Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Engenharia de Computação

Disciplina: **Introdução à Lógica para Computação**
Professora: **Tamara Angélica Baldo**
Monitora: **Mariana Gonçalves Rodrigues**

EXERCÍCIOS DE LÓGICA (P1)

Nome: ____ **RA:** __________

Instruções:

- Escreva a solução em um papel, para melhor visualização e aprendizado;
- Estes exercícios não estão valendo nota. Sendo assim, não precisam ser postados no Moodle;
- Este gabarito está em fase de revisão. Caso note algum equívoco, escreva para a professora responsável para que este possa ser corrigido.

CAPÍTULO 1

1.1 Simplificar as seguintes fórmulas, removendo os parênteses desnecessários:

A) $(\mathrm{p} \vee q)$

C) $(\mathrm{p} \rightarrow (\mathrm{q} \rightarrow (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q})))$

E) $\neg(\mathrm{p} \wedge (\mathrm{q} \vee r))$

1.3 Dê o conjunto de sub fórmulas das fórmulas a seguir. Note que os parênteses implícitos são fundamentais para decidir quais são as sub fórmulas:

A) $\neg\ \mathrm{p} \rightarrow p$

E) $\mathrm{p} \wedge \neg\ (\mathrm{p} \rightarrow \neg\ \mathrm{q}) \vee \neg\ \mathrm{q}$

1.4 Calcule a complexidade de cada fórmula do exercício anterior. Note que a posição exata dos parênteses não influencia a complexidade da fórmula!

A) $\neg \mathrm{p} \rightarrow p$

E) $\mathrm{p} \wedge \neg(\mathrm{p} \rightarrow \neg \mathrm{q}) \vee \neg \mathrm{q}$

1.6 Com base nos símbolos proposicionais da Seção 1.2.4, expressar os seguintes fatos com fórmulas da lógica proposicional.

A) Uma criança não é um jovem.

C) Se um adulto é trabalhador, então ele não está aposentado.

D) Para ser aposentado, a pessoa deve ser um adulto ou um idoso.

1.7 Considere duas valorações V1 e V2 tais que V1 valora todos os átomos em 1, e V2, átomos em 0. Computar como V1 e V2 valoram as fórmulas:

A) $\neg\ \mathrm{p} \rightarrow q$

C) $\mathrm{p} \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow (p \wedge \mathrm{q} \wedge \mathrm{r})$

G) $\mathrm{p} \wedge \neg \mathrm{q}$

1.9 Classificar as fórmulas a seguir de acordo com sua satisfatibilidade, validade, falsificabilidade ou insatisfatilibilidade:

A) $(\mathrm{p} \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

C) $\mathrm{p} \rightarrow q \rightarrow (p \wedge \mathrm{q})$

G) $\neg(\mathrm{p} \rightarrow p \vee q)$

1.10 Encontre uma valoração que satisfaça as seguintes fórmulas.

C) $(\mathrm{p} \to q) \to p$

1.14 Prove ou refute as seguintes consequências lógicas usando Tabelas da Verdade:

A) $\neg\mathrm{p} \to\neg\mathrm{q} \models p \to q$

C) $\mathrm{p} \to q \models p \to q \vee r$

E) $\neg(\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \models\neg\mathrm{p} \wedge \neg\mathrm{q}$

1.15 Prove ou refute a validade das seguintes regras lógicas usando Tabelas da Verdade:

A) $\mathrm{p} \vee q,\neg\mathrm{q} \models p$

1.20 Prove que:

B) $\mathrm{A} \leftrightarrow B \equiv (A \to B)\wedge (\neg\mathrm{A} \to\neg\mathrm{B})$

1.24 Considere a seguinte teoria:

Criança $\vee Jovem \vee Adulto \vee Idoso$

Trabalhador $\vee Estudante \vee Aposentado$

Jovem $\to Trabalhador \vee Estudante$

$\neg$(Criança $\wedge$ Aposentado)

$\neg$(Criança $\wedge$ Trabalhador)

Verifique quais das seguintes fórmulas são consequência lógica desta teoria:

