EXEMPLO 6 Calcule $\lim_{x \to 0} x \operatorname{cotg} x$.

SOLUÇÃO Aqui, dividimos o numerador e o denominador por x:

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{cotg} x = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim_{x \to 0} \cos x}{\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{\cos 0}{1} \qquad \text{(pela continuidade do cosseno e pela Equação 2)}$$

$$= 1.$$

3.3 Exercícios

1–16 Derive.

1. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$
2. $f(x) = x \cos x + 2 \operatorname{tg} x$
3. $f(x) = e^x \cos x$
4. $y = 2 \sec x - \operatorname{cossec} x$
5. $g(t) = t^3 \cos t$
6. $g(t) = 4 \sec t + \operatorname{tg} t$
7. $h(\theta) = \operatorname{cossec} \theta + e^\theta \operatorname{cotg} \theta$
8. $y = e^u (\cos u + cu)$
9. $y = \dfrac{x}{2 - \operatorname{tg} x}$
10. $y = \operatorname{sen}\theta \cos\theta$
11. $f(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}$
12. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$
13. $y = \dfrac{t \operatorname{sen} t}{1 + t}$
14. $y = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{tg} t}$
15. $f(\theta) = \theta \cos \theta \operatorname{sen} \theta$
16. $f(t) = te^t \operatorname{cotg} t$

17. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$.
18. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$.
19. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cossec}^2 x$.
20. Demonstre, pela definição de derivada, que se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

21–24 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

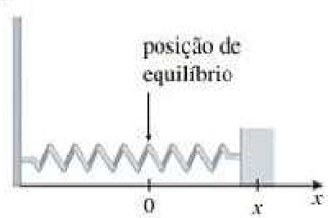
21. $y = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad (0, 1)$
22. $y = e^x \cos x, \quad (0, 1)$
23. $y = \cos x - \operatorname{sen} x, \quad (\pi, -1)$
24. $y = x + \operatorname{tg} x, \quad (\pi, \pi)$

25. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2x \operatorname{sen} x$ no ponto $(\pi/2, \pi)$.
    (b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.
26. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 3x + 6 \cos x$ no ponto $(\pi/3, \pi + 3)$.
    (b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.
27. (a) Se $f(x) = \sec x - x$, encontre $f'(x)$.
    (b) Verifique se sua resposta para a parte (a) é razoável fazendo os gráficos de f e f' para $|x| < \pi/2$.
28. (a) Se $f(x) = e^x \cos x$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.
    (b) Verifique se suas respostas para a parte (a) são razoáveis fazendo os gráficos de f, f' e f''.
29. Se $H(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, encontre $H'(\theta)$ e $H''(\theta)$.
30. Se $f(t) = \sec t$, encontre $f''(\pi/4)$.
31. (a) Use a Regra do Quociente para derivar a função
    $$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}.$$
    (b) Simplifique a expressão para $f(x)$ escrevendo-a em termos de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ e, então, encontre $f'(x)$.
    (c) Mostre que suas respostas para as partes (a) e (b) são equivalentes.
32. Suponha $f(\pi/3) = 4$ e $f'(\pi/3) = -2$, e faça $g(x) = f(x) \operatorname{sen} x$ e $h(x) = (\cos x)/f(x)$. Encontre
    (a) $g'(\pi/3)$ (b) $h'(\pi/3)$

33–34 Para quais valores de x o gráfico f tem uma reta tangente horizontal?

33. $f(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$
34. $f(x) = e^x \cos x$

35. Um corpo em uma mola vibra horizontalmente sobre uma superfície lisa (veja a figura). Sua equação de movimento é $x(t) = 8 \operatorname{sen} t$, onde t está em segundos e x, em centímetros.
    (a) Encontre a velocidade e a aceleração no tempo t.
    (b) Encontre a posição, velocidade e aceleração do corpo no instante $t = 2\pi/3$. Em que direção ele está se movendo nesse momento?



É necessário uma calculadora gráfica ou computador

36. Uma tira elástica é presa a um gancho e uma massa é presa na ponta inferior da tira. Quando o corpo é puxado para baixo e então solto, ele vibra verticalmente. A equação do movimento é $s = 2\cos t + 3 \operatorname{sen} t$, $t \geq 0$, onde s é medido em centímetros e t, em segundos. (Consideremos o sentido positivo como para baixo.)

(a) Encontre a velocidade e a aceleração no instante t.

(b) Faça os gráficos das funções velocidade e aceleração.

(c) Quando o corpo passa pela posição de equilíbrio pela primeira vez?

(d) A que distância da posição de equilíbrio o corpo chega?

(e) Quando a velocidade é máxima?

37. Uma escada com 6 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede e seja x, a distância do pé da escada até a parede. Se o pé da escada escorregar para longe da parede, quão rápido x varia em relação a θ quando $\theta = \pi/3$?

38. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu m g}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

onde μ é uma constante chamada *coeficiente de atrito*.

(a) Encontre a taxa de variação de F em relação a θ.

(b) Quando essa taxa de variação é igual a 0?

(c) Se $m = 20$ kg, $g = 9{,}8$ m/s^2 e $\mu = 0{,}6$, faça o gráfico de F como uma função de θ e use-o para encontrar o valor de θ para o qual $dF/d\theta = 0$. Esse valor é consistente com a resposta dada na parte (b)?

39–50 Encontre o limite

39. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{3x}$

40. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$

41. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} 6t}{\operatorname{sen} 2t}$

42. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta}$

43. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{5x^3 - 4x}$

44. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x}{x^2}$

45. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta + \operatorname{tg}\theta}$

46. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{cossec} x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$

47. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{2\theta^2}$

48. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$

49. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

50. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x^2 + x - 2}$

51–52 Encontre a derivada dada, encontrando as primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.

51. $\dfrac{d^{99}}{dx^{99}}(\operatorname{sen} x)$

52. $\dfrac{d^{35}}{dx^{35}}(x \operatorname{sen} x)$

53. Encontre constantes A e B de forma que a função $y = A \operatorname{sen} x + B\cos x$ satisfaça a equação diferencial $y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$.

54. (a) Avalie $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

(b) Avalie $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

(c) Ilustre as partes (a) e (b) fazendo o gráfico de $y = x \operatorname{sen}(1/x)$.

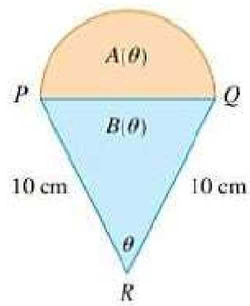
55. Derive cada identidade trigonométrica para obter uma nova identidade (ou uma familiar).

(a) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ (b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(c) $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{1 + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x}$

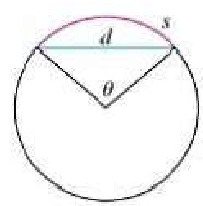
56. Um semicírculo com diâmetro PQ está sobre um triângulo isósceles PQR para formar uma região com um formato de sorvete, conforme mostra a figura. Se $A(\theta)$ é a área do semicírculo e $B(\theta)$ é a área do triângulo, encontre

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}.$$



57. A figura mostra um arco de círculo com comprimento s e uma corda com comprimento d, ambos subentendidos por um ângulo central θ. Encontre

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{s}{d}$$



58. Seja $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$.

(a) Faça o gráfico de f. Que tipo de descontinuidade parece ocorrer em 0?

(b) Calcule os limites laterais de f em 0. Esses valores confirmam sua resposta para a parte (a)?