Universidade Tecnológica Federal do Paraná
UTFPR - Campus Apucarana
Departamento Acadêmico de Matemática

MÓDULO 3

Transformações lineares

Curso: Engenharia de Computação

Disciplina: Álgebra Linear

Professor: Alisson C. Reinol

(2022-2)

Conteúdos

- Introdução
- Transformações lineares
- Núcleo e imagem de uma transformação linear
- Matriz de uma transformação linear
- Operações com transformações lineares

Introdução

- Ao planejarmos uma viagem de carro, temos que calcular a quantidade de combustível necessária para esta viagem.

Introdução

- Ao planejarmos uma viagem de carro, temos que calcular a quantidade de combustível necessária para esta viagem.

- Suponha que a quantidade de combustível e a distância percorrida pelo carro se relacionem de acordo com a tabela:

Distância (Km)	300	600	1200	...	x
Qtde. de combustível (L)	30	60	120	...	y

Introdução

- Ao planejarmos uma viagem de carro, temos que calcular a quantidade de combustível necessária para esta viagem.

- Suponha que a quantidade de combustível e a distância percorrida pelo carro se relacionem de acordo com a tabela:

Distância (Km)	300	600	1200	...	x
Qtde. de combustível (L)	30	60	120	...	y

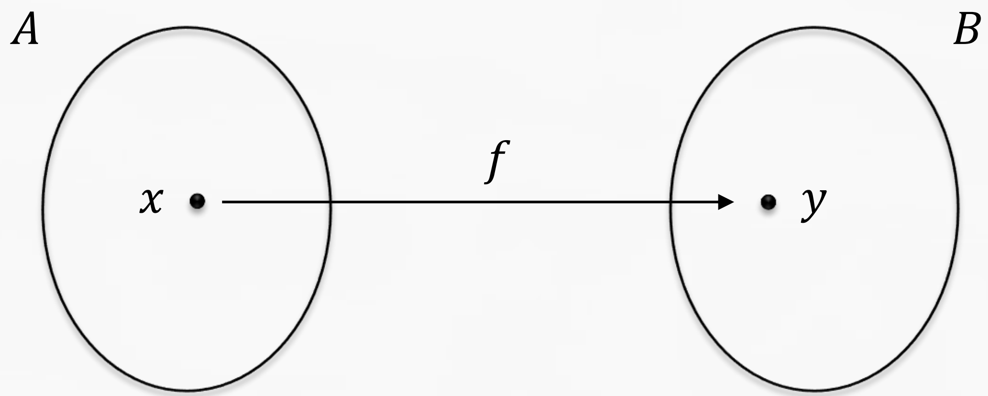
- Observe que a quantidade de combustível (y) depende da distância que será percorrida (x) e podemos relacioná-los pela seguinte fórmula: $y = 10x$.

- Muitas vezes nos deparamos com situações em que o valor de uma quantidade depende do valor de outra. Por exemplo:
    - o salário de uma pessoa pode depender do número de horas trabalhadas;
    - a produção de uma fábrica pode depender do número de máquinas utilizadas;
    - O lucro de um comerciante pode depender do número de itens vendidos.

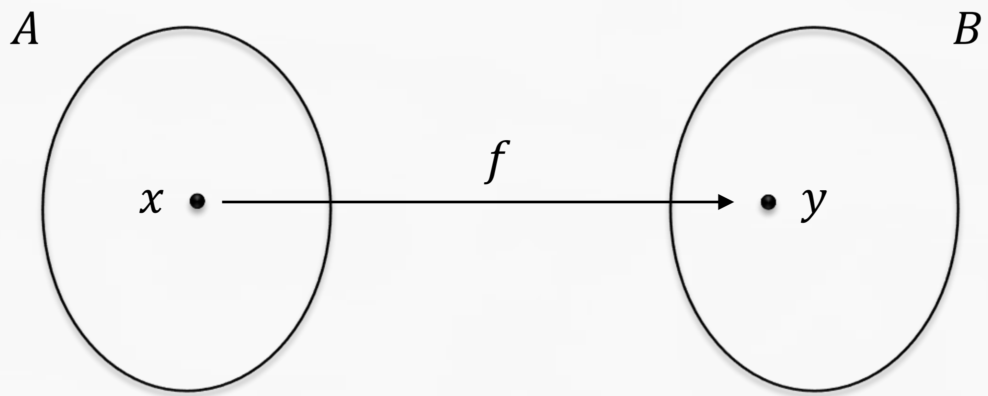
- Muitas vezes nos deparamos com situações em que o valor de uma quantidade depende do valor de outra. Por exemplo:
    - o salário de uma pessoa pode depender do número de horas trabalhadas;
    - a produção de uma fábrica pode depender do número de máquinas utilizadas;
    - O lucro de um comerciante pode depender do número de itens vendidos.

