

3.6 Exercícios

- ✓ 1. Explique por que a função logarítmica natural $y = \ln x$ é usada mais frequentemente no cálculo do que as outras funções logarítmicas $y = \log_b x$.

2–22 Derive a função.

2. $f(x) = x \ln x - x$
- ✓ 3. $f(x) = \sin(\ln x)$
- ✓ 5. $f(x) = \sqrt[3]{\ln x}$
- ✓ 7. $f(x) = \log_{10}(1 + \cos x)$
- ✓ 9. $g(x) = \ln(xe^{-2x})$
- ✓ 11. $F(t) = (\ln t)^2 \sin t$
- ✓ 13. $g(x) = \ln(x\sqrt{x^2 - 1})$
- ✓ 15. $F(s) = \ln \ln s$
- ✓ 17. $T(z) = 2z \log_2 z$
- ✓ 19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$
- ✓ 21. $y = \lg[\ln(ax + b)]$
4. $f(x) = \ln(\sin^2 x)$
6. $f(x) = \ln \sqrt[3]{x}$
8. $f(x) = \log_{10} \sqrt{x}$
10. $g(t) = \sqrt{1 + \ln t}$
12. $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
14. $P(v) = \frac{\ln v}{1 - v}$
16. $y = \ln |1 + t - t^3|$
18. $y = \ln(\operatorname{cosec} x - \cotg x)$
20. $H(z) = \ln \sqrt{\frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$
22. $y = \log_2(x \log_5 x)$

23–26 Encontre y' e y'' .

- ✓ 23. $y = \sqrt{x} \ln x$
- ✓ 25. $y = \ln |\sec x|$
24. $y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$
26. $y = \ln(1 + \ln x)$

27–30 Derive f e encontre o domínio de f .

- ✓ 27. $f(x) = \frac{x}{1 - \ln(x - 1)}$
- ✓ 29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$
28. $f(x) = \sqrt{2 + \ln x}$
30. $f(x) = \ln \ln \ln x$

- ✓ 31. Se $f(x) = \ln(x + \ln x)$, encontre $f'(1)$.

32. Se $f(x) = \cos(\ln x^2)$, encontre $f'(1)$.

33–34 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

33. $y = \ln(x^2 - 3x + 1)$, $(3, 0)$
34. $y = x^2 \ln x$, $(1, 0)$

35. Se $f(x) = \sin x + \ln x$, encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f' .

36. Encontre as equações das retas tangentes para a curva $y = (\ln x)/x$ nos pontos $(1, 0)$ e $(e, 1/e)$. Ilustre fazendo o gráfico da curva e de suas retas tangentes.

37. Seja $f(x) = cx + \ln(\cos x)$. Para qual valor de c ocorre $f'(\pi/4) = 6$?

38. Seja $f(x) = \log_b(3x^2 - 2)$. Para qual valor de b ocorre $f'(1) = 3$?

39–50 Use a derivação logarítmica para achar a derivada de função.

- ✓ 39. $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$
- ✓ 41. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$
- ✓ 43. $y = x^x$
- ✓ 45. $y = x^{\sin x}$
- ✓ 47. $y = (\cos x)^x$
- ✓ 49. $y = (\lg x)^{1/x}$
40. $y = \sqrt{x} e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$
42. $y = \sqrt{x} e^{x^2-x}(x + 1)^{2/3}$
44. $y = x^{\cos x}$
46. $y = (\sqrt{x})^x$
48. $y = (\sin x)^{\ln x}$
50. $y = (\ln x)^{\cos x}$

- ✓ 51. Encontre y' se $y = \ln(x^2 + y^2)$.

52. Encontre y' se $x^y = y^x$.

53. Encontre uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = \ln(x - 1)$.

54. Encontre $\frac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

55. Use a definição da derivada para demonstrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

56. Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ para qualquer $x > 0$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

3.7 Taxas de Variação nas Ciências Naturais e Sociais

Sabemos que se $y = f(x)$, então a derivada dy/dx pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x . Nesta seção examinaremos algumas das aplicações dessa ideia na física, química, biologia, economia e em outras ciências.

Vamos nos recordar da Seção 2.7, que apresentou a ideia básica das taxas de variação. Se x variar de x_1 a x_2 , então a variação em x será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$