Universidade Tecnológica Federal do Paraná

UTFPR - Campus Apucarana

Departamento Acadêmico de Matemática

MÓDULO 1

Matrizes e determinantes (parte 2)

Curso: Engenharia Têxtil

Disciplina: Geometria Analítica e Álgebra Linear

Professor: Alisson C. Reinol

(2022-2)

Conteúdos

- Determinantes
- Propriedades dos determinantes
- Escalonamento de matrizes e posto
- Matriz inversa

Determinantes

- Considere a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Determinantes

- Considere a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- O ***determinante*** é um número associado a uma matriz quadrada.

Notação: $\det A$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

- **Determinante de matrizes de ordem 2:** Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

- **Determinante de matrizes de ordem 2:** Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

O determinante de A é igual ao produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- **Determinante de matrizes de ordem 2:** Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

O determinante de A é igual ao produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$-a_{12}a_{21}$ $\quad$ $a_{11}a_{22}$

Exemplos:

1) $\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

Exemplos:

1) $\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 + 10 = 3$

$10 \qquad\qquad -7$

2) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

Exemplos:

1) $\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 + 10 = 3$

$10 \qquad -7$

2) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$

$4 \qquad -3$

- **Determinante de matrizes de ordem 3:** Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- **Determinante de matrizes de ordem 3:** Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Regra de Sarrus

i) repetem-se as duas primeiras colunas à direita do quadro dos elementos da matriz A;

- **Determinante de matrizes de ordem 3:** Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Regra de Sarrus

i) repetem-se as duas primeiras colunas à direita do quadro dos elementos da matriz A;

ii) multiplicam-se os três elementos da diagonal principal bem como os três elementos de cada paralela a essa diagonal.

- **Determinante de matrizes de ordem 3:** Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Troca-se o sinal desses produtos

Regra de Sarrus

i) repetem-se as duas primeiras colunas à direita do quadro dos elementos da matriz A;

ii) multiplicam-se os três elementos da diagonal principal bem como os três elementos de cada paralela a essa diagonal.

iii) multiplicam-se os três elementos da diagonal secundária bem como os três elementos de cada paralela a essa diagonal, trocando-se o sinal dos produtos.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 6 & 8 \end{matrix}$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = \left|\begin{matrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 6 & 8 \end{matrix}$$

$-42 \quad -64 \quad -30 \quad 4 \quad 120 \quad 168$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 6 & 8 \end{matrix} = +4 + 120 + 168 - 30 - 64 - 42 = 156$$

$-42 \quad -64 \quad -30 \quad 4 \quad 120 \quad 168$

- **Determinante de matrizes de ordem $n \geq 2$**: Consideremos uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n, com $n \geq 2$.

- **Determinante de matrizes de ordem $n \geq 2$**: Consideremos uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n, com $n \geq 2$.

Cofator: O cofator de um elemento a_{ij} da matriz A é o número indicado por A_{ij} e definido por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, D_{ij}$$

onde D_{ij} é o determinante da matriz obtida a partir de A suprimindo-se sua i-ésima linha e j-ésima coluna.

Exemplo: Calcule os cofatores da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Exemplo: Calcule os cofatores da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}$$

Determinante da matriz que se obtém a partir de A suprimindo-se a 1ª linha e 1ª coluna

Lembrete:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, D_{ij}$$

Exemplo: Calcule os cofatores da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 2 = 2$$

-6 $\quad$ 8

Lembrete:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, D_{ij}$$

Exemplo: Calcule os cofatores da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 2 = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-3) = 3$$

Lembrete:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, D_{ij}$$

Exemplo: Calcule os cofatores da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Lembrete:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, D_{ij}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 2 = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-3) = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (-4) = -4$$

Exemplo: Calcule os cofatores da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Lembrete:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, D_{ij}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 2 = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-3) = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (-4) = -4$$

...

Analogamente, podemos calcular todos os outros cofatores da matriz A.

Desenvolvimento de Laplace: O determinante de uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) qualquer pelos seus respectivos cofatores.

Desenvolvimento de Laplace: O determinante de uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) qualquer pelos seus respectivos cofatores.

