Universidade Tecnológica Federal do Paraná

UTFPR - Campus Apucarana

Departamento Acadêmico de Matemática

MÓDULO 2

Espaços vetoriais (parte 2)

Curso: Engenharia de Computação

Disciplina: Álgebra Linear

Professor: Alisson C. Reinol

(2022-2)

Conteúdos

- Dependência e independência linear
- Base e dimensão de um espaço vetorial
- Mudança de base

Dependência e independência linear

Definição: Sejam V um espaço vetorial e $A = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$. Dizemos que o conjunto A (ou que os vetores $v_1, \ldots, v_n$) são ***linearmente independentes*** (**LI**) se a igualdade

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

só for possível se $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Se existir algum $\alpha_i \neq 0$ tal que a igualdade anterior seja válida, dizemos que o conjunto A (ou que os vetores $v_1, \ldots, v_n$) são ***linearmente dependentes*** (**LD**).

Exemplos:

1) No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são LI.

Exemplos:

1) No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, os vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ são LI.

De fato,

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0) \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$$

Logo, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. *Portanto,* e_1 *e* e_2 *são LI.*

2) No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, os vetores $\mathrm{v}_1 = (2,3)$ e $\mathrm{v}_2 = (-4,-6)$ são LD.

Exemplos:

1) No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, os vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ são LI.

De fato,

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0) \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$$

Logo, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. *Portanto,* e_1 *e* e_2 *são LI.*

2) No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, os vetores $\mathrm{v}_1 = (2,3)$ e $\mathrm{v}_2 = (-4,-6)$ são LD.

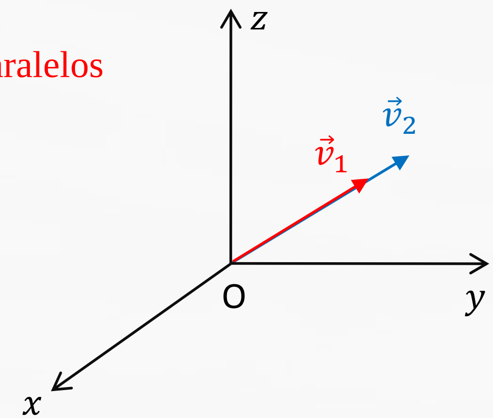
De fato, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_1(2,3) + \alpha_2(-4,-6) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 - 6\alpha_2 = 0 \end{cases}$

Obtemos que a solução do sistema anterior é $\alpha_1 = 2\alpha_2$ *(SPI). Tomando* $\alpha_2 = 1$ *e* $\alpha_1 = 2$*, por exemplo, temos que* $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \mathbf{0}$ *com* $\alpha_1 \neq 0$ *e* $\alpha_2 \neq 0$*. Portanto,* v_1 *e* v_2 *são LD.*

Observação: Geometricamente, dados dois vetores em $\mathbb{R}^3$:

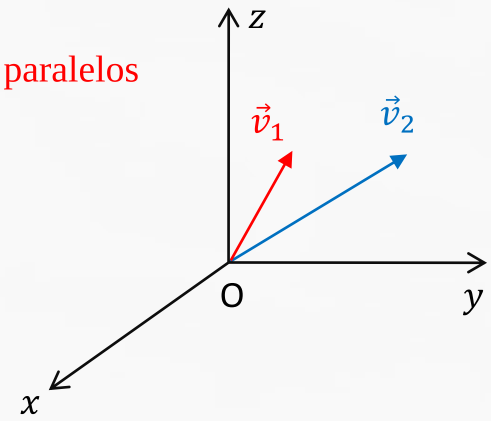
$\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é LD



$\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são paralelos

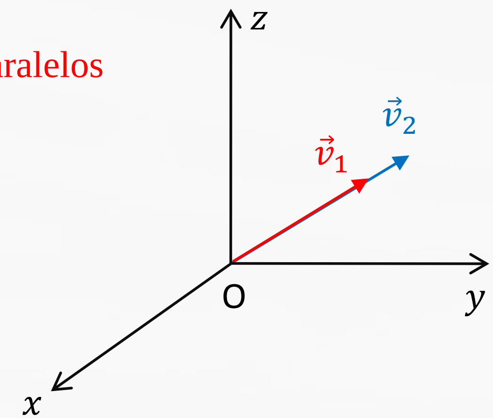
$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é LI



Observação: Geometricamente, dados dois vetores em $\mathbb{R}^3$:

