Universidade Tecnológica Federal do Paraná

UTFPR - Campus Apucarana

Departamento Acadêmico de Matemática

MÓDULO 1

Espaços vetoriais (parte 1)

Curso: Engenharia de Computação

Disciplina: Álgebra Linear

Professor: Alisson C. Reinol

(2022-2)

Conteúdos

- Introdução
- Espaços vetoriais
- Subespaços vetoriais
- Combinação linear
- Subespaços gerados

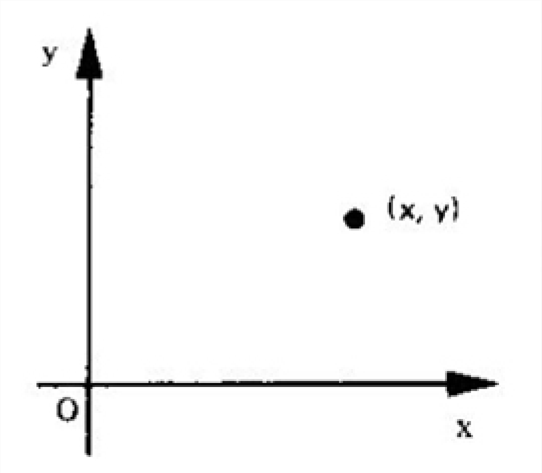
Introdução

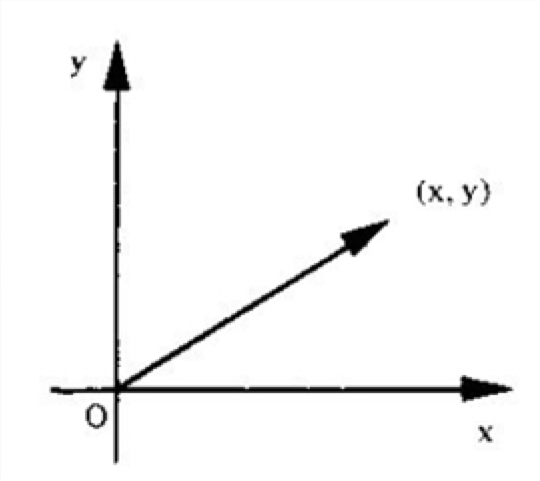
- O conjunto dos pares ordenados $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ é interpretado geometricamente como sendo o *plano cartesiano*.

Introdução

- O conjunto dos pares ordenados $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ é interpretado geometricamente como sendo o *plano cartesiano*.

- Um par ordenado (x, y) pode ser visto como um *ponto* ou um *vetor*.





- Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, podemos definir as seguintes operações:

- $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ (adição)
- $\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2)$ (multiplicação por escalar)

- Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, podemos definir as seguintes operações:

- $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ (adição)
- $\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2)$ (multiplicação por escalar)

- Já vimos que tais operações satisfazem as seguintes propriedades:

A1) $u + v = v + u$

A2) $u + (v + w) = (u + v) + w$

A3) existe $\mathbf{0} = (0,0)$ tal que $u + \mathbf{0} = u$

A4) dado $u \in \mathbb{R}^2$, existe $-u \in \mathbb{R}^2$ tal que $u + (-u) = \mathbf{0}$

M1) $\alpha\,(u + v) = \alpha u + \alpha v$

M2) $(\alpha + \beta)\,u = \alpha u + \beta u$

M3) $(\alpha\beta)\,u = \alpha\,(\beta u)$

M4) existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1\,u = u$

$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Agora, considere o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2:

$$M(2,2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;/\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

- Agora, considere o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2:

$$M(2,2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \; / \; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

- Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \in M(2,2)$, podemos definir as seguintes operações:

- $A + B = \begin{bmatrix} a + r & b + s \\ c + t & d + u \end{bmatrix}$ (adição)

- $\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$ (multiplicação por escalar)

- Já vimos que tais operações satisfazem as seguintes propriedades:

A1) $A + B = B + A$

A2) A $+ (B + C) = (A + B) + C$

A3) existe $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tal que A $+ \mathbf{0} = A$

A4) dado A$\in M_{2\times2}(\mathbb{R})$, existe $-A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ tal que A $+ (-A) = \mathbf{0}$

M1) $\alpha\ (A + B) = \alpha A + \alpha B$

M2) $(\alpha + \beta)\ A = \alpha A + \beta A$

M3) $(\alpha\beta)\ A = \alpha\ (\beta A)$

M4) existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1\ A = A$

$\forall A, B, C \in M_{2\times2}(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

- Observe que os conjuntos $\mathbb{R}^2$ e $M(2,2)$ munidos desse par de operações (*adição* e *multiplicação por escalar*) apresentam uma "*estrutura*" comum, pois satisfazem as mesmas propriedades.

- Observe que os conjuntos $\mathbb{R}^2$ e $M(2,2)$ munidos desse par de operações (*adição* e *multiplicação por escalar*) apresentam uma "*estrutura*" comum, pois satisfazem as mesmas propriedades.

- Esse fato não só vale para esses dois conjuntos, mas para muitos outros, chamados **espaços vetoriais**.

Espaços Vetoriais

Definição: Dizemos que um conjunto V, não vazio, é um ***espaço vetorial sobre*** $\mathbb{R}$ quando:

i) existe uma *adição* $+: V \times V \to V$ com as seguintes propriedades:

$$(u, v) \mapsto u + v$$

A1) $u + v = v + u, \quad \forall\, u, v \in V$ (comutativa)

A2) $u + (v + w) = (u + v) + w, \quad \forall\, u, v, w \in V$ (associativa)

A3) existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $u + \mathbf{0} = u, \quad \forall u \in V$ (elemento neutro)

A4) dado $u \in V$, existe $(-u) \in V$ tal que $u + (-u) = \mathbf{0}$ (oposto)

ii) existe uma *multiplicação por escalar* $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ com as seguintes propriedades:

$$(\alpha, u) \mapsto \alpha\, u$$

M1) $\alpha\,(\beta u) = (\alpha\beta)\, u, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in V$

M2) $(\alpha + \beta)\, u = \alpha\, u + \beta\, u, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in V$

M3) $\alpha\,(u + v) = \alpha\, u + \alpha\, v, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, u, v \in V$

M4) $1\, u = u, \quad \forall\, u \in V$

ii) existe uma *multiplicação por escalar* $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ com as seguintes

$$(\alpha, u) \mapsto \alpha\, u$$

propriedades:

M1) $\alpha\,(\beta u) = (\alpha\beta)\,u, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in V$

M2) $(\alpha + \beta)\,u = \alpha\,u + \beta\,u, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in V$

M3) $\alpha\,(u + v) = \alpha\,u + \alpha\,v, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, u, v \in V$

M4) $1\,u = u, \quad \forall\, u \in V$

Os elementos $u, v, w, \ldots$ de um espaço vetorial são chamados de ***vetores***.

ii) existe uma *multiplicação por escalar* $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ com as seguintes

$$(\alpha, u) \mapsto \alpha\, u$$

propriedades:

M1) $\alpha\,(\beta u) = (\alpha\beta)\,u, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in V$

M2) $(\alpha + \beta)\,u = \alpha\,u + \beta\,u, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in V$

M3) $\alpha\,(u + v) = \alpha\,u + \alpha\,v, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, u, v \in V$

M4) $1\,u = u, \quad \forall\, u \in V$

Os elementos $u, v, w, \ldots$ de um espaço vetorial são chamados de ***vetores***.

Observação: De maneira análoga, definimos espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos).

