EXEMPLO 6 Uma loja tem vendido 200 aparelhos de televisores de tela plana por semana a $ 350 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada $ 10 de desconto oferecido aos compradores, o número de TVs vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a função demanda e a função receita. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para maximizar sua receita?

SOLUÇÃO Se x for o número de TVs vendidos por semana, então o aumento semanal nas vendas será $x - 200$. Para cada aumento de 20 unidades vendidas, o preço cai em $ 10. Portanto, para cada unidade adicional vendida, o decréscimo no preço será $\frac{1}{20} \times 10$ e a função demanda será

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}x$$

A função receita é

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Como $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ quando $x = 450$. Este valor de x dá um máximo absoluto pelo Teste da Primeira Derivada (ou simplesmente observando que o gráfico de R é uma parábola com concavidade para baixo). O preço correspondente é

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

e o desconto é $350 - 225 = 125$. Portanto, para maximizar a receita, a loja deveria oferecer um desconto de $ 125.

4.7 Exercícios

1. Considere o seguinte problema: encontre dois números cuja soma seja 23 e cujo produto seja máximo.
   (a) Faça uma tabela de valores, como a mostrada a seguir, tal que a soma dos números nas duas primeiras colunas seja sempre 23. Com base na evidência mostrada em sua tabela, estime a resposta para o problema.

Primeiro número	Segundo número	Produto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
⋮	⋮	⋮

   (b) Use o cálculo para resolver o problema e compare com sua resposta da parte (a).

2. Encontre dois números cuja diferença seja 100 e cujo produto seja mínimo.

3. Encontre dois números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.

4. A soma de dois números positivos é 16. Qual é o menor valor possível para a soma de seus quadrados?

5. Qual é a distância vertical máxima entre a reta $y = x + 2$ e a parábola $y = x^2$ para $-1 \leq x \leq 2$?

6. Qual é a distância vertical mínima entre as parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = x - x^2$?

7. Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro de 100 m cuja área seja a maior possível.

8. Encontre as dimensões de um retângulo com área de 1 000 m² cujo perímetro seja o menor possível.

9. Um modelo usado para a produção Y de uma colheita agrícola como função do nível de nitrogênio N no solo (medido em unidades apropriadas) é

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

onde k é uma constante positiva. Que nível de nitrogênio dá a melhor produção?

10. A taxa (em mg de carbono/m³/h) na qual a fotossíntese ocorre para uma espécie de fitoplâncton é modelada pela função

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

em que I é a intensidade da luz (medida em milhares de velas). Para qual intensidade de luz P é máximo?

11. Considere o seguinte problema: um fazendeiro com 300 m de cerca quer cercar uma área retangular e então dividi-la em quatro partes com cercas paralelas a um lado do retângulo. Qual é a maior área total possível das quatro partes?

(a) Faça vários diagramas ilustrando a situação, alguns com divisões rasas e largas e alguns com divisões profundas e estreitas. Encontre as áreas totais dessas configurações. Parece que existe uma área máxima? Se a resposta for sim, estime-a.

(b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza uma notação e marque no diagrama seus símbolos.

(c) Escreva uma expressão para a área total.

(d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.

(e) Use a parte (d) para escrever a área total como uma função de uma variável.

(f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

12. Considere o seguinte problema: uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço quadrado de papelão, com 3 metros de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa poderá ter.

(a) Faça vários diagramas para ilustrar a situação, algumas caixas baixas com bases grandes e outras altas com bases pequenas. Encontre os volumes de várias dessas caixas. Parece existir um volume máximo? Se a resposta for sim, estime-o.

(b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza uma notação e marque no diagrama seus símbolos.

(c) Escreva uma expressão para o volume.

(d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.

(e) Use a parte (d) para escrever o volume como uma função de uma só variável.

(f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

13. Um fazendeiro quer cercar uma área de 15 000 m^2 em um campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma que minimize o custo da cerca?

14. Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem volume de 32 000 cm^3. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado.

15. Se 1 200 cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.

16. Um contêiner para estocagem retangular com uma tampa aberta deve ter um volume de 10 m^3. O comprimento de sua base é o dobro da largura. O material para a base custa \$ 10 por metro quadrado. O material para os lados custa \$ 6 por metro quadrado. Encontre o custo dos materiais para o mais barato desses contêineres.