Exemplo: Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ usando desenvolvimento de Laplace.

Desenvolvimento de Laplace: O determinante de uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) qualquer pelos seus respectivos cofatores.

Exemplo: Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} \boxed{3 & 1 & 2} \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ usando desenvolvimento de Laplace.

i) *Escolha uma linha ou uma coluna da matriz A: vamos escolher a* 1^a *linha, por exemplo.*

Desenvolvimento de Laplace: O determinante de uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) qualquer pelos seus respectivos cofatores.

Exemplo: Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} \boxed{3 & 1 & 2} \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ usando desenvolvimento de Laplace.

i) *Escolha uma linha ou uma coluna da matriz A: vamos escolher a 1ª linha, por exemplo.*

ii) *Neste caso, o determinante será dado por*

$$det\, A = 3 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13}$$

Calculando o cofatores:

$$A_{11} = 2, \qquad A_{12} = 3, \qquad A_{13} = -4$$

(Note que esses cofatores já foram calculados no exemplo anterior)

Logo, $\det A = 3 \cdot 2 + 1 \ \cdot 3 + 2 \cdot (-4) = 1.$

Calculando o cofatores:

$$A_{11} = 2, \qquad A_{12} = 3, \qquad A_{13} = -4$$

(Note que esses cofatores já foram calculados no exemplo anterior)

Logo, $\det A = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) = 1.$

Observação: O cálculo do determinante por Laplace independe da escolha da linha ou da coluna.

No exemplo anterior, poderíamos ter escolhido qualquer outra linha ou coluna de A que obteríamos $\det A = 1$. *Escolhendo-se a 1ª coluna, por exemplo:*

$$\det A = 3 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{31} = \ldots = 1$$

Propriedades dos determinantes

a) O determinante de uma matriz A é igual ao determinante da sua transposta A^t, isto é, $\det A = \det A^t$.

Propriedades dos determinantes

a) O determinante de uma matriz A é igual ao determinante da sua transposta A^t, isto é, $\det A = \det A^t$.

b) Se a matriz A possui uma linha (ou coluna) constituída de elementos todos nulos, o determinante é nulo.

Propriedades dos determinantes

a) O determinante de uma matriz A é igual ao determinante da sua transposta A^t, isto é, $\det A = \det A^t$.

b) Se a matriz A possui uma linha (ou coluna) constituída de elementos todos nulos, o determinante é nulo.

c) Se a matriz A tem duas linhas (ou colunas) iguais, o determinante é nulo.

Propriedades dos determinantes

a) O determinante de uma matriz A é igual ao determinante da sua transposta A^t, isto é, $\det A = \det A^t$.

b) Se a matriz A possui uma linha (ou coluna) constituída de elementos todos nulos, o determinante é nulo.

c) Se a matriz A tem duas linhas (ou colunas) iguais, o determinante é nulo.

d) Se a matriz A tem duas linhas (ou colunas) com elementos correspondentes proporcionais, o determinante é nulo.

e) O determinante de uma matriz triangular A (superior ou inferior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

e) O determinante de uma matriz triangular A (superior ou inferior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Observação: O determinante de uma matriz diagonal também é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

e) O determinante de uma matriz triangular A (superior ou inferior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Observação: O determinante de uma matriz diagonal também é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

f) Trocando-se entre si duas linhas (ou colunas) de uma matriz A, o determinante muda de sinal, isto é, fica multiplicado por -1.

e) O determinante de uma matriz triangular A (superior ou inferior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Observação: O determinante de uma matriz diagonal também é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

f) Trocando-se entre si duas linhas (ou colunas) de uma matriz A, o determinante muda de sinal, isto é, fica multiplicado por -1.

g) Quando se multiplicam por um número real todos os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz A, o determinante fica multiplicado por esse número.

h) O determinante de uma matriz A não se altera quando se somam aos elementos de uma linha (coluna) de A os elementos correspondentes de outra linha (coluna) de A previamente multiplicados por um número real diferente de zero.

