ache os pontos sobre a curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ onde a tangente é horizontal.

56. Que valores de x fazem com que o gráfico de $f(x) = e^x - 2x$ tenha uma reta tangente horizontal?

57. Mostre que a curva $y = 2e^x + 3x + 5x^3$ não tem reta tangente com inclinação 2.

58. Encontre uma equação para a reta tangente à curva $y = x^4 + 1$ que seja paralela à reta $32x - y = 15$.

59. Encontre equações para ambas as retas que são tangentes à curva $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$ e que são paralelas à reta $3x - y = 15$.

60. Em qual ponto sobre a curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ a reta tangente é paralela à reta $3x - y = 5$? Ilustre fazendo o gráfico da curva e de ambas as retas.

61. Encontre uma equação para a reta normal à curva $y = \sqrt{x}$ que seja paralela à reta $2x + y = 1$.

62. Onde a reta normal à parábola $y = x^2 - 1$ no ponto $(-1, 0)$ intercepta a parábola uma segunda vez? Ilustre com um esboço.

63. Trace um diagrama para mostrar que há duas retas tangentes à parábola $y = x^2$ que passam pelo ponto $(0, -4)$. Encontre as coordenadas dos pontos onde essas retas tangentes interceptam a parábola.

64. (a) Encontre as equações de ambas as retas pelo ponto $(2, -3)$ que são tangentes à parábola $y = x^2 + x$.
(b) Mostre que não existe nenhuma reta que passe pelo ponto $(2, 7)$ e que seja tangente à parábola. A seguir, desenhe um diagrama para ver por quê.

65. Use a definição de derivada para mostrar que, se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$. (Isso demonstra a Regra da Potência para o caso $n = -1$.)

66. Encontre a n-ésima derivada de cada função calculando algumas das primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.
(a) $f(x) = x^n$ (b) $f(x) = 1/x$

67. Encontre um polinômio de segundo grau P tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ e $P''(2) = 2$.

68. A equação $y'' + y' - 2y = x^2$ é chamada **equação diferencial**, pois envolve uma função desconhecida y e suas derivadas y' e y''. Encontre as constantes A, B e C tais que a função $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaça essa equação. (As equações diferenciais serão estudadas no Capítulo 9, no Volume 2.)

69. Encontre uma função cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujo gráfico tenha tangentes horizontais nos pontos $(-2, 6)$ e $(2, 0)$.

70. Encontre uma parábola com a equação $y = ax^2 + bx + c$ que tenha inclinação 4 em $x = 1$, inclinação -8 em $x = -1$, e passe pelo ponto $(2, 15)$.

71. Considere

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ x + 1 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

É f derivável em 1? Esboce gráficos de f e f'.

72. Em quais números a seguinte função g é derivável?

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2x - x^2 & \text{se } 0 < x < 2 \\ 2 - x & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Dê uma fórmula para g' e esboce os gráficos de g e g'.

73. (a) Para quais valores de x a função $f(x) = |x^2 - 9|$ é derivável? Ache uma fórmula para f'.
(b) Esboce gráficos de f e f'.

74. Onde a função $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$ é derivável? Dê uma fórmula para h' e esboce os gráficos de h e h'.

75. Encontre a parábola com equação $y = ax^2 + bx$ cuja reta tangente em $(1, 1)$ tem equação $y = 3x - 2$.

76. Suponha que a curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenha uma reta tangente quando $x = 0$ com equação $y = 2x + 1$, e uma reta tangente quando $x = 1$ com equação $y = 2 - 3x$. Encontre os valores de a, b, c e d.

77. Para quais valores de a e b a reta $2x + y = b$ é tangente à parábola $y = ax^2$ quando $x = 2$?

78. Encontre o valor de c para o qual a reta $y = \frac{3}{2}x + 6$ é tangente à curva $y = c\sqrt{x}$.

79. Qual é o valor de c tal que a reta $y = 2x + 3$ é tangente à parábola $y = cx^2$?

80. O gráfico de qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola. Demonstre que a média das inclinações das retas tangentes à parábola nas extremidades de qualquer intervalo $[p, q]$ é igual à inclinação da reta tangente no ponto médio do intervalo.

81. Considere

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Encontre os valores de m e b que tornem f derivável em toda parte.

82. Uma reta tangente à hipérbole $xy = c$ é traçada em um ponto P.
(a) Mostre que o ponto médio do segmento de reta cortado dessa reta tangente pelos eixos coordenados é P.
(b) Mostre que o triângulo formado pela reta tangente e pelos eixos coordenados sempre têm a mesma área, não importa onde P esteja localizado sobre a hipérbole.

83. Calcule $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

84. Trace um diagrama ilustrando duas retas perpendiculares que se interceptam sobre o eixo y, ambas tangentes à parábola $y = x^2$. Onde essas retas se interceptam?

85. Se $c > \frac{1}{2}$, quantas retas pelo ponto $(0, c)$ são normais à parábola $y = x^2$? E se $c \leqslant \frac{1}{2}$?

86. Esboce as parábolas $y = x^2$ e $y = x^2 - 2x + 2$. Você acha que existe uma reta que seja tangente a ambas as curvas? Em caso afirmativo, encontre sua equação. Em caso negativo, explique por que não.