Universidade Tecnológica Federal do Paraná
UTFPR - Campus Apucarana
Departamento Acadêmico de Matemática

MÓDULO 2

Vetores

Curso: Engenharia Têxtil

Disciplina: Geometria Analítica e Álgebra Linear

Professor: Alisson C. Reinol (2022-2)

Conteúdos

- Vetores
- Casos particulares de vetores
- Operações com vetores
- Vetores no plano
- Vetores no espaço

Vetores

- Na natureza existem dois tipos de grandezas:

  - Grandezas escalares
  - Grandezas vetoriais

- Comprimento
- Área
- Volume
- Massa
- Temperatura
- Densidade

Grandezas Escalares

Ficam completamente determinadas apenas por um número real (acompanhado de uma unidade adequada)

Exemplos:

- Um objeto tem massa de 5 kg.
- A temperatura ambiente é de 25ºC.

- Velocidade
- Força
- Aceleração
- Campo Elétrico

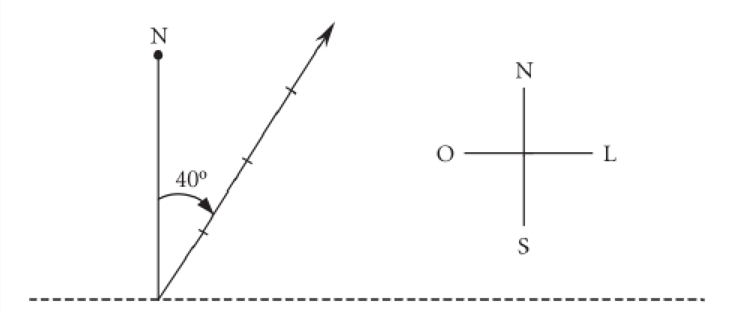
Grandezas Vetoriais

- Módulo (intensidade)
- Direção
- Sentido

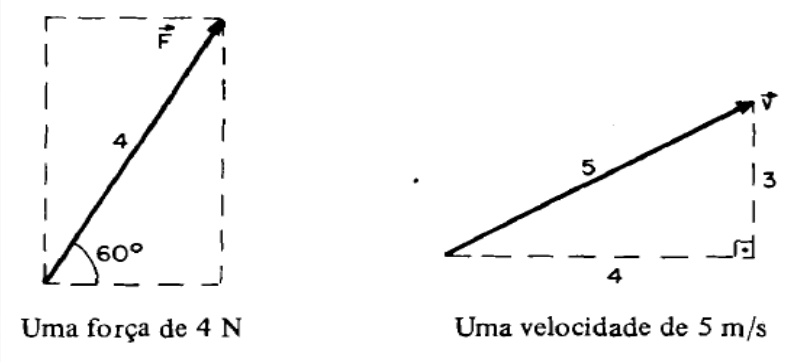
Exemplo:

- Um corpo desloca-se com *velocidade* constante de 20 km/h *para o nordeste, sob um ângulo de 40°.*

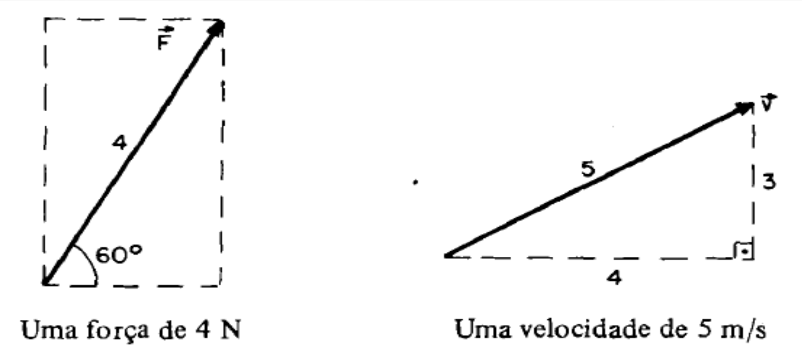
(Precisa de uma orientação espacial)



- Grandezas vetoriais são representadas por **vetores**, os quais serão nosso objeto de estudo na aula de hoje.

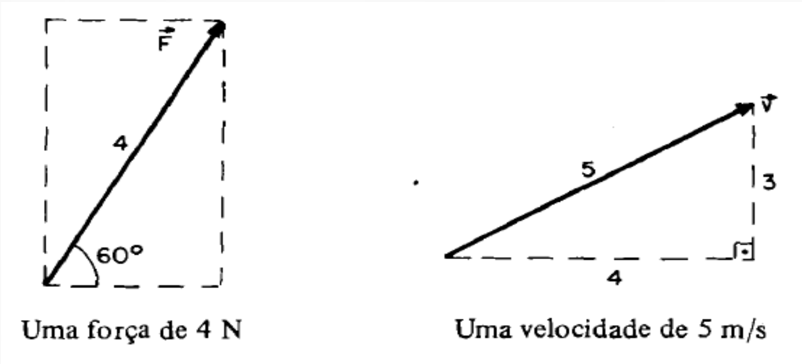


- Grandezas vetoriais são representadas por **vetores**, os quais serão nosso objeto de estudo na aula de hoje.

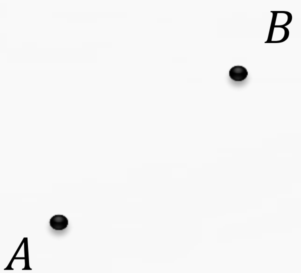


- Um ***vetor*** é representado por um segmento orientado.

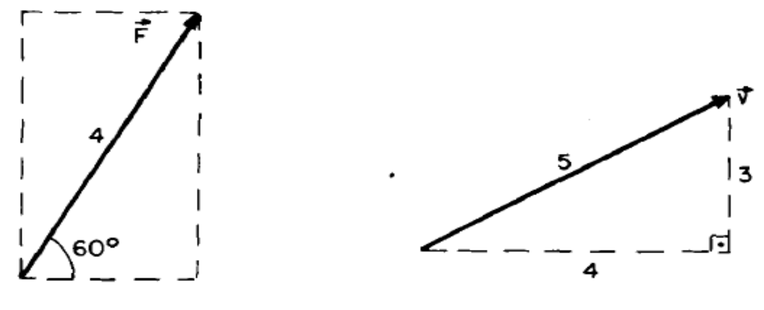
- Grandezas vetoriais são representadas por **vetores**, os quais serão nosso objeto de estudo na aula de hoje.



- Um ***vetor*** é representado por um segmento orientado.
- Um ***segmento orientado*** é um par ordenado de pontos (A, B), onde A é chamado de ***origem*** e B de ***extremidade***.



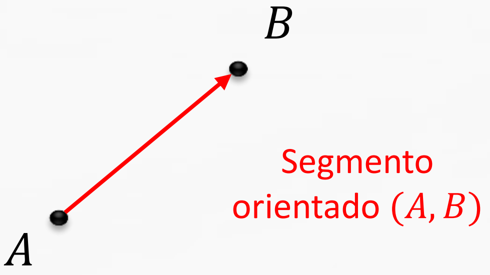
- Grandezas vetoriais são representadas por **vetores**, os quais serão nosso objeto de estudo na aula de hoje.



Uma força de 4 N

Uma velocidade de 5 m/s

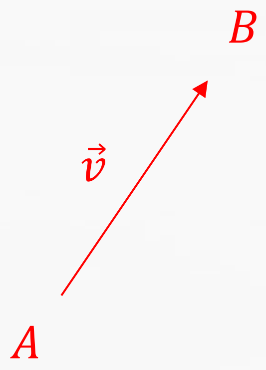
- Um ***vetor*** é representado por um segmento orientado.
- Um ***segmento orientado*** é um par ordenado de pontos (A, B), onde A é chamado de ***origem*** e B de ***extremidade***.



Observação: Um segmento orientado (A, A), no qual a extremidade coincide com a origem é chamado de ***segmento orientado nulo*** e representado por um ponto.

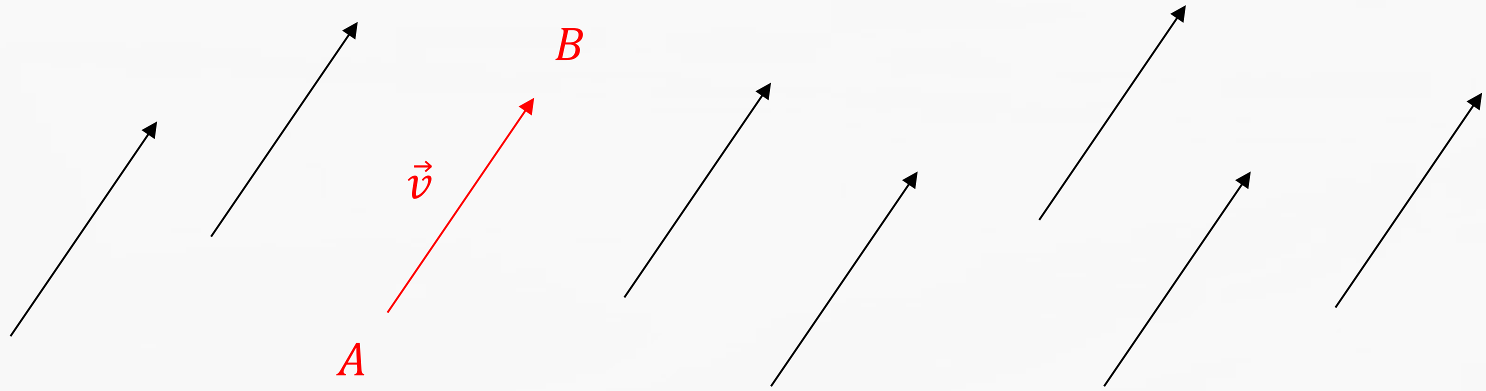
Observação: Um segmento orientado (A, A), no qual a extremidade coincide com a origem é chamado de ***segmento orientado nulo*** e representado por um ponto.