h) O determinante de uma matriz A não se altera quando se somam aos elementos de uma linha (coluna) de A os elementos correspondentes de outra linha (coluna) de A previamente multiplicados por um número real diferente de zero.

i) Teorema de Binet: $\det AB = \det A \cdot \det B$

Observação: $\det(A + B) \neq \det A + \det B$

Escalonamento de matrizes e posto

Matrizes na forma escalonada:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Escalonamento de matrizes e posto

O número de elementos nulos nas primeiras posições vai aumentando de uma linha para outra

Matrizes na forma escalonada:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Escalonamento de matrizes e posto

O número de elementos nulos nas primeiras posições vai aumentando de uma linha para outra

Matrizes na forma escalonada:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Escreva a matriz abaixo na forma escalonada

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

.

Escalonamento de matrizes e posto

O número de elementos nulos nas primeiras posições vai aumentando de uma linha para outra

Matrizes na forma escalonada:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Escreva a matriz abaixo na forma escalonada

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Para escrever a matriz A na forma escalonada, usaremos ***operações elementares sobre linhas****.*

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz:

- Troca da posição relativa de duas linhas;

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \sim \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz:

- Troca da posição relativa de duas linhas;

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de qualquer linha por uma escalar não-nulo;

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times (2) \\ \\ \\ \end{matrix} \underset{\sim}{L_1 \rightarrow 2L_1} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz:

- Troca da posição relativa de duas linhas;

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de qualquer linha por uma escalar não-nulo;

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \times (2) \overset{L_1 \rightarrow 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

- Substituição da i-ésima linha pela soma da i-ésima linha com a j-ésima linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} + \overset{L_2 \rightarrow L_1 + L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Voltando ao exemplo anterior...

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to -2L_1 + L_2 \\ L_3 \to -L_1 + L_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_3 \to -L_2 + L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Deste modo, colocamos A na forma escalonada.

Voltando ao exemplo anterior...

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} L_2 \rightarrow -2L_1 + L_2 \\ L_3 \rightarrow -L_1 + L_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_3 \rightarrow -L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Deste modo, colocamos A na forma escalonada.

- O número de linhas não-nulas de uma matriz na forma escalonada é chamado de ***posto***. Notação: Posto(A) ou Rank(A).

Voltando ao exemplo anterior...

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{L_2 \to -2L_1 + L_2 \\ L_3 \to -L_1 + L_3}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_3 \to -L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Deste modo, colocamos A na forma escalonada.

- O número de linhas não-nulas de uma matriz na forma escalonada é chamado de ***posto***. Notação: $\text{Posto}(A)$ ou $\text{Rank}(A)$.

No exemplo anterior, temos que $Posto(A) = 3$, pois, na forma escalonada, a matriz A tem 3 linhas não-nulas.

Matriz inversa

- Dada uma matriz quadrada A de ordem n, se existir uma matriz quadrada B de mesma ordem, que satisfaça à condição $AB = BA = I$, dizemos que B é a ***inversa*** de A. Notação: A^{-1}.

Logo, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Matriz inversa

- Dada uma matriz quadrada A de ordem n, se existir uma matriz quadrada B de mesma ordem, que satisfaça à condição $AB = BA = I$, dizemos que B é a ***inversa*** de A. Notação: A^{-1}.

Logo, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Quando uma matriz quadrada A tem inversa, dizemos que A é ***inversível*** (ou ***invertível***).

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$, temos que B é inversa de A (ou A é inversa de B).

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$, temos que B é inversa de A (ou A é inversa de B).

De fato, $AB = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -11 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$

Analogamente, temos que $BA = I$.

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$, temos que B é inversa de A (ou A é inversa de B).

De fato, $AB = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -11 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$

Analogamente, temos que $BA = I$.

Observação: A matriz inversa, quando existe, é única.

Quando uma matriz admite inversa?

Quando uma matriz admite inversa?

- Uma matriz quadrada A cujo determinante é nulo é uma ***matriz singular***.

Exemplo: A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ é singular, pois $\det A = 0$.

Quando uma matriz admite inversa?

