

$$\$ 1.000(1,015)^{12} = \$ 1.195,62 \quad \text{com capitalização trimestral,}$$

$$\$ 1.000(1,005)^{36} = \$ 1.196,68 \quad \text{com capitalização mensal,}$$

$$\$ 1.000 \left(1 + \frac{0,06}{365} \right)^{365 \cdot 3} = \$ 1.197,20 \quad \text{com capitalização diária.}$$

Você pode ver que os juros pagos aumentam conforme o número de períodos de capitalização (n) aumenta. Se fizermos $n \rightarrow \infty$, então estaremos capitalizando os juros **continuamente** e o valor do investimento será

$$\begin{aligned} A(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left[\left(1 + \frac{r}{n} \right)^{n/r} \right]^{rt} \\ &= A_0 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{n/r} \right]^{rt} \\ &= A_0 \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m \right]^{rt} \quad (\text{onde } m = n/r) \end{aligned}$$

Mas o limite nesta expressão é igual ao número e (veja a Equação 6 da Seção 3.6). Assim, com capitalização contínua de juros a uma taxa de juros r , a quantia depois de t anos será

$$A(t) = A_0 e^{rt}.$$

Se derivarmos essa equação, obtemos

$$\frac{dA}{dt} = rA_0 e^{rt} = rA(t)$$

que é o mesmo que dizer que, com capitalização contínua de juros, a taxa de aumento de um investimento é proporcional a seu tamanho.

Voltando ao exemplo dos \$ 1.000 investidos por três anos, a 6% de juros, vemos que com a capitalização contínua dos juros, o valor do investimento será

$$A(3) = \$ 1.000e^{(0,06)3} = \$ 1.197,22.$$

Observe como é próximo da quantidade que calculamos para a capitalização diária, \$ 1.197,20. Mas a quantidade é mais fácil de computar se usarmos a capitalização contínua.

3.8 Exercícios

- ✓ 1. Uma população de protozoários se desenvolve a uma taxa de crescimento relativa constante de 0,6028 por membro por dia. No dia zero, a população consistia em dois membros. Encontre o tamanho da população depois de sete dias.
2. Um habitante comum do intestino humano é a bactéria *Escherichia coli*, cujo nome é uma homenagem ao pediatra alemão Theodor Escherich, que a identificou em 1885. Uma célula desta bactéria em um meio nutriente líquido se divide em duas células a cada 20 minutos. A população inicial de uma cultura é de 50 células.
 - (a) Encontre a taxa de crescimento relativa.
 - (b) Encontre uma expressão para o número de células depois de t horas.
 - (c) Encontre o número de células após 6 horas.
 - (d) Encontre a taxa de crescimento depois de 6 horas.
 - (e) Quando a população atingirá um milhão células?
- ✓ 3. Uma cultura de bactérias inicialmente contém 100 células e cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho. Depois de uma hora a população cresceu para 420.



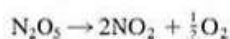
- (a) Encontre uma expressão para o número de bactérias depois de t horas.
- (b) Encontre o número de bactérias depois de 3 horas.
- (c) Encontre a taxa de crescimento depois de 3 horas.
- (d) Quando a população atingirá 10.000?
4. Uma cultura de bactérias cresce a uma taxa de crescimento relativa constante. A contagem de bactérias foi de 400 após 2 horas e 25.600 após 6 horas.
- (a) Qual é a taxa de crescimento relativa? Expresse sua resposta como uma porcentagem.
- (b) Qual foi o tamanho inicial da cultura?
- (c) Encontre uma expressão para o número de bactérias depois de t horas.
- (d) Encontre o número de células após 4,5 horas.
- (e) Encontre a taxa de crescimento depois de 4,5 horas.
- (f) Quando a população atingirá 50.000?
- ✓ 5. A tabela dá estimativas da população mundial, em milhões, de 1750 a 2000.

Ano	População	Ano	População
1750	790	1900	1 650
1800	980	1950	2 560
1850	1 260	2000	6 080

- (a) Use o modelo exponencial e os valores da população para 1750 e 1800 para prever a população do mundo em 1900 e 1950. Compare com os valores reais.
- (b) Use o modelo exponencial e os valores da população para 1850 e 1900 para prever a população do mundo em 1950. Compare com a população real.
- (c) Use o modelo exponencial e os valores da população para 1900 e 1950 para prever a população do mundo em 2000. Compare com o valor da tabela e tente explicar a discrepância.
6. A tabela dá a população da Indonésia, em milhões, para a segunda metade do século XX.