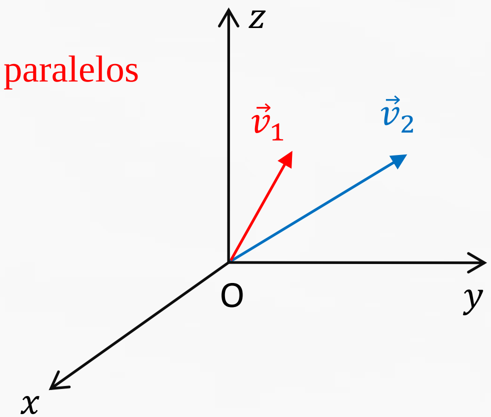
$\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é LD



$\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são paralelos

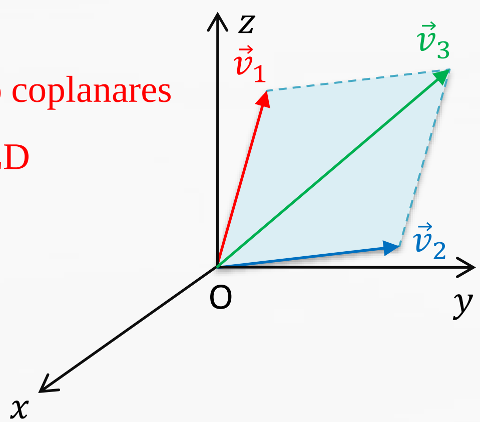
$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é LI



dados três vetores em $\mathbb{R}^3$:

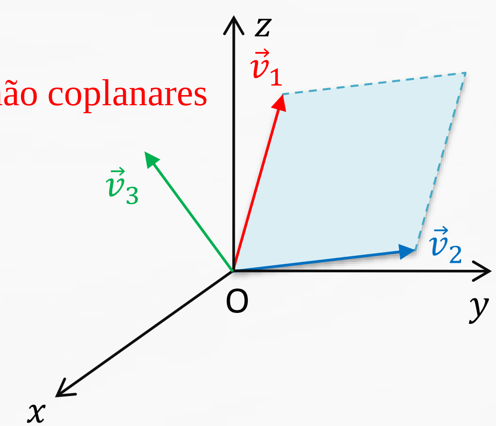
$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são coplanares

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é LD



$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são não coplanares

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é LI



Propriedades da dependência e independência linear

Consideremos um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$.

P1) Se um conjunto $S \subset V$ contém o vetor nulo, então esse conjunto é LD.

P2) Se $S = \{u\} \subset V$ e $u \neq \mathbf{0}$, então S é LI.

P3) Se $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ é LD, então um dos seus vetores é combinação linear dos outros.

P4) Se S_1 e S_2 são subconjuntos finitos e não vazios de V, se $S_1 \subset S_2$ e S_1 é LD, então S_2 também é LD.

P5) Se S_1 e S_2 são subconjuntos finitos e não vazios de V, se $S_1 \subset S_2$ e S_2 é LI, então S_1 também é LI.

Base e dimensão de um espaço vetorial

Definição: Um conjunto $\mathrm{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ é uma ***base*** do espaço vetorial V se:

i) B é LI;

ii) B gera V.

Base e dimensão de um espaço vetorial

Definição: Um conjunto $\mathrm{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é uma ***base*** do espaço vetorial V se:

i) B é LI;

ii) B gera V.

Exemplos:

1) $B = \{e_1, e_2\}$, com $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, é uma base do $\mathbb{R}^2$.

Base e dimensão de um espaço vetorial

Definição: Um conjunto $\mathrm{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ é uma ***base*** do espaço vetorial V se:

i) B é LI;

ii) B gera V.

Exemplos:

1) $B = \{e_1, e_2\}$, com $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, é uma base do $\mathbb{R}^2$.

De fato, em exemplos anteriores mostramos que:

i) $\{e_1, e_2\}$ *é LI;*

ii) $[e_1, e_2] = \mathbb{R}^2$.

Logo, B *é uma base do* $\mathbb{R}^2$.

Observação: Considere os vetores $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, $\dots, e_n = (0,0,0,\dots,1)$. O conjunto $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base do $\mathbb{R}^n$. Essa base é conhecida como ***base canônica*** do $\mathbb{R}^n$. Consequentemente:

$\{1\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}$

$\{(1,0),(0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^2$

$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$

$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^4$

...

Além disso, os espaços das matrizes e dos polinômios também possuem bases canônicas, por exemplo:

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é a base canônica de $M(2,2)$

$B = \{1, t, t^2\}$ é a base canônica de P_2.

