# Engenharia de Computação

COENC-AP

## LÓGICA DE PREDICADOS

Professora Dra. Tamara Angélica Baldo

# BIBLIOGRAFIA DA AULA:

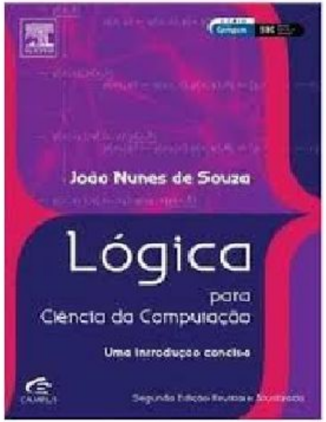


Figura: Souza, João Nunes de. Lógica para ciência da computação e áreas afins. 3 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

# ORGANIZAÇÃO DA AULA:

- Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos Semânticos de Dedução

**(Definição: Alfabeto)** O alfabeto da Lógica de Predicados:

1. Símbolos de Pontuação: ( , )
2. Um conjunto enumerável de símbolos para variáveis: $x, y, z, w, x_1, y_1, \ldots$
3. Um conjunto enumerável de símbolos para funções: $f, g, h, f_1, g_1, \ldots$
4. um conjunto enumerável de símbolos para predicados: $p, q, r, p_1, q_1, \ldots$
5. Conectivos: $\neg, \vee, \forall, \exists$

   obs: os conectivos $\longrightarrow, \wedge, \longleftrightarrow$ podem ser reescritos utilizando os acima

- Elementos básicos:
  - termos
  - átomos
  - fórmulas

**(Definição: Termo)** O conjunto dos termos da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz:

- as variáveis são termos
- se $t_1, \ldots, t_n$ são termos e $\check{f}$ é um símbolo para função n-ária, então $\check{f}(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo

(**Definição: Átomo**) O conjunto de átomos da Linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz:

1. os símbolos proposicionais são átomos
2. se $t_1, \ldots, t_n$ são termos e $\breve{p}$ um símbolo para predicado n-ário, então, $\breve{p}(t_1, \ldots, t_n)$ é um átomo

**(Definição: Fórmula)** O conjunto das fórmulas da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz:

1. Todo átomo é uma fórmula
2. Se $H$ é uma fórmula, então $\neg H$ é uma fórmula
3. Se $H$ e $G$ é uma fórmula, então $H \vee G$ é uma fórmula
4. Se $H$ é uma fórmula e $\check{x}$ uma variável, então $((\forall \check{x})H)$ e $((\exists \check{x})H)$ são fórmulas

**(Correspondência entre quantificadores)** É possível definir o quantificador $\exists$ a partir do $\forall$ (e vice-versa). Considere uma fórmula $H$ e uma variável $\check{x}$. Os quantificadores existencial e universal, se relacionam:

**1.** $((\forall \check{x})H)$ denota $\neg((\exists \check{x})\neg H) = \neg(\exists \check{x})H$

**2.** $((\exists \check{x})H)$ denota $\neg((\forall \check{x})\neg H) = \neg(\forall \check{x})H$

Fazer um exemplo

**(Tamanho de uma fórmula)** Dada uma fórmula $H$ da Lógica de Predicados, o comprimento/tamanho/complexidade de $H$, denotado por $|H|$ ou por $comp[H]$, é definido como:

- Se $H$ é um átomo, então $|H| = 1$
- $|\neg H| = 1 + |H|$
- Se $H = A \bigcirc B$, então $|A \bigcirc B| = 1 + |A| + |B|$, onde $\bigcirc = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \longleftrightarrow\}$
- Se $H = (\boxminus x)G$, onde $\boxminus = \{\forall, \exists\}$ então $|(\boxminus x)G| = 1 + |G|$

Fazer um exemplo

Exemplo: considere a fórmula $(\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \longrightarrow (\forall y)q(z, y, x, f(z_1)))$

