



# Engenharia de Computação

## COENC-AP

### LÓGICA PROPOSICIONAL: SISTEMAS DEDUTIVOS

**Professora Dra. Tamara Angélica Baldo**

# BIBLIOGRAFIA DA AULA:

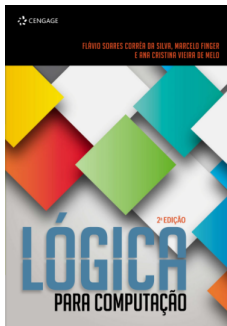


Figura: SILVA, F. S. C. da; FINGER, M.; MELO, A. C. de. Lógica para computação. 2.ed. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2018.

# ORGANIZAÇÃO DA AULA:

- ▶ O que é um Sistema Dedutivo?
- ▶ Axiomatização
- ▶ Dedução Natural
- ▶ Tableaux Analíticos

# ORGANIZAÇÃO DA AULA:

- ▶ O que é um Sistema Dedutivo?
- ▶ Axiomatização
- ▶ Dedução Natural
- ▶ Tableaux Analíticos

# O QUE É UM SISTEMA DEDUTIVO?

Sistemas formais utilizados para inferir, derivar ou deduzir as consequências lógicas de um conjunto de fórmulas  $\Gamma$ . Quando  $\Gamma$  infere uma fórmula  $A$ , escrevemos  $\Gamma \vdash A$ . Onde tem-se:

- ▶ Sequente:  $\Gamma \vdash A$
- ▶ Antecedente (ou hipótese):  $\Gamma$
- ▶ Consequente (ou conclusão):  $A$ .

# O QUE É UM SISTEMA DEDUTIVO?

Existem procedimentos distintos que nos permitem realizar uma inferência, e cada procedimento dá origem a um distinto sistema dedutivo.

Dizemos que um **Sistema Dedutivo**  $\vdash$  é **correto**  
se  $\Gamma \vdash A$  somente se  $\Gamma \models A$

Dizemos que um **Sistema Dedutivo**  $\vdash$  é **completo** se ele for  
capaz de realizar todas as inferências, ou seja,  
se sempre tivermos  $\Gamma \vdash A$  se  $\Gamma \models A$

# O QUE É UM SISTEMA DEDUTIVO?

Os sistemas asseguir possuem propriedades de correção e completude:

- ▶ Axiomatização ( $\vdash_{Ax}$ )
- ▶ Dedução Natural ( $\vdash_{DN}$ )
- ▶ Tableaux Analíticos ( $\vdash_{TA}$ )

Vamos ver como cada um funciona?

# ORGANIZAÇÃO DA AULA:

- ▶ O que é um Sistema Dedutivo?
- ▶ Axiomatização
- ▶ Dedução Natural
- ▶ Tableaux Analíticos

# AXIOMATIZAÇÃO

- ▶ Sistema formal de dedução mais antigo;
- ▶ Forma de inferência lógica;
- ▶ Axiomas: são “verdades básicas”
- ▶ Regras de Inferência: permitem inferir novas fórmulas a partir de outras já inferidas

# AXIOMATIZAÇÃO

Substituições (existem outras notações na literatura)

- ▶ 1)  $p[p := B] = B$
- ▶ 2)  $q[p := B] = q$ , para  $q \neq p$
- ▶ 3)  $(\neg A)[p := B] = \neg(A[p := B])$
- ▶ 4)  $(A_1 \circ A_2)[p := B] = A_1[p := B] \circ A_2[p := B]$ , para  $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$

Exemplo:

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow (p \wedge q))[p := (r \vee s)] = \\ & = p[p := (r \vee s)] \rightarrow (p \wedge q)[p := (r \vee s)] = \\ & = (r \vee s) \rightarrow (p[p := (r \vee s)] \wedge q[p := (r \vee s)]) = \\ & = (r \vee s) \rightarrow ((r \vee s) \wedge q) \end{aligned}$$

