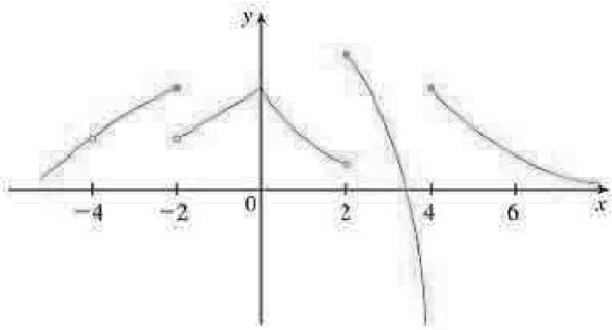
De fato, o Teorema do Valor Intermediário desempenha um papel na própria maneira de funcionar destas ferramentas gráficas. Um computador calcula um número finito de pontos sobre o gráfico e acende os pixels que contêm os pontos calculados. Ele pressupõe que a função é contínua e acende todos os valores intermediários entre dois pontos consecutivos. O computador, portanto, "conecta os pontos" acendendo os pixels intermediários.

2.5 Exercícios

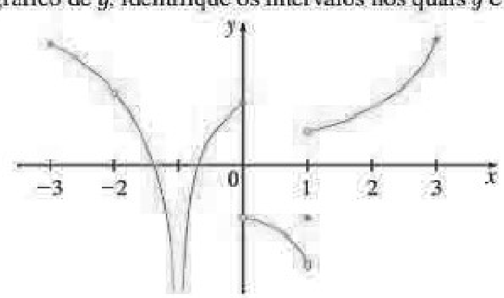
1. Escreva uma equação que expresse o fato de que uma função f é contínua no número 4.

2. Se f é contínua em $(-\infty, \infty)$, o que você pode dizer sobre seu gráfico?

3. (a) Do gráfico de f, identifique números nos quais f é descontínua e explique por quê.
(b) Para cada um dos números indicados na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum dos casos.



4. Do gráfico de g, identifique os intervalos nos quais g é contínua.



5–8 Esboce o gráfico de uma função f que seja contínua exceto para a descontinuidade declarada.

5. Descontínua, porém contínua à direita, em 2

6. Descontinuidades em -1 e 4, porém contínua à esquerda em -1 e à direita em 4

7. Descontinuidade removível em 3, descontinuidade em salto em 5

8. Não é contínua à direita nem à esquerda em -2; contínua somente à esquerda em 2

9. A tarifa T cobrada para dirigir em um certo trecho de uma rodovia com pedágio é de \$ 5, exceto durante o horário de pico (entre 7 da manhã e 10 da manhã e entre 4 da tarde e 7 da noite), quando a tarifa é de \$ 7.
(a) Esboce um gráfico de T como função do tempo t, medido em horas após a meia-noite.
(b) Discuta as descontinuidades da função e seu significado para alguém que use a rodovia.

10. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
(a) A temperatura em um local específico como uma função do tempo.
(b) A temperatura em um tempo específico como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.
(c) A altitude acima do nível do mar como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.
(d) O custo de uma corrida de táxi como uma função da distância percorrida.
(e) A corrente no circuito para as luzes de uma sala como uma função do tempo.

11–14 Use a definição de continuidade e as propriedades de limites para demonstrar que a função é contínua em um dado número a.

11. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}, \quad a = 4.$

12. $g(t) = \dfrac{t^2 + 5t}{2t + 1}, \quad a = 2.$

13. $p(v) = 2\sqrt{3v^2 + 1}, \quad a = 1.$

14. $f(x) = 3x^4 - 5x + \sqrt[3]{x^2 + 4}, \quad a = 2.$

15–16 Use a definição da continuidade e as propriedades de limites para mostrar que a função é contínua no intervalo dado.

15. $f(x) = x + \sqrt{x - 4}, \quad [4, \infty).$

16. $g(x) = \dfrac{x - 1}{3x + 6}, \quad (-\infty, -2).$

17–22 Explique por que a função é descontínua no número dado a. Esboce o gráfico da função.

17. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2} \qquad a = -2$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{se } x \neq -2 \\ 1 & \text{se } x = -2 \end{cases} \qquad a = -2$

19. $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \leq -1 \\ 2^x & \text{se } x > -1 \end{cases} \qquad a = -1$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

21. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

22. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases} \qquad a = 3$

23–24 Como você "removeria a descontinuidade" de f? Em outras palavras, como você definiria $f(2)$ no intuito de fazer f contínua em 2?

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ **24.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$

25–32 Explique, usando os Teoremas 4, 5, 7 e 9, por que a função é contínua em todo o número em seu domínio. Diga qual é o domínio.

25. $F(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 1}$ **26.** $G(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - x - 1}$

27. $Q(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^3 - 2}$ **28.** $R(t) = \dfrac{e^{\operatorname{sen} t}}{2 + \cos \pi t}$

29. $A(t) = \operatorname{arcsen}(1 + 2t)$ **30.** $B(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{4 - x^2}}$

31. $M(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$ **32.** $N(r) = \operatorname{tg}^{-1}(1 + e^{-r^2})$

33–34 Localize as descontinuidades da função e ilustre com um gráfico.

33. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ **34.** $y = \ln(\operatorname{tg}^2 x)$

35–38 Use a continuidade para calcular o limite.

35. $\lim\limits_{x \to 2} x\sqrt{20 - x^2}$ **36.** $\lim\limits_{x \to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

37. $\lim\limits_{x \to 1} \ln\left(\dfrac{5 - x^2}{1 + x}\right)$ **38.** $\lim\limits_{x \to 4} 3^{\sqrt{x^2 - 2x - 4}}$

39–40 Mostre que f é contínua em $(-\infty, \infty)$.

39. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ \ln x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{se } x \geq \pi/4 \end{cases}$

41–43 Encontre os pontos nos quais f é descontínua. Em quais desses pontos f é contínua à direita, à esquerda ou em nenhuma das laterais? Esboce o gráfico de f.

41. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < -1 \\ x & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 1/x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{se } 1 < x \leq 4 \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 4 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

44. A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância r do centro do planeta é

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{se } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

onde M é a massa da Terra; R é seu raio; e G é a constante gravitacional. F é uma função contínua de r?

45. Para quais valores da constante c a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{se } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

46. Encontre os valores de a e b que tornam f contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

47. Suponha que f e g sejam funções contínuas tais que $g(2) = 6$ e $\lim\limits_{x \to 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$. Encontre $f(2)$.

48. Sejam $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/x^2$.
(a) Determine $(f \circ g)(x)$.
(b) É verdade que $f \circ g$ é contínua sempre? Explique.

49. Quais das seguintes funções f têm uma descontinuidade removível em a? Se a descontinuidade for removível, encontre uma função g que seja igual a f para $x \neq a$ e seja contínua em a.
(a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$, $a = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}$, $a = 2$

(c) $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!]$, $a = \pi$

50. Suponha que uma função f seja contínua em $[0, 1]$, exceto em 0,25, e que $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$. Seja $N = 2$. Esboce dois gráficos possíveis de f, um indicando que f pode não satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário e outro mostrando que f poderia ainda satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário (mesmo que não satisfaça as hipóteses).

51. Se $f(x) = x^2 + 10 \operatorname{sen} x$, mostre que existe um número c tal que $f(c) = 1.000$.

52. Suponha f contínua em $[1, 5]$ e que as únicas soluções da equação $f(x) = 6$ sejam $x = 1$ e $x = 4$. Se $f(2) = 8$, explique por que $f(3) > 6$.

53–56 Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

53. $x^4 + x - 3 = 0$, $(1, 2)$ **54.** $\ln x = x - \sqrt{x}$, $(2, 3)$

55. $\sqrt[3]{x} = 1 - x$, $(0, 1)$ **56.** $\operatorname{sen} x = x^2 - x$, $(1, 2)$

57–58 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real.
(b) Use sua calculadora para encontrar um intervalo de comprimento 0,01 que contenha uma raiz.

57. $\cos x = x^3$ **58.** $\ln x = 3 - 2x$