

(b) A função $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ é contínua em $[0, 2\pi]$. Uma vez que $f'(x) = 1 - 2 \cos x$, temos $f'(x) = 0$ quando $\cos x = \frac{1}{2}$, e isso ocorre quando $x = \pi/3$ ou $5\pi/3$. Os valores de f nesses números críticos são

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0,684853$$

$$\text{e } f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6,968039$$

Os valores de f nas extremidades são

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(2\pi) = 2\pi \approx 6,28$$

Comparando esses quatro números e usando o Método do Intervalo Fechado, vemos que o valor mínimo absoluto é $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ e o valor máximo absoluto é $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Os valores da parte (a) servem como uma verificação de nosso trabalho.

EXEMPLO 10 O telescópio espacial Hubble foi colocado em órbita em 24 abril de 1990 pelo ônibus espacial *Discovery*. Um modelo para a velocidade do ônibus durante essa missão, do lançamento em $t = 0$ até a ejeção do foguete auxiliar em $t = 126$ s, é dado por

$$v(t) = 0,0003968t^3 - 0,02752t^2 + 7,196t - 0,9397$$

(em metros/segundo). Usando este modelo, estime os valores máximo e mínimo absolutos da aceleração do ônibus entre o lançamento e a ejeção do foguete auxiliar.

SOLUÇÃO São pedidos os valores extremos não da função de velocidade dada, mas da função de aceleração. Assim, precisamos primeiro derivar para encontrar a aceleração:

$$\begin{aligned} a(t) &= v'(t) = \frac{d}{dt}(0,0003968t^3 - 0,02752t^2 + 7,196t - 0,9397) \\ &= 0,0011904t^2 - 0,05504t + 7,196 \end{aligned}$$

Vamos aplicar agora o Método do Intervalo Fechado à função contínua a no intervalo $0 \leq t \leq 126$. Sua derivada é

$$a'(t) = 0,0023808t - 0,05504$$

O único número crítico ocorre quando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0,05504}{0,0023808} \approx 23,12$$

Calculando $a(t)$ no número crítico e nas extremidades, temos

$$a(0) = 7,196 \quad a(t_1) \approx 6,56 \quad a(126) \approx 19,16$$

Assim, a aceleração máxima é cerca de $19,16 \text{ m/s}^2$, e a aceleração mínima é cerca de $6,56 \text{ m/s}^2$.



NASA

4.1 Exercícios

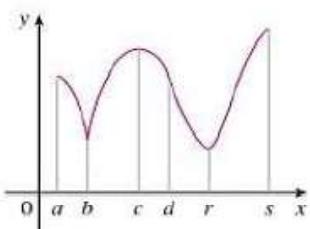
- ✓ 1. Explique a diferença entre mínimo local e mínimo absoluto.
- 2. Suponha que f seja uma função contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$.
 - (a) Que teorema garante a existência de valores máximo e mínimo absolutos para f ?

- (b) Quais as etapas que você deve seguir para encontrar esses valores máximo e mínimo?

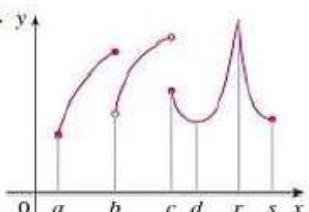
- 3–4 Para cada um dos números a, b, c, d, r e s , diga se a função cujo gráfico é dado tem um máximo ou mínimo absoluto, máximo ou mínimo local, ou nem máximo nem mínimo.



3.

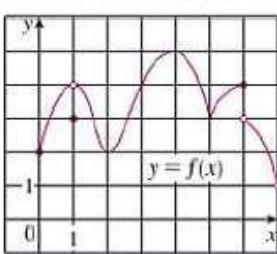


4.

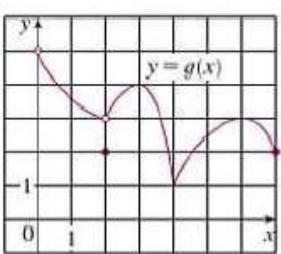


5-6 Use o gráfico para dizer quais os valores máximos e mínimos locais e absolutos da função.

5.



6.



7-10 Esboce o gráfico de uma função f que seja contínua em $[1, 5]$ e tenha as propriedades dadas.

7. Máximo absoluto em 5, mínimo absoluto em 2, máximo local em 3, mínimos locais em 2 e 4.
8. Máximo absoluto em 4, mínimo absoluto em 5, máximo local em 2 e mínimo local em 3.
9. Mínimo absoluto em 3, máximo absoluto em 4, máximo local em 2.
10. Máximo absoluto em 2, mínimo absoluto em 5, 4 é um número crítico mas não há nem máximo nem mínimo local aí.

11. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja derivável em 2.

(b) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja contínua, mas não derivável em 2.

(c) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e não seja contínua em 2.

12. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha máximo absoluto, mas não tenha máximo local.

(b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo local, mas não tenha máximo absoluto.

13. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo absoluto, mas não tenha mínimo absoluto.

(b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que seja descontínua, mas tenha tanto máximo absoluto como mínimo absoluto.

14. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha dois máximos locais e um mínimo local, mas nenhum mínimo absoluto.

(b) Esboce o gráfico de uma função que tenha três mínimos locais, dois máximos locais e sete números críticos.

15-28 Esboce o gráfico de f à mão e use seu esboço para encontrar os valores máximos e mínimos locais e absolutos de f . (Use os gráficos e as transformações das Seções 1.2 e 1.3.)

15. $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1)$, $x \leq 3$

16. $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x$, $x \geq -2$

17. $f(x) = 1/x$, $x \geq 1$

18. $f(x) = 1/x$, $1 < x < 3$

19. $f(x) = \sin x$, $0 \leq x < \pi/2$

20. $f(x) = \sin x$, $0 < x \leq \pi/2$

21. $f(x) = \sin x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

22. $f(t) = \cos t$, $-3\pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$

23. $f(x) = \ln x$, $0 < x \leq 2$

24. $f(x) = |x|$

25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

26. $f(x) = e^x$

27. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 2 - 3x & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 4 - 2x & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

29-44 Encontre os números críticos da função.

✓ 29. $f(x) = 5x^2 + 4x$

30. $f(x) = x^3 + x^2 - x$

31. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

32. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$

✓ 33. $g(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1$

34. $g(t) = |3t - 4|$

35. $g(y) = \frac{y-1}{y^2-y+1}$

36. $h(p) = \frac{p-1}{p^2+4}$

✓ 37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = \sqrt[3]{4-x^2}$

✓ 39. $F(x) = x^{4/5}(x-4)^2$

40. $g(\theta) = 4\theta - \operatorname{tg} \theta$

✓ 41. $f(\theta) = 2 \cos \theta + \sin^2 \theta$

42. $h(t) = 3t - \arcsen t$

✓ 43. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

44. $f(x) = x^{-2} \ln x$

45-46 É dada uma fórmula para a derivada de uma função f . Quantos números críticos f tem?

45. $f'(x) = 5e^{-0.1|x|} \sin x - 1$

46. $f'(x) = \frac{100 \cos^2 x}{10+x^2} - 1$

47-62 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f no intervalo dado.

✓ 47. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $[0, 3]$

48. $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $[0, 3]$

✓ 49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, $[-2, 3]$

50. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$, $[-3, 5]$

✓ 51. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$, $[-2, 3]$

52. $f(t) = (t^2 - 4)^3$, $[-2, 3]$

✓ 53. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $[0, 2; 4]$

54. $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$, $[0, 3]$

55. $f(t) = t - \sqrt[3]{t}$, $[-1, 4]$

56. $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$, $[0, 2]$

57. $f(t) = 2 \cos t + \operatorname{sen} 2t$, $[0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \operatorname{cotg}(t/2)$, $[\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = x^{-2} \ln x$, $[\frac{1}{2}, 4]$

60. $f(x) = xe^{1/x}$, $[-3, 1]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $[-1, 1]$

62. $f(x) = x - 2 \operatorname{tg}^{-1} x$, $[0, 4]$

63. Se a e b são números positivos, ache o valor máximo de $f(x) = x^a(1-x)^b$, $0 \leq x \leq 1$.

64. Use um gráfico para estimar os números críticos de $f(x) = |1 + 5x + x^3|$ com precisão de uma casa decimal.

65–68

- (a) Use um gráfico para estimar os valores máximo e mínimo absolutos da função com precisão de duas casas decimais.
 (b) Use o cálculo para encontrar os valores máximo e mínimo exatos.

65. $f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad -1 \leq x \leq 1$

66. $f(x) = e^x + e^{-2x}, \quad 0 \leq x \leq 1$

67. $f(x) = x\sqrt{x-x^2}$

68. $f(x) = x - 2 \cos x, \quad -2 \leq x \leq 0$

69. Após o consumo de uma bebida alcoólica, a concentração de álcool na corrente sanguínea (concentração de álcool no sangue, ou CAS) aumenta rapidamente a medida que o álcool é absorvido, seguida por uma diminuição gradual conforme o álcool é metabolizado. A função

$$C(t) = 1,35te^{-2.802t}$$

modela a CAS média, medida em mg/mL, de um grupo de oito indivíduos do sexo masculino t horas depois do consumo rápido de 15 mL de etanol (correspondentes a uma dose de bebida alcoólica). Qual a CAS média máxima durante as primeiras 3 horas? Quando ela ocorre?