17. Faça o Exercício 16 supondo que o contêiner tenha uma tampa feita do mesmo material usado nos lados.

18. Um fazendeiro quer uma cerca em um lote retangular de terra adjacente à parede norte de seu celeiro. Nenhuma cerca é necessária ao longo do celeiro e a cerca ao longo do lado oeste do lote é compartilhada com um vizinho que vai dividir o custo daquela parte da cerca. Se a cerca custa \$ 30 por metro linear para instalar e o fazendeiro não está disposto a gastar mais do que \$ 1.800, encontre as dimensões do lote que englobaria a maior área.

19. Se o fazendeiro no Exercício 18 quiser englobar 150 metros quadrados de terra, que dimensões minimizarão o custo da cerca?

20. (a) Mostre que, de todos os retângulos com uma dada área, aquele com o menor perímetro é um quadrado.

(b) Mostre que, de todos os retângulos com um dado perímetro, aquele com a maior área é um quadrado.

21. Encontre o ponto sobre a reta $y = 2x + 3$ que está mais próximo da origem.

22. Encontre o ponto sobre a curva $y = \sqrt{x}$ que está mais próximo do ponto (3, 0).

23. Encontre os pontos sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estão mais distantes do ponto (1, 0).

24. Encontre, com precisão de duas casas decimais, as coordenadas do ponto na curva $y = \operatorname{sen} x$ que está mais próximo do ponto (4, 2).

25. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

26. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

27. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um triângulo equilátero com lado L se um dos lados do retângulo estiver sobre a base do triângulo.

28. Encontre a área do maior trapézio que pode ser inscrito num círculo com raio 1 e cuja base é o diâmetro do círculo.

29. Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

30. Se os dois lados iguais de um triângulo isósceles têm comprimento a, encontre o comprimento do terceiro lado que maximize a área do triângulo.

31. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre o maior volume possível para este cilindro.

32. Um cilindro circular reto é inscrito em um cone com altura h e raio da base r. Encontre o maior volume possível para este cilindro.

33. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre a maior área de superfície possível para este cilindro.

34. Uma janela normanda tem a forma de um retângulo tendo em cima um semicírculo. (O diâmetro do semicírculo é igual à largura do retângulo. Veja o Exercício 62 da Seção 1.1.) Se o perímetro da janela for 10 m, encontre as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.

35. As margens superiores e inferiores de um pôster têm 6 cm e cada margem lateral tem 4 cm. Se a área do material impresso no pôster é de 384 cm^2, encontre as dimensões do pôster com a menor área.

36. Um pôster deve ter uma área de 900 cm^2 com uma margem de 3 cm na base e nos lados, e uma margem de 5 cm em cima. Que dimensões darão a maior área impressa?

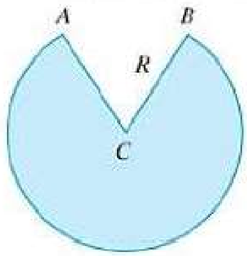
37. Um pedaço de fio com 10 m de comprimento é cortado em duas partes. Uma parte é dobrada no formato de um quadrado, ao passo que a outra é dobrada na forma de um triângulo equilátero. Como deve ser cortado o fio de forma que a área total englobada seja: (a) máxima? (b) mínima?

38. Responda o Exercício 37 se um pedaço estiver dobrado no formato de um quadrado e o outro no formato de um círculo.

39. Se lhe for oferecida uma fatia de uma pizza redonda (em outras palavras, um setor de um círculo) e a fatia precisar ter um perímetro de 60 cm, qual diâmetro da pizza vai recompensá-lo com a maior fatia?

40. Uma cerca de 2 m de altura corre paralela a um edifício alto, a uma distância de 1 m do edifício. Qual o comprimento da menor escada que se apoie no chão e na parede do prédio, por cima da cerca?

41. Um copo com formato cônico é feito de um pedaço circular de papel de raio R cortando fora um setor e juntando os lados CA e CB. Encontre a capacidade máxima de tal copo.



42. Um copo de papel em forma de cone é feito de maneira a conter 27 cm³ de água. Ache a altura e o raio do copo que usa a menor quantidade possível de papel.