Exemplos de espaços vetoriais

1) Como dito na introdução, o conjunto $\mathbb{R}^2$ munido das operações usuais de adição de vetores e multiplicação de vetor por um escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplos de espaços vetoriais

1) Como dito na introdução, o conjunto $\mathbb{R}^2$ munido das operações usuais de adição de vetores e multiplicação de vetor por um escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Para mostrar que o $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial, precisamos verificar as oito propriedades da definição. Então, dados $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos:

A1) $u + v = (u_1, u_2) + (v_1, v_2)$

$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

$$= (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

Pois vale a comutativa na adição de números reais

$$= (v_1, v_2) + (u_1, u_2)$$

$$= v + u$$

$$
\begin{aligned}
A2)\ u+(v+w) &= (u_1,u_2)+((v_1,v_2)+(w_1,w_2)) \\
&= (u_1,u_2)+(v_1+w_1,v_2+w_2) \\
&= (u_1+(v_1+w_1),u_2+(v_2+w_2)) \\
&= ((u_1+v_1)+w_1,(u_2+v_2)+w_2) \\
&= (u_1+v_1,u_2+v_2)+(w_1+w_2) \\
&= \big((u_1,u_2)+(v_1,v_2)\big)+(w_1,w_2) \\
&= (u+v)+w
\end{aligned}
$$

Pois vale a associativa na adição de números reais

$A3)$ *Existe* $\mathbf{0}=(0,0)\in\mathbb{R}^2$ *tal que para todo* $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ *temos:*

$$
\begin{aligned}
u+\mathbf{0} &= (u_1,u_2)+(0,0) \\
&= (u_1+0,u_2+0) \\
&= (u_1,u_2) \\
&= u
\end{aligned}
$$

Pois 0 é o elemento neutro da adição de números reais

$A4)$ *Para todo* $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, *existe* $-u = (-u_1, -u_2) \in \mathbb{R}^2$ *tal que:*

$$
\begin{aligned}
u + (-u) &= (u_1, u_2) + (-u_1, -u_2) \\
&= (u_1 - u_1, u_2 - u_2) \\
&= (0,0) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Pois um número mais o seu oposto é igual a 0 na adição de números reais

$$
\begin{aligned}
M1)\ \alpha(\beta u) &= \alpha(\beta(u_1, u_2)) \\
&= \alpha(\beta u_1, \beta u_2) \\
&= (\alpha(\beta u_1), \alpha(\beta u_2)) \\
&= ((\alpha\beta)u_1\,, (\alpha\beta)u_2) \\
&= (\alpha\beta)(u_1, u_2) \\
&= (\alpha\beta)u
\end{aligned}
$$

Pois vale a associativa na multiplicação de números reais

$M2)\ (\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta)(u_1, u_2)$

$= ((\alpha + \beta)u_1, (\alpha + \beta)u_2)$

$= (\ \alpha u_1 + \beta u_1, \alpha u_2 + \beta u_2)$

Pois vale a distributiva nos números reais

$= (\alpha u_1, \alpha u_2) + (\beta u_1, \beta u_2)$

$= \alpha(u_1, u_2) + \beta(u_1, u_2)$

$= \alpha u + \beta u$

$M3)\ \alpha(u + v) = \alpha((u_1, u_2) + (v_1, v_2))$

$= \alpha(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

$= (\alpha(u_1 + v_1), \alpha(u_2 + v_2))$

$= (\alpha u_1 + \alpha v_1\ , \alpha u_2 + \alpha v_2)$

Pois vale a distributiva nos números reais

$= (\alpha u_1, \alpha u_2) + (\alpha v_1, \alpha v_2)$

$= \alpha(u_1, u_2) + \alpha(v_1, v_2)$

$= \alpha u + \alpha v$

M4) Dado $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$*, temos que:*

$$\begin{aligned} 1u &= 1(u_1, u_2) \\ &= (1u_1, 1u_2) \\ &= (u_1, u_2) \\ &= u \end{aligned}$$

Pois 1 é o elemento neutro da multiplicação de números reais

Como valem as oito propriedades da definição, temos que $\mathbb{R}^2$ *é um espaço vetorial.*

2) Considere o conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \;/\; x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, defina:

- $u + v = (u_1 + v_1,\ \ u_2 + v_2, \dots,\ u_n + v_n)$
- $\alpha\, u = (\alpha u_1,\ \ \alpha u_2, \dots,\ \ \alpha u_n)$

O conjunto $\mathbb{R}^n$ munido destas duas operações é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

2) Considere o conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \;/\; x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, defina:

- $u + v = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2, \dots ,\ u_n + v_n)$
- $\alpha\, u = (\alpha u_1,\ \alpha u_2, \dots ,\ \alpha u_n)$

O conjunto $\mathbb{R}^n$ munido destas duas operações é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

De fato,

A1) $u + v = (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n)$

$$= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

Pois vale a comutativa na adição de números reais

$$= (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n)$$

$$= (v_1, \dots, v_n) + (u_1, \dots, u_n)$$

$$= v + u$$

Basta verificar as demais propriedades...

3) O conjunto $M(m, n)$ das matrizes de ordem $m \times n$ munido das operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de matriz por um escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

3) O conjunto $M(m, n)$ das matrizes de ordem $m \times n$ munido das operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de matriz por um escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Vamos considerar o conjunto $M(2,2)$. Neste caso,

$$A1)\ A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Pois vale a comutativa na adição de números reais

$$= \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= B + A$$

Basta verificar as demais propriedades...

Segue análogo para $M(m, n)$.

4) O conjunto P_n dos polinômios com coeficientes reais e de grau menor ou igual a n (incluindo o polinômio nulo) munido das operações usuais de adição de polinômios e multiplicação de um polinômio por um escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

4) O conjunto P_n dos polinômios com coeficientes reais e de grau menor ou igual a n (incluindo o polinômio nulo) munido das operações usuais de adição de polinômios e multiplicação de um polinômio por um escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Vamos considerar o conjunto P_2. Neste caso,

A1) $p + q = (a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2)$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

$$= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2$$

Pois vale a comutativa na adição de números reais

$$= (b_0 + b_1x + b_2x^2) + (a_0 + a_1x + a_2x^2)$$

$$= q + p$$

Basta verificar as demais propriedades...

Segue análogo para P_n.

Atenção! Nem sempre as operações de adição e multiplicação por escalar são as usuais.

Atenção! Nem sempre as operações de adição e multiplicação por escalar são as usuais.

Exemplo: O espaço $\mathbb{R}^2$ com as operações

$$(u_1, u_2) \oplus (v_1, v_2) = (u_1 v_1, u_2 v_2)$$

$$\alpha \odot (u_1, u_2) = (\alpha u_1, u_2)$$

continua sendo um espaço vetorial?

Atenção! Nem sempre as operações de adição e multiplicação por escalar são as usuais.

Exemplo: O espaço $\mathbb{R}^2$ com as operações $(u_1, u_2) \oplus (v_1, v_2) = (u_1 v_1, u_2 v_2)$

$$\alpha \odot (u_1, u_2) = (\alpha u_1, u_2)$$

continua sendo um espaço vetorial?

Precisamos verificar as oito propriedades da definição:

A1) $(u_1, u_2) \oplus (v_1, v_2) = (u_1 v_1, u_2 v_2) = (v_1 u_1, v_2 u_2) = (v_1, v_2) \oplus (u_1, u_2)$

Logo, a propriedade A1) é satisfeita. Vamos verificar a propriedade M2)

