Universidade Tecnológica Federal do Paraná

UTFPR - Campus Apucarana

Departamento Acadêmico de Matemática

MÓDULO 1

Matrizes e determinantes (parte 1)

Curso: Engenharia Têxtil

Disciplina: Geometria Analítica e Álgebra Linear

Professor: Alisson C. Reinol

(2022-2)

Conteúdos

- Matrizes
- Tipos especiais de matrizes
- Operações com matrizes

Matrizes

- Considere os dados referentes a altura, peso e idade de um grupo de quatro pessoas dispostos na tabela abaixo:

	Altura (m)	**Peso (Kg)**	**Idade (anos)**
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

Matrizes

- Considere os dados referentes a altura, peso e idade de um grupo de quatro pessoas dispostos na tabela abaixo:

	Altura (m)	**Peso (Kg)**	**Idade (anos)**
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

- Ao abstrairmos os significados das linhas e colunas, obtemos uma matriz.

$$\begin{bmatrix} 1{,}70 & 70 & 23 \\ 1{,}75 & 60 & 45 \\ 1{,}60 & 52 & 25 \\ 1{,}81 & 72 & 30 \end{bmatrix}$$

Definição: Uma ***matriz A de ordem m por n*** é um quadro de $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Notação: $A_{m \times n}$ ou $A(m, n)$.

Definição: Uma ***matriz A de ordem m por n*** é um quadro de $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Notação: $A_{m \times n}$ ou $A(m, n)$.

Representação genérica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \left[a_{ij}\right]_{m \times \mathrm{n}}.$$

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ são chamados de ***elementos*** da matriz A.

- Usaremos sempre letras maiúsculas para denotar matrizes e, quando quisermos especificar a ordem de uma matriz A (isto é, o número de linhas e colunas), escreveremos $A_{m\times n}$. Além de colchetes, também são utilizados parênteses para representar matrizes.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

- Usaremos sempre letras maiúsculas para denotar matrizes e, quando quisermos especificar a ordem de uma matriz A (isto é, o número de linhas e colunas), escreveremos $A_{m\times n}$. Além de colchetes, também são utilizados parênteses para representar matrizes.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

- Os elementos de uma matriz podem ser números (reais ou complexos), funções, ou ainda outras matrizes.

Exemplos: $[1]$ $\begin{bmatrix} -3 & 2i \\ i & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2x & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix}$

i: unidade imaginária.

- Para localizar um elemento de uma matriz, dizemos a linha e a coluna (***nesta ordem***) em que ele está.

- Para localizar um elemento de uma matriz, dizemos a linha e a coluna (***nesta ordem***) em que ele está.

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

- Para localizar um elemento de uma matriz, dizemos a linha e a coluna (***nesta ordem***) em que ele está.

Exemplo: Considere a matriz

$$A = \begin{array}{cccc} & & \text{3ª coluna} & \\ & & \downarrow & \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 0 \\ -3 \end{array} & \left.\begin{array}{c} -4 \\ 2 \end{array}\right]. & \begin{array}{l} \leftarrow \text{1ª linha} \\ \end{array} \end{array}$$

O elemento que está na primeira linha e terceira coluna de A é -4, isto é, $a_{13} = -4$.

- Para localizar um elemento de uma matriz, dizemos a linha e a coluna (***nesta ordem***) em que ele está.

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

O elemento que está na primeira linha e terceira coluna de A é -4, *isto é,* $a_{13} = -4$.

Ainda nestes exemplo, temos:

$$a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 4, a_{22} = -3, a_{23} = 2.$$

Tipos especiais de matrizes

- Ao trabalharmos com matrizes, notamos que algumas delas apresentam características parecidas, seja pelo número de linhas ou de colunas ou pela natureza de seus elementos.

Tipos especiais de matrizes

- Ao trabalharmos com matrizes, notamos que algumas delas apresentam características parecidas, seja pelo número de linhas ou de colunas ou pela natureza de seus elementos.

