Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP
Departamento de Computação e Sistemas – DECSI
Disciplina: Matemática Discreta – CSI 443
Professor: Bruno Hott (brhott@ufop.edu.br)

Lista de Exercícios 02:
Dedução Natural

Revisão

1. Responda formalmente as seguintes questões:

a) O que é dedução natural?

> Dedução natural é um sistema formal para dedução de consequências lógicas sem a necessidade de substituir variáveis por valores lógicos ou avaliar expressões. De maneira simples, a dedução natural consiste de um conjunto de regras que permitem estabelecer a validade de argumentos representados como sequentes.

b) O que é sequente?

> Sejam $\alpha_1, ..., \alpha_n, \varphi$ fórmulas bem formadas da lógica proposicional. A notação $\alpha_1, ..., \alpha_n \vdash \varphi$ é denominada de sequente e representa que φ pode ser deduzida a partir de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ utilizando as regras da dedução natural.

c) Defina, com suas palavras, o que é árvore de prova.

> Para determinar a validade de argumentos utilizando dedução natural, de- vemos ser capazes de inferir a conclusão a partir das premissas, utilizando as regras da dedução natural. Regras da dedução natural são expressas escrevendo as premissas acima de uma linha horizontal que as separam da conclusão.
> $$\frac{\text{Fórmula}_1,\ ...,\ \text{Fórmula}_n}{\text{Conclusão}}$$
> Esta notação expressa, intuitivamente, que se formos capazes de determinar a validade de cada uma das fórmulas $\text{Fórmula}_i, 1 \leq i \leq n$, então a Conclusão também será verdadeira.

d) Explique, com suas palavras, qual é o significado de cada uma das regras da dedução natural.

> A primeira regra da dedução natural expressa um fato bastante óbvio: se você deseja provar que uma fórmula α é verdadeira e α é uma das fórmulas presentes no conjunto de hipóteses, então você pode concluí-la utilizando a regra $\{ID\}$, que é apresentada a seguir. $\frac{}{\alpha}\{\text{ID}\}$
>
> De maneira simples, a regra de introdução da conjunção ($\{\wedge_I\}$), diz que se for possível deduzir uma fórmula α, a partir de um conjunto de hipóteses (premissas) Γ e também for possível deduzir β a partir deste mesmo conjunto de hipóteses Γ, então a partir de Γ é possível inferir $\alpha \wedge \beta$. Isto é expresso de maneira concisa pela seguinte regra:
> $$\frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta}\{\wedge_I\}$$
> As regras de eliminação da conjunção expressam o fato de que se sabemos que $\alpha \wedge \beta$ é verdadeira, então α é verdadeira e β é verdadeira. Ambas as regras são apresentadas a seguir.
> $$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\{\wedge_E\} \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\{\wedge_E\}$$
> Em nosso cotidiano, provavelmente a regra de dedução que mais utilizamos é a regra de eliminação da implicação, $\{\rightarrow_E\}$. Esta regra afirma que se conseguirmos deduzir que $\alpha \rightarrow \beta$ é verdade e que α é verdade, então, utilizando a regra $\{\rightarrow_E\}$, podemos deduzir que β possui o valor verdadeiro. Esta regra é apresentada a seguir:

$$\frac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}\{\to_E\}$$

A regra de introdução da implicação, $\{\to_I\}$, especifica que para deduzirmos uma fórmula $\alpha \to \beta$, a partir de um conjunto de hipóteses Γ, devemos obter uma prova de β utilizando α como uma hipótese adicional. Esta regra é apresentada a seguir:

$$\frac{\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta}\{\to_I\}^i$$

Como basta uma das fórmuas ser verdadeira para que toda a disjunção também o seja, temos duas regras para introduzir o conectivo $\vee$, apresentadas a seguir:

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}\{\vee_I\} \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}\{\vee_I\}$$

Se sabemos que $\alpha \vee \beta$ é verdadeira e que uma fórmula γ pode ser inferida a partir de α e também de β, podemos então deduzir que γ deve ser verdadeira. Esta idéia é ilustrada pela regra de eliminação da disjunção,$\{\vee_E\}$, apresentada a seguir:

$$\frac{\alpha \vee \beta \qquad \alpha \vdash \gamma \qquad \beta \vdash \gamma}{\gamma}\{\vee_E\}^i$$

A regra da contradição especifica que podemos deduzir qualquer fórmula a partir de uma dedução de $\perp$ (falso).