43. Um cone com altura h está inscrito em outro cone maior com altura H, de forma que seu vértice esteja no centro da base do cone maior. Mostre que o cone interno tem seu volume máximo quando $h = \frac{1}{3}H$.

44. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu m g}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

onde μ é uma constante chamada coeficiente de atrito. Para qual valor de θ é F mínima?

45. Se um resistor de R ohms estiver ligado a uma pilha de E volts com resistência interna de r ohms, então a potência (em watts) no resistor externo é

$$P = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}$$

Se E e r forem fixados, mas R variar, qual é o valor máximo da potência?

46. Para um peixe nadando a uma velocidade v em relação à água, a energia gasta por unidade de tempo é proporcional a v^3. Acredita-se que os peixes migratórios tentam minimizar a energia total necessária para nadar uma distância fixa. Se o peixe estiver nadando contra uma corrente u ($u < v$), então o tempo necessário para nadar uma distância L é $L/(v - u)$ e a energia total E requerida para nadar a distância é dada por

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v - u}$$

onde a é uma constante de proporcionalidade.

(a) Determine o valor de v que minimiza E.

(b) Esboce o gráfico de E.

Observação: Esse resultado foi verificado experimentalmente; peixes migratórios nadam contra a corrente a uma velocidade 50% maior que a velocidade da corrente.

47. Em uma colmeia, cada alvéolo é um prisma hexagonal regular, aberto em uma extremidade com um ângulo triédrico na outra extremidade. Acredita-se que as abelhas formam esses alvéolos de modo a minimizar a área da superfície, para um dado comprimento do lado e uma dada altura, usando assim uma quantidade mínima de cera na construção. O exame desses alvéolos mostrou que a medida do ângulo do ápice θ é surpreendentemente consistente. Baseado na geometria do alvéolo, pode ser mostrado que a área da superfície S é dada por

$$S = 6sh - \tfrac{3}{2}s^2 \operatorname{cotg} \theta + \left(3s^2\sqrt{3}/2\right) \operatorname{cossec} \theta,$$

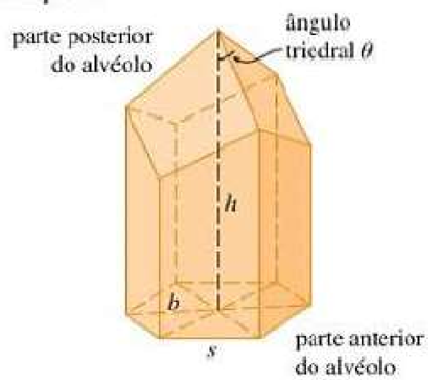
onde s, o comprimento dos lados do hexágono, e h, a altura, são constantes.

(a) Calcule $dS/d\theta$.

(b) Que ângulo as abelhas deveriam preferir?

(c) Determine a área da superfície mínima do alvéolo (em termos de s e h).

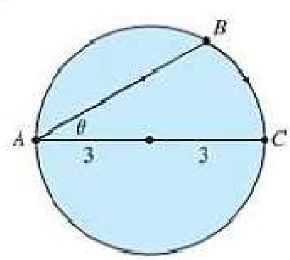
Observação: Medidas reais do ângulo θ em colmeias foram feitas, e as medidas desses ângulos raramente diferem do valor calculado em mais que 2°.



48. Um barco deixa as docas às 14 h e viaja para o sul com velocidade de 20 km/h. Outro barco estava rumando leste a 15 km/h e alcança a mesma doca às 15 h. Em que momento os dois botes estavam mais próximos um do outro?

49. Resolva o problema no Exemplo 4 se o rio tiver 5 km de largura e o ponto B estiver somente a 5 km de A rio abaixo.

50. Uma mulher em um ponto A na praia de um lago circular com raio de 3 km quer chegar no ponto C diametralmente oposto a A do outro lado do lago no menor tempo possível (veja a figura). Ela pode andar a uma taxa de 6 km/h e remar um bote a 3 km/h. Como ela deve proceder?