Fonte: Adaptado de P. Wilkinson et al., Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State, *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics* 5 (1977): 207–24.

70. Após um comprimido de antibiótico ser ingerido, a concentração de antibiótico na corrente sanguínea é modelada pela função

$$C(t) = 8(e^{-0.4t} - e^{-0.6t})$$

onde o tempo t é medido em horas e C é medido em $\mu\text{g/mL}$. Qual é a concentração máxima de antibiótico durante as primeiras 12 horas?

71. Entre 0 °C e 30 °C, o volume V (em centímetros cúbicos) de 1 kg de água a uma temperatura T é aproximadamente dado pela fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade máxima.

72. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu mg}{\mu \operatorname{sen} \theta + \operatorname{cos} \theta}$$

onde μ é uma constante positiva chamada *coeficiente de atrito* e onde $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Mostre que F é minimizada quando $\operatorname{tg} \theta = \mu$.

- ✓ 73. Um modelo para o preço médio norte-americano para o açúcar refinado entre 1993 e 2003 é dado pela função

$$\begin{aligned} S(t) = & -0,00003237t^5 + 0,0009037t^4 - 0,008956t^3 \\ & + 0,03629t^2 - 0,04458t + 0,4074 \end{aligned}$$

onde t é medido em anos desde agosto de 1993. Estime os instantes nos quais o açúcar esteve mais barato e mais caro entre 1993 e 2003.

74. Em 7 de maio de 1992, o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49, cujo objetivo era instalar um novo motor de arranque no satélite de comunicação Intelsat. A tabela dá os dados de velocidade para o ônibus espacial entre a partida e a ejeção dos foguetes auxiliares.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56,4
Fim da manobra de inclinação	15	97,2
Regulador de combustível a 89%	20	136,2
Regulador de combustível a 67%	32	226,2
Regulador de combustível a 104%	59	403,9
Pressão dinâmica máxima	62	440,4
Separação do foguete auxiliar	125	1 265,2

- (a) Use uma calculadora gráfica ou computador para encontrar o polinômio cúbico que melhor modele a velocidade do ônibus para o intervalo de tempo $t \in [0, 125]$. Faça então o gráfico desse polinômio.

- (b) Encontre um modelo para a aceleração do ônibus e use-o para estimar os valores máximo e mínimo da aceleração durante os primeiros 125 segundos.

75. Quando um objeto estranho se aloja na traqueia, forçando uma pessoa a tossir, o diafragma empurra-o para cima, causando um aumento na pressão dos pulmões. Isso é acompanhado por uma contração da traqueia, fazendo um canal mais estreito por onde passa o ar expelido. Para uma dada quantidade de ar escapar em um tempo fixo, é preciso que ele se move mais rápido através do tubo mais estreito do que no mais largo. Quanto maior for a velocidade da corrente de ar, maior a força sobre o objeto estranho. O uso de raízes X mostra que o raio do tubo circular da traqueia se contrai para cerca de $2/3$ de seu raio normal durante a tosse. De acordo com um modelo matemático para a tosse, a velocidade v está relacionada ao raio r da traqueia pela equação

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \quad \frac{1}{2}r_0 \leq r \leq r_0$$

onde k é uma constante e r_0 , o raio normal da traqueia. A restrição sobre r deve-se ao fato de que as paredes da traqueia endurecem sob pressão, evitando uma contração maior que $\frac{1}{2}r_0$ (de outra forma, a pessoa ficaria sufocada).

- (a) Determine o valor de r no intervalo $[\frac{1}{2}r_0, r_0]$ no qual v tenha um máximo absoluto. Como isso se compara com a evidência experimental?

- (b) Qual é o valor máximo absoluto de v no intervalo?

- (c) Esboce o gráfico de v no intervalo $[0, r_0]$.

76. Mostre que 5 é um número crítico da função

$$g(x) = 2 + (x - 5)^3$$

mas g não tem um valor extremo local em 5.

77. Demonstre que a função

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

não tem um local máximo nem um local mínimo.

78. Se f tem um valor mínimo local em c , mostre que a função $g(x) = -f(x)$ tem um valor máximo em c .

79. Demonstre o Teorema de Fermat para o caso em que f tem um mínimo local em c .

80. Uma função cúbica é um polinômio de grau 3, isto é, tem a forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde $a \neq 0$.

- (a) Mostre que uma função cúbica pode ter dois, um ou nenhum número(s) crítico(s). Dê exemplos e faça esboços para ilustrar as três possibilidades.

- (b) Quantos valores extremos locais uma função cúbica pode ter?