- Quando escrevemos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, afirmamos que o segmento orientado (A, B) é um representante do vetor $\vec{v}$.

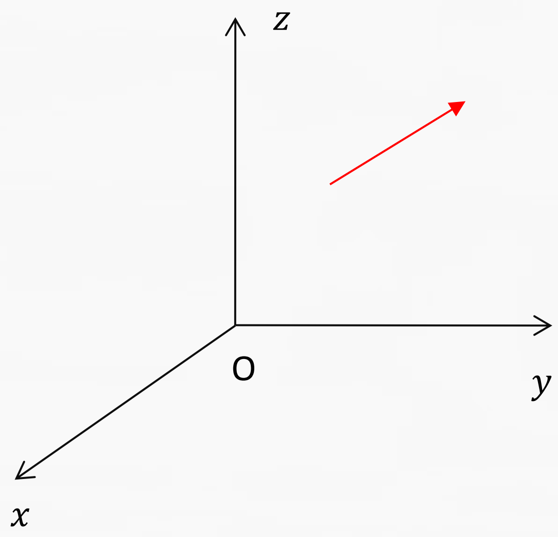


Observação: Um segmento orientado (A, A), no qual a extremidade coincide com a origem é chamado de ***segmento orientado nulo*** e representado por um ponto.

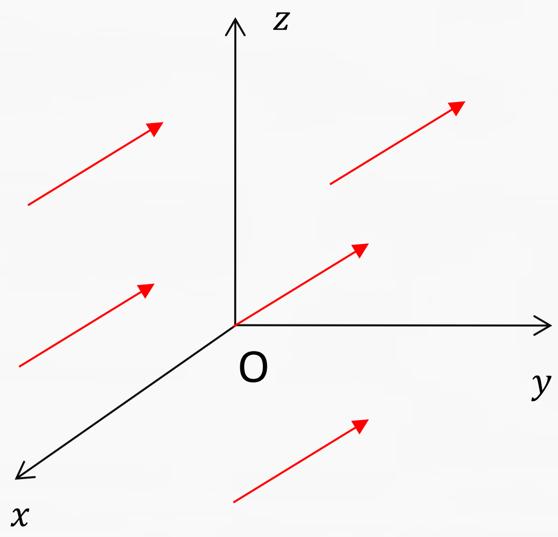
- Quando escrevemos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, afirmamos que o segmento orientado (A, B) é um representante do vetor $\vec{v}$.
- Segmentos orientados com mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido são ***representantes*** de um mesmo vetor.



- Intuitivamente, um vetor é uma *flecha* que pode ser colocada em *qualquer lugar* no espaço, desde que preservados o seu comprimento, direção e sentido.



- Intuitivamente, um vetor é uma *flecha* que pode ser colocada em *qualquer lugar* no espaço, desde que preservados o seu comprimento, direção e sentido.



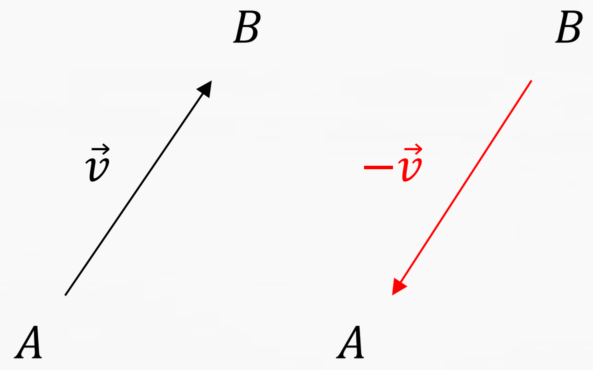
Casos particulares de vetores

a) O ***vetor nulo*** é aquele que tem o segmento orientado nulo como representante. Notação: $\vec{0}$.

Casos particulares de vetores

a) O ***vetor nulo*** é aquele que tem o segmento orientado nulo como representante. Notação: $\vec{0}$.

b) Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. O ***vetor oposto*** de $\vec{v}$, denotado por $-\vec{v}$, é o vetor $-\vec{v} = \overrightarrow{BA}$.



c) A ***norma*** (ou ***módulo***) de um vetor é o comprimento de qualquer um de seus representantes. Notação: $\|\vec{u}\|$ ou $|\vec{u}|$.

c) A ***norma*** (ou ***módulo***) de um vetor é o comprimento de qualquer um de seus representantes. Notação: $\|\vec{u}\|$ ou $|\vec{u}|$.

Observação: Um vetor $\vec{u}$ é dito ***unitário*** se $\|\vec{u}\| = 1$.

c) A ***norma*** (ou ***módulo***) de um vetor é o comprimento de qualquer um de seus representantes. Notação: $\|\vec{u}\|$ ou $|\vec{u}|$.

Observação: Um vetor $\vec{u}$ é dito ***unitário*** se $\|\vec{u}\| = 1$.

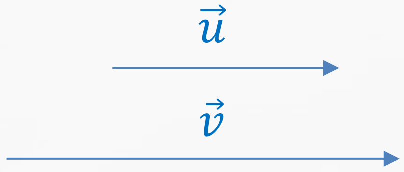
d) O ***versor*** de um vetor não-nulo $\vec{u}$ é o vetor unitário de mesma direção e sentido de $\vec{u}$.

c) A ***norma*** (ou ***módulo***) de um vetor é o comprimento de qualquer um de seus representantes. Notação: $\|\vec{u}\|$ ou $|\vec{u}|$.

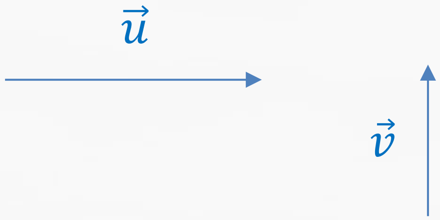
Observação: Um vetor $\vec{u}$ é dito ***unitário*** se $\|\vec{u}\| = 1$.

d) O ***versor*** de um vetor não-nulo $\vec{u}$ é o vetor unitário de mesma direção e sentido de $\vec{u}$.

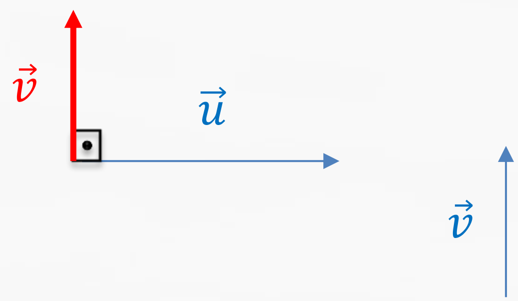
e) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ***paralelos*** se os seus representantes possuem mesma direção. Notação: $\vec{u} \,//\, \vec{v}$.



f) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ***ortogonais*** se algum representante de $\vec{u}$ forma ângulo reto com algum representante de $\vec{v}$. Notação: $\vec{u} \perp \vec{v}$.

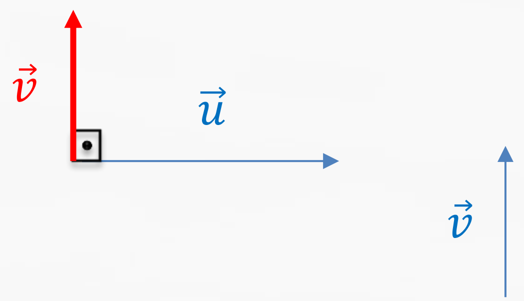


f) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ***ortogonais*** se algum representante de $\vec{u}$ forma ângulo reto com algum representante de $\vec{v}$. Notação: $\vec{u} \perp \vec{v}$.



Escolhemos um representante de $\vec{v}$ com mesma origem do representante de $\vec{u}$

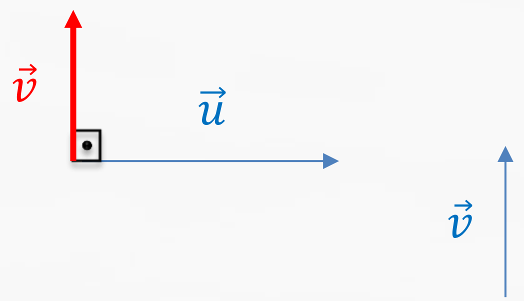
f) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ***ortogonais*** se algum representante de $\vec{u}$ forma ângulo reto com algum representante de $\vec{v}$. Notação: $\vec{u} \perp \vec{v}$.



Escolhemos um representante de $\vec{v}$ com mesma origem do representante de $\vec{u}$

Observação: O vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.

f) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ***ortogonais*** se algum representante de $\vec{u}$ forma ângulo reto com algum representante de $\vec{v}$. Notação: $\vec{u} \perp \vec{v}$.

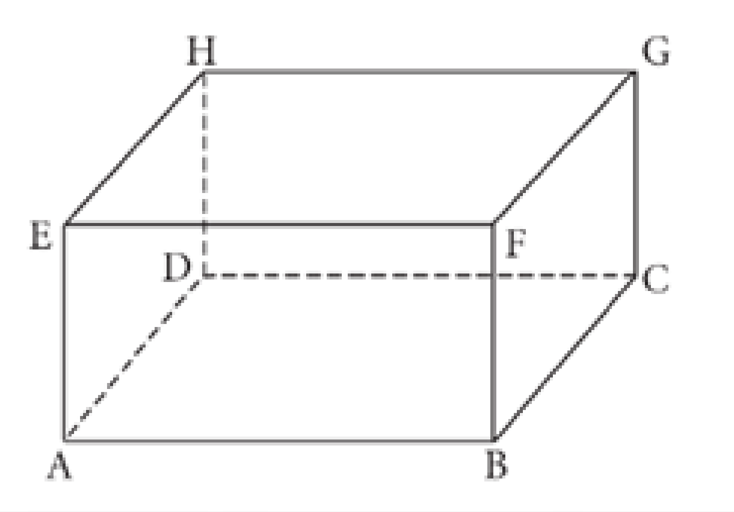


Escolhemos um representante de $\vec{v}$ com mesma origem do representante de $\vec{u}$

Observação: O vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.

g) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ***iguais*** se tiverem mesma norma, direção e sentido.

