1. Sejam $M \neq 0$ uma matriz simétrica e $N \neq 0$ uma matriz anti-simétrica em $M_3(\mathbb{R})$. Mostre que M e N são l.i.

2. Determinar m e n para que os conjuntos de vetores dados abaixo sejam l.i. em $\mathbb{R}^3$.

(a) $\{(3, 5m, 1), (2, 0, 4), (1, m, 3)\}$

(b) $\{(1, 3, 5), (2, m + 1, 10)\}$

(c) $\{(m, 2, n), (3, m + n, m - 1)\}$

3. Mostre que o conjunto de vetores $A = \{1, x, x^2, 2 + x + 2x^2\}$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ é l.d. e que qualquer subconjunto de A, com três elementos é l.i..

4. Mostrar que se o conjunto $\{u, v, w\}$ de vetores de um espaço vetorial V for l.i., o mesmo acontecerá com $\{u + v, u + w, v + w\}$.

5. Mostre que os subconjuntos do $\mathbb{R}^3$

$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 4z = 0\}$

$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y - 5z = 0\}$

São subespaços vetoriais. Quais suas dimensões? Ache um vetor $v \in W_1 \cap W_2$, $v \neq \overrightarrow{0}$.

6. Sejam $u_1 = (1, 3, 5)$ e $u_2 = (2, 4, -3)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Determine os valores de k para os quais $(2, 7, k)$ pode ser escrito como combinação linear de u_1 e u_2.

7. Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $u_1, u_2, \dots, u_r$ vetores coluna $n \times 1$. Mostre que se $Au_1, Au_2, \dots, Au_r$ são vetores l.i., então $u_1, u_2, \dots, u_r$ são l.i..

8. Seja V o espaço das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que $f, g, h \in V$ são l.i., onde $f(t) = \operatorname{sen}(t)$, $g(t) = \cos(t)$ e $h(t) = t$.

9. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$

$S = [(1, -1, 2), (2, 1, 1)]$

$T = [(0, 1, -1), (1, 2, 1)]$

$U = \{(x, y, z) \mid x + y = 4x - z = 0\}$

$V = \{(x, y, z) \mid 3x - y - z = 0\}$

Determine as dimensões de

(a) S **(b)** T **(c)** U **(d)** V **(e)** $S + T$ **(f)** $S \cap T$ **(g)** $T + U$ **(h)** $T \cap U$.

10. Determinar uma base e a dimensão do espaço solução de cada um dos sistemas lineares homogêneos

(a) $\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 3x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$

11. Sejam U e W os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$

$U = \{(a, b, c, d) \mid b - 2c + d = 0\}$

$W = \{(a, b, c, d) \mid a = d, \ b = 2c\}$

Ache uma base e a dimensão de

(a) U **(b)** W **(c)** $U \cap W$ **(d)** $U + W$.

12. Determinar uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 1, 2, 1)$.

13. Mostre que se $V = W_1 \oplus W_2$, $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é uma base de W_1 e $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ é uma base de W_2, então $\gamma = \{v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_r\}$ é uma base de V.

14. Verifique que o espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$, não pode ser gerado por um número finito de elementos.

15. Ache uma base e a dimensão do subespaço W de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ gerado pelos polinômios

(a) $u = t^3 + 2t^2 - 2t + 1$, $v = t^3 + 3t^2 - t + 4$, $w = 2t^3 + t^2 - 7t - 7$.

(b) $u = t^3 + t^2 - 3t + 2$, $v = 2t^3 + t^2 + t - 4$, $w = 4t^3 + 3t^2 - 5t + 2$.

16. Se U e W são dois subespaços de V tais que $U \oplus W = V$, dizemos que U é *suplementar* (ou *complementar*) de W (ou W é suplementar de U).

(a) Determinar um suplementar de $\{\, (x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \,\}$.

(b) O mesmo para $\{\, (x, y, z, t)) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = z - t = 0 \,\}$.

17. Sejam U e W subespaços de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 2 e 3 respectivamente. Mostre que a dimensão de $U \cap W$ é pelo menos 1. O que ocorre se a dimensão de $U \cap W$ for 2? Pode ser 3?
18. Sejam U e W são dois subespaços de um espaço de dimensão n. Suponha que $\dim U > n/2$ e $\dim W > n/2$. Mostre que $U \cap W \neq \emptyset$.
19. Seja $V = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\}$ e considere em V as seguintes operações: $u + v = uv$ e $\alpha \cdot u = u^\alpha$.
(a) O conjunto $B = \{1\}$ é uma base para V? Justifique sua resposta.
(b) Determine uma base e a dimensão de V.
20. (a) Determinar as coordenadas de $p(x) = x^2$ em relação à base $\{\, 1, 2 - x, 2 + x + x^2 \,\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
(b) Determinar as coordenadas de $1 - 2i \in \mathbb{C}$ em relação à base $C = \{\, 1 - i, 1 + i \,\}$.
21. Sejam $B = \{\, (1,0), (0,1) \,\}$, $B_1 = \{\, (-1,1), (1,1) \,\}$ e $B_2 = \{\, (\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1) \,\}$ bases de $\mathbb{R}^2$.
(a) Quais as coordenadas do vetor $(3,2)$ em relação à base B? E em relação a B_1 e a B_2?
(b) Encontre: a matriz de mudança da base B para a base B_1; a matriz de mudança da base B_1 para a base B_2 e a matriz de mudança da base B para a base B_2.
(c) Existe alguma relaçã entre as matrizes encontradas em (b)?
22. Se B é uma base de um espaço vetorial V, qual é a matriz de mudança da base B para a base B?
23. Seja V o espaço das matrizes 2×2 triangulares superiores. Sejam

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

duas bases de V.
(a) Encontre as coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ em relação às base B e à base C.
(b) Encontre: a matriz de mudança da base B para a base C e a matriz de mudança da base C para a base B.
24. A matriz de mudança de uma base B do $\mathbb{R}^2$ para a base $\{\, (1,1), (0,2) \,\}$ desse mesmo espaço é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determine B.
25. A matriz de mudança da base $\{\, 1 + x, 1 - x^2 \,\}$ para uma base C ambas do mesmo subespaço de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Determine C.