51. Uma refinaria de petróleo está localizada na margem norte de um rio reto que tem 2 km de largura. Um oleoduto deve ser construído da refinaria até um tanque de armazenamento localizado na margem sul do rio, 6 km a leste da refinaria. O custo de construção do oleoduto é \$ 400.000/km sobre a terra, até um ponto P na margem norte e \$ 800.000/km sob o rio até o tanque. Onde P deveria estar localizado para minimizar o custo do oleoduto?

52. Suponha que a refinaria do Exercício 51 esteja localizada 1 km ao norte do rio. Onde P deveria estar situado?

53. A iluminação de um objeto por uma fonte de luz é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte. Se duas fontes de luz, uma três vezes mais forte que a outra, são colocadas a 4 m de distância, onde deve ser colocado o objeto sobre a reta entre as fontes de forma a receber o mínimo de iluminação?

54. Encontre uma equação da reta que passa pelo ponto $(3, 5)$ e que delimita a menor área no primeiro quadrante.

55. Sejam a e b números positivos. Ache o comprimento do menor segmento de reta que é cortado pelo primeiro quadrante e passa pelo ponto (a, b).

56. Em quais pontos da curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ a reta tangente tem a sua maior inclinação?

57. Qual é o menor comprimento de um segmento de reta que é cortado pelo primeiro quadrante e é tangente à curva $y = 3/x$ em algum ponto?

58. Qual é a menor área de um triângulo que é cortado pelo primeiro quadrante e cuja hipotenusa é tangente à parábola $y = 4 - x^2$ em algum ponto?

59. (a) Se $C(x)$ for o custo para produzir x unidades de uma mercadoria, então o **custo médio** por unidade é $c(x) = C(x)/x$. Mostre que se o custo médio for mínimo, então o custo marginal é igual ao custo médio.

(b) Se $C(x) = 16\,000 + 200x + 4x^{3/2}$, em dólares, encontre (i) o custo, o custo médio e o custo marginal no nível de produção de 1 000 unidades; (ii) o nível de produção que minimizará o custo médio; e (iii) o custo médio mínimo.

60. (a) Mostre que se o lucro $P(x)$ for máximo, então a receita marginal é igual ao custo marginal.

(b) Se $C(x) = 16\,000 + 500x - 1{,}6x^2 + 0{,}004x^3$ for a função custo e $p(x) = 1\,700 - 7x$ a função demanda, encontre o nível de produção que maximiza o lucro.

61. Um time de beisebol joga em um estádio com capacidade para 55 000 espectadores. Com o preço do ingresso a \$ 10, a média de público tem sido de 27 000. Quando os ingressos abaixaram para \$ 8, a média de público subiu para 33 000.

(a) Encontre a função demanda, supondo que ela seja linear.

(b) Qual deveria ser o preço dos ingressos para maximizar a receita?

62. Durante os meses de verão, Terry faz e vende colares na praia. No verão passado, ele vendeu os colares por \$ 10 cada e suas vendas eram em média de 20 por dia. Quando ele aumentou o preço \$ 1, descobriu que a média diminuiu em duas vendas por dia.

(a) Encontre a função de demanda, supondo que ela seja linear.

(b) Se o material de cada colar custa a Terry \$ 6, qual deveria ser o preço de venda para maximizar seu lucro?

63. Um varejista tem vendido 1 200 tablets por semana a \$ 350 cada. O departamento de marketing estima que seriam vendidos 80 tablets adicionais por semana para cada \$ 10 reduzidos no preço.

(a) Encontre a função demanda.

(b) Qual deveria ser o preço fixado para maximizar a receita?

(c) Se a função custo semanal do varejista for

$$C(x) = 35.000 + 120x$$

qual preço deveria ser escolhido para maximizar seu lucro?

64. Uma companhia opera 16 poços de petróleo em uma área designada. Cada bomba, em média, extrai 240 barris de petróleo por dia. A companhia pode adicionar mais poços, mas cada poço adicional reduz a saída diária média de cada um dos poços de 8 barris. Quantos poços a companhia deveria adicionar para maximizar a produção diária?

65. Mostre que, de todos os triângulos isósceles com um dado perímetro, aquele que tem a maior área é o equilátero.

66. Considere a situação do Exercício 51, quando o custo de colocar tubos sob o rio for consideravelmente maior que o custo de colocar tubos sobre a terra (\$ 400.000/km). Você pode suspeitar que em alguns casos, a distância mínima sob o rio deveria ser usada e P deveria estar localizada a 6 km da refinaria, diretamente na margem oposta aos tanques de armazenamento. Mostre que esse nunca é o caso, não importando quanto é o custo "sob o rio".