Exemplo: Considere o paralelepípedo retângulo abaixo e decida se as afirmações são verdadeiras ou falsas.



a) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$

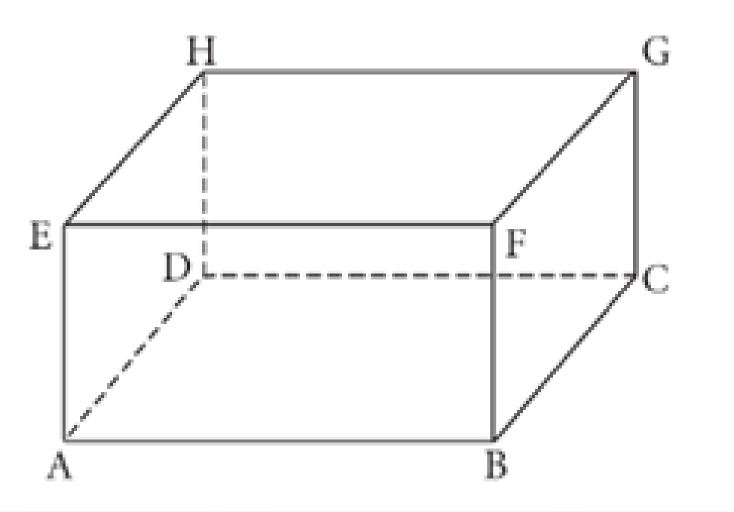
b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HG}$

c) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$

d) $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{HF}\|$

e) $\overrightarrow{BG} // \overrightarrow{ED}$

Exemplo: Considere o paralelepípedo retângulo abaixo e decida se as afirmações são verdadeiras ou falsas.



a) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$ V

b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HG}$ F

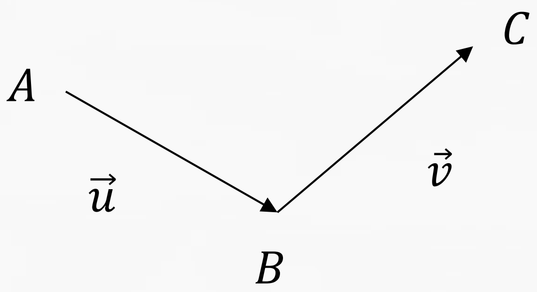
c) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$ V

d) $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{HF}\|$ V

e) $\overrightarrow{BG} // \overrightarrow{ED}$ F

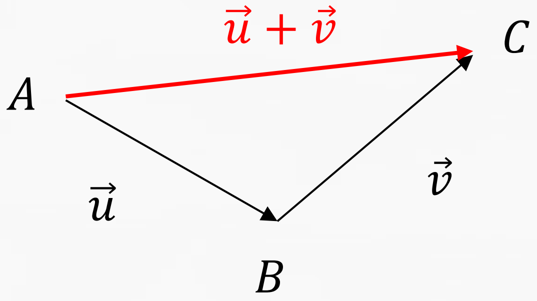
Operações com vetores

- **Adição de vetores:** Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. O ***vetor soma*** é o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ que tem (A, C) como representante.



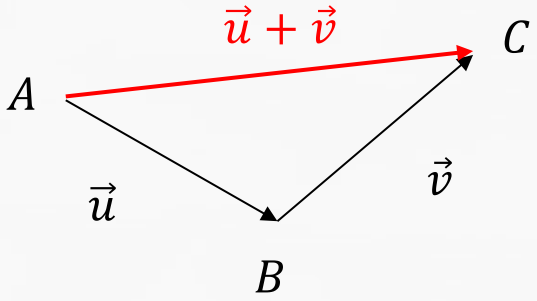
Operações com vetores

- **Adição de vetores:** Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. O ***vetor soma*** é o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ que tem (A, C) como representante.



Operações com vetores

- **Adição de vetores:** Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. O ***vetor soma*** é o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ que tem (A, C) como representante.

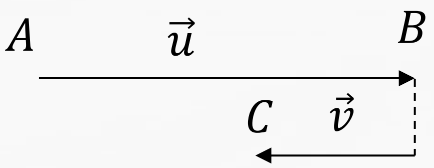


Observações:

a) No caso em que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos:

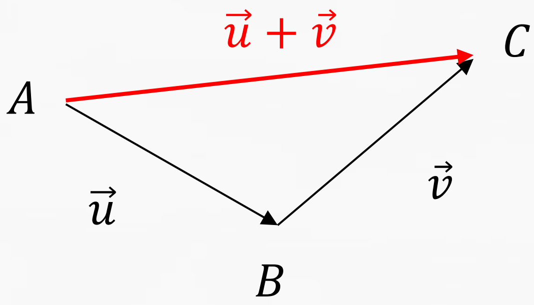
Mesmo sentido

Sentidos opostos



Operações com vetores

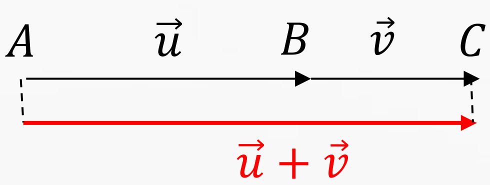
- **Adição de vetores:** Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. O ***vetor soma*** é o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ que tem (A, C) como representante.



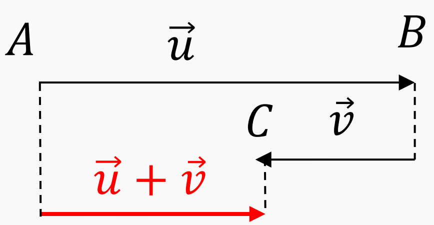
Observações:

a) No caso em que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos:

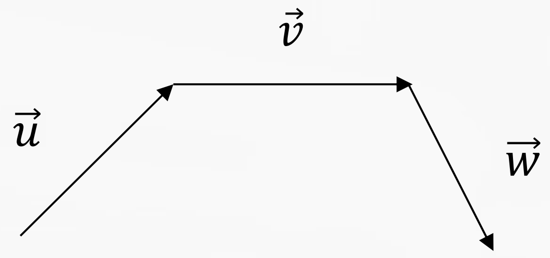
Mesmo sentido



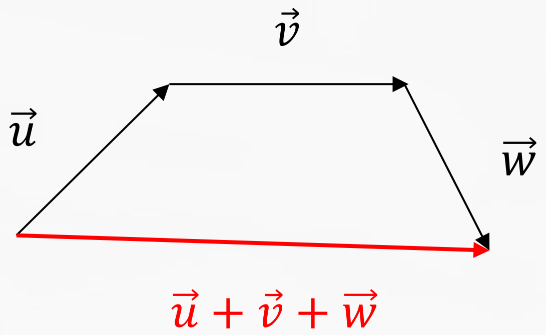
Sentidos opostos



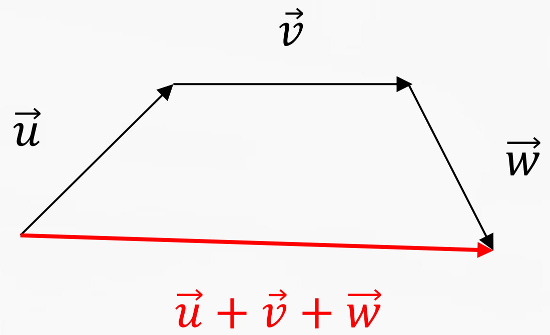
b) Para o caso de determinar a soma de três vetores ou mais, o procedimento é análogo ao feito anterior.



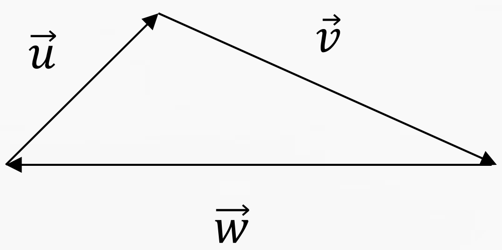
b) Para o caso de determinar a soma de três vetores ou mais, o procedimento é análogo ao feito anterior.



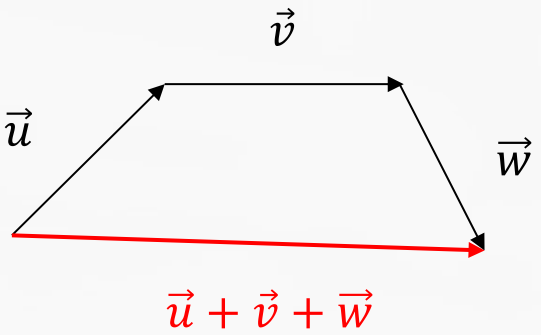
b) Para o caso de determinar a soma de três vetores ou mais, o procedimento é análogo ao feito anterior.



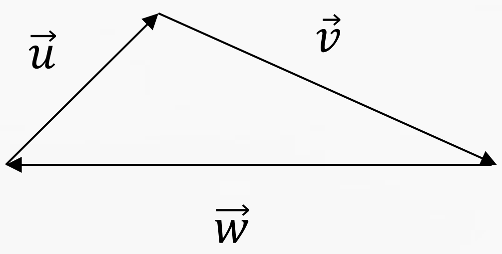
Em particular, se a extremidade do representante do último vetor coincidir com a origem do representante do primeiro vetor, a soma é o vetor nulo.



b) Para o caso de determinar a soma de três vetores ou mais, o procedimento é análogo ao feito anterior.