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha}\{\mathrm{CTR}\}$$

A regra redução ao absurdo, {RAA} especifica que se conseguirmos deduzir $\perp$ a partir de $\neg\alpha$ então α deve ser uma fórmula verdadeira.

$$\frac{\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha}\{RAA\}^i$$

e) O que é a visibilidade de uma hipótese?

Algumas regras da dedução natural possibilita o ganho de uma hipótese adicional α. Porém, a fórmula α é uma hipótese de "visibilidade local", cujo único propósito é possibilitar a demonstração do sequente em questão. Assim que obtemos a dedução desejada, a hipótese adicional pode ser "descartada". A visibilidade da hipótese adicional α é toda a dedução acima do uso da regra que a gerou.

Exercícios

2. (Ribeiro 2.5.7.1) Prove os seguintes sequentes usando dedução natural. Tente demonstrá-los sem utilizar a regra RAA:

b) $\{(P \wedge Q) \wedge R\} \vdash (P \wedge R) \vee Z$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{(P \wedge Q) \wedge R}}{P \wedge Q}\{\wedge_E\}}{P}\{\wedge_E\} \qquad \cfrac{\cfrac{}{(P \wedge Q) \wedge R}}{R}\{\wedge_E\}}{\cfrac{P \wedge R}{(P \wedge R) \vee Z}\{\vee_I\}}\{\wedge_I\}$$

g) $\vdash (P \wedge Q) \to P \vee Q$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{P \wedge Q}\{1\}}{P}\{\wedge_E\}}{P \vee Q}\{\vee_I\}}{(P \wedge Q) \to P \vee Q}\{\to_I\}^1$$

h) $\{Q \to (P \to R), \neg R, Q\} \vdash \neg P$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Q \to (P \to R)} \quad \dfrac{}{Q}}{P \to R}\{\to_E\} \quad \dfrac{}{P}\{1\}}{R}\{\to_E\} \quad \dfrac{}{\neg R}}{\bot}\{\to_E\}}{\neg P}\{\to_I\}^1$$

j) $\{(P \to R) \wedge (Q \to R), P \wedge Q\} \vdash Q \wedge R$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q}}{Q}\{\wedge_E\} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(P \to R) \wedge (Q \to R)}}{P \to R}\{\wedge_E\} \quad \dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q}}{P}\{\wedge_E\}}{R}\{\to_E\}}{Q \wedge R}\{\wedge_I\}$$

o) $\{P \to Q \wedge R\} \vdash (P \to Q) \wedge (P \to R)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \to Q \wedge R} \quad \dfrac{}{P}\{1\}}{Q \wedge R}\{\to_E\}}{Q}\{\wedge_E\}}{P \to Q}\{\to_I\}^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \to Q \wedge R} \quad \dfrac{}{P}\{2\}}{Q \wedge R}\{\to_E\}}{R}\{\wedge_E\}}{P \to R}\{\to_I\}^2}{(P \to Q) \wedge (P \to R)}\{\wedge_I\}$$

p) $\{(P \to Q) \wedge (P \to R)\} \vdash P \to (Q \wedge R)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(P \to Q) \wedge (P \to R)}}{P \to Q}\{\wedge_E\} \quad \dfrac{}{P}\{1\}}{Q}\{\to_E\} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(P \to Q) \wedge (P \to R)}}{P \to R}\{\wedge_E\} \quad \dfrac{}{P}\{1\}}{R}\{\to_E\}}{Q \wedge R}\{\wedge_I\}}{P \to (Q \wedge R)}\{\to_I\}^1$$

t) $\{P \wedge Q \to R, R \to S, Q \wedge \neg S\} \vdash \neg P$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Q \wedge \neg S}}{\neg S}\{\wedge_E\} \qquad \dfrac{\dfrac{}{R \to S} \quad \dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \to R} \quad \dfrac{\dfrac{}{P}\{1\} \quad \dfrac{\dfrac{}{Q \wedge \neg S}}{Q}\{\wedge_E\}}{P \wedge Q}\{\wedge_I\}}{R}\{\to_E\}}{S}\{\to_E\}}{\bot}\{\to_E\}}{\neg P}\{\to_I\}^1$$