- Escopo do $(\forall x)$ em $E$ é $((\forall z)p(x, y, w, z) \longrightarrow (\forall y)q(z, y, x, f(z_1)))$
- Escopo do $(\exists y)$ em $E$ é $((\forall z)p(x, y, w, z) \longrightarrow (\forall y)q(z, y, x, f(z_1)))$
- Escopo do $(\forall z)$ em $E$ é $p(x, y, w, z)$
- Escopo do $(\forall y)$ em $E$ é $q(z, y, x, f(z_1)))$

Fazer um exemplo

# ORGANIZAÇÃO DA AULA:

- Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos Semânticos de Dedução

# Interpretação informal de um PREDICADO

- Para interpretar um átomo, como $p(x)$, devemos definir o domínio da interpretação (e da valoração: T ou F). Ou seja, não é tão simples quanto na Lógica Proposicional, onde não necessário definir tal domínio.

# Interpretação informal de um PREDICADO

- Para interpretar um átomo, como $p(x)$, devemos definir o domínio da interpretação (e da valoração: T ou F). Ou seja, não é tão simples quanto na Lógica Proposicional, onde não necessário definir tal domínio.
- O resultado da interpretação de um átomo é VERDADEIRO (1) ou FALSO (0).

# Interpretação informal de um PREDICADO

- Para interpretar um átomo, como $p(x)$, devemos definir o domínio da interpretação (e da valoração: T ou F). Ou seja, não é tão simples quanto na Lógica Proposicional, onde não necessário definir tal domínio.
- O resultado da interpretação de um átomo é VERDADEIRO (1) ou FALSO (0).
- O resultado da interpretação de uma constante é um elemento do domínio da interpretação.

## Interpretação informal de um PREDICADO

- Para interpretar um átomo, como $p(x)$, devemos definir o domínio da interpretação (e da valoração: T ou F). Ou seja, não é tão simples quanto na Lógica Proposicional, onde não necessário definir tal domínio.
- O resultado da interpretação de um átomo é VERDADEIRO (1) ou FALSO (0).
- O resultado da interpretação de uma constante é um elemento do domínio da interpretação.
- Os átomos podem ser combinados com conectivos e a interpretação das fórmulas é de modo semelhante a Lógica Proposicional.

# Interpretação informal de uma FUNÇÃO

- Para interpretar uma função, como $f(x)$, devemos definir o domínio da interpretação $I$.

# Interpretação informal de uma FUNÇÃO

- Para interpretar uma função, como $f(x)$, devemos definir o domínio da interpretação $I$.
- O resultado da interpretação de um termo é um elemento do domínio, ou universo da interpretação.

# Interpretação informal de uma FUNÇÃO

- Para interpretar uma função, como $f(x)$, devemos definir o domínio da interpretação $I$.
- O resultado da interpretação de um termo é um elemento do domínio, ou universo da interpretação.
- Os termos não podem ser combinados utilizando conectivos, como ocorre com os átomos.

## Interpretação informal de uma FUNÇÃO

- Para interpretar uma função, como $f(x)$, devemos definir o domínio da interpretação $I$.
- O resultado da interpretação de um termo é um elemento do domínio, ou universo da interpretação.
- Os termos não podem ser combinados utilizando conectivos, como ocorre com os átomos.
- O símbolo $f$ é um objeto sintático que pertence a Lógica de Predicados. Por outro lado, $I[f(x)]$ é um objeto semântico

## Interpretação informal de uma FUNÇÃO

- Para interpretar uma função, como $f(x)$, devemos definir o domínio da interpretação $I$.
- O resultado da interpretação de um termo é um elemento do domínio, ou universo da interpretação.
- Os termos não podem ser combinados utilizando conectivos, como ocorre com os átomos.
- O símbolo $f$ é um objeto sintático que pertence a Lógica de Predicados. Por outro lado, $I[f(x)]$ é um objeto semântico que pertence ao domínio das interpretações.
  - A interpretação para $f$ é uma função semântica $I[f]$, cujo domínio e contradomínio é o conjunto que define o universo da interpretação: $I[f]$ : domínio de $I \longrightarrow$ domínio de $I$