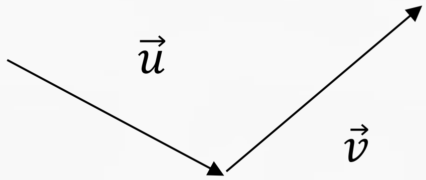


Em particular, se a extremidade do representante do último vetor coincidir com a origem do representante do primeiro vetor, a soma é o vetor nulo.

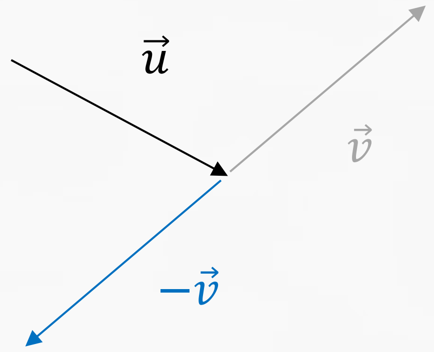


$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

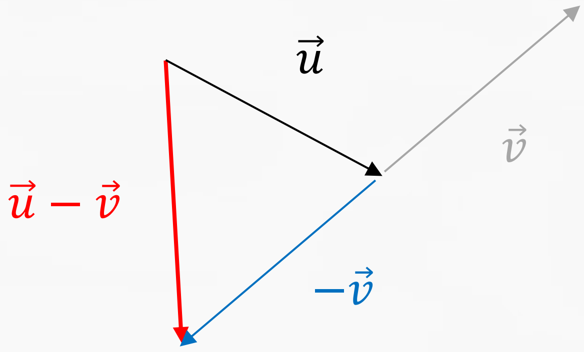
c) A ***diferença*** de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é a adição do vetor $\vec{u}$ com o vetor oposto de $\vec{v}$, isto é, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.



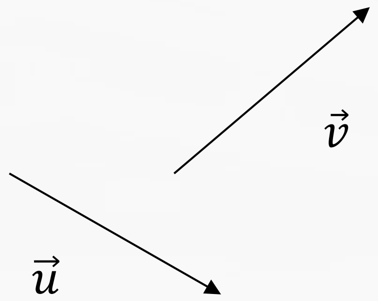
c) A ***diferença*** de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é a adição do vetor $\vec{u}$ com o vetor oposto de $\vec{v}$, isto é, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.



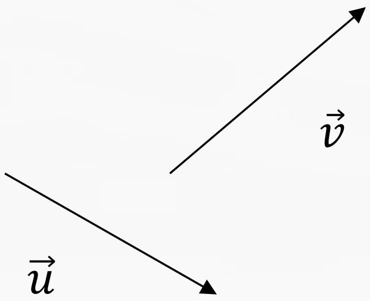
c) A ***diferença*** de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é a adição do vetor $\vec{u}$ com o vetor oposto de $\vec{v}$, isto é, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

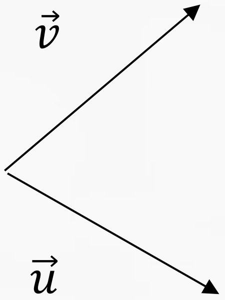


d) Outra maneira de somar dois vetores: ***Regra do paralelogramo***.



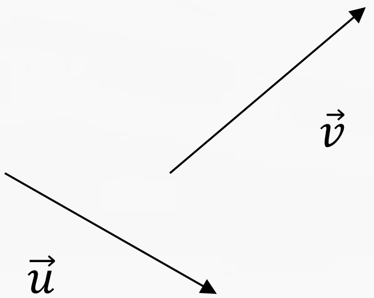
d) Outra maneira de somar dois vetores: ***Regra do paralelogramo***.

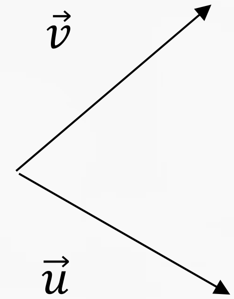




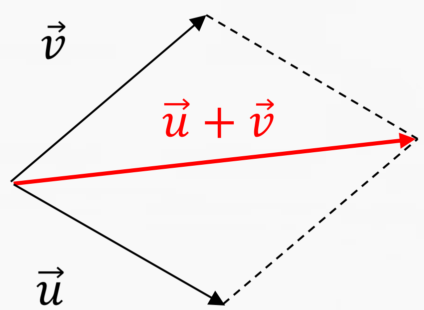
Tomamos representantes dos vetores com origem no mesmo ponto

d) Outra maneira de somar dois vetores: ***Regra do paralelogramo***.





Tomamos representantes dos vetores com origem no mesmo ponto



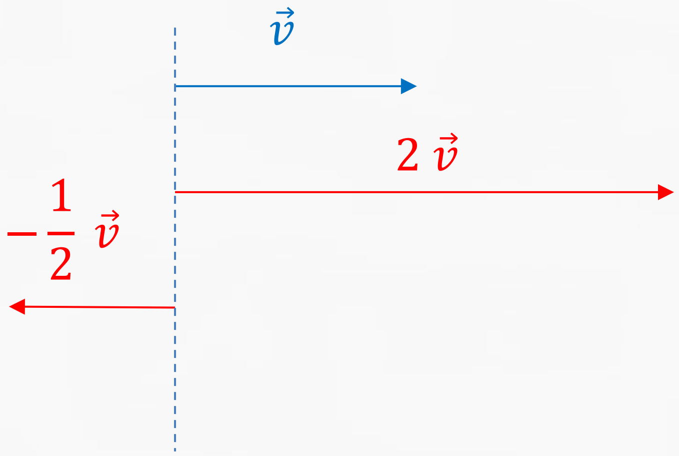
O vetor soma estará na diagonal do paralelogramo formado pelos dois vetores.

- Multiplicação de um escalar por um vetor: O produto de um número real $\alpha \neq 0$ (também chamado de escalar) por um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é o vetor $\alpha\vec{v}$ tal que:

i) $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$

ii) $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção

iii) $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentidos opostos se $\alpha < 0$.

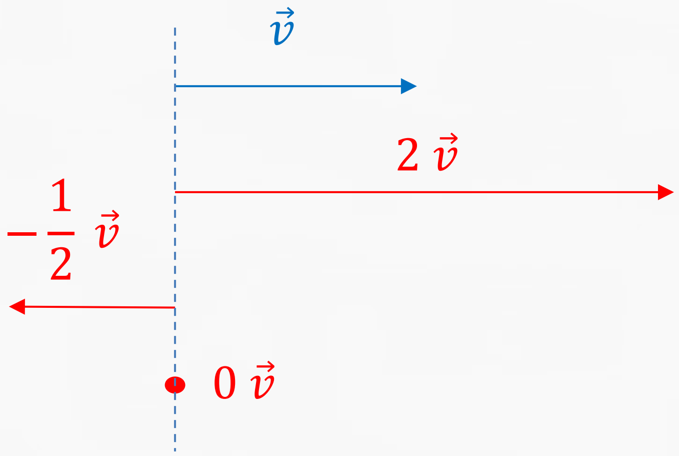


- Multiplicação de um escalar por um vetor: O produto de um número real $\alpha \neq 0$ (também chamado de escalar) por um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é o vetor $\alpha\vec{v}$ tal que:

i) $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$

ii) $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção

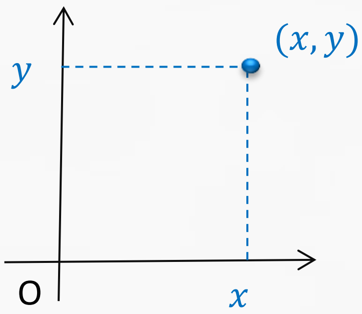
iii) $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentidos opostos se $\alpha < 0$.



Observação: Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$.

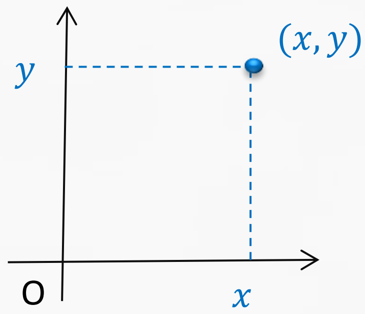
Vetores no plano

- O conjunto de todos os pares ordenados (x, y), com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, é chamado de ***plano cartesiano***.



Vetores no plano

- O conjunto de todos os pares ordenados (x, y), com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, é chamado de ***plano cartesiano***.