2) $B = \{(1,2),(3,5)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$.

3) $B = \{(1,2),(2,4)\}$ não é base do $\mathbb{R}^2$.

4) $B = \{(2,-1)\}$ não é base do $\mathbb{R}^2$.

2) $B = \{(1,2),(3,5)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$.

Basta verificar as duas condições da definição, ou seja,

i) B é LI;

ii) $[B] = \mathbb{R}^2$

3) $B = \{(1,2),(2,4)\}$ não é base do $\mathbb{R}^2$.

Podemos mostrar que B não é LI.

4) $B = \{(2,-1)\}$ não é base do $\mathbb{R}^2$.

Podemos mostrar que B não gera o $\mathbb{R}^2$.

Observação: Todo conjunto LI de um espaço vetorial V é base do subespaço vetorial por ele gerado.

No exemplo 4, temos que $B = \{(2,-1)\}$ é LI e que

$$S = [B] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = -2y\}$$

Logo, B é base de S.

Observação: Todo conjunto LI de um espaço vetorial V é base do subespaço vetorial por ele gerado.

No exemplo 4, temos que $B = \{(2, -1)\}$ *é LI e que*

$$S = [B] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = -2y\}$$

Logo, B *é base de* S.

Teorema: Se $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V, então todo conjunto com mais de n vetores será linearmente dependente.

Observação: Todo conjunto LI de um espaço vetorial V é base do subespaço vetorial por ele gerado.

No exemplo 4, temos que $B = \{(2, -1)\}$ é LI e que

$$S = [B] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = -2y\}$$

Logo, B é base de S.

Teorema: Se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V, então todo conjunto com mais de n vetores será linearmente dependente.

Corolário: Duas bases quaisquer de um espaço vetorial têm o mesmo número de vetores.

Definição: Se V é um espaço vetorial e possui uma base com n vetores, então dizemos que V tem ***dimensão*** n.

Notação: $\dim V = n$.

Definição: Se V é um espaço vetorial e possui uma base com n vetores, então dizemos que V tem ***dimensão*** n.

Notação: $\dim V = n$.

Observação: O espaço vetorial $\{\mathbf{0}\}$, constituído somente pelo vetor nulo, tem dimensão zero.

Definição: Se V é um espaço vetorial e possui uma base com n vetores, então dizemos que V tem ***dimensão*** n.

Notação: $\dim V = n$.

Observação: O espaço vetorial $\{\mathbf{0}\}$, constituído somente pelo vetor nulo, tem dimensão zero.

Exemplos:

1) $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$

2) $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

3) $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

4) $\dim \mathbb{R}^n = n$

5) $\dim M\,(2,2) = 4$

6) $\dim P_2 = 3$

Observações: Seja V um espaço vetorial de dimensão n.

1) Se S é um subespaço de V, então $\dim S \leq \dim V$.

No caso em que $\dim S = \dim V$, tem-se $S = V$.

Observações: Seja V um espaço vetorial de dimensão n.

1) Se S é um subespaço de V, então $\dim S \leq \dim V$.

No caso em que $\dim S = \dim V$, tem-se $S = V$.

2) Qualquer subconjunto de V com mais de n vetores é LD.

Observações: Seja V um espaço vetorial de dimensão n.

1) Se S é um subespaço de V, então $\dim S \leq \dim V$.

No caso em que $\dim S = \dim V$, tem-se $S = V$.

2) Qualquer subconjunto de V com mais de n vetores é LD.

3) Para obtermos uma base de V basta que uma das condições abaixo seja satisfeita:

i) Qualquer subconjunto de V com n vetores LI é uma base de V;

ii) Qualquer subconjunto de V com n vetores que geram V é uma base de V.

4) A dimensão de um subespaço vetorial pode ser determinada pelo número de variáveis livres de seu vetor genérico.

Por exemplo, considere o subespaço vetorial $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y + z = 0\}$ *do* $\mathbb{R}^3$. *Temos que* $v = (x, y, -2x - y)$ *é o vetor genérico de* S. *Como* v *tem 2 variáveis livres (*x *e* y*), então* $\dim S = 2$.

4) A dimensão de um subespaço vetorial pode ser determinada pelo número de variáveis livres de seu vetor genérico.

Por exemplo, considere o subespaço vetorial $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x + y + z = 0\}$ *do* $\mathbb{R}^3$. *Temos que* $v = (x, y, -2x - y)$ *é o vetor genérico de* S. *Como* v *tem 2 variáveis livres (x e y), então* $\dim S = 2$.

