

Álgebra Linear

Prof. Alisson C. Reinol

Apucarana, 2024

1. VETORES, MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

1.1 Operações com vetores

Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$:

- igualdade de vetores: $u = v \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

- adição de vetores: $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

- mult. de vetor por um escalar: $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$

Exemplo: $u = (2, -3)$, $v = (1, -1)$ e $w = (-2, 1)$. Calcule:

a) $u + v = (2, -3) + (1, -1) = (3, -4)$

b) $3w = 3(-2, 1) = (-6, 3)$

c) $2u - v = (4, -6) - (1, -1) = (3, -5)$

d) $v - u + 2w = (1, -1) - (2, -3) + (-4, 2) = (-5, 4)$

1.2 Operações com matrizes

Sejam $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$:

- igualdade de matrizes: $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \\ c_1 = c_2 \\ d_1 = d_2 \end{cases}$

- adição de matrizes: $A + B = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$

- mult. de matriz por um escalar: $\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$

- mult. de matrizes: $A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{bmatrix}$

Obs.: A multiplicação $A \cdot B$ só é possível se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B .

- matriz transposta: $A^t = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}$

- matriz identidade: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ...

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. Calcule:

a) $A + I_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

b) $3B^t = 3 \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$

$$\text{c) } A^t + 2B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } A \cdot B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) & (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) & 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1.3 Determinantes

- Ordem 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1$$

-2 3

- Ordem 3: $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Regra de Sarrus)

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 20 - 6 + 0 + 0 = 8$$

-6 0 20 -6 0 0

1.4 Inversão de matrizes

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I, \quad \det A \neq 0$$

A^{-1} : matriz inversa de A .

- **Ordem 2:** $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\det A = 2 \neq 0$

Regra prática:

i) troque a posição dos dois elementos da diagonal principal;

ii) inverta o sinal dos dois elementos da diagonal secundária;

iii) divida os quatro elementos da matriz obtida por $\det A$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2/2 & -4/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$.

- **Ordem 3:** $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\det A = -1 \neq 0$

Cofatores: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$$

Analogamente,

$$A_{21} = 1 \quad A_{31} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 = 0$$

$$A_{22} = 1 \quad A_{32} = 1$$

$$A_{23} = 1 \quad A_{33} = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1$$

\bar{A} : Matriz dos cofatores

$\text{adj } A$: Matriz adjunta

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = (\bar{A})^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo, } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A = \begin{bmatrix} 1/-1 & 1/-1 & 0/-1 \\ 0/-1 & 1/-1 & 1/-1 \\ -1/-1 & 1/-1 & 3/-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

1.5 Sistemas lineares

$$1) \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \quad (2) \quad \sim \quad \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases} +$$

$$7x = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$x - 2y = 5 \quad \Rightarrow \quad 1 - 2y = 5 \quad \Rightarrow \quad y = -2$$

Logo, $S = \{(1, -2)\}$.

$$\text{Outro modo: } \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x - 2y = 5 & \Rightarrow x = 5 + 2y \\ 3x + y = 1 & \Rightarrow 3(5 + 2y) + y = 1 \Rightarrow \\ 15 + 6y + y = 1 & \Rightarrow 7y = -14 \Rightarrow y = -2 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } x = 5 + 2 \cdot (-2) = 1.$$

$$2) \begin{cases} x + 2y - z = 2 & (-2) \quad (-1) \\ 2x - y + z = 3 & \leftarrow + \\ x + y + z = 6 & \leftarrow + \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -5y + 3z = -1 & \leftarrow \\ -y + 2z = 4 & \leftarrow \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -y + 2z = 4 & (-5) \\ -5y + 3z = -1 & \leftarrow + \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -y + 2z = 4 \\ -7z = -21 \end{cases}$$

$$-7z = -21 \Rightarrow z = 3$$

$$-y + 2z = 4 \Rightarrow -y + 2 \cdot 3 = 4 \Rightarrow y = 2$$

$$x + 2y - z = 2 \Rightarrow x + 2 \cdot 2 - 3 = 2 \Rightarrow x = 1$$

Logo, $S = \{(1, 2, 3)\}$.

SPD

SPD - tem uma única solução

SPI - tem infinitas soluções

SI - não tem solução

Outro modo: Regra de Cramer

nº de eqs = nº de incógnitas (ok)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \quad (\text{ok})$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -14, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -21$$

Logo, $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{-7} = 1$, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{-7} = 2$ e $z = \frac{D_z}{D} = \frac{-21}{-7} = 3$.

$$3) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} (-3) & (-2) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix}} \sim \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 5y - 5z = -3 \\ 5y - 5z = -1 \end{cases} \xrightarrow{(-1)} \sim \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 5y - 5z = -3 \\ 0z = 2 \end{cases}$$

Logo, $S = \emptyset$.

SI

não tem solução

Obs.:

- 1) Se durante o escalonamento ocorrer $0z = b$, com $b \neq 0$, o sistema será impossível (SI).
- 2) Se durante o escalonamento ocorrer $0z = 0$, podemos suprimir esta eq. do sistema.

Outro modo: Regra de Cramer

nº de eqs = nº de incógnitas (ok)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{não})$$

$$4) \begin{cases} x - 6y + z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - 6z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} (1) & (-3) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix}} \sim \begin{cases} x - 6y + z = 0 \\ -8y + 4z = 0 \\ 18y - 9z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} (1/4) \\ (1/9) \end{matrix}} \sim$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 6y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \quad (1) \\ 2y - z = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{+} \sim \left\{ \begin{array}{l} x - 6y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 0z = 0 \end{array} \right.$$

$$-2y + z = 0 \Rightarrow z = 2y$$

$$x - 6y + z = 0 \Rightarrow x - 6y + 2y = 0 \Rightarrow x = 4y$$

$$\text{Logo, } S = \{(4y, y, 2y) / y \in \mathbb{R}\}. \quad \text{SPI}$$

Obs.: 1) O sistema do exemplo anterior é chamado de **sistema linear homogêneo**.

2) Um sistema linear homogêneo sempre admite a solução trivial $x = 0, y = 0, z = 0$.

3) Um sistema linear homogêneo pode ser apenas SPD ou SPI.

Outro modo: Regra de Cramer

nº de eqs = nº de incógnitas (ok)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{não})$$

Obs.: No caso de sistemas lineares homogêneos:

a) se $D \neq 0$, então o sistema é SPD e $x = 0, y = 0$ e $z = 0$.

b) se $D = 0$, então o sistema é SPI (tem infinitas soluções).