- Uma matriz quadrada A cujo determinante é nulo é uma ***matriz singular***.

Exemplo: A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ é singular, pois $\det A = 0$.

- Uma matriz singular **não** tem inversa.

Logo, a matriz A do exemplo anterior não é inversível.

- Uma matriz quadrada A cujo determinante é diferente de zero é uma ***matriz não-singular*** ou ***regular***.

Exemplo: A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ é não-singular, pois $\det A \neq 0$.

- Uma matriz quadrada A cujo determinante é diferente de zero é uma ***matriz não-singular*** ou ***regular***.

Exemplo: A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ é não-singular, pois $\det A \neq 0$.

- Uma matriz não-singular **sempre** tem inversa.

Logo, a matriz A do exemplo anterior é inversível.

Propriedades da matriz inversa

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

c) $(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$

d) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

Como calcular a matriz inversa?

Como calcular a matriz inversa?

a) Inversão de matrizes usando a definição

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Como calcular a matriz inversa?

a) Inversão de matrizes usando a definição

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Note que $\det A = 1 \neq 0$. *Logo, a matriz A tem inversa.*

Por definição, $A \cdot A^{-1} = I_2$. *Considere* $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Então: $A \cdot A^{-1} = I_2 \iff \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 3a + c = 1 \\ 3b + d = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases}$

Resolvendo o sistema anterior, obtemos $a = 1, b = -1, c = -2$ *e* $d = 3$.

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

b) Inversão de matrizes por meio de operações elementares

Para determinar a matriz inversa de A:

b) Inversão de matrizes por meio de operações elementares

Para determinar a matriz inversa de A:

- coloca-se, ao lado da matriz A, uma matriz identidade I, separada por uma traço vertical;

$$[A \mid I] \sim \ \ldots \ \sim [I \quad A^{-1}]$$

b) Inversão de matrizes por meio de operações elementares

Para determinar a matriz inversa de A:

- coloca-se, ao lado da matriz A, uma matriz identidade I, separada por uma traço vertical;

- transforma-se, por meio de operações elementares sobre linhas, a matriz A numa matriz identidade, aplicando-se simultaneamente à matriz I, colocada ao lado de A, as mesmas operações elementares.

$$[A \mid I] \sim \ \ldots \ \sim [I \mid A^{-1}]$$

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{A}\!\!\!\left|\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right. \sim \ \cdots \ \sim \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\ \middle|\ \underbrace{\begin{matrix} -\frac{3}{5} & 2 \\ \frac{2}{5} & -1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right]$$

$$Logo,\ A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 2 \\ \frac{2}{5} & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Inversão de matrizes usando a matriz adjunta

- Dada uma matriz quadrada A, chamaremos de ***matriz adjunta*** de A à transposta da matriz dos cofatores de A.

$$\text{adj } A = \bar{A}^t$$

$\bar{A} = (A_{ij})_{mxn}$: matriz dos cofatores

c) Inversão de matrizes usando a matriz adjunta

- Dada uma matriz quadrada A, chamaremos de ***matriz adjunta*** de A à transposta da matriz dos cofatores de A.

$$\text{adj}\, A = \bar{A}^t$$

$\bar{A} = (A_{ij})_{mxn}$: matriz dos cofatores

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

c) Inversão de matrizes usando a matriz adjunta

- Dada uma matriz quadrada A, chamaremos de ***matriz adjunta*** de A à transposta da matriz dos cofatores de A.

$$\text{adj}\, A = \bar{A}^t$$

$\bar{A} = (A_{ij})_{mxn}$: matriz dos cofatores

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

Note que $\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$, *onde* A_{ij} *são os cofatores da matriz* A.

Calculando os cofatores da matriz A, obtemos: $\bar{A} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$.

Calculando os cofatores da matriz A, obtemos: $\bar{A} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}.$

Logo, $\operatorname{adj} A = \bar{A}^t = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}.$

Calculando os cofatores da matriz A, obtemos: $\bar{A} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$.

Logo, $\text{adj } A = \bar{A}^t = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$.