- Tais matrizes recebem nomes que as diferenciam de uma matriz qualquer.

Tipos especiais de matrizes

- Ao trabalharmos com matrizes, notamos que algumas delas apresentam características parecidas, seja pelo número de linhas ou de colunas ou pela natureza de seus elementos.

- Tais matrizes recebem nomes que as diferenciam de uma matriz qualquer.

- É importante aprendermos estes tipos de matrizes porque elas aparecerão frequentemente nos nossos estudos.

Considere a matriz $A_{m\times n}$.

Considere a matriz $A_{m\times n}$.

- **Matriz quadrada:** é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$).

Exemplos: $A = [8]$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Considere a matriz $A_{m\times n}$.

- **Matriz quadrada:** é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$).

Exemplos: $A = [8]$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Observações:

a) No caso de matrizes quadradas $A_{n\times n}$, costuma-se dizer que A é uma matriz de ordem n.

Por exemplo, dizemos que a matriz C do exemplo anterior é uma matriz de ordem 3 (ao invés de 3 por 3).

b) Numa matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$, os elementos a_{ij} em que $i = j$ constituem a ***diagonal principal***. Assim, a diagonal principal é formada pelos elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

b) Numa matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$, os elementos a_{ij} em que $i = j$ constituem a ***diagonal principal***. Assim, a diagonal principal é formada pelos elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

c) Numa matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$, os elementos a_{ij} em que $i + j = n + 1$ constituem a ***diagonal secundária***.

b) Numa matriz quadrada $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, os elementos a_{ij} em que $i = j$ constituem a ***diagonal principal***. Assim, a diagonal principal é formada pelos elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

c) Numa matriz quadrada $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, os elementos a_{ij} em que $i + j = n + 1$ constituem a ***diagonal secundária***.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

b) Numa matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$, os elementos a_{ij} em que $i = j$ constituem a ***diagonal principal***. Assim, a diagonal principal é formada pelos elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

c) Numa matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$, os elementos a_{ij} em que $i + j = n + 1$ constituem a ***diagonal secundária***.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

b) Numa matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$, os elementos a_{ij} em que $i = j$ constituem a ***diagonal principal***. Assim, a diagonal principal é formada pelos elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

c) Numa matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$, os elementos a_{ij} em que $i + j = n + 1$ constituem a ***diagonal secundária***.

diagonal secundária

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

b) Numa matriz quadrada $A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$, os elementos a_{ij} em que $i = j$ constituem a ***diagonal principal***. Assim, a diagonal principal é formada pelos elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

c) Numa matriz quadrada $A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$, os elementos a_{ij} em que $i + j = n + 1$ constituem a ***diagonal secundária***.

diagonal secundária

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

d) A matriz $A_{m \times n}$ na qual $m \neq n$ é chamada de ***retangular***.

- **Matriz nula:** é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

- **Matriz nula:** é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

Observação: Frequentemente a matriz nula de ordem $m \times n$ é representada por $0_{m\times n}$ (ou, simplesmente, 0 quando não houver dúvida com o número zero).

Exemplos: $0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad 0_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- **Matriz nula:** é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

Observação: Frequentemente a matriz nula de ordem $m \times n$ é representada por $0_{m\times n}$ (ou, simplesmente, 0 quando não houver dúvida com o número zero).

Exemplos: $0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $0_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- **Matriz coluna:** é aquela que possui uma única coluna ($n = 1$).

Exemplos: $A_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

- **Matriz linha:** é aquela que possui uma única linha ($m = 1$).

Exemplos: $A_{1\times 3} = [3 \quad 0 \quad -1]$, $\quad \mathrm{B}_{1\times 2} = [0 \quad 0]$.

- **Matriz linha:** é aquela que possui uma única linha ($m = 1$).