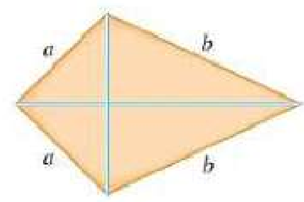
67. Considere a reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no ponto (p, q) do primeiro quadrante.

(a) Mostre que a reta tangente tem a intersecção com o eixo x em a^2/p e a intersecção com o eixo y em b^2/q.

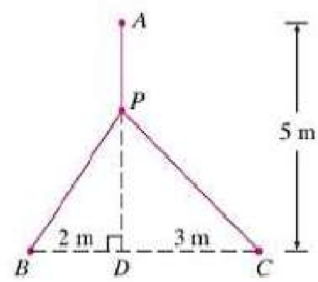
(b) Mostre que a parte da reta tangente cortada pelos eixos coordenados tem comprimento mínimo $a + b$.

(c) Mostre que o triângulo formado pela reta tangente e pelos eixos coordenados tem área mínima ab.

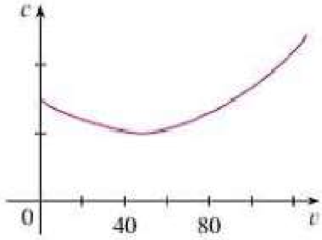
SCA **68.** A moldura para uma pipa é feita com seis pedaços de madeira. Os quatro pedaços externos foram cortados com os comprimentos indicados na figura. Para maximizar a área da pipa, de que tamanho devem ser os pedaços diagonais?



69. Um ponto P precisa ser localizado em algum ponto sobre a reta AD de forma que o comprimento total L de fios ligando P aos pontos A, B e C seja minimizado (veja a figura). Expresse L como uma função de $x = |AP|$ e use os gráficos de L e dL/dx para estimar o valor mínimo de L.



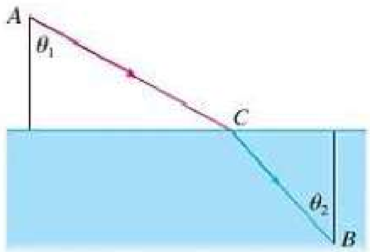
70. O gráfico mostra o consumo de combustível c de um carro (medido em litros/hora) como uma função da velocidade v do carro. Em velocidade muito baixa, o motor não rende bem; assim, inicialmente c decresce à medida que a velocidade cresce. Mas em alta velocidade o consumo cresce. Você pode ver que $c(v)$ é minimizado para esse carro quando $v \approx 48$ km/h. Porém, para a eficiência do combustível, o que deve ser minimizado não é o consumo em litros/hora, mas, em vez disso, o consumo de combustível em litros *por quilômetro*. Vamos chamar esse consumo de G. Usando o gráfico, estime a velocidade na qual G tem seu valor mínimo.



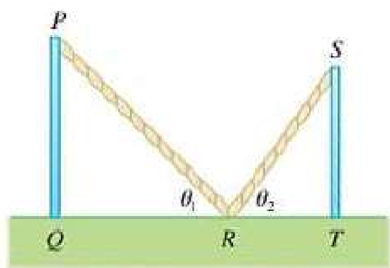
71. Seja v_1 a velocidade da luz no ar e v_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o Princípio de Fermat, um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

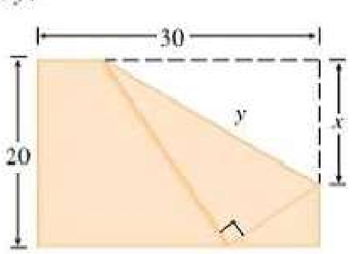
onde θ_1 (o ângulo de incidência) e θ_2 (o ângulo de refração) são conforme mostrados. Essa equação é conhecida como a Lei de Snell.