Para obter uma base de S, *observe que:*

$$v = (x, y, -2x - y) = x\,(1,0,-2) + y\,(0,1,-1).$$

Logo, $[(1,0,-2),(0,1,-1)] = S$. *Então* $B = \{(1,0,-2),(0,1,-1)\}$ *é base de* S, *pois* B *gera* S *e* B *tem dois vetores* ($\dim S = 2$).

Teorema: Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial V. Então, todo vetor $v \in V$ se exprime de maneira única como combinação linear do vetores de B.

Em outras palavras, dado $v \in V$, existem e são únicos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$.

Teorema: Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial V. Então, todo vetor $v \in V$ se exprime de maneira única como combinação linear do vetores de B.

Em outras palavras, dado $v \in V$, existem e são únicos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$.

Definição: Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V. Tomemos $v \in V$ com

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Os números $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são chamados ***componentes*** ou ***coordenadas*** do vetor v em relação à base B. Notação:

***vetor coordenada*:** $v_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

***matriz coordenada*:** $v_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$

Exemplo: Em $\mathbb{R}^2$, considere as bases

$$A = \{(1,0),(0,1)\}, \qquad B = \{(2,0),(1,3)\}, \qquad C = \{(1,-3),(2,4)\}$$

Dado o vetor $v = (8,6)$, tem-se

$$v_A = (8,6), \qquad v_B = (3,2), \qquad v_C = (2,3)$$

Exemplo: Em $\mathbb{R}^2$, considere as bases

$$A = \{(1,0),(0,1)\}, \qquad B = \{(2,0),(1,3)\}, \qquad C = \{(1,-3),(2,4)\}$$

Dado o vetor $v = (8,6)$, tem-se

$$v_A = (8,6), \qquad v_B = (3,2), \qquad v_C = (2,3)$$

De fato,

Base A: $(8,6) = 8\,(1,0) + 6\,(0,1) \Rightarrow v_A = (8,6)$

Base B: $(8,6) = 3\,(2,0) + 2\,(1,3) \Rightarrow v_B = (3,2)$

Base C: $(8,6) = 2\,(1,-3) + 3\,(2,4) \Rightarrow v_C = (2,3)$

Exemplo: Em $\mathbb{R}^2$, considere as bases

$$A = \{(1,0),(0,1)\}, \qquad B = \{(2,0),(1,3)\}, \qquad C = \{(1,-3),(2,4)\}$$

Dado o vetor $v = (8,6)$, tem-se

$$v_A = (8,6), \qquad v_B = (3,2), \qquad v_C = (2,3)$$

De fato,

Base A: $(8,6) = 8\,(1,0) + 6\,(0,1) \Rightarrow v_A = (8,6)$

Base B: $(8,6) = 3\,(2,0) + 2\,(1,3) \Rightarrow v_B = (3,2)$

Base C: $(8,6) = 2\,(1,-3) + 3\,(2,4) \Rightarrow v_C = (2,3)$

Observação: No exemplo anterior, como A é a base canônica do $\mathbb{R}^2$ escreve-se simplesmente $v = (8,6)$ ao invés de $v_A = (8,6)$.

Mudança de base

- Dadas duas bases A e B de um espaço vetorial V, podemos estabelecer uma relação entre as componentes de um vetor v em relação à base A e as componentes do mesmo vetor em relação à base B.

Mudança de base

- Dadas duas bases A e B de um espaço vetorial V, podemos estabelecer uma relação entre as componentes de um vetor v em relação à base A e as componentes do mesmo vetor em relação à base B.

- Se V é um espaço vetorial de dimensão n, podemos mostrar que existe uma matriz quadrada M_B^A de ordem n tal que

$$v_B = M_B^A \, v_A,$$

- onde v_A e v_B são as matrizes componentes de v nas bases A e B, respectivamente.