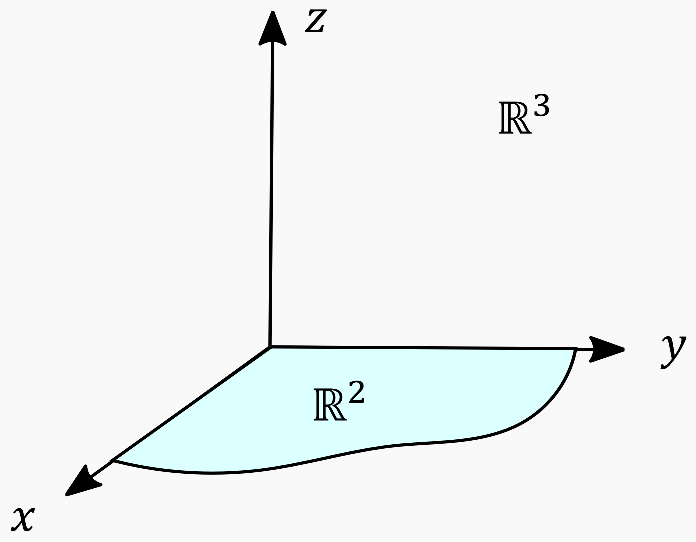
M2) $(\alpha + \beta) \odot (u_1, u_2) = ((\alpha + \beta) u_1, u_2)$*. Por outro lado,*

$\alpha \odot (u_1, u_2) \oplus \beta \odot (u_1, u_2) = (\alpha u_1, u_2) \oplus (\beta u_1, u_2) = (\alpha \beta u_1^2, u_2^2)$.

Logo, $(\alpha + \beta) \odot (u_1, u_2) \neq \alpha \odot (u_1, u_2) \oplus \beta \odot (u_1, u_2)$ *e a propriedade M2) não se verifica. Portanto,* $\mathbb{R}^2$ *munido destas operações não é um espaço vetorial, pois não satisfaz todas as propriedades da definição.*

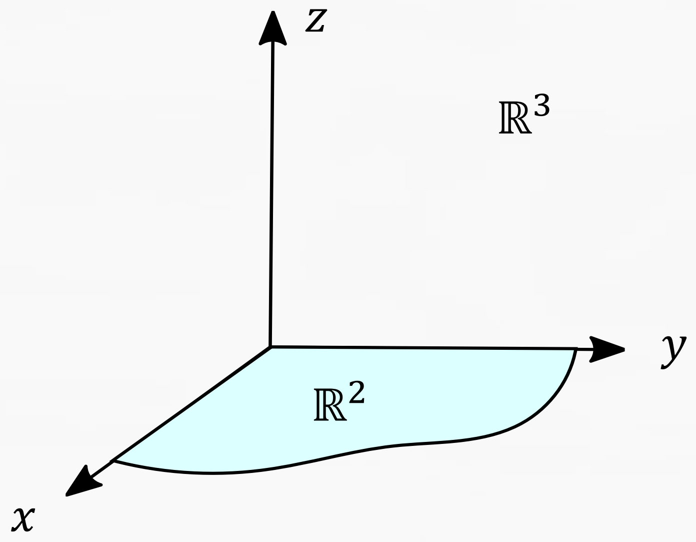
Subespaços Vetoriais

- Às vezes, é possível detectar, dentro de um espaço vetorial, subconjuntos que são eles próprios espaços vetoriais.



Subespaços Vetoriais

- Às vezes, é possível detectar, dentro de um espaço vetorial, subconjuntos que são eles próprios espaços vetoriais.



- Tais conjuntos são chamados de **subespaços vetoriais**.

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um ***subespaço vetorial*** de V é um subconjunto não-vazio $W \subset V$ tal que:

i) dados $u, v \in W$, então $u + v \in W$;

ii) dado $u \in W$, então $\alpha\, u \in W$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um ***subespaço vetorial*** de V é um subconjunto não-vazio $W \subset V$ tal que:

i) dados $u, v \in W$, então $u + v \in W$;

ii) dado $u \in W$, então $\alpha\, u \in W$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observações:

1) W é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um ***subespaço vetorial*** de V é um subconjunto não-vazio $W \subset V$ tal que:

i) dados $u, v \in W$, então $u + v \in W$;

ii) dado $u \in W$, então $\alpha\, u \in W$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observações:

1) W é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

2) Podemos mostrar que se W é um subespaço vetorial de V, então $\mathbf{0} \in W$.