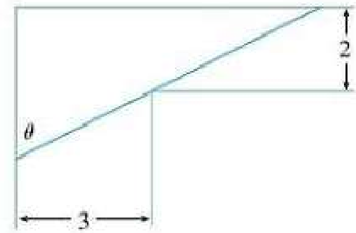
72. Dois postes verticais PQ e ST são amarrados por uma corda PRS que vai do topo do primeiro poste para um ponto R no chão entre os postes e então até o topo do segundo poste, como na figura. Mostre que o menor comprimento de tal corda ocorre quando $\theta_1 = \theta_2$.



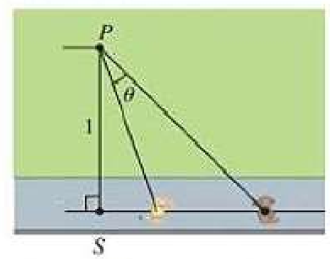
73. O canto superior direito de um pedaço de papel com 30 cm de largura por 20 cm de comprimento é dobrado sobre o lado inferior, como na figura. Como você dobraria de forma a minimizar o comprimento da dobra? Em outras palavras, como você escolheria x para minimizar y?



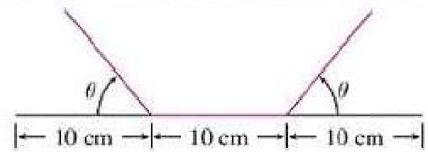
74. Um cano de metal está sendo carregado através de um corredor com 3 m de largura. No fim do corredor há uma curva em ângulo reto, passando-se para um corredor com 2 m de largura. Qual é o comprimento do cano mais longo que pode ser carregado horizontalmente em torno do canto?



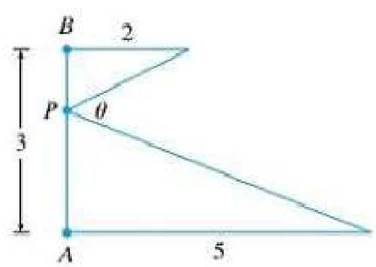
75. Um observador permanece em um ponto P, distante uma unidade de uma pista. Dois corredores iniciam no ponto S da figura e correm ao longo da pista. Um corredor corre três vezes mais rápido que o outro. Encontre o valor máximo do ângulo θ de visão do observador entre os corredores.



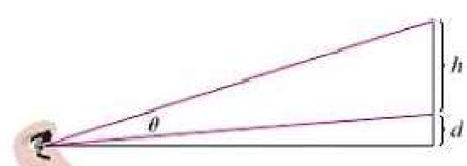
76. Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30 cm dobrando-se para cima 1/3 da folha de cada lado, fazendo um ângulo θ com a horizontal. Como θ deve ser escolhido para que a calha carregue a maior quantidade de água possível?



77. Como deve ser escolhido o ponto P sobre o segmento AB de forma a maximizar o ângulo θ?



78. Uma pintura em uma galeria de arte tem altura h e está pendurada de forma que o lado de baixo está a uma distância d acima do olho de um observador (como na figura). A que distância da parede deve ficar o observador para obter a melhor visão? (Em outras palavras, onde deve ficar o observador de forma a maximizar o ângulo θ subentendido em seu olho pela pintura?)

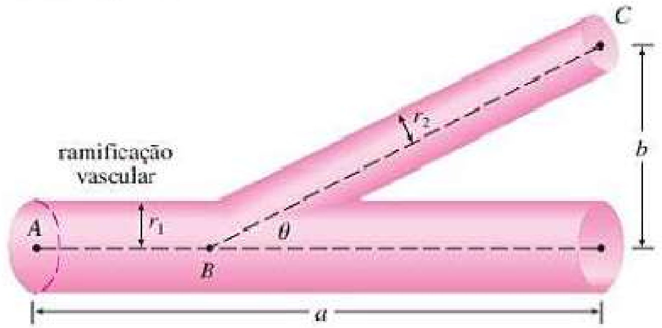


79. Encontre a área máxima do retângulo que pode ser circunscrito em torno de um dado retângulo com comprimento L e largura W. [*Dica*: Expresse a área como uma função do ângulo θ.]