3. (Ribeiro 2.5.7.2) Prove o seguinte sequente:

a) $\{\neg(A \vee B)\} \vdash \neg A \wedge \neg B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A \vee B)} \quad \dfrac{\dfrac{}{A}\{1\}}{A \vee B}\{\vee_I\}}{\bot}\{\to_E\}}{\neg A}\{\to_I\}^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A \vee B)} \quad \dfrac{\dfrac{}{B}\{2\}}{A \vee B}\{\vee_I\}}{\bot}\{\to_E\}}{\neg B}\{\to_I\}^2}{\neg A \wedge \neg B}\{\wedge_I\}$$

4. (Ribeiro 2.5.7.3) Demonstre os seguintes sequentes. Nestes sequentes você terá que utilizar a regra RAA para deduzí-los.

a) $\{A \to B\} \vdash \neg A \vee B$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\neg A \lor B)}\{1\} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\neg A \lor B)}\{1\} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \to B} \quad \dfrac{}{A}\{2\}}{B}\{\to_E\}}{\neg A \lor B}\{\lor_I\}}{\bot}\{\to_E\}}{\neg A}\{\to_I\}^2}{\neg A \lor B}\{\lor_I\}}{\bot}\{\to_E\}}{\neg A \lor B}\{RAA\}^1
$$

5. Determine se o seguinte argumento é válido:

   “Se o Super-homem era capaz e tinha vontade de prevenir o mal, ele assim o faria. Se o Super-homem não fosse capaz de prevenir o mal, ele seria impotente. Se ele não tivesse vontade de combater o mal, ele seria malévolo. O super-homem não previne o mal. Se Super-homem existe, ele não é nem impotente nem malévolo. Por isso, o Super-homem não existe.”

Sejam as seguintes proposições:

A: Super-homem é capaz de prevenir o mal;

B: Super-homem tem vontade de prevenir o mal;

C: Super-homem previne o mal;

D: Super-homem é impotente;

E: Super-homem é malévolo;

F: Super-homem existe.

Tradução dos fatos para as proposições:

a) $A \land B \to C$

b) $\neg A \to D$

c) $\neg B \to E$

d) $\neg C$

e) $F \to \neg D \land \neg E$

$\therefore \neg F$

A árvore de prova para este exercício será dividida para melhor visualização.

Árvore de prova para A:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg D}\{2\} \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg A \to D} \quad \dfrac{}{\neg A}\{3\}}{D}\{\to_E\}}{\bot}\{\to_E\}}{A}\{RAA\}^3}{\neg D \to A}\{\to_I\}^2 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F \to \neg D \land \neg E} \quad \dfrac{}{F}\{1\}}{\neg D \land \neg E}\{\to_E\}}{\neg D}\{\land_E\}}{A}\{\to_E\}
$$

Árvore de prova para B:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg E}\{4\} \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg B \to E} \quad \dfrac{}{\neg B}\{5\}}{E}\{\to_E\}}{\bot}\{\to_E\}}{B}\{RAA\}^5}{\neg E \to B}\{\to_I\}^4 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F \to \neg D \land \neg E} \quad \dfrac{}{F}\{1\}}{\neg D \land \neg E}\{\to_E\}}{\neg E}\{\land_E\}}{B}\{\to_E\}
$$

Árvore de prova final:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg C} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \land B \to C} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A}\{\text{Árvore A}\} \qquad \dfrac{}{B}\{\text{Árvore B}\}}{A \land B}\{\land_I\}}{C}\{\to_E\}}{\bot}\{\to_E\}}{\neg F}\{\to_I\}^1$$

Referências

[1] Rodrigo G Ribeiro. Notas de aula de matemática discreta, 2016.

[2] Kenneth H Rosen. Matemática discreta e suas aplicações. Sexta edição, 2009.