- A relação entre tais quantidades é dada frequentemente por uma **função**.

Definição: Uma ***função*** $f: A \to B$ é uma regra (ou lei) que associa a cada elemento x de A um único elemento y de B, onde A e B são conjuntos não-vazios.



Definição: Uma ***função*** $f: A \to B$ é uma regra (ou lei) que associa a cada elemento x de A um único elemento y de B, onde A e B são conjuntos não-vazios.



- Aqui, trataremos de um tipo especial de funções que associam elementos de espaços vetoriais chamadas de **transformações lineares**.

Transformações lineares

Definição: Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma ***transformação linear*** é uma função $T: U \to V$ tal que

i) $T(u+v) = T(u) + T(v),\ \forall u, v \in U$,

ii) $T(\alpha u) = \alpha\, T(u),\ \forall u \in U$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

No caso em que $U = V$, a transformação linear $T: U \to U$ também é chamada de ***operador linear***.

Exemplos:

1) A função $f(x) = 10x$ é uma transformação linear.

Exemplos:

1) A função $f(x) = 10x$ é uma transformação linear.

De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*:*

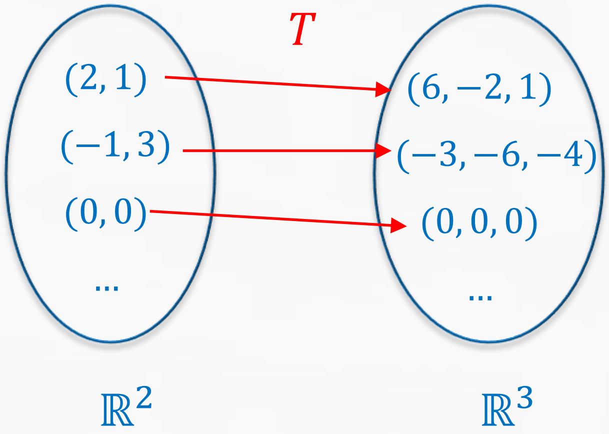
i) $f(x+y) = 10\,(x+y) = 10x + 10y = f(x) + f(y)$;

ii) $f(\alpha x) = 10\,(\alpha x) = \alpha\,(10x) = \alpha f(x)$.

2) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$ é uma transformação linear.

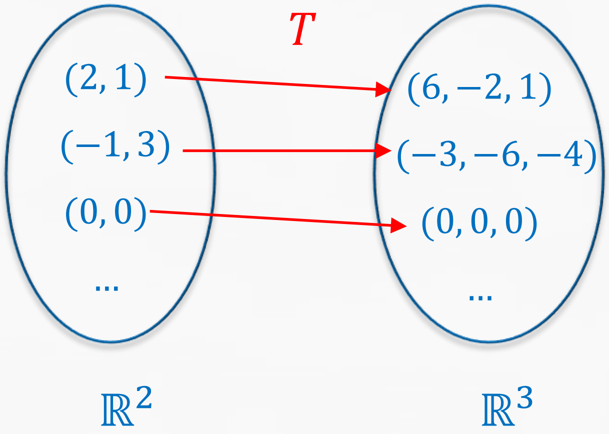
2) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$ é uma transformação linear.

Observe que T associa vetores do $\mathbb{R}^2$ a vetores do $\mathbb{R}^3$:



2) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$ é uma transformação linear.