$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

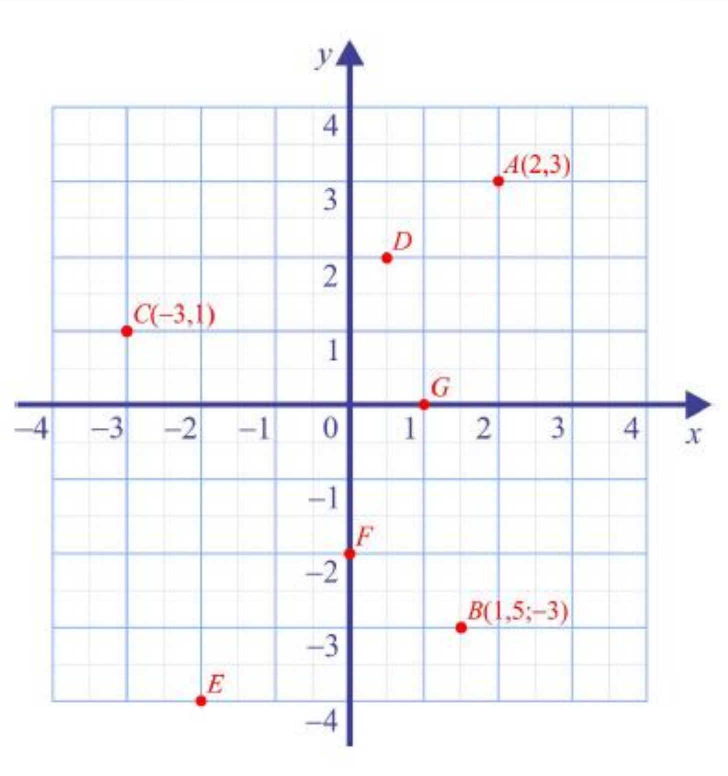
x: abscissa, y: ordenada

Exemplo: Represente no plano cartesiano os pontos:

$$A(2,3), B\left(\frac{3}{2}, -3\right), C(-3,1), D\left(\frac{1}{2}, 2\right), E(-2,-4), F(0,-2), G(1,0)$$

Exemplo: Represente no plano cartesiano os pontos:

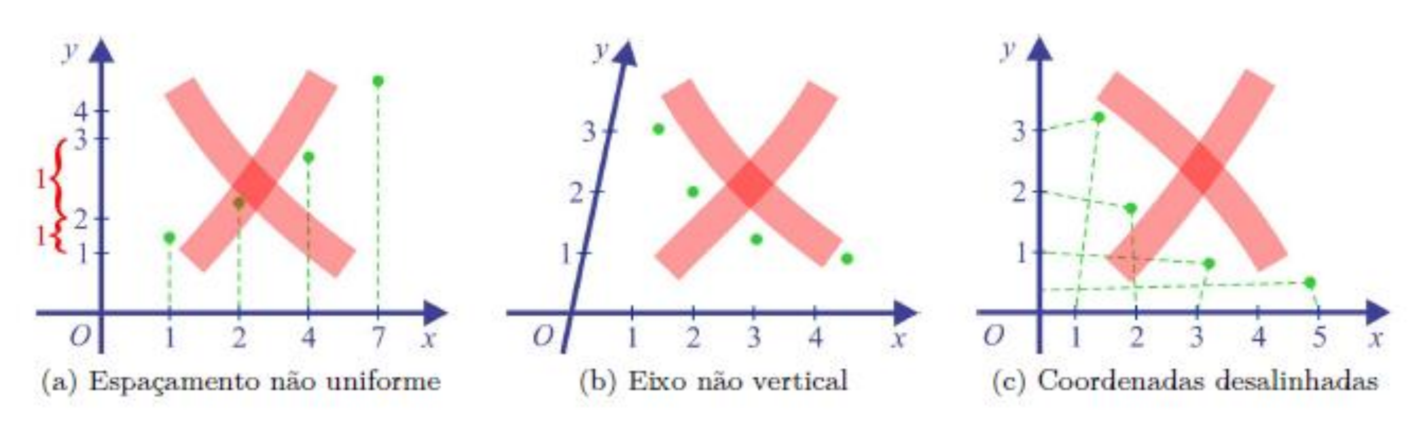
$$A(2,3), B\left(\frac{3}{2}, -3\right), C(-3,1), D\left(\frac{1}{2}, 2\right), E(-2,-4), F(0,-2), G(1,0)$$



Observação:

- Pontos sobre o eixo x são da forma $(x, 0)$
- Pontos sobre o eixo y são da forma $(0, y)$

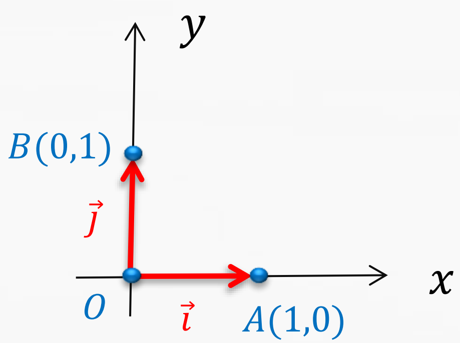
Observação: Erros que devem ser evitados:



- Sempre coloque o nome dos eixos!

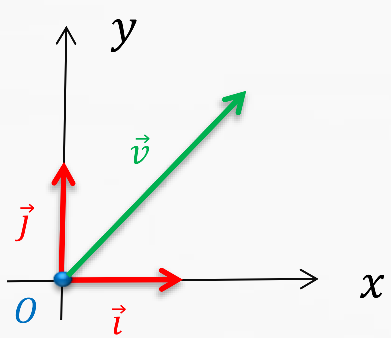
- No plano cartesiano, considere o vetor $\vec{\imath}$ com extremidades nos pontos $O(0,0)$ e $A(1,0)$ e o *vetor* $\vec{\jmath}$ com extremidades nos pontos $O(0,0)$ e $B(0,1)$.

- uma só dupla de número reais x e y tal que



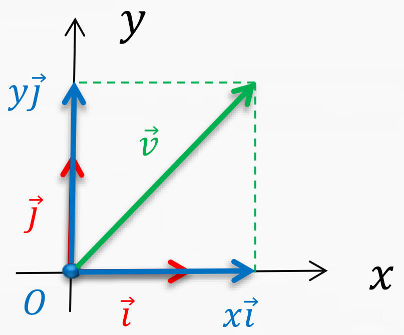
- No plano cartesiano, considere o vetor $\vec{i}$ com extremidades nos pontos $O(0,0)$ e $A(1,0)$ e o *vetor* $\vec{j}$ com extremidades nos pontos $O(0,0)$ e $B(0,1)$.

- Dado um vetor $\vec{v}$ qualquer do plano, existe uma só dupla de número reais x e y tal que



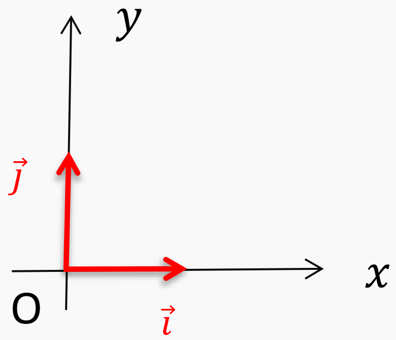
- No plano cartesiano, considere o vetor $\vec{i}$ com extremidades nos pontos $O(0,0)$ e $A(1,0)$ e o *vetor* $\vec{j}$ com extremidades nos pontos $O(0,0)$ e $B(0,1)$.

- Dado um vetor $\vec{v}$ qualquer do plano, existe uma só dupla de número reais x e y tal que

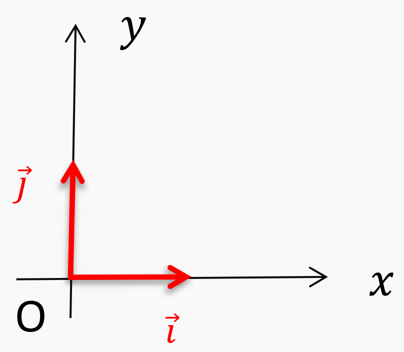


$$x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = \vec{v}$$

- O conjunto $C = \{\vec{i},\ \vec{j}\}$ é uma ***base no plano***, chamado de ***base canônica***. Essa base é particularmente importante, pois determina o sistema cartesiano ortogonal xOy.



- O conjunto $C = \{\vec{i}, \ \vec{j}\}$ é uma ***base no plano***, chamado de ***base canônica***. Essa base é particularmente importante, pois determina o sistema cartesiano ortogonal $x\text{O}y$.



Observação: Todo conjunto $\text{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ (com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não-paralelos) é uma base no plano.

- O vetor $\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ pode ser representado por $\vec{v} = (x, y)$.

- O vetor $\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ pode ser representado por $\vec{v} = (x, y)$.
- x, y são as ***componentes*** ou ***coordenadas*** de $\vec{v}$ na base canônica.
- x é a ***primeira componente*** ou ***abscissa*** de $\vec{v}$.
- y é a ***segunda componente*** ou ***ordenada*** de $\vec{v}$.

- O vetor $\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ pode ser representado por $\vec{v} = (x, y)$.
- x, y são as ***componentes*** ou ***coordenadas*** de $\vec{v}$ na base canônica.
- x é a ***primeira componente*** ou ***abscissa*** de $\vec{v}$.
- y é a ***segunda componente*** ou ***ordenada*** de $\vec{v}$.

Exemplos: $3\vec{i} - 5\vec{j} = (3, -5)$

$$-4\vec{i} = (-4,0)$$

$$3\vec{j} = (0,3)$$

$$\vec{0} = (0,0)$$

- O vetor $\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ pode ser representado por $\vec{v} = (x, y)$.
- x, y são as ***componentes*** ou ***coordenadas*** de $\vec{v}$ na base canônica.
- x é a ***primeira componente*** ou ***abscissa*** de $\vec{v}$.
- y é a ***segunda componente*** ou ***ordenada*** de $\vec{v}$.

Exemplos:

$$3\vec{i} - 5\vec{j} = (3, -5)$$

$$-4\vec{i} = (-4,0)$$

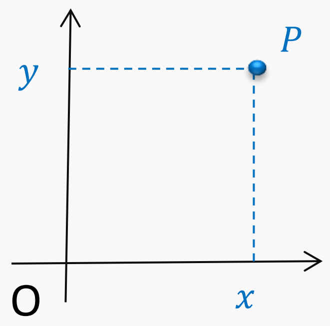
$$3\vec{j} = (0,3)$$

$$\vec{0} = (0,0)$$

Observação: A cada ponto $P(x, y)$ do plano corresponde um vetor

$$\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = (x, y)$$

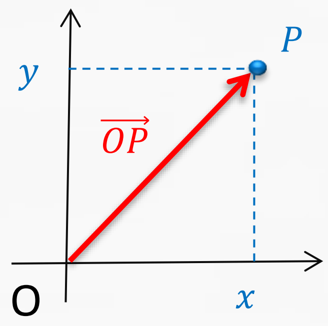
com origem na origem do plano e extremidade em P.



