Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
UTFPR - Campus Apucarana
Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT-AP

Curso: Engenharia de Computação / Engenharia Civil / Engenharia Elétrica
Disciplina: Álgebra Linear (2024-2)
Professor: Alisson C. Reinol

Lista de Exercícios 2

- Transformações lineares

Nos exercícios 1 a 10, verifique se as funções são transformações lineares.

1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (x - 3y, 2x + 5y)$

2) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x,y) = (x - y, 3x, -2y)$

3) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (x + 1, 2x - y)$

4) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (|x|, -x + 2y)$

5) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (x^2, x + y)$

6) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad T(x) = (x, 2)$

7) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad T(x,y,z) = -3x + 2y - z$

8) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad T(x,y) = xy$

9) $T : M(2,2) \to \mathbb{R}, \quad T(A) = \det A$

10) $T : M(2,2) \to \mathbb{R}^2, \quad T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - c,\, b + c)$

11) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $T(-1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,1) = (1,1,0)$. Calcule $T(3,4)$.

12) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $T(1,-1,0) = (1,1)$, $T(0,1,1) = (2,2)$ e $T(0,0,1) = (3,3)$. Calcule $T(1,0,0)$ e $T(0,1,0)$.

13) Seja T um operador linear no $\mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,0) = (0,2,0)$, $T(0,1,0) = (0,0,-2)$ e $T(0,0,1) = (-1,0,3)$.

a) Determine $T(x,y,z)$.

b) Obtenha o vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (5,4,-9)$.

14) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(1,1,1) = (1,2)$, $T(1,1,0) = (2,3)$ e $T(1,0,0) = (3,4)$.

a) Determine $T(x,y,z)$.

b) Obtenha o vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (-3,-2)$.

Nos exercícios 15 a 20, considerando a transformação linear T, determine:

a) O núcleo de T, uma base de $N(T)$ e a dimensão de $N(T)$.

b) A imagem de T, uma base de $Im(T)$ e a dimensão de $Im(T)$.

c) T é injetora? T é sobrejetora?

15) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (3x - y, -3x + y)$

16) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (x - 2y, x + y)$

17) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x,y) = (x + y, x, 2y)$

18) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y,z) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$

19) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x,y,z) = (x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z)$

20) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x,y,z) = (x - 3y, x - z, z - x)$

Nos exercícios 21 a 26, obtenha a matriz canônica da transformação linear T.

21) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (x + 2y, x - y)$

22) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (2y, 3x + y)$

23) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y,z) = (2x + y - z, x + 2y)$

24) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x,y) = (2x - y, x + 3y, -2y)$

25) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x,y,z) = (x + 2y - z, 2x + z, x - 2y + 2z)$

26) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y,z,t) = (x - y + 2z - t, y + 3t)$

Nos exercícios 27 a 30, obtenha a expressão da transformação linear T a partir de sua matriz canônica.

27) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad [T] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

28) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

29) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad [T] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

30) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad [T] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

- Autovalores e autovetores

Nos exercícios 31 a 36, determine os autovalores e os autovetores do operador linear T.

31) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$

32) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (2x + 2y, x + 3y)$

33) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (5x - y, x + 3y)$

34) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (y, -x)$

35) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$

36) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x, -2x - y, 2x + y + 2z)$

Nos exercícios 37 a 40, determine os autovalores e os autovetores da matriz A.

37) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

38) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

39) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

40) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

41) Determine o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ associados aos autovetores $v_1 = (y, -y)$ e $v_2 = (0, y)$, respectivamente.

42) Determine o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujos autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$ associados aos autovetores $v_1 = (x, 2x)$ e $v_2 = (-x, 0)$, respectivamente.

Nos exercícios 43 e 44, determine uma base do $\mathbb{R}^2$ em relação à qual a matriz do operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é diagonal.

43) $T(x, y) = (7x - 4y, -4x + y)$

44) $T(x, y) = (5x + 3y, 3x + 5y)$

Nos exercícios 45 a 50, verifique se a matriz A é diagonalizável. Caso seja, determine uma matriz P que diagonaliza A e calcule $P^{-1}AP$.

45) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

46) $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

47) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

48) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

49) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

50) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 51 a 54, mostre que a A é simétrica e obtenha a matriz P tal que $P^t AP$ seja diagonal.

51) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

52) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

53) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

54) $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

55) Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (4x + 2y, 2x + y)$ e seja $A = [T]$.

a) Mostre que a matriz A é simétrica.

b) Obtenha uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T. (Dica: Obtenha os versores dos autovetores de T e mostre que os vetores que formam a base são ortogonais).

c) Obtenha a matriz P que diagonaliza ortogonalmente A e calcule $P^t AP$, onde P^t é a matriz transposta de P.

