EXEMPLO 10 Encontre $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

SOLUÇÃO Observe que esse limite é indeterminado, pois $0^x = 0$ para todo $x > 0$, mas $x^0 = 1$ para todo $x \neq 0$. (Lembre-se que 0^0 não é definido.) Podemos proceder como no Exemplo 9 ou escrever a função como uma exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

No Exemplo 6 usamos a Regra de l'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Logo
$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

O gráfico da função $y = x^x$, $x > 0$ é mostrado na Figura 6. Observe que embora 0^0 não esteja definido, os valores da função tendem a 1 quando $x \to 0^+$. Isso confirma o resultado do Exemplo 10.

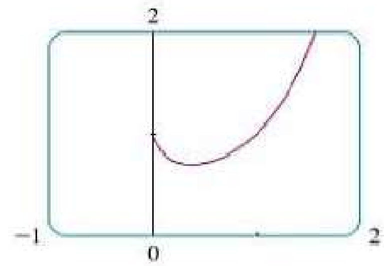


FIGURA 6

4.4 Exercícios

1–4 Dado que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0 \quad \lim_{x \to a} h(x) = 1$$
$$\lim_{x \to a} p(x) = \infty \quad \lim_{x \to a} q(x) = \infty$$

quais dos limites a seguir são formas indeterminadas? Para aqueles que não são formas indeterminadas, calcule o limite quando possível.

1. (a) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$ (c) $\lim_{x \to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$

(d) $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$ (e) $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim_{x \to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x \to a} [h(x)p(x)]$

(c) $\lim_{x \to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim_{x \to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim_{x \to a} [p(x) - q(x)]$

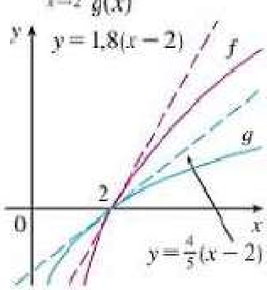
(c) $\lim_{x \to a} [p(x) + q(x)]$

4. (a) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{p(x)}$ (c) $\lim_{x \to a} [h(x)]^{p(x)}$

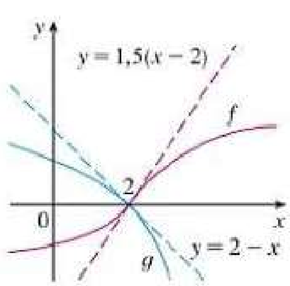
(d) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{f(x)}$ (e) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim_{x \to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–6 Use os gráficos de f e g e suas retas tangentes em $(2, 0)$ para encontrar $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

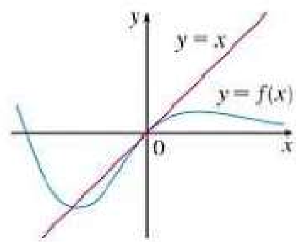
5.



6.



7. São mostrados o gráfico de uma função f e de sua reta tangente em 0. Qual é o valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{e^x - 1}$?



8–68 Encontre o limite. Use a Regra de l'Hôspital quando for apropriado. Se houver um método mais elementar, considere utilizá-lo. Se a Regra de l'Hôspital não se aplicar, explique o porquê.

8. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

9. $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$

10. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

11. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 - 1}$

12. $\lim_{x \to 1/2} \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{4x^2 + 16x - 9}$

13. $\lim_{x \to (\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

14. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$

15. $\lim_{t \to 0} \dfrac{e^{2t} - 1}{\operatorname{sen} t}$

16. $\lim_{\theta \to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cossec} \theta}$

17. $\lim_{\theta \to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen} \theta}{1 + \cos 2\theta}$

18. $\lim_{\theta \to \pi} \dfrac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}$

19. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

20. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} \pi x}$

21. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

22. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\ln \ln x}{x}$

23. $\lim_{t \to 1} \dfrac{t^8 - 1}{t^5 - 1}$

24. $\lim_{t \to 0} \dfrac{8^t - 5^t}{t}$

25. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 4x}}{x}$

26. $\lim_{u \to \infty} \dfrac{e^{u/10}}{u^3}$

27. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

É necessário o uso de uma calculadora gráfica ou computador

28. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh} x - x}{x^3}$

29. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tgh} x}{\operatorname{tg} x}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x}$

31. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

32. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$

33. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x3^x}{3^x - 1}$

34. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x\operatorname{sen}(x-1)}{2x^2 - x - 1}$

37. $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{arctg}(2x)}{\ln x}$

38. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}^{-1}(4x)}$

39. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^a - 1}{x^b - 1},\ b \neq 0$

40. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

41. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^a - ax + a - 1}{(x-1)^2}$

42. $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$

43. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\operatorname{cotg} 2x \operatorname{sen} 6x$

44. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x \ln x$

45. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} 5x \operatorname{cossec} 3x$

46. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

47. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^3 e^{-x^2}$

48. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^{3/2}\operatorname{sen}(1/x)$

49. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\ln x \operatorname{tg}(\pi x/2)$

50. $\displaystyle\lim_{x\to (\pi/2)^-}\cos x \sec 5x$

51. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

52. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x)$

53. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

54. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^{-1} x}\right)$

55. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}(x - \ln x)$

56. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}[\ln(x^7 - 1) - \ln(x^5 - 1)]$

57. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

58. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{tg} 2x)^x$

59. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1 - 2x)^{1/x}$

60. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$

61. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

62. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

63. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^{1/x}$

64. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^{e^{-x}}$

65. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(4x + 1)^{\operatorname{cotg} x}$

66. $\displaystyle\lim_{x\to 1}(2 - x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$

67. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1 + \operatorname{sen} 3x)^{1/x}$

68. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$

69–70 Use gráficos para estimar o valor do limite. A seguir, use a Regra de l'Hôpital para encontrar o valor exato.

69. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

70. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$

71–72 Ilustre a Regra de l'Hôspital fazendo os gráficos de $f(x)/g(x)$ e $f'(x)/g'(x)$ próximo de $x = 0$, para ver que essas razões têm o mesmo limite quando $x \to 0$. Calcule também o valor exato do limite.

71. $f(x) = e^x - 1,\quad g(x) = x^3 + 4x$

72. $f(x) = 2x\operatorname{sen} x,\quad g(x) = \sec x - 1$

73. Demonstre que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para qualquer inteiro positivo n. Isso mostra que a função exponencial tende mais rapidamente a infinito que qualquer potência de x.

74 Demonstre que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para todo número $p > 0$. Isso mostra que a função logaritmo tende a infinito mais vagarosamente que qualquer potência de x.

75–76 O que acontece se você tentar usar a Regra de l'Hôspital para encontrar o limite? Calcule o limite usando outro método.

75. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

76. $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sec x}{\operatorname{tg} x}$

77. Investigue a família de curvas dada por $f(x) = e^x - cx$. Em particular, encontre os limites quando $x \to \pm\infty$ e determine os valores de c para os quais f tem um mínimo absoluto. O que acontece aos pontos de mínimo quando c cresce?

78. Se um objeto de massa m é solto a partir do repouso, um modelo para sua velocidade v após t segundos, levando-se em conta a resistência do ar, é

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

onde g é a aceleração da gravidade e c é uma constante positiva. (No Capítulo 9 deduziremos essa equação a partir da hipótese de que a resistência do ar é proporcional à velocidade do objeto; c é a constante proporcionalidade.)

(a) Calcule $\lim_{t\to\infty} v$. Qual o significado desse limite?

(b) Para um valor fixo de t, use a Regra de l'Hôspital para calcular $\lim_{c\to 0^+} v$. O que você pode concluir sobre a velocidade de um objeto caindo no vácuo?

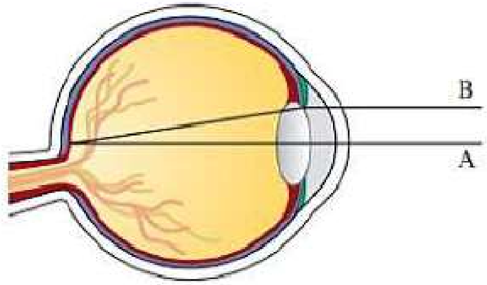
79. Se um montante inicial de dinheiro A_0 for investido a uma taxa de juros r capitalizada n vezes ao ano, o valor do investimento após t anos será

$$A = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Se $n \to \infty$, nos referimos à *capitalização contínua* de juros. Use a regra de l'Hôspital para mostrar que se os juros forem capitalizados continuamente, então o montante após t anos será

$$A = A_0 e^{rt}$$

80. A luz entra no olho pela pupila e atinge a retina, onde células receptoras sentem luz e cor. W. Stanley Stiles e B. H. Crawford estudaram o fenômeno no qual a medida do brilho decresce a medida que a luz entra cada vez mais longe do centro da pupila. (Veja a figura.)



Um feixe de luz A que entra pelo centro da pupila é mais brilhante do que um feixe B que entra perto da borda da pupila.