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um ***subespaço vetorial*** de V é um subconjunto não-vazio $W \subset V$ tal que:

i) dados $u, v \in W$, então $u + v \in W$;

ii) dado $u \in W$, então $\alpha\, u \in W$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observações:

1) W é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

2) Podemos mostrar que se W é um subespaço vetorial de V, então $\mathbf{0} \in W$.

3) Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços vetoriais: o conjunto $\{\mathbf{0}\}$ e o próprio V (***subespaços triviais***). Os demais subespaços vetoriais de V, caso existam, são denominados ***subespaços próprios*** de V.

Exemplo: Em cada um dos casos abaixo, verifique se W é subespaço vetorial do espaço vetorial V.

a) $V = \mathbb{R}^2, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 2x\}$

Exemplo: Em cada um dos casos abaixo, verifique se W é subespaço vetorial do espaço vetorial V.

a) $V = \mathbb{R}^2, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 2x\}$ Note que se $v = (x, y) \in W$, então $v = (x, 2x)$

Temos que $(0, 0) \in W$, *pois se* $x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 = 0.$

Dados $u = (x_1, 2x_1), v = (x_2, 2x_2) \in W$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *temos:*

i) $u + v = (x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) =$

$$= \big(\underbrace{x_1 + x_2}_{x}, \underbrace{2(x_1 + x_2)}_{2x}\big) \in W$$

ii) $\alpha u = \alpha(x_1, 2x_1) = (\underbrace{\alpha x_1}_{x}, \underbrace{2\alpha x_1}_{2x}) \in W$

Logo, W *é um subespaço vetorial de* V.

b) $V = \mathbb{R}^2, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x + 1\}$

b) $V = \mathbb{R}^2, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x + 1\}$

Note que se $v = (x, y) \in W$, então $v = (x, x + 1)$

Note que $(0, 0) \notin W$, *pois se* $x = 0 \Rightarrow y = 1$.

Logo, pela observação 2, segue que W *não é subespaço vetorial de* V.

b) $V = \mathbb{R}^2, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = x + 1\}$

Note que se $v = (x, y) \in W$, então $v = (x, x + 1)$

Note que $(0, 0) \notin W$, *pois se* $x = 0 \Rightarrow y = 1$.

Logo, pela observação 2, segue que W *não é subespaço vetorial de* V.

Atenção! Somente o fato de $\mathbf{0} \in W$ não significa que W seja subespaço vetorial de V.

b) $V = \mathbb{R}^2, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x + 1\}$

Note que se $v = (x, y) \in W$, então $v = (x, x + 1)$

Note que $(0, 0) \notin W$, *pois se* $x = 0 \Rightarrow y = 1$.

Logo, pela observação 2, segue que W *não é subespaço vetorial de* V.

Atenção! Somente o fato de $\mathbf{0} \in W$ não significa que W seja subespaço vetorial de V.

Exemplo: Considere $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x^2\}$. Note que $(0, 0) \in W$, porém podemos mostrar que W não é subespaço vetorial de V.

De fato, dados $u = (x_1, x_1^2), v = (x_2, x_2^2) \in W$, *temos:*

i) $u + v = (x_1, x_1^2) + (x_2, x_2^2) = (x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2) \notin W$, *pois, dependendo dos*

valores de x_1 *e* x_2, *temos* $x_1^2 + x_2^2 \neq (x_1 + x_2)^2$

b) $V = \mathbb{R}^2, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x + 1\}$

Note que se $v = (x, y) \in W$, então $v = (x, x + 1)$

Note que $(0, 0) \notin W$, pois se $x = 0 \Rightarrow y = 1$.

Logo, pela observação 2, segue que W não é subespaço vetorial de V.

Atenção! Somente o fato de $\mathbf{0} \in W$ não significa que W seja subespaço vetorial de V.

Note que se $v = (x, y) \in W$, então $v = (x, x^2)$

Exemplo: Considere $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x^2\}$. Note que $(0, 0) \in W$, porém podemos mostrar que W não é subespaço vetorial de V.

