usando a Regra do Quociente, é muito mais fácil efetuar primeiro a divisão e escrever a função como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de derivar.

A seguir está um resumo das regras de derivação que aprendemos até agora:

Tabela de Fórmulas de Derivação

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f+g)' = f' + g'$	$(f-g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg' + gf'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$	

3.2 Exercícios

1. Encontre a derivada $f(x) = (1 + 2x^2)(x - x^2)$ de duas formas: usando a Regra do Produto e efetuando primeiro a multiplicação. As respostas são iguais?

2. Encontre a derivada da função

$$F(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + \sqrt{x}}{x^2}$$

de duas formas: usando a Regra do Quociente e simplificando antes. Mostre que suas respostas são equivalentes. Qual método você prefere?

3–26 Derive.

3. $f(x) = (3x^2 + 5x)e^x$
4. $g(x) = (x + 2\sqrt{x})e^x$
5. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$
6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$
7. $g(x) = \dfrac{3x - 1}{2x + 1}$
8. $f(t) = \dfrac{2t}{4 - t^2}$
9. $H(u) = (u - \sqrt{u})(u + \sqrt{u})$
10. $J(v) = (v^3 - 2v)(v^{-4} + v^{-2})$
11. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$
12. $f(z) = (1 - e^z)(z + e^z)$
13. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$
14. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2 + x}$
15. $y = \dfrac{t^3 + 3t}{t^2 - 4t + 3}$
16. $y = \dfrac{1}{t^3 + 2t^2 - 1}$
17. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$
18. $h(r) = \dfrac{ae^r}{b + e^r}$
19. $y = \dfrac{s - \sqrt{s}}{s^2}$
20. $y = (z^2 + e^z)\sqrt{z}$
21. $f(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t}}{t - 3}$
22. $V(t) = \dfrac{4 + t}{te^t}$
23. $f(x) = \dfrac{x^2e^x}{x^2 + e^x}$
24. $F(t) = \dfrac{At}{Bt^2 + Ct^3}$
25. $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$
26. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

27–30 Encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

27. $f(x) = (x^3 + 1)e^x$
28. $f(x) = \sqrt{x}\, e^x$
29. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + e^x}$
30. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

31–32 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto especificado.

31. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$, $(1, 0)$
32. $y = \dfrac{1 + x}{1 + e^x}$, $(0, \frac{1}{2})$

33–34 Encontre equações para a reta tangente e para a reta normal à curva no ponto especificado.

33. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$
34. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, $(1, 1)$

35. (a) A curva $y = 1/(1 + x^2)$ é chamada **bruxa de Maria Agnesi**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

36. (a) A curva $y = x/(1 + x^2)$ é denominada **serpentina**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto (3; 0,3).
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

37. (a) Se $f(x) = (x^3 - x)e^x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta em (a) é razoável, comparando os gráficos de f e f'.

38. (a) Se $f(x) = e^x/(2x^2 + x + 1)$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta em (a) é razoável, comparando os gráficos de f e f'.

39. (a) Se $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.
(b) Verifique se suas respostas em (a) são razoáveis, comparando os gráficos de f, f' e f''.

40. (a) Se $f(x) = (x^2 - 1)e^x$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.
(b) Verifique se suas respostas em (a) são razoáveis, comparando os gráficos de f, f' e f''.

41. Se $f(x) = x^2/(1 + x)$, encontre $f''(1)$.

42. Se $g(x) = x/e^x$, encontre $g^{(n)}(x)$.

43. Suponha que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ e $g'(5) = 2$. Encontre os seguintes valores.
(a) $(fg)'(5)$ (b) $(f/g)'(5)$ (c) $(g/f)'(5)$

44. Suponha que $f(4) = 2$, $g(4) = 5$, $f'(4) = 6$ e $g'(4) = -3$. Encontre $h'(4)$.
(a) $h(x) = 3f(x) + 8g(x)$ (b) $h(x) = f(x)g(x)$
(c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x) + g(x)}$

45. Se $f(x) = e^x g(x)$, onde $g(0) = 2$ e $g'(0) = 5$, encontre $f'(0)$.

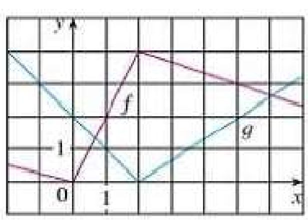
46. Se $h(2) = 4$ e $h'(2) = -3$, encontre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}.$$

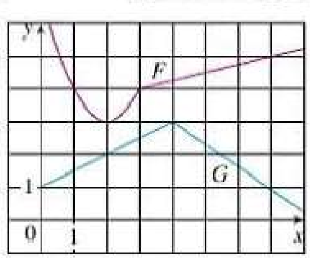
47. Se $g(x) = xf(x)$, onde $f(3) = 4$ e $f'(3) = -2$, encontre uma equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto onde $x = 3$.