Teorema: Uma matriz quadrada A admite uma inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$. Neste caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A$$

Este resultado nos fornece um novo método para calcular a inversa de uma matriz.

Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ do exemplo anterior, temos que:

Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ do exemplo anterior, temos que:

$$\det A = -19 \ \ e \ \ \text{adj}\, A = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}\, A = \frac{1}{-19} \cdot \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{19} & -\frac{4}{19} \\ -1 & -\frac{10}{19} & \frac{8}{19} \\ 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \end{bmatrix}$$

- **Regras práticas**

- **Matrizes de ordem 2:** Seja A uma matriz de ordem 2.

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. *(Note que* $\det A = -3$, *logo A é inversível).*

- **Regras práticas**

- **Matrizes de ordem 2:** Seja A uma matriz de ordem 2.

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. *(Note que* $\det A = -3$*, logo* A *é inversível).*

- inverta os dois elementos da diagonal principal; $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

- **Regras práticas**

- **Matrizes de ordem 2:** Seja A uma matriz de ordem 2.

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. *(Note que* $\det A = -3$*, logo* A *é inversível).*

- inverta os dois elementos da diagonal principal; $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

- troque o sinal dos dois elementos da diagonal secundária; $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

- **Regras práticas**

- **Matrizes de ordem 2:** Seja A uma matriz de ordem 2.

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. *(Note que* $\det A = -3$, *logo A é inversível).*

- inverta os dois elementos da diagonal principal; $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

- troque o sinal dos dois elementos da diagonal secundária; $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

- divida os quatro elementos da matriz obtida por $\det A$. $\begin{bmatrix} \frac{2}{-3} & \frac{-1}{-3} \\ \frac{-1}{-3} & \frac{-1}{-3} \end{bmatrix}$

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

- **Matrizes de ordem 3:** Seja A uma matriz de ordem 3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad (Note\ que\ \det A = -19,\ logo\ A\ é\ inversível)$$

- **Matrizes de ordem 3:** Seja A uma matriz de ordem 3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \textit{(Note que } \det A = -19\textit{, logo } A \textit{ é inversível)}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}$$

- repita os elementos das duas primeiras colunas à direita;

- repita os elementos da duas primeiras linhas abaixo;

- suprima a primeira linha e a primeira coluna;

- **Matrizes de ordem 3:** Seja A uma matriz de ordem 3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \textit{(Note que } \det A = -19\textit{, logo } A \textit{ é inversível)}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}$$

- repita os elementos das duas primeiras colunas à direita;

- repita os elementos da duas primeiras linhas abaixo;

- suprima a primeira linha e a primeira coluna;

- **Matrizes de ordem 3:** Seja A uma matriz de ordem 3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \textit{(Note que } \det A = -19\textit{, logo } A \textit{ é inversível)}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}$$

- repita os elementos das duas primeiras colunas à direita;

- repita os elementos da duas primeiras linhas abaixo;

- suprima a primeira linha e a primeira coluna;

$$\begin{array}{ccccc} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ \cancel{-3} & 1 & 4 & -3 & 1 \\ \cancel{1} & 6 & 5 & 1 & 6 \\ \cancel{2} & 1 & 0 & 2 & 1 \\ \cancel{-3} & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} -19 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19$$

- tome os elementos de 4 em 4, calcule os determinantes de ordem 2 e monte uma matriz com os resultados obtidos, conforme no exemplo acima;

- divida todos os elementos por det A.

$$\begin{array}{ccccc} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ \cancel{-3} & 1 & 4 & -3 & 1 \\ \cancel{1} & \boxed{6} & \boxed{5} & 1 & 6 \\ \cancel{2} & \boxed{1} & \boxed{0} & 2 & 1 \\ \cancel{-3} & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -19 & & \\ -5 & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

- tome os elementos de 4 em 4, calcule os determinantes de ordem 2 e monte uma matriz com os resultados obtidos, conforme no exemplo acima;

- divida todos os elementos por det A.