**(Definição: Regra semântica para fórmulas com quantificadores)** Seja $H$ uma fórmula da Lógica de Predicados, $x$ uma variável e $I$ uma interpretação sobre o domínio $U$. Os valores semânticos de $I[(\forall x)H]$ e $I[(\exists x)H]$ são definidos:

- $I[(\forall x)H] = T$ se, e somente se, $\forall d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = T$

**(Definição: Regra semântica para fórmulas com quantificadores)** Seja $H$ uma fórmula da Lógica de Predicados, $x$ uma variável e $I$ uma interpretação sobre o domínio $U$. Os valores semânticos de $I[(\forall x)H]$ e $I[(\exists x)H]$ são definidos:

- $I[(\forall x)H] = T$ se, e somente se, $\forall d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = T$
- $I[(\forall x)H] = F$ se, e somente se, $\exists d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = F$

**(Definição: Regra semântica para fórmulas com quantificadores)** Seja $H$ uma fórmula da Lógica de Predicados, $x$ uma variável e $I$ uma interpretação sobre o domínio $U$. Os valores semânticos de $I[(\forall x)H]$ e $I[(\exists x)H]$ são definidos:

- $I[(\forall x)H] = T$ se, e somente se, $\forall d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = T$
- $I[(\forall x)H] = F$ se, e somente se, $\exists d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = F$
- $I[(\exists x)H] = T$ se, e somente se, $\exists d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = T$

**(Definição: Regra semântica para fórmulas com quantificadores)** Seja $H$ uma fórmula da Lógica de Predicados, $x$ uma variável e $I$ uma interpretação sobre o domínio $U$. Os valores semânticos de $I[(\forall x)H]$ e $I[(\exists x)H]$ são definidos:

- $I[(\forall x)H] = T$ se, e somente se, $\forall d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = T$
- $I[(\forall x)H] = F$ se, e somente se, $\exists d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = F$
- $I[(\exists x)H] = T$ se, e somente se, $\exists d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = T$
- $I[(\exists x)H] = F$ se, e somente se, $\forall d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = F$

Exemplo [pág. 251-3a edição]: Considere a interpretação *I* sobre o domínio dos números naturais, tal que:

$I[x] = 3$
$I[a] = 5$
$I[f] = +$
$I[y] = 4$
$I[p] = <$

*Sejam as fórmulas:*

$H_3 = (\forall x)\ p(x,y)$
$H_4 = (\forall x)\ (\exists y)\ p(x,y)$

$H' = (\forall x)\ (\exists y)\ (p(x,y) \rightarrow p(x,y))$
$H'' = p(f(x,y),\ y) \rightarrow p(y,x)$

Exemplo [pág. 258-3a edição]: Considere a interpretação *I* sobre o domínio dos números naturais, tal que:

$I[x] = 3$
$I[a] = 5$
$I[f] = +$
$I[y] = 77$
$I[p] = <$

*Sejam as fórmulas:*

$H_{10} = (\forall x)\ ((\exists y)\ p(x,y) \rightarrow p(x,y))$

$H'_{11} = (\forall x)\ (\exists y)\ (p(x,y) \rightarrow (\exists y)\ p(x,y))$

Considere a interpretação *I* sobre o domínio dos números naturais, tal que:

$I[x] = 11$
$I[y] = 10$
$I[p] = \leq$
$I[f] = +$
*Sejam as fórmulas:*

$$H = (\forall x)\ (\exists y)\ p(x,y) \rightarrow p(f(x,y),y)$$

Considere a interpretação *I* sobre o domínio dos números naturais, tal que:

$I[x] = 11$
$I[y] =10$
$I[p] = \leq$
$I[q] = T \Leftrightarrow x$ *é ímpar*
$I[f] = +$
*Sejam as fórmulas:*

$H = (\forall x)\ (\exists y)\ (p(x,y) \wedge q(x) \rightarrow p(f(x,y),y))$

# ORGANIZAÇÃO DA AULA:

- Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos Semânticos de Dedução

- Satisfatibilidade
- Validade
- Contradição semântica
- Implicação
- Equivalência