80. O sistema vascular sanguíneo consiste em vasos sanguíneos (artérias, arteríolas, capilares e veias) que transportam o sangue do coração para os órgãos e de volta para o coração. Esse sistema deve trabalhar de forma a minimizar a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue. Em particular, essa energia é reduzida quando a resistência do sangue diminui. Uma das Leis de Poiseuille dá a resistência R do sangue como

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

onde L é o comprimento do vaso sanguíneo; r, o raio; e C é uma constante positiva determinada pela viscosidade do sangue. (Poiseuille estabeleceu essa lei experimentalmente, mas esta também segue a Equação 2 da Seção 8.4.) A figura mostra um vaso sanguíneo principal de raio r_1 ramificado em um ângulo θ em um vaso menor de raio r_2.



(a) Use a Lei de Poiseuille para mostrar que a resistência total do sangue ao longo do caminho ABC é

$$R = C\left(\frac{a - b\cot\theta}{r_1^4} + \frac{b\,\text{cossec}\,\theta}{r_2^4}\right)$$

onde a e b são as distâncias mostradas na figura.

(b) Demonstre que essa resistência é minimizada quando

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

(c) Encontre o ângulo ótimo de ramificação (com precisão de um grau) quando o raio do vaso sanguíneo menor é 2/3 do raio do vaso maior.

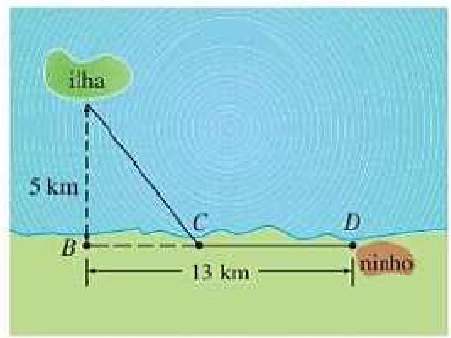
81. Ornitologistas determinaram que algumas espécies de pássaros tendem a evitar voos sobre largas extensões de água durante o dia. Acredita-se que é necessária mais energia para voar sobre a água que sobre a terra, pois o ar em geral sobe sobre a terra e desce sobre a água durante o dia. Um pássaro com essas tendências é solto de uma ilha que está a 5 km do ponto mais próximo B sobre uma praia reta, voa para um ponto C na praia e então voa ao longo da praia para a área de seu ninho em D. Suponha que o pássaro instintivamente escolha um caminho que vai minimizar seu gasto de energia. Os pontos B e D distam 13 km um do outro.

(a) Em geral, se é preciso 1,4 vez mais energia para voar sobre a água do que sobre a terra, para que ponto C o pássaro precisa voar para minimizar a energia total gasta no retorno ao ninho?

(b) Sejam W e L a energia (em joules) por quilômetro voado sobre a água e sobre a terra, respectivamente. Qual o significado, em termos do voo do pássaro, de grandes valores da razão W/L? O que significaria um valor pequeno? Determine a razão W/L correspondente ao mínimo dispêndio de energia.

(c) Qual deveria ser o valor de W/L a fim de que o pássaro voasse diretamente para seu ninho em D? Qual deveria ser o valor de W/L para o pássaro voar para B e então seguir ao longo da praia para D?

(d) Se os ornitologistas observarem que pássaros de certa espécie atingem a praia em um ponto a 4 km de B, quantas vezes mais energia será despendida por um pássaro para voar sobre a água que sobre a terra?



82. Duas fontes de luz de igual potência são colocadas a 10 m uma da outra. Um objeto deve ser colocado em um ponto P sobre uma reta ℓ paralela à reta que une as fontes de luz, situadas a uma distância de d metros desta (veja a figura). Queremos localizar P em ℓ de forma que a intensidade de iluminação seja minimizada. Precisamos usar o fato de que a intensidade de iluminação para uma única fonte é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte.

(a) Encontre uma expressão para a intensidade $I(x)$ em um ponto P.

(b) Se $d = 5$ m, use os gráficos de $I(x)$ e $I'(x)$ para mostrar que a intensidade é minimizada quando $x = 5$ m, isto é, quando P está no ponto médio de ℓ.

(c) Se $d = 10$ m, mostre que a intensidade (talvez surpreendentemente) *não* é minimizada no ponto médio.

(d) Entre $d = 5$ m e $d = 10$ m existe um valor de d no qual o ponto de iluminação mínima muda abruptamente. Estime esse valor de d por métodos gráficos. Encontre então o valor exato de d.