Observe que T associa vetores do $\mathbb{R}^2$ a vetores do $\mathbb{R}^3$:



Temos que T é uma transformação linear, pois dados $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

i) $T(u + v) = T\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big)$

$$= T(\underbrace{x_1 + x_2}_{x}, \underbrace{y_1 + y_2}_{y})$$

$$= (3(\underbrace{x_1 + x_2}_{x}), -2(\underbrace{y_1 + y_2}_{y}), (\underbrace{x_1 + x_2}_{x}) - (\underbrace{y_1 + y_2}_{y}))$$

$$= (3x_1 + 3x_2, -2y_1 - 2y_2, x_1 - y_1 + x_2 - y_2)$$

$$= (3x_1, -2y_1, x_1 - y_1) + (3x_2, -2y_2, x_2 - y_2)$$

$$= T(u) + T(v)$$

$ii)\ T(\alpha u) = T\big(\alpha(x_1, y_1)\big)$

$= T(\underbrace{\alpha x_1}_{x}, \underbrace{\alpha y_1}_{y})$

$= (3(\underbrace{\alpha x_1}_{x}), -2(\underbrace{\alpha y_1}_{y}), (\underbrace{\alpha x_1}_{x}) - (\underbrace{\alpha y_1}_{y}))$

$= (3\alpha x_1, -2\alpha y_1, \alpha(x_1 - y_1))$

$= \alpha(3x_1, -2y_1, x_1 - y_1)$

$= \alpha T(u)$

Observações:

1) Decorre da definição de transformação linear que, se $T: U \to V$ é uma transformação linear, então $T(0_u) = 0_v$.

Observações:

1) Decorre da definição de transformação linear que, se $T: U \to V$ é uma transformação linear, então $T(0_u) = 0_v$.

2) Como consequência da observação anterior, é fácil notar que, se uma transformação não levar vetor nulo em vetor nulo, então ela *não* é linear.

Por exemplo, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x, y, z) = (3x + 2, 2y - z)$ *não é uma transformação linear, pois* $T(0,0,0) = (2,0) \neq (0,0)$.

Observações:

1) Decorre da definição de transformação linear que, se $T: U \to V$ é uma transformação linear, então $T(0_u) = 0_v$.

2) Como consequência da observação anterior, é fácil notar que, se uma transformação não levar vetor nulo em vetor nulo, então ela *não* é linear.

Por exemplo, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x, y, z) = (3x + 2, 2y - z)$ *não é uma transformação linear, pois* $T(0,0,0) = (2,0) \neq (0,0)$.

3) Seja $T: U \to V$. A recíproca da observação 1 não é verdadeira, ou seja, se $T(0_u) = 0_v$, então T pode não ser uma transformação linear.

Por exemplo, $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x, y) = (x^2, 3y)$ *não é uma transformação linear (verifique!), mas* $T(0,0) = (0,0)$.

Propriedade: Se $T: U \to V$ é uma transformação linear, então

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2),$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e $\forall u_1, u_2 \in V$.

A imagem de uma combinação linear de vetores é uma combinação linear das imagens desses vetores

Propriedade: Se $T: U \to V$ é uma transformação linear, então

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2),$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e $\forall u_1, u_2 \in V$.

A imagem de uma combinação linear de vetores é uma combinação linear das imagens desses vetores

De maneira geral, temos

$$T(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_n T(u_n),$$

$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $\forall u_1, \ldots, u_n \in V$.

Exemplo: Sabendo-se que $T(v_1) = (1, -2)$, $T(v_2) = (3,1)$ e $T(v_3) = (0,2)$, calcule $T(v)$, sendo $v = -4v_1 - 2v_2 + 7v_3$.

Propriedade: Se $T: U \to V$ é uma transformação linear, então

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2),$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e $\forall u_1, u_2 \in V$.

A imagem de uma combinação linear de vetores é uma combinação linear das imagens desses vetores

De maneira geral, temos

$$T(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_n T(u_n),$$

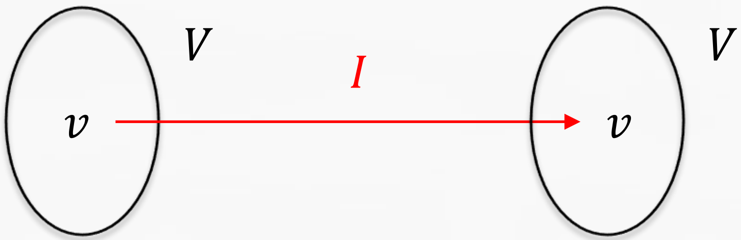
$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $\forall u_1, \ldots, u_n \in V$.