De fato, dados $u = (x_1, x_1^2), v = (x_2, x_2^2) \in W$, temos:

i) $u + v = (x_1, x_1^2) + (x_2, x_2^2) = (\underbrace{x_1 + x_2}_{x}, x_1^2 + x_2^2) \notin W$, pois, dependendo dos

$x \Rightarrow x^2 = (x_1 + x_2)^2$

valores de x_1 e x_2, temos $x_1^2 + x_2^2 \neq (x_1 + x_2)^2$

Combinação Linear

Definição: Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, $\mathrm{A} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Então, o vetor

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

é um elemento de V o qual chamamos ***combinação linear*** de A (ou dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$).

Combinação Linear

Definição: Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, $\text{A} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Então, o vetor

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

é um elemento de V o qual chamamos ***combinação linear*** de A (ou dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$).

Exemplos:

1) No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o vetor $v = (-7, -15, 22)$ é uma combinação linear dos vetores $v_1 = (2, -3, 4)$ e $v_2 = (5, 1, -2)$.

De fato, $v = 4\, v_1 - 3\, v_2$.

2) No espaço M(2,2), a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma combinação linear das matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

De fato, $A = 2A_1 + A_2 + 3A_3$.

Subespaços gerados

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Consideremos um subconjunto $\mathrm{A} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, $A \neq \emptyset$. O conjunto S de todos os vetores de V que podem ser escritos como combinações lineares dos vetores de A, é um subespaço vetorial de V chamado ***subespaço gerado*** por A (ou pelos vetores $v_1, \dots, v_n$).

Subespaços gerados

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Consideremos um subconjunto $\mathrm{A} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, $A \neq \emptyset$. O conjunto S de todos os vetores de V que podem ser escritos como combinações lineares dos vetores de A, é um subespaço vetorial de V chamado ***subespaço gerado*** por A (ou pelos vetores $v_1, \dots, v_n$).

Em símbolos: $S = \{v \in V \ / \ v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \text{com } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$

Subespaços gerados

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Consideremos um subconjunto $\mathrm{A} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, $A \neq \emptyset$. O conjunto S de todos os vetores de V que podem ser escritos como combinações lineares dos vetores de A, é um subespaço vetorial de V chamado ***subespaço gerado*** por A (ou pelos vetores $v_1, \dots, v_n$).

Em símbolos: $S = \{v \in V \ / \ v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \text{com } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$

Os vetores $v_1, \dots, v_n$ são chamados de ***geradores*** do subespaço S.

Subespaços gerados

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Consideremos um subconjunto $\text{A} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, $A \neq \emptyset$. O conjunto S de todos os vetores de V que podem ser escritos como combinações lineares dos vetores de A, é um subespaço vetorial de V chamado ***subespaço gerado*** por A (ou pelos vetores $v_1, \dots, v_n$).

Em símbolos: $S = \{v \in V \ / \ v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \text{com } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$

Os vetores $v_1, \dots, v_n$ são chamados de ***geradores*** do subespaço S.

Notação: $S = [v_1, \dots, v_n]$ ou $S = [A]$.

Subespaços gerados

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Consideremos um subconjunto $\text{A} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, $A \neq \emptyset$. O conjunto S de todos os vetores de V que podem ser escritos como combinações lineares dos vetores de A, é um subespaço vetorial de V chamado ***subespaço gerado*** por A (ou pelos vetores $v_1, \dots, v_n$).

Em símbolos: $S = \{v \in V \ / \ v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \text{com } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$

Os vetores $v_1, \dots, v_n$ são chamados de ***geradores*** do subespaço S.

Notação: $S = [v_1, \dots, v_n]$ ou $S = [A]$.

Observação: Por convenção adota-se $[\emptyset] = \{\mathbf{0}\}$.

Exemplos:

1) Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Exemplos:

1) Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Temos que mostrar que qualquer vetor do $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores e_1 e e_2. De fato, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (arbitrário), temos que

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe_1 + ye_2.$$

Logo, $[e_1, e_2] = \mathbb{R}^2$.