Observação: A cada ponto $P(x, y)$ do plano corresponde um vetor

$$\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = (x, y)$$

com origem na origem do plano e extremidade em P.



a) **Igualdade de vetores:** Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Notação: $\vec{u} = \vec{v}$.

a) Igualdade de vetores: Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Notação: $\vec{u} = \vec{v}$.

b) Adição e multiplicação por escalar: Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

a) **Igualdade de vetores:** Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Notação: $\vec{u} = \vec{v}$.

b) **Adição e multiplicação por escalar:** Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

Exemplo: Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (-1, 4)$, determine $\vec{u} + \vec{v}$, $2\vec{u}$ e $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

a) **Igualdade de vetores:** Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Notação: $\vec{u} = \vec{v}$.

b) **Adição e multiplicação por escalar:** Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

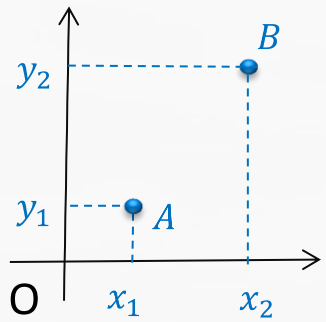
Exemplo: Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (-1, 4)$, determine $\vec{u} + \vec{v}$, $2\vec{u}$ e $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

$\vec{u} + \vec{v} = (2, -3) + (-1{,}4) = (2 - 1, -3 + 4) = (1{,}1)$

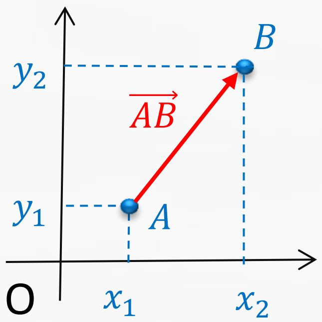
$2\vec{u} = 2 \cdot (2, -3) = \big(2 \cdot 2{,}2 \cdot (-3)\big) = (4, -6)$

$3\vec{u} - 2\vec{v} = 3 \cdot (2, -3) - 2 \cdot (-1{,}4) = (6, -9) - (-2{,}8) = (8, -17)$

c) **Vetor definido por dois pontos:** Considere o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade no ponto $B(x_2, y_2)$. Então,

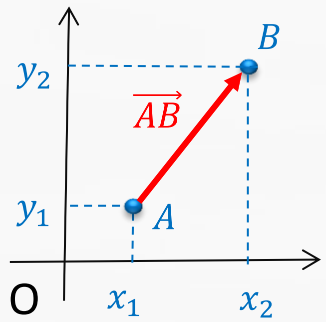


c) Vetor definido por dois pontos: Considere o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade no ponto $B(x_2, y_2)$. Então,



$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

c) Vetor definido por dois pontos: Considere o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade no ponto $B(x_2, y_2)$. Então,

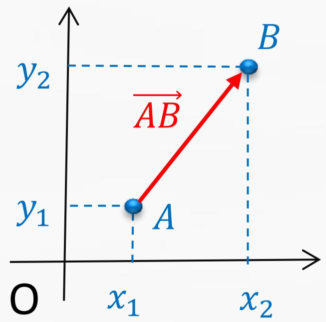


$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

d) Paralelismo de dois vetores: Se dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, ou seja,

$$(x_1, y_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

c) **Vetor definido por dois pontos:** Considere o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade no ponto $B(x_2, y_2)$. Então,



$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

d) **Paralelismo de dois vetores:** Se dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos, então existe α ∈ ℝ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, ou seja,

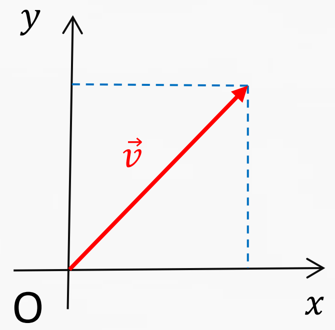
$$(x_1, y_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

Exemplo: Os vetores $\vec{u} = (-2, 3)$ e $\vec{v} = (-4, 6)$ são paralelos, pois $\vec{v} = \mathbf{2}\vec{u}$.

Observação: Considera-se o vetor nulo paralelo a qualquer vetor.

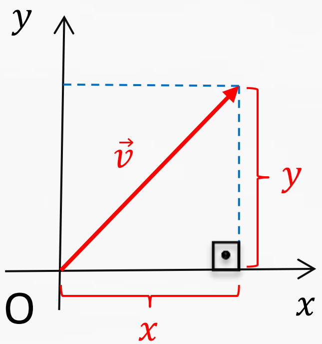
Observação: Considera-se o vetor nulo paralelo a qualquer vetor.

e) **Norma (ou módulo) de um vetor:** É o comprimento do vetor. Considere o vetor $\vec{v} = (x, y)$.



Observação: Considera-se o vetor nulo paralelo a qualquer vetor.

e) **Norma (ou módulo) de um vetor:** É o comprimento do vetor. Considere o vetor $\vec{v} = (x, y)$.



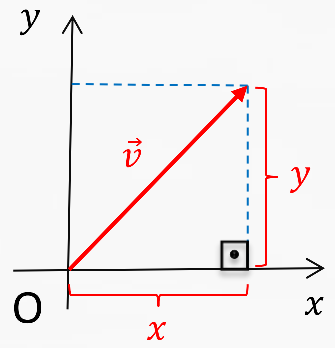
Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\|\vec{v}\|^2 = x^2 + y^2$$

Logo, $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Observação: Considera-se o vetor nulo paralelo a qualquer vetor.

e) Norma (ou módulo) de um vetor: É o comprimento do vetor. Considere o vetor $\vec{v} = (x, y)$.



Pelo Teorema de Pitágoras:

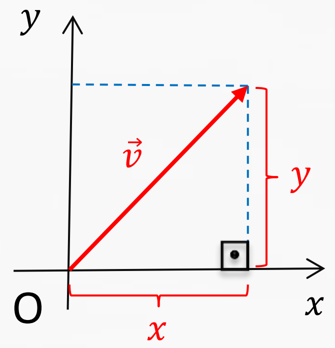
$\|\vec{v}\|^2 = x^2 + y^2$

Logo, $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemplo: Calcule a norma do vetor $\vec{v} = (2, -3)$.

Observação: Considera-se o vetor nulo paralelo a qualquer vetor.

e) **Norma (ou módulo) de um vetor:** É o comprimento do vetor. Considere o vetor $\vec{v} = (x, y)$.



Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\|\vec{v}\|^2 = x^2 + y^2$$

Logo, $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

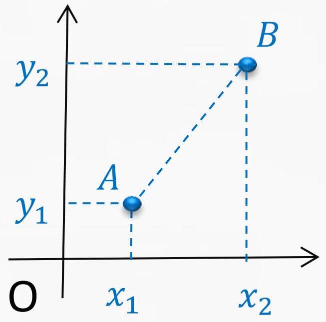
Exemplo: Calcule a norma do vetor $\vec{v} = (2, -3)$.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Observações:

1) A distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é o comprimento do vetor $\overrightarrow{AB}$, isto é,

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$



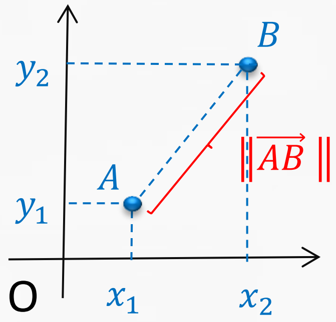
uma vez que $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Observações:

1) A distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é o comprimento do vetor $\overrightarrow{AB}$, isto é,

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,,$$

uma vez que $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

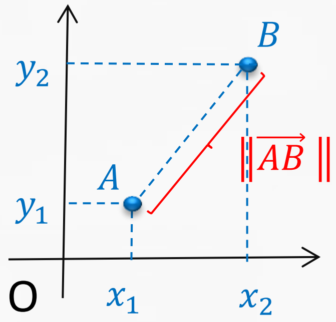


Observações:

1) A distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é o comprimento do vetor $\overrightarrow{AB}$, isto é,

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,,$$

uma vez que $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.



2) Se o vetor $\vec{u}$ for o versor do vetor $\vec{v}$, com $\vec{v} \neq \vec{0}$, então:

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$$

Exemplos:

1) Obtenha o versor do vetor $\vec{v} = (3, -4)$.

Exemplos:

1) Obtenha o versor do vetor $\vec{v} = (3, -4)$.

Seja $\vec{u}$ *o versor do vetor* $\vec{v}$. *Observe que* $||\vec{v}|| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$. *Logo,*

$$\vec{u} = \frac{1}{||\vec{v}||} \cdot \vec{v} = \frac{1}{5} \cdot (3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

2) Calcule a distância entre os pontos $A(2, -1)$ e $B(-1, 4)$.

Exemplos:

1) Obtenha o versor do vetor $\vec{v} = (3, -4)$.

Seja $\vec{u}$ *o versor do vetor* $\vec{v}$. *Observe que* $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$. *Logo,*

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{5} \cdot (3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

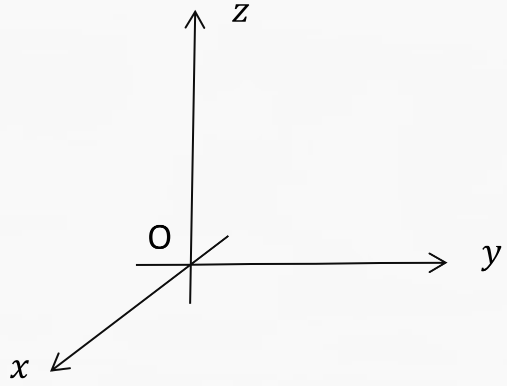
2) Calcule a distância entre os pontos $A(2, -1)$ e $B(-1, 4)$.