B) Criança $\to\neg$ Jovem

C) Criança $\to Estudante$

CAPÍTULO 2

2.3 Prove os seguintes teoremas usando o Teorema da Dedução se for conveniente.

A) $(\neg\mathrm{p} \to q) \to ((\neg\mathrm{p} \to\neg) \to p)$

E) $\mathrm{p} \to\neg\ \neg\ \mathrm{p}$

2.7 Deduza os seguintes resultados pelo método da Dedução Natural:

B) $p \to q, \neg q \vdash \neg p$

E) $\neg\mathrm{p} \wedge \neg\mathrm{q} \vdash\neg(\mathrm{p} \vee q$

I) $(\mathrm{p} \vee q)\wedge (\mathrm{p} \vee r) \vdash p \vee (q\wedge \mathrm{r})$

J) $\mathrm{p} \wedge (\mathrm{q} \vee r) \vdash (p\wedge \mathrm{q}) \vee(p\wedge \mathrm{r})$

2.10 Prove ou refute os sequentes abaixo pelo método dos Tableaux Analíti-cos:

A) $\neg\mathrm{q} \to\neg\mathrm{p} \vdash p \to q$

E) $\neg(\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \vdash\neg\mathrm{p} \wedge \neg\mathrm{q}$

G) $\mathrm{p} \vee q,\neg\mathrm{q} \vdash p(ModusTolens)$

H) $\mathrm{p} \to q, q \vdash p(ModusErronens)$

I) $\mathrm{p} \to q,\neg\mathrm{q} \vdash\neg\mathrm{p}$

2.11 Prove os axiomas do fragmento implicativo da lógica clássica:

I) $\mathrm{p} \to p$

C) $(\mathrm{p} \to q \to r) \to (q \to p \to r)$

K) $\mathrm{p} \to q \to p$

2.12 Considere o conectivo $\leftrightarrow (bi-implicaoouequivalncia)comaseguinteTabelaVerdade:$

$A \leftrightarrow B$	B=0	B=1
A=0	1	0
A=1	0	1

Dê as regras de tableau para este conectivo. Estas regras são do tipo alpha ou beta?

2.13 Usando a regra definida no exercício anterior, prove as seguintes equivalências notáveis pelo método dos Tableaux Analíticos:

C) ¬(p $\vee q) \leftrightarrow$¬p ∧ ¬q

E) p $\wedge$(q $\vee r) \leftrightarrow (p\wedge$ q) $\vee(p\wedge$ r) (Distributividade de ∧ sobre ∨)

RESPOSTAS:

CAPÍTULO 1

1.1 Simplificar as seguintes fórmulas, removendo os parênteses desnecessários:

A) (p $\vee q$)

1-p $\vee q$

C) (p $\rightarrow (q \rightarrow (p\wedge$ q)))

1- p $\rightarrow (q \rightarrow (p\wedge$ q))

2- p $\rightarrow q \rightarrow (p\wedge$ q)

3- p $\rightarrow q \rightarrow p\wedge$ q

E) ¬(p ∧ (q $\vee r$))

1-¬(p ∧ (q $\vee r$))

1.3 Dê o conjunto de sub fórmulas das fórmulas a seguir. Note que os parênteses implícitos são fundamentais para decidir quais são as sub fórmulas:

A) ¬p $\rightarrow p$

(¬p) $\rightarrow (p)$

E) p ∧ ¬(p →¬q) ∨¬q

(p) ∧ ¬((p) → (¬q)) ∨(¬q)

1.4 Calcule a complexidade de cada fórmula do exercício anterior. Note que a posição exata dos parênteses não influencia a complexidade da fórmula!

A) |¬p $\rightarrow p$| =

=1+|¬p| + |p| =

=2+|p|+|p| =

=4

E) |p ∧ ¬(p →¬q) ∨¬q | =

=1+|p|+|¬(p→¬q) ∨¬q|=

=2+|p|+|¬(p→¬q)| + |¬q|=

=3+|p|+|(p→¬q)| + |¬q|=

=4+|p|+|p →¬ q| + |q| =

=5+|p|+|p| + |¬q| + |q|=

=6+|p|+|p| + |q| + |q| =

=10

1.6 Com base nos símbolos proposicionais da Seção 1.2.4, expressar os seguintes fatos com fórmulas da lógica proposicional.