Ano	População
1950	83
1960	100
1970	122
1980	150
1990	182
2000	214

- (a) Supondo que a população cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho, use censo para 1950 e 1960 para prever a população em 1980. Compare com os valores reais.
- (b) Use os valores do censo para 1960 e 1980 para prever a população em 2000. Compare com a população recenseada.
- (c) Use os valores dos censos de 1980 e 2000 para prever a população de 2010 e compare com a população real de 243 milhões.
- (d) Use o modelo da parte (c) para prever a população em 2020. Você acha que a previsão será muito alta ou muito baixa? Por quê?
7. Experiências mostram que se a reação química



ocorre a 45 °C, a taxa de reação do pentóxido de dinitrogênio é proporcional à sua concentração da seguinte forma:

$$-\frac{d[\text{N}_2\text{O}_5]}{dt} = 0,0005[\text{N}_2\text{O}_5].$$

(Veja o Exemplo 4 da Seção 3.7.)

- (a) Encontre uma expressão para a concentração $[\text{N}_2\text{O}_5]$ após t segundos se a concentração inicial for C .
- (b) Quanto tempo levará para que a reação reduza a concentração de N_2O_5 para 90% de seu valor original?
8. O estrôncio-90 tem uma meia-vida de 28 dias.
- (a) Uma amostra tem a massa de 50 mg inicialmente. Encontre a fórmula para a massa restante após t dias.
- (b) Encontre a massa remanescente depois de 40 dias.
- (c) Quanto tempo a amostra leva para decair para uma massa de 2 mg?
- (d) Esboce o gráfico da função massa.
- ✓ 9. A meia-vida do cézio-137 é 30 anos. Suponha que tenhamos uma amostra de 100 mg.
- (a) Encontre a massa remanescente após t anos.
- (b) Quanto da amostra restará depois de 100 anos?
- (c) Depois de quanto tempo restará apenas 1 mg?
10. Uma amostra de trítio-3 decai para 94,5% de sua quantidade original depois de um ano.
- (a) Qual é a meia-vida do trítio-3?
- (b) Quanto tempo levaria para a amostra decair para 20% de sua quantidade original?
- ✓ 11. Os cientistas podem determinar a idade de objetos antigos pelo método de *datação por radiocarbono*. O bombardeamento da parte superior da atmosfera por raios cósmicos converte o nitrogênio em um isótopo radioativo do carbono, ^{14}C , com meia-vida de cerca de 5.730 anos. A vegetação absorve o dióxido de carbono através da atmosfera e a vida animal assimila ^{14}C através da cadeia alimentar. Quando uma planta ou animal morre, para de repor seu carbono e a quantidade de ^{14}C começa a decrescer por decaimento radioativo. Portanto o nível de radioatividade também deve decrescer exponencialmente.
- Uma descoberta revelou que um fragmento de pergaminho tinha cerca de 74% de ^{14}C do que os materiais das plantas têm atualmente na terra. Estime a idade do papiro.
12. Os fósseis de dinossauros são muito antigos para serem datados de modo confiável pelo carbono-14. (Veja o Exercício 11.) Suponha que tivéssemos um fóssil de dinossauro de 68 milhões de anos. Qual seria atualmente a fração remanescente de ^{14}C de um dinossauro vivo? Suponha que a quantidade mínima detectável seja 0,1%. Qual idade máxima de um fóssil poderia ser datada usando o ^{14}C ?
13. Os fósseis de dinossauro em geral são datados usando outro elemento em vez do carbono, como o potássio-40, que tem uma meia-vida maior (nesse caso, aproximadamente 1,25 bilhão de anos). Suponha que a quantidade mínima detectável seja 0,1% e a datação de um dinossauro com ^{40}K indicou que ele tinha 68 milhões de anos. Essa datação é possível? Em outras palavras, qual é a idade máxima de um fóssil que poderia ser datado usando ^{40}K ?
14. Uma curva passa pelo ponto (0, 5) e tem a propriedade de que a inclinação da curva em todo ponto P é duas vezes a coordenada y de P . Qual é a equação da curva?
- ✓ 15. Um peru assado é tirado de um forno quando a sua temperatura atinge 85 °C e é colocado sobre uma mesa em um cômodo em que a temperatura é 22 °C.