48. Se $f(2) = 10$ e $f'(x) = x^2 f(x)$ para todo x, encontre $f''(2)$.

49. Se f e g são as funções cujos gráficos estão ilustrados, sejam $u(x) = f(x)g(x)$ e $v(x) = f(x)/g(x)$.
(a) Encontre $u'(1)$. (b) Encontre $v'(5)$.



50. Sejam $P(x) = F(x)G(x)$ e $Q(x) = F(x)/G(x)$, onde F e G são as funções cujos gráficos estão representados a seguir.
(a) Encontre $P'(2)$. (b) Encontre $Q'(7)$.



51. Se g for uma função derivável, encontre uma expressão para a derivada de cada uma das seguintes funções.
(a) $y = xg(x)$ (b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$ (c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

52. Se f for uma função derivável, encontre uma expressão para a derivada de cada uma das seguintes funções.
(a) $y = x^2 f(x)$ (b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$
(c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ (d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

53. Quantas retas tangentes à curva $y = x/(x + 1)$ passam pelo ponto $(1, 2)$? Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

54. Encontre as equações de retas tangentes à curva

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

que sejam paralelas à reta $x - 2y = 2$.

55. Encontre $R'(0)$, onde

$$R(x) = \frac{x - 3x^3 + 5x^5}{1 + 3x^3 + 6x^6 + 9x^9}.$$

Dica: Em vez de encontrar $R'(x)$ primeiro, deixe $f(x)$ ser o numerador e $g(x)$, o denominador de $R(x)$, e compute $R'(0)$ de $f(0)$, $f'(0)$, $g(0)$ e $g'(0)$.

56. Use o método do Exercício 55 para computar $Q'(0)$, onde

$$Q(x) = \frac{1 + x + x^2 + xe^x}{1 - x + x^2 - xe^x}.$$

57. Neste exercício, estimaremos a taxa segundo a qual a renda pessoal total está subindo na área metropolitana da cidade de Richmond-Petersburg, Virgínia. Em julho de 1999, a população dessa área era de 961 400, e estava crescendo aproximadamente em 9 200 pessoas por ano. O rendimento anual médio era de \$ 30 593 *per capita*, e essa média crescia em torno de \$ 1 400 por ano (bem acima da média nacional, de cerca de \$ 1 225 anuais). Use a Regra do Produto e os dados aqui fornecidos para estimar a taxa segundo a qual a renda pessoal total estava crescendo em Richmond-Petersburg em julho de 1999. Explique o significado de cada termo na Regra do Produto.

58. Um fabricante produz peças de tecido com tamanho fixo. A quantidade q de cada peça de tecido vendida (medida em metros) é uma função do preço p (em dólares por metro); logo, podemos escrever $q = f(p)$. Então, a receita total conseguida com o preço de venda p é $R(p) = pf(p)$.
(a) O que significa dizer que $f(20) = 10\,000$ e $f'(20) = -350$?
(b) Tomando os valores da parte (a), encontre $R'(20)$ e interprete sua resposta.

59. A equação de Michaelis-Menten para a enzima quimotripsina é

$$v = \frac{0{,}14[S]}{0{,}015 + [S]}$$

onde v é a taxa de uma reação enzimática e [S] é a concentração de um substrato S. Calcule $dv/d[S]$ e o interprete.

60. A biomassa $B(t)$ de uma população de peixes é a massa total dos membros da população no instante t. É o produto do número de indivíduos $N(t)$ na população e a massa média $M(t)$ de um peixe no instante t. No caso de barrigudinhos, a reprodução ocorre continuamente. Suponha que no instante $t = 4$ semanas, a população seja de 820 barrigudinhos e esteja aumentando a uma taxa de 50 barrigudinhos por semana, enquanto a massa média seja de 1,2 g e estaja crescendo a uma taxa de 0,14 g/semana. A que taxa a biomassa está crescendo quando $t = 4$?