A) criança $\wedge$ $\neg$ jovem.

C) (adulto $\wedge$ trabalhador) $\rightarrow\neg$aposentado.

D) aposentado $\rightarrow adulto \vee idoso$.

1.7 Considere duas valorações V1 e V2 tais que V1 valora todos os átomos em 1, e V2, átomos em 0. Computar como V1 e V2 valoram as fórmulas:

A) $\neg$p $\rightarrow q$

V1(p)=1 V1($\neg$p)=0 V1(q)=1

V1($\neg$p $\rightarrow q$) = 1

V2(p)=0 V2($\neg$p)=1 V2(q)=0

V2($\neg$p $\rightarrow q$) = 0

C) p $\rightarrow q \rightarrow r \rightarrow (p\wedge$ q $\wedge$ r)

V1(p $\rightarrow q \rightarrow r \rightarrow (p\wedge$ q $\wedge$ r))=1

V2(p $\rightarrow q \rightarrow r \rightarrow (p\wedge$ q $\wedge$ r))=1

G) p $\wedge$ $\neg$q

V1(p $\wedge$ $\neg$q)=0

V2(p $\wedge$ $\neg$q)=0

1.9 Classificar as fórmulas a seguir de acordo com sua satisfatibilidade, validade, falsificabilidade ou insatisfatilibilidade:

A) (p $\rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

p	q	(p $\rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$	
1	1	1	
1	0	1	Satisfazível; Inválida; Falsificável
0	1	0	
0	0	1	

C) p $\rightarrow q \rightarrow (p\wedge$ q)

p	q	p $\rightarrow q \rightarrow (p\wedge$ q)	
1	1	1	
1	0	1	Satisfazível; válida;
0	1	1	
0	0	1	

G) $\neg$(p $\rightarrow p \vee q$)

p	q	(p $\rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$	
1	1	0	
1	0	0	Insatisfazível;Falsificável
0	1	0	
0	0	0	

1.10 Encontre uma valoração que satisfaça as seguintes fórmulas.

C) (p $\rightarrow q) \rightarrow p$

V(p)=1 V(q)=1

V((p $\rightarrow q) \rightarrow p) = 1$

1.14 Prove ou refute as seguintes consequências lógicas usando Tabelas da Verdade:

A) $\neg$p $\rightarrow\neg$q $\models p \rightarrow q$

p	q	¬p →¬q	p → q	
1	1	1	1	
1	0	1	0	Não é consequência lógica
0	1	0	1	
0	0	1	1	

C) p → $q \vDash p \to q \vee r$

p	q	r	p→ q	p → $q \vee r$	
1	1	1	1	1	
1	1	0	1	1	
1	0	1	0	1	
0	1	1	1	1	Consequência lógica
0	0	1	1	1	
0	1	0	1	1	
1	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	

E) ¬(p ∧ q) ⊨¬p ∧ ¬q

p	q	¬(p ∧ q)	¬p ∧ ¬q	
1	1	0	0	
1	0	1	0	Não é consequência lógica
0	1	1	0	
0	0	1	1	

1.15 Prove ou refute a validade das seguintes regras lógicas usando Tabelas da Verdade:

A) p $\vee q$,¬q ⊨ p

p	q	¬q	p $\vee q$	
1	1	0	1	
1	0	1	1	Linha 2: Consequência lógica
0	1	0	1	
0	0	1	0	

1.20 Prove que:

B) A ↔ $B \equiv (A \to B)\wedge$ (¬A →¬B)

A	B	A ↔ B	(¬A →¬B)	
1	1	1	1	
1	0	0	0	Equivalência lógica
0	1	0	0	
0	0	1	1	

1.24 Considere a seguinte teoria:

Criança $\vee Jovem \vee Adulto \vee Idoso$

Trabalhador $\vee Estudante \vee Aposentado$

Jovem $\to Trabalhador \vee Estudante$

¬(Criança ∧ Aposentado)

