3.5 Exercícios

1–4
(a) Encontre y' derivando implicitamente.
(b) Resolva a equação explicitamente isolando y e derive para obter y' em termos de x.
(c) Verifique se suas soluções para as partes (a) e (b) são consistentes substituindo a expressão por y na sua solução para a parte (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$ **2.** $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ **4.** $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 4$

5–20 Encontre dy/dx por derivação implícita.

5. $x^2 - 4xy + y^2 = 4$ **6.** $2x^2 + xy - y^2 = 2$

7. $x^4 + x^2y^2 - y^3 = 5$ **8.** $x^3 - xy^2 + y^3 = 1$

9. $\dfrac{x^2}{x + y} = y^2 + 1$ **10.** $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$

11. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$ **12.** $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$

13. $\sqrt{x + y} = x^4 + y^4$ **14.** $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

15. $e^{x/y} = x - y$ **16.** $xy = \sqrt{x^2 + y^2}$

17. $\operatorname{tg}^{-1}(x^2y) = x + xy^2$ **18.** $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$

19. $\operatorname{sen}(xy) = \cos(x + y)$ **20.** $\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

21. Se $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ e $f(1) = 2$, encontre $f'(1)$.

22. Se $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, encontre $g'(0)$.

23–24 Considere y como a variável independente e x como a variável dependente e use a derivação implícita para encontrar dx/dy.

23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$ **24.** $y \sec x = x \operatorname{tg} y$

25–32 Use a derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

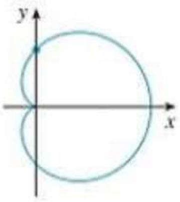
25. $y \operatorname{sen} 2x = x \cos 2y$, $(\pi/2, \pi/4)$

26. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$ (elipse)

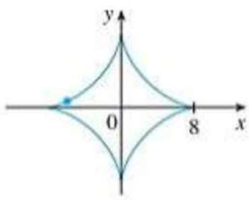
27. $x^2 - xy - y^2 = 1$, $(2, 1)$ (hipérbole)

28. $x^2 + 2xy - 4y^2 = 12$, $(2, 1)$ (elipse)

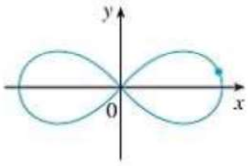
29. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$, $(0, \frac{1}{2})$ (cardioide)



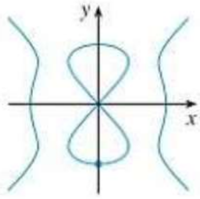
30. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, $(-3\sqrt{3}, 1)$ (astroide)



31. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$, $(3, 1)$ (lemniscata)



32. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$, $(0, -2)$ (curva do diabo)



33. (a) A curva com equação $y^2 = 5x^4 - x^2$ é chamada **kampyle** (do grego, curvado) **de Eudoxo**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, 2)$.
(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente em uma tela comum. (Se sua ferramenta gráfica puder traçar o gráfico de curvas definidas implicitamente, então use esse recurso. Caso não seja possível, você pode ainda traçar essa curva fazendo os gráfico de suas metades superior e inferior separadamente.)

34. (a) A curva com equação $y^2 = x^3 + 3x^2$ é denominada **cúbica de Tschirnhausen**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, -2)$.
(b) Em que pontos essa curva tem uma tangente horizontal?
(c) Ilustre as partes (a) e (b) traçando a curva e as retas tangentes sobre uma tela comum.

35–38 Encontre y'' por derivação implícita.

35. $x^2 + 4y^2 = 4$ **36.** $x^2 + xy + y^2 = 3$

37. $\operatorname{sen} y + \cos x = 1$ **38.** $x^3 - y^3 = 7$

39. Se $xy + e^y = e$, encontre o valor de y'' no ponto onde $x = 0$.

40. Se $x^2 + xy + y^3 = 1$, encontre o valor de y''' no ponto onde $x = 1$.

SCA **41.** Formas extravagantes podem ser criadas usando-se a capacidade de traçar funções definidas implicitamente de um SCA.
(a) Trace a curva com equação

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2).$$

Em quantos pontos essa curva tem tangentes horizontais? Estime as abscissas desses pontos.
(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(0, 1)$ e $(0, 2)$.
(c) Encontre as abscissas exatas dos pontos da parte (a).
(d) Crie curvas ainda mais extravagantes modificando a equação da parte (a).

SCA **42.** (a) A curva com equação

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

foi comparada com um "vagão sacolejante". Use um SCA para traçar essa curva e descubra o porquê desse nome.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA Requer sistema de computação algébrica

(b) Em quantos pontos essa curva tem retas tangentes horizontais? Encontre as coordenadas x desses pontos.

✓ **43.** Encontre os pontos sobre a lemniscata do Exercício 31 onde a tangente é horizontal.