- A matriz M_B^A é chamada ***matriz de mudança de base de A para B***.

$$M_B^A$$

- A matriz M_B^A é chamada ***matriz de mudança de base de A para B***.

$$M_B^A$$

- O papel da matriz M_B^A é transformar as componentes de um vetor v na base A em componentes do mesmo vetor v na base B.

$$v_B = M_B^A \, v_A$$

- A matriz M_B^A é chamada ***matriz de mudança de base de A para B***.

$$M_B^A$$

- O papel da matriz M_B^A é transformar as componentes de um vetor v na base A em componentes do mesmo vetor v na base B.

$$v_B = M_B^A v_A$$

- A matriz M_B^A é chamada ***matriz de mudança de base de A para B***.

$$M_B^A$$

- O papel da matriz M_B^A é transformar as componentes de um vetor v na base A em componentes do mesmo vetor v na base B.

$$v_B = M_B^A v_A$$

Observação: A inversa da matriz de mudança de base de A para B é a matriz de mudança de base de B para A, isto é,

$$\left(M_B^A\right)^{-1} = M_A^B$$

Determinando a matriz de mudança de base

Exemplo: Sejam $A = \{(1,3),(1,-2)\}$ e $B = \{(3,5),(1,2)\}$ bases do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Determine M_B^A e M_A^B.

Determinando a matriz de mudança de base

Exemplo: Sejam $A = \{(1,3),(1,-2)\}$ e $B = \{(3,5),(1,2)\}$ bases do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Determine M_B^A e M_A^B.

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

coordenadas dos vetores da base *A*

coordenadas dos vetores da base *B*

Determinando a matriz de mudança de base

Exemplo: Sejam $A = \{(1,3),(1,-2)\}$ e $B = \{(3,5),(1,2)\}$ bases do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Determine M_B^A e M_A^B.

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

coordenadas dos vetores da base *A*

coordenadas dos vetores da base *B*

Obtemos a matriz M_B^A *usando a fórmula:* $\boxed{M_B^A = B^{-1}A}$

Logo, $M_B^A = B^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$

Para determinar a matriz M_A^B usamos a fórmula: $\boxed{M_A^B = A^{-1}B}$

ou

calculamos a inversa da matriz M_B^A, pois $\boxed{\left(M_B^A\right)^{-1} = M_A^B}$

Logo, $M_A^B = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Para determinar a matriz M_A^B *usamos a fórmula:* $\boxed{M_A^B = A^{-1}B}$

ou

calculamos a inversa da matriz M_B^A*, pois* $\boxed{\left(M_B^A\right)^{-1} = M_A^B}$

Logo, $M_A^B = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Por exemplo, se as coordenadas do vetor v *na base* A *são* $(2,3)$*, ou seja,* $v_A = (2,3)$*, podemos obter as coordenadas do vetor* v *na base* B*, ou seja,* v_B*, da seguinte forma:*

$$v_B = M_B^A\, v_A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -25 \end{bmatrix}.$$

Logo, $v_B = (10, -25)$.

Observações:

1) Atenção! Para facilitar a memorização das fórmulas, note que A e B aparecem com dois significados distintos no exemplo anterior: no enunciado A e B representam bases do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, na resolução A e B são matrizes obtidas a partir das coordenadas dos vetores das respectivas bases.

Observações:

1) Atenção! Para facilitar a memorização das fórmulas, note que A e B aparecem com dois significados distintos no exemplo anterior: no enunciado A e B representam bases do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, na resolução A e B são matrizes obtidas a partir das coordenadas dos vetores das respectivas bases.

2) Outro modo de determinar M_B^A é escrever os vetores da base A como combinação linear dos vetores da base B.

Observações:

1) Atenção! Para facilitar a memorização das fórmulas, note que A e B aparecem com dois significados distintos no exemplo anterior: no enunciado A e B representam bases do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, na resolução A e B são matrizes obtidas a partir das coordenadas dos vetores das respectivas bases.

2) Outro modo de determinar M_B^A é escrever os vetores da base A como combinação linear dos vetores da base B.

Isto é, $(1,3) = \alpha_1(3,5) + \alpha_2(1,2)$ *e* $(1,-2) = \beta_1(3,5) + \beta_2(1,2)$.

Das igualdades acima, obtemos $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 4$, $\beta_1 = 4$ *e* $\beta_2 = -11$.

Logo, $M_B^A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$

Coordenadas de $(1,-2)$ na base B

Coordenadas de $(1,3)$ na base B

Referências bibliográficas

- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. ***Álgebra Linear***. 2 ed. São Paulo – SP: Pearson Makron Books, 1987.

- BOLDRINI, José Luiz; *et al*. ***Álgebra Linear***. 3 ed. São Paulo – SP: Harbra, 1986.

- CALLIOLI, Carlos A.; *et al*. ***Álgebra Linear e Aplicações***. 6 ed. rev. São Paulo – SP: Atual, 1993.

- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. ***Introdução à Álgebra Linear***. 1 ed. São Paulo – SP: Pearson Education do Brasil, 1997.