¬(Criança ∧ Trabalhador)

Verifique quais das seguintes fórmulas são consequência lógica desta teoria:

B) Criança →¬ Jovem

C	J	Ad	I	C $\to\neg$ J	C $\vee J \vee Ad \vee I$
1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1

Não é equivalência lógica

C	J	T	E	Ap	C $\to\neg$ J	T $\vee E \vee Ap$
1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0

Não é equivalência lógica

C	J	T	E	C $\to\neg$ J	Jovem $\to Trabalhador \lor Estudante$	
1	1	1	1	0	1	
1	1	1	0	0	1	
1	1	0	1	0	1	
1	1	0	0	0	0	
1	0	1	1	1	1	
1	0	1	0	1	1	
1	0	0	1	1	1	
1	0	0	0	1	1	Não é equivalência lógica
0	1	1	1	1	1	
0	1	1	0	1	1	
0	1	0	1	1	1	
0	1	0	0	1	0	
0	0	1	1	1	1	
0	0	1	0	1	1	
0	0	0	1	1	1	
0	0	0	0	1	1	

C	J	Ap	C $\to\neg$ J	$\neg$(Criança $\land$ Aposentado)	
1	1	1	0	0	
1	1	0	0	1	
1	0	1	1	0	
1	0	0	1	1	Não é equivalência lógica
0	1	1	1	1	
0	1	0	1	1	
0	0	1	1	1	
0	0	0	1	1	

C	J	T	C $\to\neg$ J	$\neg$(Criança $\land$ Trabalhador)	
1	1	1	0	0	
1	1	0	0	1	
1	0	1	1	0	
1	0	0	1	1	Não é equivalência lógica
0	1	1	1	1	
0	1	0	1	1	
0	0	1	1	1	
0	0	0	1	1	

C) Criança $\to Estudante$

C	E	J	Ad	I	Criança $\rightarrow Estudante$	C $\vee J \vee Ad \vee I$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1

Não é equivalência lógica

C	E	T	Ap	Criança $\rightarrow Estudante$	T $\vee E \vee Ap$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0

Não é equivalência lógica

C	E	J	T	Criança $\rightarrow Estudante$	Jovem $\rightarrow Trabalhador \vee Estudante$	
1	1	1	1	1	1	
1	1	1	0	1	1	
1	1	0	1	1	1	
1	1	0	0	1	1	
1	0	1	1	0	1	
1	0	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	
1	0	0	0	0	1	Não é equivalência lógica
0	1	1	1	1	1	
0	1	1	0	1	1	
0	1	0	1	1	1	
0	1	0	0	1	1	
0	0	1	1	1	1	
0	0	1	0	1	0	
0	0	0	1	1	1	
0	0	0	0	1	1	

C	E	Ap	Criança $\rightarrow Estudante$	$\neg$(Criança $\wedge$ Aposentado)	
1	1	1	1	0	
1	1	0	1	1	
1	0	1	0	0	
1	0	0	0	1	Equivalência lógica
0	1	1	1	1	
0	1	0	1	1	
0	0	1	1	1	
0	0	0	1	1	

C	E	T	Criança $\rightarrow Estudante$	$\neg$(Criança $\wedge$ Trabalhador)	
1	1	1	1	0	
1	1	0	1	1	
1	0	1	0	0	
1	0	0	0	1	Não é equivalência lógica
0	1	1	1	1	
0	1	0	1	1	
0	0	1	1	1	
0	0	0	1	1	

CAPÍTULO 2

2.3 Prove os seguintes teoremas usando o Teorema da Dedução se for conveniente.

A) $(\neg \mathrm{p} \rightarrow q) \rightarrow ((\neg \mathrm{p} \rightarrow \neg \mathrm{q}) \rightarrow p)$

$(\neg \mathrm{p} \rightarrow q), (\neg \mathrm{p} \rightarrow \neg \mathrm{q}) \vdash p$