44. Mostre, fazendo a derivação implícita, que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

✓ **45.** Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0).

46. Mostre que a soma das coordenadas das intersecções com os eixos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.

47. Mostre, usando a derivação implícita, que qualquer reta tangente em um ponto P a um círculo com centro O é perpendicular ao raio OP.

48. A Regra da Potência pode ser demonstrada usando a derivação implícita para o caso onde n é um número racional, $n = p/q$, e $y = f(x) = x^n$ é suposta de antemão ser uma função derivável. Se $y = x^{p/q}$, então $y^q = x^p$. Use a derivação implícita para mostrar que

$$y' = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1}.$$

49–60 Encontre a derivada da função. Simplifique quando possível.

✓ **49.** $y = \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x}$

50. $y = \sqrt{\operatorname{tg}^{-1} x}$

✓ **51.** $y = \operatorname{sen}^{-1}(2x + 1)$

52. $g(x) = \arccos \sqrt{x}$

53. $F(x) = x \sec^{-1}(x^3)$

54. $y = \operatorname{tg}^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

55. $h(t) = \operatorname{cotg}^{-1}(t) + \operatorname{cotg}^{-1}(1/t)$

56. $R(t) = \operatorname{arcsen}(1/t)$

✓ **57.** $y = x \operatorname{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2}$

58. $y = \cos^{-1}(\operatorname{sen}^{-1} t)$

59. $y = \arccos\left(\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ a > b > 0$

60. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

61–62 Encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

61. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\ \operatorname{arcsen} x$

62. $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - x)$

✓ **63.** Demonstre a fórmula para $(d/dx)(\cos^{-1}x)$ pelo mesmo método usado para $(d/dx)(\operatorname{sen}^{-1}x)$.

64. (a) Uma maneira de definir $\sec^{-1}x$ é dizer que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ e $0 \leqslant y < \pi/2$ ou $\pi \leqslant y < 3\pi/2$. Mostre que, com essa definição,

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

(b) Outra maneira de definir $\sec^{-1}x$ que é às vezes usada é dizer que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ e $0 \leqslant y \leqslant \pi,\ y \neq \pi/2$. Mostre que, com essa definição,

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.$$

65–68 Duas curvas são **ortogonais** se suas retas tangentes forem perpendiculares em cada ponto de intersecção. Mostre que as famílias dadas de curvas são **trajetórias ortogonais** uma em relação a outra, ou seja, toda curva de uma família é ortogonal a toda curva da outra família. Esboce ambas as famílias de curvas no mesmo sistema de coordenadas.

65. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

66. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

67. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

68. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

69. Mostre que a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ e a hipérbole $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$ são trajetórias ortogonais se $A^2 < a^2$ e $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$ (logo, a elipse e a hipérbole possuem os mesmos focos).

70. Encontre o valor do número a de tal modo que as famílias das curvas $y = (x + c)^{-1}$ e $y = a(x + k)^{1/3}$ sejam trajetórias ortogonais.

71. (a) A *Equação de van der Waals* para n mols de um gás é

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

onde P é a pressão, V é o volume e T é a temperatura do gás. A constante R é a constante de gás universal e a e b são constantes positivas que são características de um gás em particular. Se T permanece constante, use a derivação implícita para encontrar dV/dP.

(b) Encontre a taxa de variação de volume em relação à pressão de 1 mol de dióxido de carbono em um volume de $V = 10$ L e uma pressão de $P = 2{,}5$ atm. Use $a = 3{,}592\ \mathrm{L^2\text{-}atm/mol^2}$ e $b = 0{,}04267$ L/mol.

72. (a) Use a derivação implícita para encontrar y' se $x^2 + xy + y^2 + 1 = 0$.

SCA (b) Trace a curva da parte (a). O que você observa? Demonstre que o que você observa está correto.

(c) Em vista da parte (b), o que você pode dizer sobre a expressão para y' que você encontrou na parte (a)?

73. A equação $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa uma "elipse girada", isto é, uma elipse cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados. Encontre os pontos nos quais essa elipse cruza o eixo x e mostre que as retas tangentes nesses pontos são paralelas.

74. (a) Onde a reta normal à elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ no ponto $(-1, 1)$ intersecta a elipse uma segunda vez?

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da elipse e da reta normal.

75. Encontre todos os pontos sobre a curva $x^2y^2 + xy = 2$ onde a inclinação da reta tangente é -1.

76. Encontre as equações de ambas as retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que passam pelo ponto $(12, 3)$.

77. (a) Suponha que f seja uma função injetora, derivável e que sua função inversa f^{-1} seja também derivável. Use a derivação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

desde que o denominador não seja 0.

(b) Se $f(4) = 5$ e $f'(4) = \frac{2}{3}$, encontre $(f^{-1})'(5)$.