Eles detalharam suas descobertas relativas a esse fenômeno, conhecido como *efeito de Stiles-Crawford de primeiro tipo*, em um importante artigo de 1933. Em particular, observaram que a quantidade de luminescência sentida *não* era proporcional à área da pupila, como esperavam. A porcentagem P da luminescência total entrando na pupila de raio r mm que é sentida na retina pode ser descrita por

$$P = \frac{1 - 10^{-\rho r^2}}{\rho r^2 \ln 10}$$

onde ρ é uma constante determinada experimentalmente, tipicamente cerca de 0,05.

(a) Qual é a porcentagem de luminescência sentida por uma pupila de raio 3 mm? Use $\rho = 0{,}05$.

(b) Calcule a porcentagem de luminescência sentida por uma pupila de raio 2 mm. Faz sentido ela ser maior do que a resposta da parte (a)?

(c) Calcule $\lim_{r \to 0^+} P$. Esse é o resultado que você esperava? Esse resultado é fisicamente possível?

Fonte: Adaptado de W. Stiles and B. Crawford, The Luminous Efficiency of Rays Entering the Eye Pupil at Different Points. *Proceedings of the Royal Society of London, Series B: Biological Sciences* 112 (1933): 428–50.

81. Algumas populações inicialmente crescem exponencialmente, mas acabam por se estabilizar. Equações da forma

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$$

onde M, A e k são constantes positivas, são chamadas *equações logísticas* e são usadas com frequências para modelar tais populações. (Vamos investigar isso em detalhe no Capítulo 9.) Aqui, M é chamada de capacidade de carga e representa o tamanho da população máxima sustentável e $A = \dfrac{M - P_0}{P_0}$, onde P_0 é a população inicial.

(a) Calcule $\lim_{t \to \infty} P(t)$. Explique porque sua resposta deveria ser esperada.

(b) Calcule $\lim_{M \to \infty} P(t)$. (Observe que A é definida em termos de M.) Que tipo de função é o seu resultado?

82. Um cabo de metal tem raio r e é coberto por isolante, de modo que a distância do centro do cabo ao exterior do isolante é R. A velocidade de um impulso elétrico do cabo é

$$v = -c\left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

onde c é uma constante positiva. Encontre os seguintes limites e interprete suas respostas.

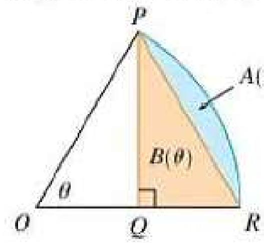
(a) $\lim_{R \to r^+} v$ (b) $\lim_{r \to 0^+} v$

83. A primeira aparição impressa da Regra de l'Hôspital foi em um livro *Analyse des infiniment petits* publicado pelo marquês de l'Hôspital em 1696. Esse foi o primeiro *livro* de cálculo publicado e o exemplo que o marquês usou em seu livro para ilustrar sua regra foi encontrar o limite da função

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

quando x tende a a, onde $a > 0$. (Naquela época era comum escrever aa no lugar de a^2.) Resolva esse problema.

84. A figura mostra um setor de um círculo com ângulo central θ. Seja $A(\theta)$ a área do segmento entre a corda PR e o arco PR. Seja $B(\theta)$ a área do triângulo PQR. Encontre $\lim_{\theta \to 0^+} A(\theta)/B(\theta)$.



85. Calcule $\lim_{x \to \infty} \left[x - x^2 \ln\left(\frac{1 + x}{x}\right)\right]$.

86. Suponha que f seja uma função positiva. Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, mostre que

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = 0$$

Isso mostra que 0^∞ não é uma forma indeterminada.

87. Se f' for contínua, $f(2) = 0$ e $f'(2) = 7$, calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2 + 3x) + f(2 + 5x)}{x}$$

88. Para quais valores de a e b a equação a seguir é válida?

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2}\right) = 0$$

89. Se f' for contínua, use a Regra de l'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = f'(x)$$

Explique o significado dessa equação utilizando um diagrama.

90. Se f'' for contínua, mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} = f''(x)$$

91. Considere

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Use a definição de derivada para calcular $f'(0)$.

(b) Mostre que f tem derivadas de todas as ordens que são definidas em $\mathbb{R}$. [*Dica*: Primeiro mostre por indução que há um polinômio $p_n(x)$ e um número inteiro não negativo k_n tais que $f^{(n)}(x) = p_n(x)f(x)/x^{k_n}$ para $x \neq 0$.]

92. Considere

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em 0.

(b) Pesquise graficamente se f é derivável em 0 por meio de sucessivos *zooms* em direção ao ponto (0, 1) sobre o gráfico de f.

(c) Mostre que f não é derivável em 0. Como reconciliar esse fato com a aparência do gráfico na parte (b)?