Temos que $\overrightarrow{AB} = \big(-1 - 2,\ 4 - (-1)\big) = (-3,\ 5)$. *Logo,*

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}.$$

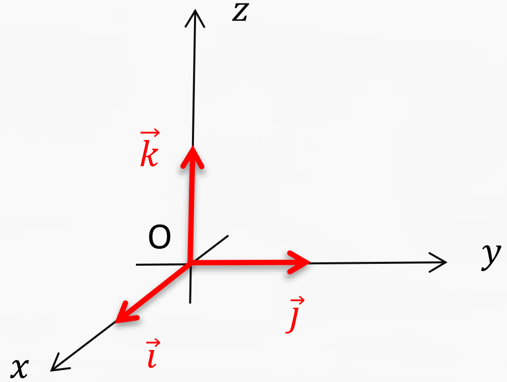
Vetores no espaço

- No espaço, consideramos a base canônica $C = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, com $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$, que determina o sistema cartesiano ortogonal $\mathrm{O}xyz$.



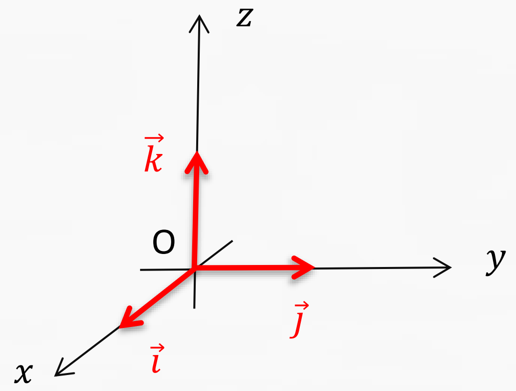
Vetores no espaço

- No espaço, consideramos a base canônica $C = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, com $\vec{\imath} = (1,0,0)$, $\vec{\jmath} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$, que determina o sistema cartesiano ortogonal $\mathrm{O}xyz$.



Vetores no espaço

- No espaço, consideramos a base canônica $C = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, com $\vec{\imath} = (1{,}0{,}0)$, $\vec{\jmath} = (0{,}1{,}0)$ e $\vec{k} = (0{,}0{,}1)$, que determina o sistema cartesiano ortogonal Oxyz.

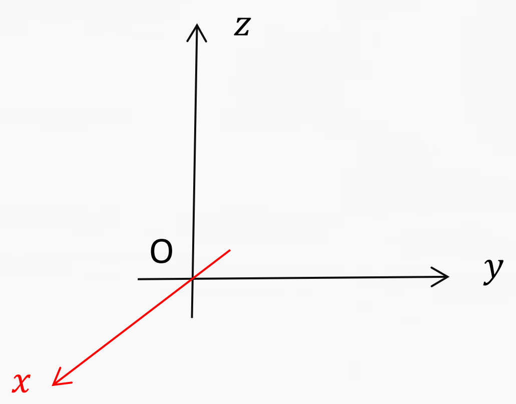


Observação: No espaço, todo conjunto de três vetores não-coplanares constitui uma de suas bases.

- Os vetores da base canônica determinam os três ***eixos cartesianos*** (ou ***eixos coordenados***):

- Os vetores da base canônica determinam os três ***eixos cartesianos*** (ou ***eixos coordenados***):

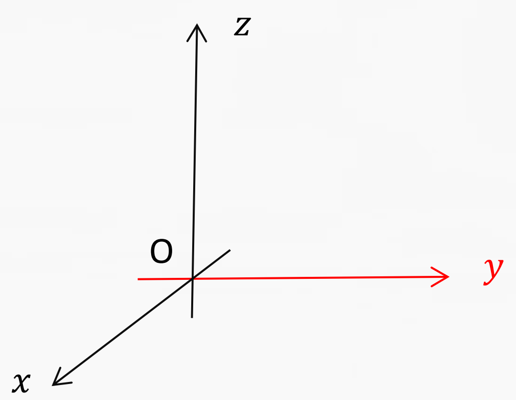
eixo x ou eixo das ***abscissas*** ($y = 0,\ z = 0$)



- Os vetores da base canônica determinam os três ***eixos cartesianos*** (ou ***eixos coordenados***):

eixo x ou eixo das ***abscissas*** ($y = 0,\ z = 0$)

eixo y ou eixo das ***ordenadas*** ($x = 0,\ z = 0$)

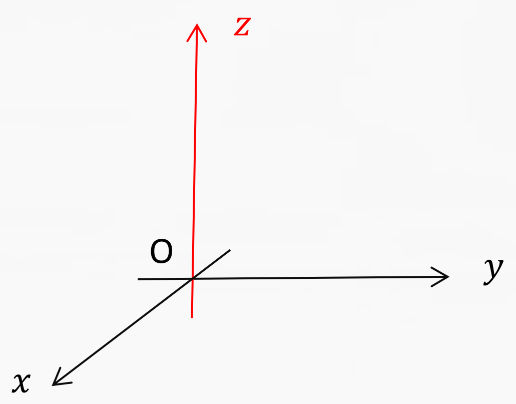


- Os vetores da base canônica determinam os três ***eixos cartesianos*** (ou ***eixos coordenados***):

eixo x ou eixo das ***abscissas*** ($y = 0,\ z = 0$)

eixo y ou eixo das ***ordenadas*** ($x = 0,\ z = 0$)

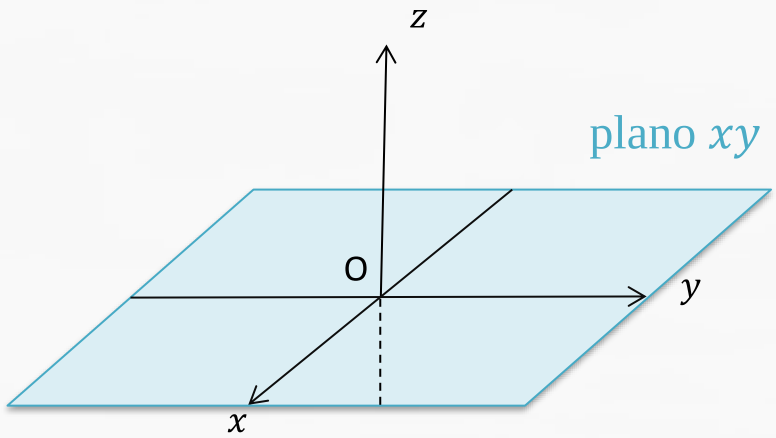
eixo z ou eixo das ***cotas*** ($x = 0,\ y = 0$)



- Cada dupla de eixos determina um ***plano coordenado***:

- Cada dupla de eixos determina um ***plano coordenado***:

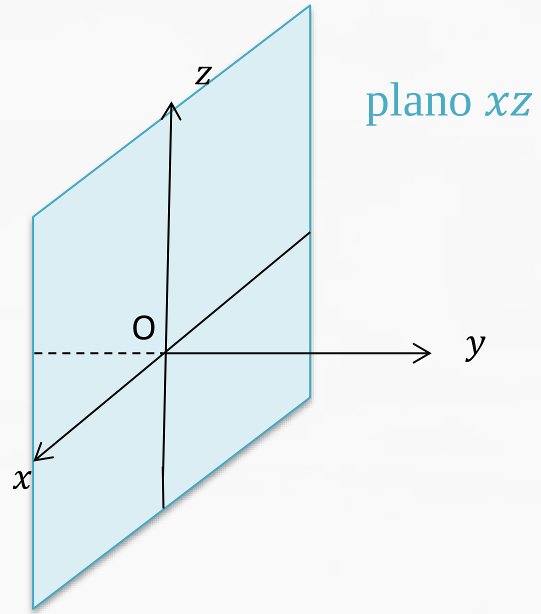
plano xy ($z = 0$)



- Cada dupla de eixos determina um ***plano coordenado***:

plano xy ($z = 0$)

plano xz ($y = 0$)

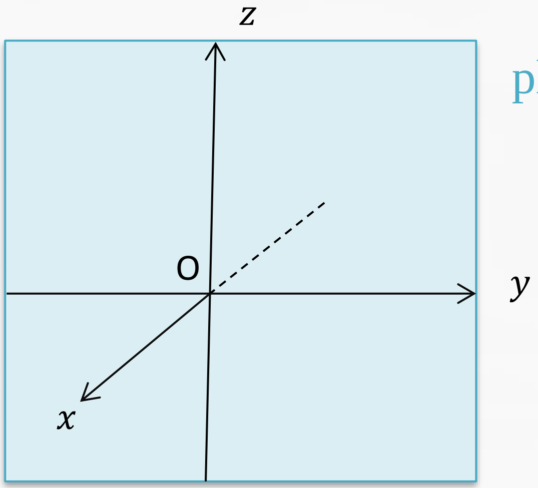


- Cada dupla de eixos determina um ***plano coordenado***:

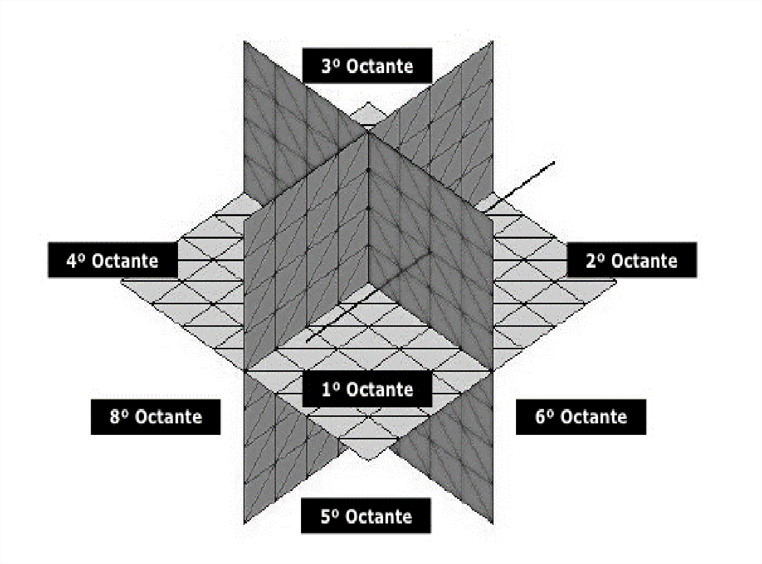
plano xy ($z = 0$)

plano xz ($y = 0$)

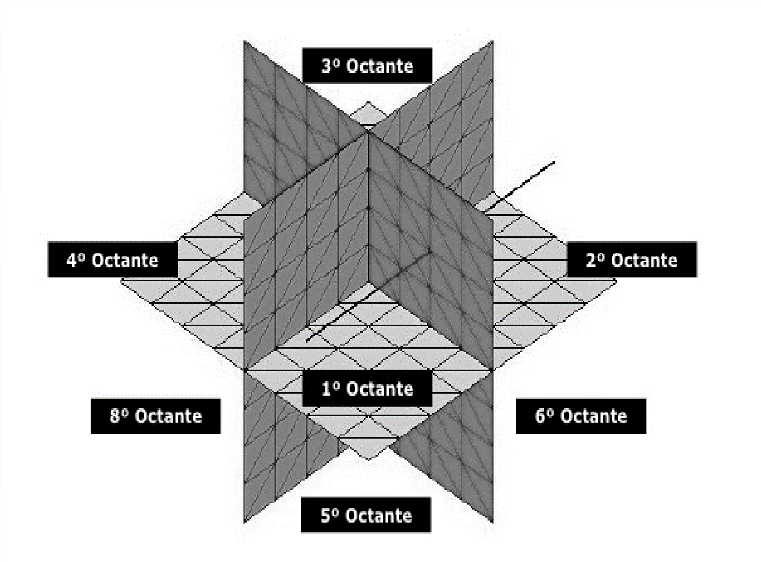
plano yz ($x = 0$)



- Os três planos coordenados dividem o espaço em oito regiões denominadas ***octantes***.



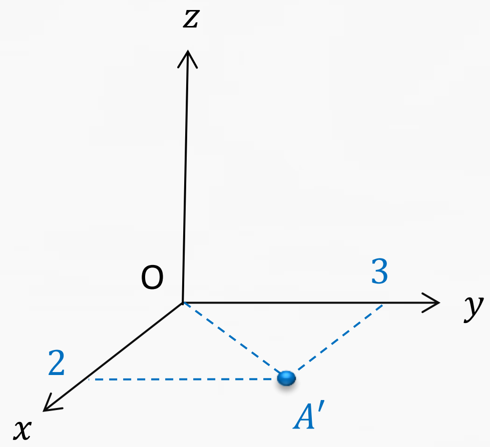
- Os três planos coordenados dividem o espaço em oito regiões denominadas ***octantes***.



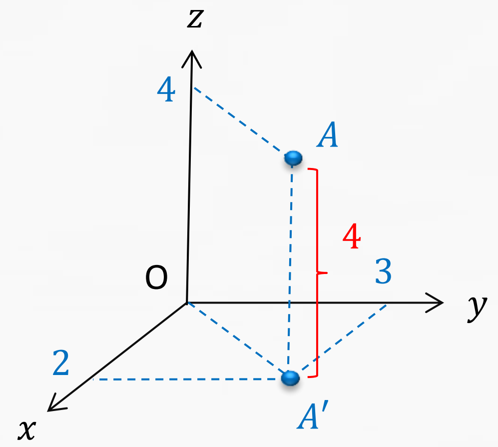
- A cada octante correspondem pontos cujas coordenadas têm sinais de acordo com o sentido positivo adotado para os eixos.

- Para marcar um ponto no espaço, digamos $A(2,3,4)$, procedemos da seguinte maneira:

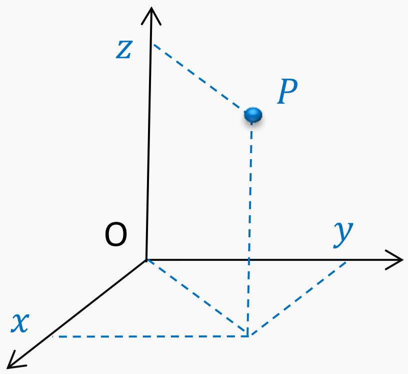
- Para marcar um ponto no espaço, digamos $A(2, 3, 4)$, procedemos da seguinte maneira:
    - marca-se o ponto $A'(2, 3, 0)$ no plano xy;



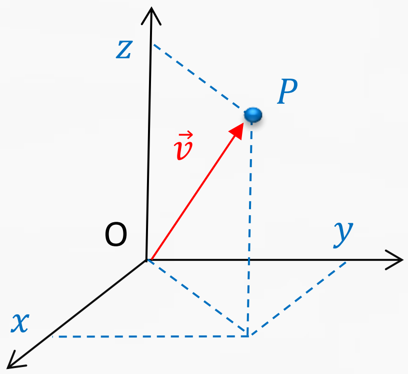
- Para marcar um ponto no espaço, digamos $A(2,3,4)$, procedemos da seguinte maneira:
    - marca-se o ponto $A'(2,3,0)$ no plano xy;
    - desloca-se A' 4 unidades para cima, paralelamente ao eixo z (se fosse -4 seriam 4 unidades para baixo).



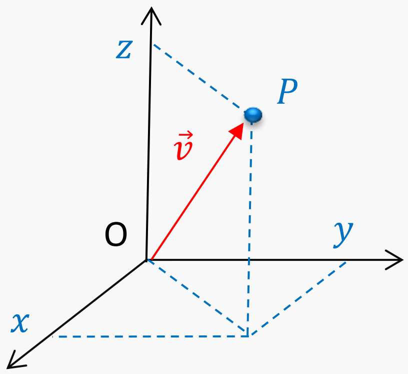
- Assim como no plano, a cada ponto $P(x, y, z)$ do espaço corresponde o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$, com origem em O e extremidade em P.



- Assim como no plano, a cada ponto $P(x, y, z)$ do espaço corresponde o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$, com origem em O e extremidade em P.



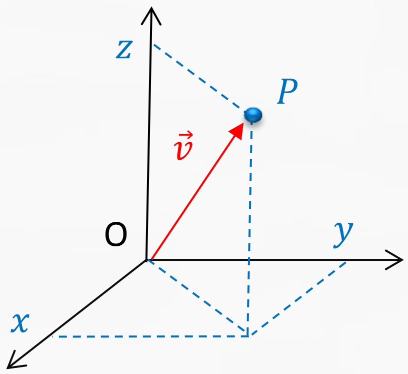
- Assim como no plano, a cada ponto $P(x,y,z)$ do espaço corresponde o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x,y,z)$, com origem em O e extremidade em P.



x, y, z: ***componentes*** ou ***coordenadas*** de $\vec{v}$ na base canônica.

x: ***abscissa***, y: ***ordenada***, z: ***cota.***

- Assim como no plano, a cada ponto $P(x, y, z)$ do espaço corresponde o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$, com origem em O e extremidade em P.

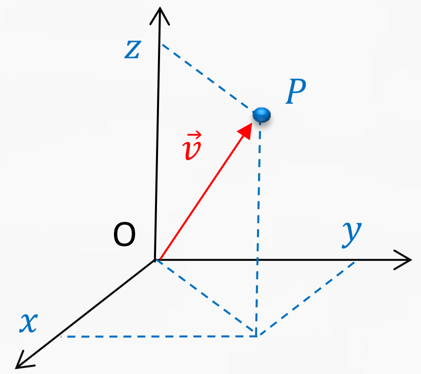


x, y, z: ***componentes*** ou ***coordenadas*** de $\vec{v}$ na base canônica.

x: ***abscissa***, y: ***ordenada***, z: ***cota.***

Exemplo: $2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

- Assim como no plano, a cada ponto $P(x, y, z)$ do espaço corresponde o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$, com origem em O e extremidade em P.



x, y, z: ***componentes*** ou ***coordenadas*** de $\vec{v}$ na base canônica.

x: ***abscissa***, y: ***ordenada***, z: ***cota.***

Exemplo: $2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = (2, -3, 1)$.

a) Igualdade de vetores: Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

Notação: $\vec{u} = \vec{v}$.

a) Igualdade de vetores: Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

Notação: $\vec{u} = \vec{v}$.

b) Adição e multiplicação por escalar: Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
- $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$

a) Igualdade de vetores: Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

Notação: $\vec{u} = \vec{v}$.

b) Adição e multiplicação por escalar: Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
- $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$

c) Vetor definido por dois pontos: Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos quaisquer no espaço, então:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

d) Paralelismo de dois vetores: Se os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são paralelos, então existe α ∈ ℝ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, ou seja,

$$(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2, \alpha z_2)$$

d) Paralelismo de dois vetores: Se os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são paralelos, então existe α ∈ ℝ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, ou seja,

$$(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2, \alpha z_2)$$

e) Norma de um vetor: A norma do vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ é dada por

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Referências bibliográficas

- WINTERLE, Paulo. ***Vetores e Geometria Analítica***. 2 ed. São Paulo – SP: Pearson Education do Brasil, 2014.

- BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan. ***Geometria Analítica – Um tratamento vetorial***. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

- STEINBRUCH, Alfredo, WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron, 1987.