Exemplos: $A_{1\times 3} = [3 \quad 0 \quad -1]$, $\qquad$ $B_{1\times 2} = [0 \quad 0]$.

- **Matriz diagonal:** é uma matriz quadrada ($m = n$) onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na diagonal principal são nulos.

Exemplos: $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\qquad$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

- **Matriz linha:** é aquela que possui uma única linha ($m = 1$).

Exemplos: $A_{1\times 3} = [3 \quad 0 \quad -1]$, $\quad B_{1\times 2} = [0 \quad 0]$.

- **Matriz diagonal:** é uma matriz quadrada ($m = n$) onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na diagonal principal são nulos.

Exemplos: $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

diagonal principal

diagonal principal

Todos os elementos fora da diagonal principal são nulos.

- **Matriz identidade:** é uma matriz diagonal tal que

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, & \text{se } i = j \\ a_{ij} = 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

- **Matriz identidade:** é uma matriz diagonal tal que

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, & \text{se } i = j \\ a_{ij} = 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Observação: Frequentemente a matriz identidade de ordem n é representada por I_n (ou, simplesmente, I dependendo da situação).

Exemplos: $I_1 = [1], \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \ldots$

- **Matriz identidade:** é uma matriz diagonal tal que

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, & \text{se } i = j \\ a_{ij} = 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Observação: Frequentemente a matriz identidade de ordem n é representada por I_n (ou, simplesmente, I dependendo da situação).

Exemplos: $I_1 = [1]$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ...

diagonal principal

- **Matriz triangular superior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Exemplos: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$.

- **Matriz triangular superior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Exemplos: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$.

Obtemos um triângulo de zeros abaixo da diagonal principal

- **Matriz triangular superior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Exemplos: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$.

Obtemos um triângulo de zeros abaixo da diagonal principal

- **Matriz triangular inferior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Exemplos: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

- **Matriz triangular superior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Exemplos: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$.

Obtemos um triângulo de zeros abaixo da diagonal principal

- **Matriz triangular inferior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Exemplos: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Obtemos um triângulo de zeros acima da diagonal principal

- **Matriz oposta:** obtém-se trocando o sinal de cada elemento da matriz A.

  Notação: $-A$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad -A = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

- **Matriz oposta:** obtém-se trocando o sinal de cada elemento da matriz A. Notação: $-A$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

- **Matriz transposta:** obtém-se trocando ordenadamente as linhas pelas colunas de A. Notação: A^t.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

- **Matriz oposta:** obtém-se trocando o sinal de cada elemento da matriz A. Notação: $-A$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

- **Matriz transposta:** obtém-se trocando ordenadamente as linhas pelas colunas de A. Notação: A^t.

1ª linha de A

1ª coluna de A^t

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

- **Matriz oposta:** obtém-se trocando o sinal de cada elemento da matriz A. Notação: $-A$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

- **Matriz transposta:** obtém-se trocando ordenadamente as linhas pelas colunas de A. Notação: A^t.

2ª linha de A

2ª coluna de A^t

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

- **Matriz oposta:** obtém-se trocando o sinal de cada elemento da matriz A. Notação: $-A$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

- **Matriz transposta:** obtém-se trocando ordenadamente as linhas pelas colunas de A. Notação: A^t.

3ª coluna de A^t

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

3ª linha de A

- **Matriz simétrica:** é uma matriz quadrada tal que $A^t = A$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Note que $A^t = A$. Logo, a matriz A é simétrica.

- **Matriz simétrica:** é uma matriz quadrada tal que $A^t = A$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Note que $A^t = A$. Logo, a matriz A é simétrica.

- **Matriz antissimétrica:** é uma matriz quadrada tal que $A^t = -A$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $-A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Note que $A^t = -A$. Logo, a matriz A é antissimétrica.