**Satisfatibilidade**: Uma fórmula $H$ é satisfazível quando existe pelo menos uma interpretação $I$, tal que $I[H] = T$
Exemplo: Seja $H = (\forall x)p(x, y)$ e $I$ uma interpretação em $\mathbb{N}$, tal que, $I[y] = 0$ e $I[p] = \geq$. Logo, neste contexto, $I[H] = T$

**(Definição: Fórmula Válida)** Seja $H$ uma fórmula da Lógica de Predicados. Então $H$ é válida, se, e somente se, para toda interpretação $I$, $I[H] = T$

**Contradição semântica:** Dada uma fórmula $H$ na Lógica de Predicados, $H$ é uma contradição semântica se, e somente se, para toda interpretação $I[H] = F$

**Contradição semântica:** Dada uma fórmula $H$ na Lógica de Predicados, $H$ é uma contradição semântica se, e somente se, para toda interpretação $I[H] = F$

Exemplo: Seja uma fórmula $H = (\forall x)p(x) \wedge (\exists x)\neg p(x)$, com domínio $U$. Supondo que:
$I[H] = T \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x) \wedge (\exists x)\neg p(x)] = T$

**Contradição semântica:** Dada uma fórmula $H$ na Lógica de Predicados, $H$ é uma contradição semântica se, e somente se, para toda interpretação $I[H] = F$

Exemplo: Seja uma fórmula $H = (\forall x)p(x) \wedge (\exists x)\neg p(x)$, com domínio $U$. Supondo que:

$I[H] = T \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x) \wedge (\exists x)\neg p(x)] = T$

$\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T$ e $I[(\exists x)\neg p(x)] = T$

**Contradição semântica:** Dada uma fórmula $H$ na Lógica de Predicados, $H$ é uma contradição semântica se, e somente se, para toda interpretação $I[H] = F$

Exemplo: Seja uma fórmula $H = (\forall x)p(x) \wedge (\exists x)\neg p(x)$, com domínio $U$. Supondo que:
$I[H] = T \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x) \wedge (\exists x)\neg p(x)] = T$
$\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T$ e $I[(\exists x)\neg p(x)] = T$
$\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ e $\exists c \in U; < x \leftarrow c >$
$I[\neg p(x)] = T$

**Contradição semântica:** Dada uma fórmula $H$ na Lógica de Predicados, $H$ é uma contradição semântica se, e somente se, para toda interpretação $I[H] = F$

Exemplo: Seja uma fórmula $H = (\forall x)p(x) \wedge (\exists x)\neg p(x)$, com domínio $U$. Supondo que:
$I[H] = T \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x) \wedge (\exists x)\neg p(x)] = T$
$\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T$ e $I[(\exists x)\neg p(x)] = T$
$\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ e $\exists c \in U; < x \leftarrow c > I[\neg p(x)] = T$
$\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ e $\exists c \in U; < x \leftarrow c > I[p(x)] = F$

**Contradição semântica:** Dada uma fórmula $H$ na Lógica de Predicados, $H$ é uma contradição semântica se, e somente se, para toda interpretação $I[H] = F$

Exemplo: Seja uma fórmula $H = (\forall x)p(x) \wedge (\exists x)\neg p(x)$, com domínio $U$. Supondo que:
$I[H] = T \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x) \wedge (\exists x)\neg p(x)] = T$
$\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T$ e $I[(\exists x)\neg p(x)] = T$
$\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ e $\exists c \in U; < x \leftarrow c > I[\neg p(x)] = T$
$\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ e $\exists c \in U; < x \leftarrow c > I[p(x)] = F$
$\Leftrightarrow \forall d \in U; p_I(d) = T$ e $\exists c \in U; p_I(c)] = F$ **(contraditório)**

# ORGANIZAÇÃO DA AULA:

- Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos Semânticos de Dedução

...Quais foram os sistemas dedutivos estudados durante a Lógica Proposicional?

- Tabela-Verdade
- Axiomatização
- Dedução Natural
- Tableaux Analíticos