Gabarito

São transformações lineares: 1), 2), 7), 10)

Não são transformações lineares: 3), 4), 5), 6), 8), 9)

11) $T(3,4) = (-2,1,-3)$ 12) $T(1,0,0) = (0,0)$ e $T(0,1,0) = (-1,-1)$

13-a) $T(x,y,z) = (-z, 2x, -2y + 3z)$ b) $v = (2,-3,-5)$

14-a) $T(x,y,z) = (3x - y - z, 4x - y - z)$ b) $v = (1, 6 - z, z)$, com $z \in \mathbb{R}$

15-a) $N(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 3x\}$, $B = \{(1,3)\}$, $\dim N(T) = 1$

b) $Im(T) = [(3,-3),(-1,1)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = -y\}$, $B = \{(-1,1)\}$, $\dim Im(T) = 1$

c) T não é injetora nem sobrejetora

16-a) $N(T) = \{(0,0)\}$, $B = \emptyset$, $\dim N(T) = 0$

b) $Im(T) = [(1,1),(-2,1)] = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1),(-2,1)\}$, $\dim Im(T) = 2$

c) T é injetora e sobrejetora

17-a) $N(T) = \{(0,0)\}$, $B = \emptyset$, $\dim N(T) = 0$

b) $Im(T) = [(1,1,0),(1,0,2)]$, $B = \{(1,1,0),(1,0,2)\}$, $\dim Im(T) = 2$

c) T é injetora, mas não é sobrejetora

18-a) $N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = -3x \text{ e } z = -5x\}$, $B = \{(1,-3,-5)\}$, $\dim N(T) = 1$

b) $Im(T) = [(1,2),(2,-1),(-1,1)] = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,2),(2,-1)\}$, $\dim Im(T) = 2$

c) T não é injetora, mas é sobrejetora

19-a) $N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = 3z \text{ e } y = z\}$, $B = \{(3,1,1)\}$, $\dim N(T) = 1$

b) $Im(T) = [(1,-1,1),(-1,2,0),(-2,1-3)]$, $B = \{(1,-1,1),(-1,2,0)\}$, $\dim Im(T) = 2$

c) T não é injetora nem sobrejetora

20-a) $N(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = \dfrac{x}{3} \text{ e } z = x\right\}$, $B = \left\{\left(1, \dfrac{1}{3}, 1\right)\right\}$, $\dim N(T) = 1$

b) $Im(T) = [(1,1,-1),(-3,0,0),(0,-1,1)]$, $B = \{(1,1,-1),(-3,0,0)\}$, $\dim Im(T) = 2$

c) T não é injetora nem sobrejetora

21) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 22) $[T] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ 23) $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

24) $[T] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ 25) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ 26) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

27) $T(x,y) = (-x + 2y, y)$ 28) $T(x,y,z) = (x - 2y + z, 3y - 2z, -x - 2y)$

29) $T(x,y) = (3x - 2y, 4x + y, x)$ 30) $T(x,y,z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$

31) $\lambda_1 = 2$, $v_1 = (2y, y)$ com $y \neq 0$; $\lambda_2 = 3$, $v_2 = (y, y)$ com $y \neq 0$

32) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (-2y, y)$ com $y \neq 0$; $\lambda_2 = 4$, $v_2 = (x, x)$ com $x \neq 0$

33) $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $v = (x, x)$ com $x \neq 0$

34) T não tem autovalores reais

35) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $v = (x, y, -y)$ com $x^2 + y^2 \neq 0$; $\lambda_3 = 4$, $v_3 = (x, x, 2x)$ com $x \neq 0$

36) $\lambda_1 = -1$, $v_1 = (0, -3z, z)$ com $z \neq 0$; $\lambda_2 = 1$, $v_2 = (3z, -3z, z)$ com $z \neq 0$; $\lambda_3 = 2$, $v_3 = (0, 0, z)$ com $z \neq 0$

37) $\lambda_1 = 2$, $v_1 = (3y, y)$ com $y \neq 0$; $\lambda_2 = 4$, $v_2 = (y, y)$ com $y \neq 0$

38) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (-y, y)$ com $y \neq 0$; $\lambda_2 = 5$, $v_2 = (x, 3x)$ com $x \neq 0$

39) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (x, 0, -x)$ com $x \neq 0$; $\lambda_2 = 2$, $v_2 = (-2z, 2z, z)$ com $z \neq 0$; $\lambda_3 = 3$, $v_3 = (x, -2x, -x)$ com $x \neq 0$

40) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (2z, 2z, z)$ com $z \neq 0$; λ_2 e λ_3 são imaginários

41) $T(x, y) = (x, 2x + 3y)$ 42) $T(x, y) = \left(-2x + \dfrac{5y}{2}, 3y\right)$

43) $\{(-2, 1), (1, 2)\}$ 44) $\{(1, 1), (-1, 1)\}$

45) $P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ 46) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

47) A não é diagonalizável 48) $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

49) $P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 50) $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

51) $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $P^tAP = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 52) $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $P^tAP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

53) $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $P^tAP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

54) $P = \begin{bmatrix} 0 & 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{13} & -3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$, $P^tAP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

55-a) Obtenha A^t e verifique que A e A^t são iguais.

b) $B = \left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$ c) $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $P^tAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$