Operações com matrizes

- **Igualdade de matrizes:** duas matrizes de mesma ordem $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ são ***iguais*** $(A = B)$ se todos os seus elementos correspondentes são iguais $(a_{ij} = b_{ij})$.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log 1 \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \operatorname{sen} 90° & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Igualdade de matrizes:** duas matrizes de mesma ordem $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ são ***iguais*** $(A = B)$ se todos os seus elementos correspondentes são iguais $(a_{ij} = b_{ij})$.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log 1 \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \text{sen}\, 90^\circ & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Igualdade de matrizes:** duas matrizes de mesma ordem $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ são ***iguais*** $(A = B)$ se todos os seus elementos correspondentes são iguais $(a_{ij} = b_{ij})$.

$$\overset{=}{}$$

Exemplo: $\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log 1 \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \text{sen}\,90° & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

- **Adição de matrizes:** a soma de duas matrizes de mesma ordem $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ é matriz $A+B$ de ordem $m \times n$ cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e B. Isto é,

$$A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$$

Exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

- **Adição de matrizes:** a soma de duas matrizes de mesma ordem $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ é matriz $A+B$ de ordem $m\times n$ cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e B. Isto é,

$$A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$$

Exemplo: $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 4\\ -2 & 5\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\\ 3 & 5\end{bmatrix}$

- **Adição de matrizes:** a soma de duas matrizes de mesma ordem $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ é matriz $A + B$ de ordem $m \times n$ cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e B. Isto é,

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

a) Comutativa: $A + B = B + A$

b) Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$

c) Elementos neutro: $A + 0_{m\times n} = A$

$0_{m\times n}$: matriz nula de ordem $m \times n$.

d) Elemento oposto: $A + (-A) = 0_{m\times n}$.

e) $(A + B)^t = A^t + B^t$ (a transposta da soma é igual à soma das transpostas)

Observação: A diferença $A - B$ de duas matrizes, de mesma ordem, é definida por $A + (-B)$, onde $-B$ é a oposta de B.

Observação: A diferença $A - B$ de duas matrizes, de mesma ordem, é definida por $A + (-B)$, onde $-B$ é a oposta de B.

Exemplo: Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Observação: A diferença $A - B$ de duas matrizes, de mesma ordem, é definida por $A + (-B)$, onde $-B$ é a oposta de B.

Exemplo: Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Multiplicação de uma matriz por um escalar:** a multiplicação de uma matriz $A_{m\times n}$ por um escalar (número) k é matriz kA de ordem $m \times n$ cujos elementos são os elementos de A multiplicados por k. Isto é,

$$k\,A = \left(k\,a_{ij}\right)_{m\times n}$$

- **Multiplicação de uma matriz por um escalar:** a multiplicação de uma matriz $A_{m \times n}$ por um escalar (número) k é matriz kA de ordem $m \times n$ cujos elementos são os elementos de A multiplicados por k. Isto é,

$$k\,A = \left(k\,a_{ij}\right)_{m \times n}$$

Exemplo: $-2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

- **Multiplicação de uma matriz por um escalar:** a multiplicação de uma matriz $A_{m\times n}$ por um escalar (número) k é matriz kA de ordem $m\times n$ cujos elementos são os elementos de A multiplicados por k. Isto é,

$$k\,A = \left(k\,a_{ij}\right)_{m\times n}$$

Exemplo: $-2\cdot\begin{bmatrix}2 & 10\\1 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & -20\\-2 & 6\end{bmatrix}$

$(-2)\cdot 2$ $\quad$ $(-2)\cdot 10$

$(-2)\cdot 1$ $\quad$ $(-2)\cdot(-3)$

Propriedades:

Dadas duas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$ e os números k, k_1 e k_2, temos:

a) Distributiva em relação à soma de escalares: $(k_1 + k_2)\, A = k_1\, A + k_2\, A$

b) Distributiva em relação à soma de matrizes: k $(A + B) = k\, A + k\, B$

c) Associativa: $(k_1\, k_2)\, A = k_1\, (k_2\, A)$

d) Elemento neutro: $1\, A = A$

e) Elemento nulo: $0\, A = 0_{m \times n}$

f) $(kA)^t = kA^t$

- **Multiplicação de matrizes:** sejam $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $B = \left(b_{jk}\right)_{n\times p}$.