# AXIOMATIZAÇÃO

**(Definição)** A Axiomatização para Lógica Proposicional Clássica contém os seguintes axiomas:

- ▶  $(\rightarrow_1) \quad p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- ▶  $(\rightarrow_2) \quad (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- ▶  $(\wedge_1) \quad p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$
- ▶  $(\wedge_2) \quad (p \wedge q) \rightarrow p$
- ▶  $(\wedge_3) \quad (p \wedge q) \rightarrow q$
- ▶  $(\vee_1) \quad p \rightarrow (p \vee q)$
- ▶  $(\vee_2) \quad q \rightarrow (p \vee q)$
- ▶  $(\vee_3) \quad (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$
- ▶  $(\neg_1) \quad (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$
- ▶  $(\neg_2) \quad \neg \neg p \rightarrow p$

# AXIOMATIZAÇÃO

**(Definição: Modus Ponens)** A Axiomatização para Lógica Proposicional Clássica contém a seguinte regra de inferência:

Modus Ponens: A partir de  $A \rightarrow B$  e  $A$ , infere-se  $B$ .

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1



# AXIOMATIZAÇÃO

**(Definição: Dedução)** Dedução é uma sequência de fórmulas  $A_1, A_2, \dots, A_n$  tal que cada fórmula na sequência ou é uma instância de um axioma ou é obtida de fórmulas anteriores utilizando regra de inferência (Modus Ponens)

**(Definição: Teorema)** Um teorema  $A$  é uma fórmula tal que existe uma dedução  $A_1, A_2, \dots, A_n = A$ . Representaremos um teorema por  $\vdash_{Ax} A$ , ou apenas  $\vdash A$  (tendo-se claro qual método de inferência está sendo utilizado)

# AXIOMATIZAÇÃO

**(Definição: Fórmula Dedutível)** Uma fórmula  $A$  é dedutível a partir de  $\Gamma$  se há uma **dedução**, ou seja, uma sequência de fórmulas  $A_1, A_2, \dots, A_n = A$  tal que cada fórmula  $A_i$  na sequência:

- ▶ ou é uma fórmula  $A_i \in \Gamma$ ;
- ▶ ou é uma instância de um axioma;
- ▶ ou é obtida de fórmulas anteriores utilizando Modus Ponens.

OBS: se  $\Gamma = \emptyset$ , implica que  $A$  é um teorema

# AXIOMATIZAÇÃO

**Exemplo 2.2.1** Mostraremos inicialmente a dedução do teorema  $I = A \rightarrow A$ .

1.  $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A))$  de  $(\rightarrow_2)$ , onde  $p := A$ ,  $q := A \rightarrow A$ ,  
 $\rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$   $r := A$ .
2.  $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$  de  $(\rightarrow_1)$ , onde  $p := A$ ,  $q := A \rightarrow A$ ,
3.  $((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$  por Modus Ponens 1, 2.
4.  $A \rightarrow (A \rightarrow A)$  de  $(\rightarrow_1)$ , onde  $p := A$ ,  $q := A$ .
5.  $A \rightarrow A$  por Modus Ponens 3, 4.

**AXIOMATIZAÇÃO**

**(Definição)** A Axiomatização para Lógica Proposicional Clássica contém os seguintes axiomas:

- ▶  $(\rightarrow_1)$   $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- ▶  $(\rightarrow_2)$   $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- ▶  $(\wedge_1)$   $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$
- ▶  $(\wedge_2)$   $(p \wedge q) \rightarrow p$
- ▶  $(\wedge_3)$   $(p \wedge q) \rightarrow q$
- ▶  $(\vee_1)$   $p \rightarrow (p \vee q)$
- ▶  $(\vee_2)$   $q \rightarrow (p \vee q)$
- ▶  $(\vee_3)$   $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$
- ▶  $(\neg_1)$   $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$
- ▶  $(\neg_2)$   $\neg \neg p \rightarrow p$

Figura: O exemplo foi extraído do livro: SILVA *et. al.* (2018)

