

### 3.6 Exercícios

✓ 1. Explique por que a função logarítmica natural  $y = \ln x$  é usada mais frequentemente no cálculo do que as outras funções logarítmicas  $y = \log_b x$ .

**2-22** Derive a função.

2.  $f(x) = x \ln x - x$

✓ 3.  $f(x) = \sin(\ln x)$

4.  $f(x) = \ln(\sin^2 x)$

✓ 5.  $f(x) = \sqrt[3]{\ln x}$

6.  $f(x) = \ln \sqrt[3]{x}$

✓ 7.  $f(x) = \log_{10}(1 + \cos x)$

8.  $f(x) = \log_{10} \sqrt{x}$

✓ 9.  $g(x) = \ln(xe^{-2x})$

10.  $g(t) = \sqrt{1 + \ln t}$

✓ 11.  $F(t) = (\ln t)^2 \sin t$

12.  $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

✓ 13.  $g(x) = \ln(x\sqrt{x^2 - 1})$

14.  $P(v) = \frac{\ln v}{1 - v}$

✓ 15.  $F(s) = \ln \ln s$

16.  $y = \ln |1 + t - t^3|$

✓ 17.  $T(z) = 2^z \log_2 z$

18.  $y = \ln(\cossec x - \cotg x)$

✓ 19.  $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

20.  $H(z) = \ln \sqrt{\frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

✓ 21.  $y = \operatorname{tg}[\ln(ax + b)]$

22.  $y = \log_2(x \log_5 x)$

**23-26** Encontre  $y'$  e  $y''$ .

✓ 23.  $y = \sqrt{x} \ln x$

24.  $y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$

✓ 25.  $y = \ln |\sec x|$

26.  $y = \ln(1 + \ln x)$

**27-30** Derive  $f$  e encontre o domínio de  $f$ .

✓ 27.  $f(x) = \frac{x}{1 - \ln(x - 1)}$

28.  $f(x) = \sqrt{2 + \ln x}$

✓ 29.  $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

30.  $f(x) = \ln \ln \ln x$

✓ 31. Se  $f(x) = \ln(x + \ln x)$ , encontre  $f'(1)$ .

32. Se  $f(x) = \cos(\ln x^2)$ , encontre  $f'(1)$ .

33-34 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

33.  $y = \ln(x^2 - 3x + 1)$ ,  $(3, 0)$

34.  $y = x^2 \ln x$ ,  $(1, 0)$

35. Se  $f(x) = \sin x + \ln x$ , encontre  $f'(x)$ . Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de  $f$  e  $f'$ .

36. Encontre as equações das retas tangentes para a curva  $y = (\ln x)/x$  nos pontos  $(1, 0)$  e  $(e, 1/e)$ . Ilustre fazendo o gráfico da curva e de suas retas tangentes.

37. Seja  $f(x) = cx + \ln(\cos x)$ . Para qual valor de  $c$  ocorre  $f'(\pi/4) = 6$ ?

38. Seja  $f(x) = \log_b(3x^2 - 2)$ . Para qual valor de  $b$  ocorre  $f'(1) = 3$ ?

39-50 Use a derivação logarítmica para achar a derivada de função.

✓ 39.  $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$

40.  $y = \sqrt{x} e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$

✓ 41.  $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$

42.  $y = \sqrt{x} e^{x^2-x}(x+1)^{2/3}$

✓ 43.  $y = x^x$

44.  $y = x^{\cos x}$

✓ 45.  $y = x^{\sin x}$

46.  $y = (\sqrt{x})^x$

✓ 47.  $y = (\cos x)^x$

48.  $y = (\sin x)^{\ln x}$

✓ 49.  $y = (\operatorname{tg} x)^{1/x}$

50.  $y = (\ln x)^{\cos x}$

✓ 51. Encontre  $y'$  se  $y = \ln(x^2 + y^2)$ .

52. Encontre  $y'$  se  $x^y = y^x$ .

53. Encontre uma fórmula para  $f^{(n)}(x)$  se  $f(x) = \ln(x - 1)$ .

54. Encontre  $\frac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$ .

55. Use a definição da derivada para demonstrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

56. Mostre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$  para qualquer  $x > 0$ .

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

### 3.7 Taxas de Variação nas Ciências Naturais e Sociais

Sabemos que se  $y = f(x)$ , então a derivada  $dy/dx$  pode ser interpretada como a taxa de variação de  $y$  em relação a  $x$ . Nesta seção examinaremos algumas das aplicações dessa ideia na física, química, biologia, economia e em outras ciências.

Vamos nos recordar da Seção 2.7, que apresentou a ideia básica das taxas de variação. Se  $x$  variar de  $x_1$  a  $x_2$ , então a variação em  $x$  será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em  $y$  será

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$