  Definimos $A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p}$, sendo

$$C_{m\times p} = (c_{ik})_{m\times p}$$

onde cada elemento c_{ik} é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da i-ésima linha de A pelos elementos da k-ésima coluna de B e somando-se esses produtos.

- **Multiplicação de matrizes:** sejam $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $B = \left(b_{jk}\right)_{n\times p}$.

Definimos $A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p}$, sendo

$$C_{m\times p} = (c_{ik})_{m\times p}$$

onde cada elemento c_{ik} é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da i-ésima linha de A pelos elementos da k-ésima coluna de B e somando-se esses produtos.

Observação: Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{r\times s}$ se o ***número de colunas de A*** for igual ao ***número de linhas de B*** $(n = r)$. Neste caso, a matriz AB terá ordem $m \times s$.

Exemplos:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

Exemplos:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

$3 \times 2 \quad = \quad 2 \times 2$

3×2

Exemplos:

c_{11}: Elementos da 1ª linha da primeira matriz vezes elementos da 1ª coluna da segunda matriz

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 2\cdot 0 & 4\cdot(-1) + 2\cdot 4 \\ 5\cdot 1 + 3\cdot 0 & 5\cdot(-1) + 3\cdot 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

3×2 = 2×2

3×2

Exemplos:

c_{12}: Elementos da 1ª linha da primeira matriz vezes elementos da 2ª coluna da segunda matriz

1) $$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 2\cdot 0 & 4\cdot(-1) + 2\cdot 4 \\ 5\cdot 1 + 3\cdot 0 & 5\cdot(-1) + 3\cdot 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

3×2 = 2×2

3×2

Exemplos:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 2\cdot1+1\cdot0 & 2\cdot(-1)+1\cdot4 \\ 4\cdot1+2\cdot0 & 4\cdot(-1)+2\cdot4 \\ 5\cdot1+3\cdot0 & 5\cdot(-1)+3\cdot4 \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{3\times2}$

3×2 **=** 2×2

3×2

2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times2}$.

Exemplos:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 2\cdot 0 & 4\cdot(-1) + 2\cdot 4 \\ 5\cdot 1 + 3\cdot 0 & 5\cdot(-1) + 3\cdot 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$3 \times 2 \quad = \quad 2 \times 2$

3×2

2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$

$2 \times 2 \quad \neq \quad 3 \times 2$

Exemplos:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 2\cdot 0 & 4\cdot(-1) + 2\cdot 4 \\ 5\cdot 1 + 3\cdot 0 & 5\cdot(-1) + 3\cdot 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$3 \times 2 \quad = \quad 2 \times 2$

3×2

2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$. *Não é possível*

$2 \times 2 \quad \neq \quad 3 \times 2$

Propriedades:

a) Em geral, $AB \neq BA$ (não vale a comutativa).

Além disso, podemos ter $AB = 0$ sem que $A = 0$ ou $B = 0$.

b) Elementos neutro: $A\,I = I\,A = A$

c) Distributiva: $A\,(B + C) = AB + AC$

$$(A + B)\,C = AC + BC$$

d) Associativa $(AB)C = A(BC)$

e) $(AB)^t = B^t\,A^t$

f) $0\,A = 0$, $A\,0 = 0$.

Referências bibliográficas

- BOLDRINI, José Luiz; *et al*. ***Álgebra Linear***. 3 ed. São Paulo – SP: Harbra, 1986.

- CALLIOLI, Carlos A.; *et al*. ***Álgebra Linear e Aplicações***. 6 ed. rev. São Paulo – SP: Atual, 1993.

- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. ***Álgebra Linear***. 2 ed. São Paulo – SP: Pearson Makron Books, 1987.