# AXIOMATIZAÇÃO

**(Definição: Teorema da Dedução)**

$$\Gamma, A \vdash B \text{ sse } \Gamma \vdash A \rightarrow B$$

Exemplo: Demonstre que  $p \rightarrow q \vdash (p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$

# ORGANIZAÇÃO DA AULA:

- ▶ O que é um Sistema Dedutivo?
- ▶ Axiomatização
- ▶ Dedução Natural
- ▶ Tableaux Analíticos

# DEDUÇÃO NATURAL

- ▶ Axiomatização: impraticável na prática

O método de Dedução Natural é um método formal de inferência baseado em princípios bem definidos:

- ▶ hipóteses podem ser introduzidas na prova e deverão ser descartadas até o final, para consolidar a prova;
- ▶ para cada conectivo lógico, duas regras devem ser providas: inserção e remoção

$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} (\rightarrow E) \qquad \frac{\begin{array}{c} [A]^i \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} (\rightarrow I)^i$	
$\frac{A \quad B}{A \wedge B} (\wedge I) \qquad \frac{A \wedge B}{A} (\wedge E_1) \qquad \frac{A \wedge B}{B} (\wedge E_2)$	
$\frac{\begin{array}{c} [A]^i \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} (\rightarrow I)^i \qquad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B} (\rightarrow E)$	
$\frac{A}{A \vee B} (\vee I_1) \qquad \frac{B}{A \vee B} (\vee I_2) \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} [A]^i \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B]^j \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} (\vee E)^{ij}$	
$\frac{A \quad \neg A}{\perp} (\perp I) \qquad \frac{\perp}{A} (\perp E)$	
$\frac{\begin{array}{c} [A]^i \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} (\neg I)^i \qquad \frac{\begin{array}{c} [\neg A]^i \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{A} (\neg E)^i$	

Regras de introdução e eliminação de conectivos em Dedução Natural

Figura: Extraído do livro: SILVA *et. al.* (2018)

# DEDUÇÃO NATURAL

- ▶ pode utilizar a constante lógica  $\perp$  (falsidade) e  $\top$  (verdade)
- ▶ fórmulas introduzidas como hipóteses serão apresentadas por chaves ('[' e ']') e numeradas, para indicar o descarte em passo posterior
- ▶ premissa: uma fórmula considerada hipoteticamente verdadeira

Exemplo:

$$\begin{array}{l} \vdash_{DN} A \rightarrow (B \rightarrow A): \\ \quad [A]^1 \quad [B]^2 \\ \quad \quad \frac{A}{B \rightarrow A} (\rightarrow I)^2 \\ \quad \frac{B \rightarrow A}{A \rightarrow (B \rightarrow A)} (\rightarrow I)^2 \end{array}$$



# DEDUÇÃO NATURAL

**(Definição: Dedução Natural)** A dedução  $\Gamma \vdash_{DN} A$  pelo método de Dedução Natural é uma planta/árvore, cujos nós contém fórmulas tal que:

- ▶ 1) A fórmula  $A$  é a raiz da árvore (não confunda com o conceito de Estrutura de Dados)
- ▶ 2) As folhas da árvore de dedução são elementos de  $\Gamma$  ou hipóteses formuladas
- ▶ 3) Cada 'nó' intermediário é obtido a partir de 'nós' superiores na árvore por meio da instanciação de uma regra de inserção/remoção
- ▶ 4) Todas as hipóteses formuladas devem ter sido descartadas por regras

- ▶ 1) A fórmula A é a raiz da árvore (não confunda com o conceito de Estrutura de Dados)
- ▶ 2) As folhas da árvore de dedução são elementos de  $\Gamma$  ou hipóteses formuladas
- ▶ 3) Cada 'nó' intermediário é obtido a partir de 'nós' superiores na árvore por meio da instanciação de uma regra de inserção/remoção
- ▶ 4) Todas as hipóteses formuladas devem ter sido descartadas por regras