2) O conjunto $A = \{(3,1),(5,2)\}$ gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

2) O conjunto $A = \{(3,1), (5,2)\}$ gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

De fato, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, podemos que mostrar que existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(x, y) = \alpha_1(3, 1) + \alpha_2(5, 2)$$

2) O conjunto $A = \{(3,1), (5,2)\}$ gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

De fato, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, podemos que mostrar que existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(x, y) = \alpha_1(3, 1) + \alpha_2(5, 2) \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (3\alpha_1 + 5\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2)$$

Pela igualdade de vetores, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 5\alpha_2 = x \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = y \end{cases}$$

onde α_1 e α_2 são as incógnitas. Resolvendo o sistema acima em função de x e y, obtemos: $\alpha_1 = 2x - 5y$ e $\alpha_2 = -x + 3y$.

Logo, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, podemos escrever:

$$(x, y) = \underbrace{(2x - 5y)}_{\alpha_1} \cdot \underbrace{(3, 1)}_{v_1} + \underbrace{(-x + 3y)}_{\alpha_2} \cdot \underbrace{(5, 2)}_{v_2}.$$

Portanto, $[A] = \mathbb{R}^2$.

3) Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determine o subespaço gerado pelo conjunto $A = \{v_1, v_2\}$, sendo $v_1 = (1, -2, -1)$ e $v_2 = (2,1,1)$.

3) Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determine o subespaço gerado pelo conjunto $A = \{v_1, v_2\}$, sendo $v_1 = (1, -2, -1)$ e $v_2 = (2,1,1)$.

Temos que:

$$[A] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x, y, z) = \alpha_1(1, -2, -1) + \alpha_2(2,1,1),\ \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

Da igualdade acima, obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = x \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 = y \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = z \end{cases}$$

onde α_1 e α_2 são as incógnitas.

3) Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determine o subespaço gerado pelo conjunto $A = \{v_1, v_2\}$, sendo $v_1 = (1,-2,-1)$ e $v_2 = (2,1,1)$.

Temos que:

$$[A] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; (x,y,z) = \alpha_1(1,-2,-1) + \alpha_2(2,1,1),\;\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

Da igualdade acima, obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = x \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 = y \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = z \end{cases}$$

onde α_1 e α_2 são as incógnitas. Escalonando o sistema acima:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = x & (2) \quad (1) \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 = y \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = z \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = x \\ 5\alpha_2 = 2x + y & (3) \\ 3\alpha_2 = x + z & (-5) \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = x \\ 15\alpha_2 = 6x + 3y & (1) \\ -15\alpha_2 = -5x - 5z \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = x \\ 15\alpha_2 = 6x + 3y \\ 0\alpha_2 = x + 3y - 5z \end{cases}$$

$O\ sistema\ anterior\ tem\ solução\ apenas\ se\ x + 3y - 5z = 0.$

$Portanto,\ [A] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x + 3y - 5z = 0\}.$

O sistema anterior tem solução apenas se $x + 3y - 5z = 0$.

Portanto, $[A] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 3y - 5z = 0\}$.

Definição: Um espaço vetorial V é ***finitamente gerado*** se existe um conjunto finito A, $A \subset V$, tal que $V = [A]$.

Os espaços $\mathbb{R}^n$, $M(m, n)$ e P_n são exemplos de espaços finitamente gerados.

Referências bibliográficas

- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. ***Álgebra Linear***. 2 ed. São Paulo – SP: Pearson Makron Books, 1987.

- BOLDRINI, José Luiz; *et al*. ***Álgebra Linear***. 3 ed. São Paulo – SP: Harbra, 1986.

- CALLIOLI, Carlos A.; *et al*. ***Álgebra Linear e Aplicações***. 6 ed. rev. São Paulo – SP: Atual, 1993.

- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. ***Introdução à Álgebra Linear***. 1 ed. São Paulo – SP: Pearson Education do Brasil, 1997.