- (a) Se a temperatura do peru for 65°C depois de meia hora, qual será a temperatura depois de 45 minutos?
- (b) Quando o peru terá esfriado para 40°C ?
16. Em uma investigação de assassinato, a temperatura do corpo era $32,5^{\circ}\text{C}$ às 13h30 e $30,3^{\circ}\text{C}$ uma hora depois. A temperatura normal do corpo é $37,0^{\circ}\text{C}$, e a temperatura do ambiente era 20°C . Quando o assassinato aconteceu?
- ✓ 17. Quando uma bebida gelada é tirada da geladeira, sua temperatura é 5°C . Depois de 25 minutos em uma sala a 20°C , sua temperatura terá aumentado para 10°C .
- (a) Qual é a temperatura da bebida depois de 50 minutos?
- (b) Quando a temperatura será 15°C ?
18. Uma xícara de café recém-coado tem a temperatura de 95°C em uma sala a 20°C . Quando sua temperatura for 70°C , ele estará esfriando a uma taxa de 1°C por minuto. Quando isto ocorre?
19. A taxa de variação da pressão atmosférica P em relação à altitude h é proporcional a P , desde que a temperatura seja constante. A 15°C a pressão é $101,3\text{ kPa}$ no nível do mar e $87,14\text{ kPa}$ em $h = 1\,000\text{ m}$.
- (a) Qual é a pressão a uma altitude de $3\,000\text{ m}$?
- (b) Qual é a pressão no topo do Monte McKinley, a uma altitude de 6.187 m ?
20. (a) Se $\$ 1.000$ é emprestado com 8% de juros, encontre os valores ao fim de 3 anos se o juros for capitalizado (i) anualmente, (ii) trimestralmente, (iii) mensalmente, (iv) semanalmente, (v) diariamente, (vi) a cada hora e (vii) continuamente.
- (b) Suponha que $\$ 1.000$ sejam emprestados e que os juros sejam capitalizados continuamente. Se $A(t)$ é o valor após t anos, onde $0 \leq t \leq 3$, esboce o gráfico $A(t)$ para cada uma das taxas de juros de 6% , 8% e 10% numa tela comum.
21. (a) Se $\$ 3.000$ são investidos a 5% de juros, encontre o valor do investimento ao fim de 5 anos, para juros capitalizados (i) anualmente, (ii) semestralmente, (iii) mensalmente, (iv) semanalmente, (v) diariamente e (vi) continuamente.
- (b) Se $A(t)$ for a quantia do investimento no tempo t para o caso da capitalização contínua, escreva uma equação diferencial e uma condição inicial satisfeitas por $A(t)$.
22. (a) Quanto tempo o investimento levará para dobrar o valor se a taxa de juros for de 6% capitalizada continuamente?
- (b) Qual é a taxa de juros anual equivalente?

PROJETO APLICADO

CONTROLE DE PERDA DE CÉLULAS VERMELHAS DO SANGUE DURANTE UMA CIRURGIA



O volume típico de sangue no corpo humano é cerca de 5 L . Certa porcentagem desse volume (chamada de hematócrito) consiste de células vermelhas do sangue (CVS); tipicamente, o hematócrito é de cerca de 45% nos homens. Suponha que uma cirurgia leve 4 horas e que um paciente do sexo masculino perca cerca $2,5\text{ L}$ de sangue. Durante a cirurgia, o volume de sangue do paciente é mantido em 5 L pela injeção de uma solução salina, que se mistura rapidamente com o sangue, mas o dilui, de modo que o hematócrito diminui à medida que o tempo passa.

1. Supondo que a taxa de perda de CVS seja proporcional ao volume de CVS, determine o volume de CVS do paciente no final da operação.
2. Foi desenvolvido um procedimento chamado de *hemodiluição normovolêmica aguda* (HNA) para minimizar a perda de CVS durante cirurgias. Nesse procedimento, é extraído sangue do paciente antes da operação e substituído por solução salina. Isso dilui o sangue do paciente, resultando em menos CVS perdidas durante o sangramento. O sangue extraído é então devolvido ao paciente depois da cirurgia. Entretanto, apenas certa quantidade de sangue pode ser extraída, pois nunca se pode permitir que a concentração de CVS caia abaixo de 25% durante a cirurgia. Qual a máxima quantidade de sangue que pode ser extraída no procedimento HNA na cirurgia descrita nesse projeto?
3. Qual é a perda de CVS sem o procedimento HNA? Qual é a perda se o procedimento for executado com o volume calculado no Problema 2?