61. (a) Use duas vezes a Regra do Produto para demonstrar que, se f, g e h forem deriváveis, então $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.
(b) Fazendo $f = g = h$ na parte (a), mostre que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x).$$

(c) Use a parte (b) para derivar $y = e^{3x}$.

62. (a) Se $F(x) = f(x)\,g(x)$, onde f e g têm derivadas de todas as ordens, mostre que $F'' = f''g + 2f'g' + fg''$.
(b) Encontre fórmulas análogas para F''' e $F^{(4)}$.
(c) Conjecture uma fórmula para $F^{(n)}$.

63. Encontre expressões para as primeiras cinco derivadas de $f(x) = x^2e^x$. Você percebe um padrão nestas expressões? Proponha uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ e demonstre-a usando a indução matemática.

64. (a) Se g for derivável, a **Regra do Recíproco** diz que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2},$$

Use a Regra do Quociente para demonstrar a Regra do Recíproco.
(b) Use a Regra do Recíproco para derivar a função do Exercício 16.
(c) Use a Regra do Recíproco para verificar que a Regra da Potência é válida para os inteiros negativos, isto é,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

para todo inteiro positivo n.

3.3 Derivadas de Funções Trigonométricas

Uma revisão das funções trigonométricas é dada no Apêndice D.

Antes de começar esta seção, talvez você precise revisar as funções trigonométricas. Em particular, é importante lembrar-se de que quando falamos sobre a função f definida para todo número real x por

$$f(x) = \text{sen}\, x$$

entende-se que sen x significa que o seno do ângulo cuja medida em *radianos* é x. Uma convenção similar é adotada para as outras funções trigonométricas cos, tg, cossec, sec e cotg. Lembre-se, da Seção 2.5, de que todas as funções trigonométricas são contínuas em todo número em seus domínios.

Se esboçarmos o gráfico da função $f(x) = \text{sen}\, x$ e usarmos a interpretação de $f'(x)$ como a inclinação da tangente à curva do seno a fim de esboçar o gráfico de f' (veja o Exercício 16 da Seção 2.8), isso dará a impressão de que o gráfico de f' pode ser igual à curva do cosseno (veja a Figura 1).

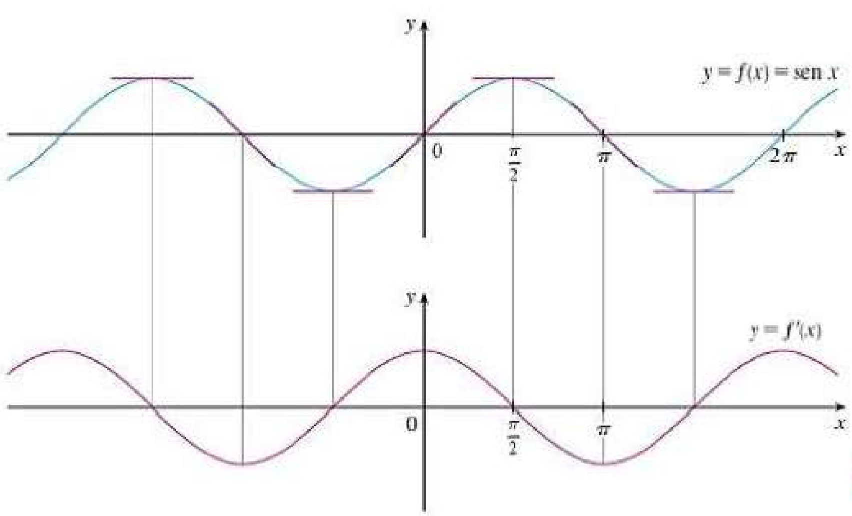


FIGURA 1

TEC O Visual 3.3 mostra uma animação da Figura 1.

Vamos tentar confirmar nossa conjectura de que, se $f(x) = \text{sen}\, x$, então $f'(x) = \cos x$. Da definição da derivada, temos

Usamos a fórmula da adição para o seno. Veja o Apêndice D.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}\, x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\, x \cos h + \cos x\, \text{sen}\, h - \text{sen}\, x}{h}$$