$$
\begin{array}{ccccc}
\cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} \\
\cancel{-3} & 1 & 4 & -3 & 1 \\
\cancel{1} & 6 & 5 & 1 & 6 \\
\cancel{2} & 1 & 0 & 2 & 1 \\
\cancel{-3} & 1 & 4 & -3 & 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{bmatrix} -19 & & \\ -5 & & \\ 4 & & \end{bmatrix}
$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

- tome os elementos de 4 em 4, calcule os determinantes de ordem 2 e monte uma matriz com os resultados obtidos, conforme no exemplo acima;

- divida todos os elementos por det A.

$$
\begin{array}{ccccc}
\cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} \\
\cancel{-3} & 1 & 4 & -3 & 1 \\
\cancel{1} & 6 & 5 & 1 & 6 \\
\cancel{2} & 1 & 0 & 2 & 1 \\
\cancel{-3} & 1 & 4 & -3 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{bmatrix} -19 & 19 & \\ -5 & & \\ 4 & & \end{bmatrix}
$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19 \qquad \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 19$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

- tome os elementos de 4 em 4, calcule os determinantes de ordem 2 e monte uma matriz com os resultados obtidos, conforme no exemplo acima;

- divida todos os elementos por det A.

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{matrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

matriz dos cofatores

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19 \qquad \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 19$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \qquad \dots$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

- tome os elementos de 4 em 4, calcule os determinantes de ordem 2 e monte uma matriz com os resultados obtidos, conforme no exemplo acima;

- divida todos os elementos por det A.

$$
\begin{matrix}
\cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} \\
\cancel{-3} & 1 & 4 & -3 & 1 \\
\cancel{1} & 6 & 5 & 1 & 6 \\
\cancel{2} & 1 & 0 & 2 & 1 \\
\cancel{-3} & 1 & 4 & -3 & 1
\end{matrix}
$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

matriz dos cofatores

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19 \qquad \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 19$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \qquad \ldots$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$(\bar{A})^t = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

matriz adjunta

- tome os elementos de 4 em 4, calcule os determinantes de ordem 2 e monte uma matriz com os resultados obtidos, conforme no exemplo acima;

- divida todos os elementos por det A.

$$
\begin{array}{ccccc}
\cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} \\
\cancel{-3} & 1 & 4 & -3 & 1 \\
\cancel{1} & 6 & 5 & 1 & 6 \\
\cancel{2} & 1 & 0 & 2 & 1 \\
\cancel{-3} & 1 & 4 & -3 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{-19}{-19} & \frac{-5}{-19} & \frac{4}{-19} \\
\frac{19}{-19} & \frac{10}{-19} & \frac{-8}{-19} \\
\frac{-19}{-19} & \frac{-11}{-19} & \frac{5}{-19}
\end{bmatrix}
$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19 \qquad \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 19$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \qquad \ldots$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

- tome os elementos de 4 em 4, calcule os determinantes de ordem 2 e monte uma matriz com os resultados obtidos, conforme no exemplo acima;

- divida todos os elementos da matriz adjunta por $\det A$.

$$\begin{array}{ccccc} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ \cancel{-3} & 1 & 4 & -3 & 1 \\ \cancel{1} & 6 & 5 & 1 & 6 \\ \cancel{2} & 1 & 0 & 2 & 1 \\ \cancel{-3} & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19 \qquad \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 19$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \qquad \ldots$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$Logo, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{19} & -\frac{4}{19} \\ -1 & -\frac{10}{19} & \frac{8}{19} \\ 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \end{bmatrix}$$

- tome os elementos de 4 em 4, calcule os determinantes de ordem 2 e monte uma matriz com os resultados obtidos, conforme no exemplo acima;

- divida todos os elementos da matriz adjunta por $\det A$.

Referências bibliográficas

- BOLDRINI, José Luiz; *et al*. ***Álgebra Linear***. 3 ed. São Paulo – SP: Harbra, 1986.

- CALLIOLI, Carlos A.; *et al*. ***Álgebra Linear e Aplicações***. 6 ed. rev. São Paulo – SP: Atual, 1993.

- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. ***Álgebra Linear***. 2 ed. São Paulo – SP: Pearson Makron Books, 1987.