1. $(\neg \mathrm{p} \rightarrow q) hip$
2. $(\neg \mathrm{p} \rightarrow \neg \mathrm{q})$ hip
3. $(\neg \mathrm{p} \rightarrow q) \rightarrow ((\neg \mathrm{p} \rightarrow \neg \mathrm{q}) \rightarrow \neg \neg \mathrm{p})$ ($\neg$ 1, p = $\neg$p e q=q)
4. $(\neg \mathrm{p} \rightarrow \neg \mathrm{q}) \rightarrow \neg \neg \mathrm{p}$ MP3,1
5. $\neg \neg \mathrm{p}$ MP 4,2
6. $\neg \neg \mathrm{p} \rightarrow p$
7. p

E) $\mathrm{p} \rightarrow \neg \neg \mathrm{p}$

$\mathrm{p} \vdash \neg \neg \mathrm{p}$

2.7 Deduza os seguintes resultados pelo método da Dedução Natural:

B) p $\rightarrow q$,¬q ⊢¬p

então: [p $\rightarrow q$]1[¬q]2 [p]3

q $(\rightarrow E)1, 3$

$\perp(\rightarrow I)2$

¬p (¬ I)3

¬q →¬p $(\rightarrow I)2$

(p $\rightarrow q$) → (¬q →¬p) $(\rightarrow I)1$

E) ¬(p ∧ q) ⊢¬p ∧ ¬q

então: [¬(p ∧ q)]1 [p]2 [q]3

p $\vee q(\vee I)2$

$\perp(\perp I)1$

¬p (¬ I)2

¬q (¬ I)3

¬p ∧ ¬q (∧ I)

I) (p $\vee q$)∧ (p $\vee r$) $\vdash p \vee$ ($q\wedge$ r)

então: [(p $\vee q$)∧ (p $\vee r$)]1[q]2[r]3

p $\vee q$(∧ E)1

p $\vee r$(∧ E)1

q ∧ r (∧ I)2,3

p ∨($q\wedge$ r) $(\vee I)$

J) p ∧ (q $\vee r$) ⊢ ($p\wedge$ q) ∨($p\wedge$ r)

então: [p ∧ (q $\vee r$)]1[q]2[r]3

p (∧E)1

p ∧ q (∧ I)2

p ∧ r (∧ I)3

(p ∧ q) ∨($p\wedge$ r) $(\vee I)$

2.10 Prove ou refute os sequentes abaixo pelo método dos Tableaux Analíti-cos:

A) ¬q →¬p $\vdash p \rightarrow q$

1. T ¬q →¬p
2. F p $\rightarrow q$
3. Tp
4. Fq (α2)
5. F¬q   T¬p
6. Tq   Fp

X4,6   X3,6

E) ¬(p ∧ q) ⊢¬p ∧ ¬q

1. T¬(p∧ q)
2. F¬p∧ ¬q

3. Tp$\wedge$q

4. Tp

5. Tq (α3)

6. F$\neg$p   F$\neg$p

7. Tp   Tq

Aberto

G) p $\vee q$,$\neg$q $\vdash p(ModusTolens)$

1. Tp$\vee q$

2. T$\neg$q

3. Fp

4. Fq (α2)

5. Tp   Tq (β1)

X3,5   X4,5

H) p $\rightarrow q, q \vdash p(ModusErronens)$

1. Tp$\rightarrow q$

2. Tq

3. Fp

4. Fp   Tq (β)

Aberto

I) p $\rightarrow q$,$\neg$q $\vdash$$\neg$p

1. Tp$\rightarrow q$

2. T$\neg$q

3.F$\neg$p

4. Fq(α2)

5. Tp

6. Fp   Tq (β1)

X5,6   X4,6

2.11 Prove os axiomas do fragmento implicativo da lógica clássica:

I) p $\rightarrow p$

$\vdash_{TA}$ p $\rightarrow p$

1. Fp $\rightarrow p$

2. Tp α1

3. Fp α1

4. X2,3

C) (p $\rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow p \rightarrow r)$

$\vdash ta(p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow p \rightarrow r)$