# ORGANIZAÇÃO DA AULA:

- ▶ O que é um Sistema Dedutivo?
- ▶ Axiomatização
- ▶ Dedução Natural
- ▶ Tableaux Analíticos

# TABLEAUX ANALÍTICOS

- ▶ Métodos de Inferência vistos anteriormente permitem demonstrar quando uma fórmula pode ser conclusão de um conjunto de hipóteses
- ▶ Nenhum dos métodos anteriores provê, de maneira óbvia, um procedimento de decisão
- ▶ **Procedimento de Decisão:** permite determinar a validade de um sequente
- ▶ Os métodos anteriores não nos permitem inferir que  $\Gamma \not\vdash A$ , ou seja, a falsidade de um sequente
- ▶ CUIDADO:  $\Gamma \not\vdash A$  não implica  $\Gamma \vdash \neg A$

# TABLEAUX ANALÍTICOS

- ▶ Tableau Analítico é um método de inferência baseado em refutação: para provarmos que  $B_1, \dots, B_n \vdash A_1, \dots, A_m$ , afirmaremos a veracidade de que  $B_1, \dots, B_n$  e a falsidade de  $A_1, \dots, A_m$ , na esperança de derivarmos uma contradição.
- ▶ Se a contradição for obtida, teremos demonstrado o sequente
- ▶ Se a contradição NÃO for obtida, teremos obtido um contraexemplo
- ▶ Para afirmar veracidade ou falsidade de uma fórmula utiliza-se *fórmulas marcadas*

# TABLEAUX ANALÍTICOS

Fórmulas marcadas: considere o sequente  $B_1, \dots, B_n \vdash A_1, \dots, A_m$

$TB_1$

$\vdots$

$TB_n$

$FA_1$

$\vdots$

$FA_m$

# TABLEAUX ANALÍTICOS

$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
$TA \wedge B$	$TA$	$TB$
$FA \vee B$	$FA$	$FB$
$FA \rightarrow B$	$TA$	$FB$
$T\neg A$	$FA$	$FA$

Fórmulas do tipo  $\alpha$

$\beta$	$\beta_1$	$\beta_2$
$FA \wedge B$	$FA$	$FB$
$TA \vee B$	$TA$	$TB$
$TA \rightarrow B$	$FA$	$TB$
$F\neg A$	$TA$	$TA$

Fórmulas do tipo  $\beta$

$$\frac{\alpha}{\alpha_1 \quad \alpha_2}$$

**Expansão  $\alpha$ :**

$$\frac{\beta}{\beta_1 \quad \beta_2}$$

**Expansão  $\beta$ :**

# TABLEAUX ANALÍTICOS

**(Definição)** Um sequente  $B_1, \dots, B_n \vdash A_1, \dots, A_m$  foi deduzido pelo Método do Tableaux Analíticos se existir um tableau fechado para ele

$$\vdash_{TA} p \vee \neg p$$

1.  $Fp \vee \neg p$
2.  $Fp$        $\alpha, 1$
3.  $F\neg p$        $\alpha, 1$
4.  $FTp$        $\beta, 3$
- $\times$        $2, 4$

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash_{TA} p \rightarrow r$$

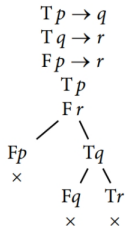


Figura: Exemplo extraído do livro: SILVA *et. al.* (2018)



# TABLEAUX ANALÍTICOS

- ▶ Tableaux analíticos, além de um método completo e correto, é um **método decidível**
- ▶ **Método Decidível:** sempre termina com uma resposta
- ▶ Tableaux Analíticos são decidíveis pois:
  - ▶ Se  $\Gamma \models A$ , então gera um tableau fechado para  $\Gamma \vdash_{TA} A$
  - ▶ Se  $\Gamma \not\models A$ , então pelo menos um ramo saturado aberto

# ORGANIZAÇÃO DA AULA:

- ▶ O que é um Sistema Dedutivo?
- ▶ Axiomatização
- ▶ Dedução Natural
- ▶ Tableaux Analíticos