Usando o Teorema da Dedução: $(p \rightarrow q \rightarrow r) \vdash_{TA} (q \rightarrow p \rightarrow r)$

1. T p $\rightarrow q \rightarrow r$

2. F p $\rightarrow q \rightarrow r$

3. Tp $\alpha 2$

4. Fq $\to r\alpha 2$

/ \

5. Fp Tq $\to r\beta 1$

/ \

6. X3,5 Fq Tr $\beta 5$

7. X5,6 Tq $\alpha 4$

8. Fr $\alpha 4$

X6,8

K) p $\to q \to p$

Usando o Teorema da Dedução: $p \vdash_{TA} q \to p$

1. Tp
2. Fq$\to p$
3. Tq $\alpha 2$
4. Fp $\alpha 2$
5. X1,4

2.12 Considere o conectivo $\leftrightarrow (bi - implicaoouequivalncia)comaseguinteTabelaVerdade:$

$A \leftrightarrow B$	B=0	B=1
A=0	1	0
A=1	0	1

Dê as regras de tableau para este conectivo. Estas regras são do tipo alpha ou beta?

$\vdash_{TA}$ $TA \leftrightarrow B$

/ \

1. TA FA

2. TB Fb

$\vdash ta$ $FA \leftrightarrow B$

/ \

1. TA FA

2. FB TB

São regras do tipo α e β

Usando a regra definida no exercício anterior, prove as seguintes equivalências notáveis pelo método dos Tableaux Analíticos:

C) ¬(p $\vee q$) $\leftrightarrow$¬p ∧ ¬q

$\vdash ta$ ¬(p $\vee q$) $\leftrightarrow$¬p ∧ ¬q

1. ¬(p $\vee q$) $\leftrightarrow$¬p ∧ ¬q

/ \

2. T ¬(p $\vee q$) F¬(p $\vee q$) $\alpha\beta 1$

3. F¬p ∧ ¬q T¬p ∧ ¬q $\alpha\beta 1$

4. Fp$\vee q$ $\alpha 2$ $Tp \vee q$ $\beta 2$

5. Fp $\alpha 4$		$T\neg$p $\alpha 3$		
6. Fq $\alpha 4$		$T\neg$q $\alpha 3$		
/ \				
7. F$\neg$p	F$\neg$q $\beta 3$	Fp $\alpha 5$		
8. Tp	Tq $\beta 7$	Fq $\alpha 6$		
9. X5,7	X6,7	Tp	Tq $\beta 4$	
10.		X7,9	X8,9	

E) p $\wedge$(q $\vee r$) $\leftrightarrow$ ($p\wedge$ q) $\vee$($p\wedge$ r) (Distributividade de $\wedge$ sobre $\vee$)

1. $\vdash tap\wedge$(q $\vee r$) $\leftrightarrow$ ($p\wedge$ q) $\vee$($p\wedge$ r)						
/				\		
2. Tp $\wedge$ (q $\vee r$)				$Fp\wedge$ (q $\vee r$) α $\beta 1$		
3. F (p $\wedge$ q) $\vee$($p\wedge$ r)				T (p $\wedge$ q) $\vee$($p\wedge$ r) α $\beta 1$		
			/		\	
4. Fp $\wedge$ q $\alpha 3$			$Tp\wedge$ q		Tp $\wedge$ r $\beta 3$	
5. Fp $\wedge$ r $\alpha 3$			Tp		Tp $\alpha 4$	
6.Tp $\alpha 2$			Tq		Tr $\alpha 4$	
			/	\	/	\
7. Tq $\vee r$ $\alpha 2$			Fp	$Fq \vee r$ $\beta 2$	Fp	$Fq \vee R$ $\beta 2$
/ \						
8. Fp	Fq $\beta 4$		$X5,7$	Fq $\alpha 7$	$X5,7$	Fq $\alpha 7$
	/ \					
9. X6, 8	Tq	Tr $\beta 7$		Fr $\alpha 7$		Fr $\alpha 7$
		/ \				
10.	Fp	Fr $\beta 5$		$X6,8$		$X6,9$
	X6,10	X9,10				