Exemplo: Sabendo-se que $T(v_1) = (1, -2)$, $T(v_2) = (3,1)$ e $T(v_3) = (0,2)$, calcule $T(v)$, sendo $v = -4v_1 - 2v_2 + 7v_3$.

$$T(v) = T(-4v_1 - 2v_2 + 7v_3) = -4\,T(v_1) - 2\,T(v_2) + 7\,T(v_3)$$
$$= -4\,(1,-2) - 2\,(3,1) + 7\,(0,2) = (-10,20)$$

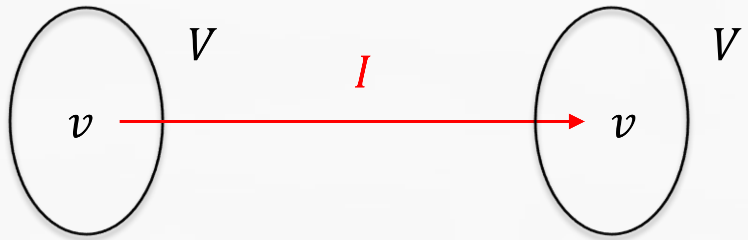
Tipos especiais de transformações lineares

1) **Operador identidade:** $I: V \to V$ dado por $I(v) = v, \forall v \in V$.

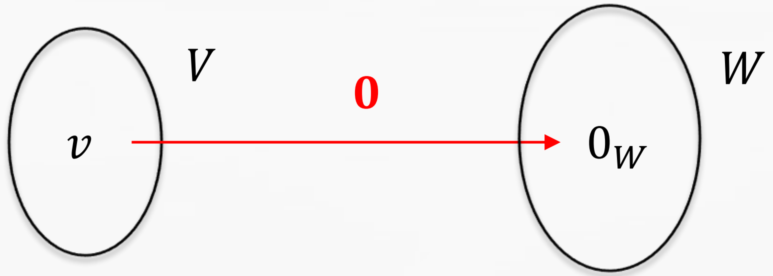


Tipos especiais de transformações lineares

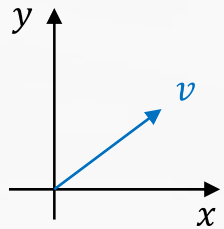
1) **Operador identidade:** $I: V \to V$ dado por $I(v) = v, \forall v \in V$.

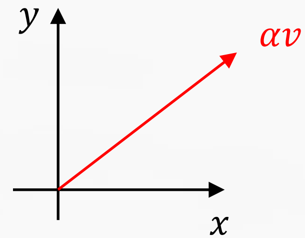


2) **Transformação nula:** $\mathbf{0}: V \to W$ dada por $\mathbf{0}(v) = 0_w, \forall v \in V$.



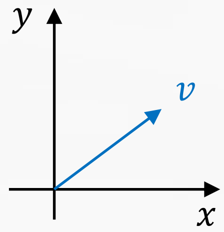
3) **Expansão** (ou **contração) uniforme:** $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(v) = \alpha \mathrm{v}$, com $\alpha > 0$.

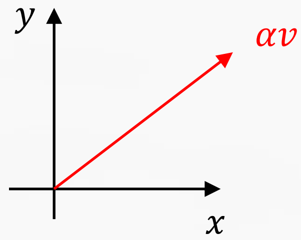




Essa transformação leva cada vetor v do $\mathbb{R}^2$ num vetor αv de mesma direção e sentido, mas de norma maior, se $\alpha > 1$, ou de norma menor, se $0 < \alpha < 1$.

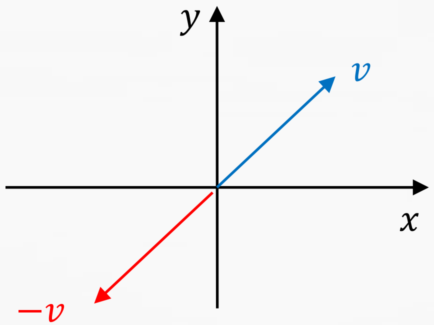
3) **Expansão** (ou **contração) uniforme:** $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(v) = \alpha$v, com $\alpha > 0$.



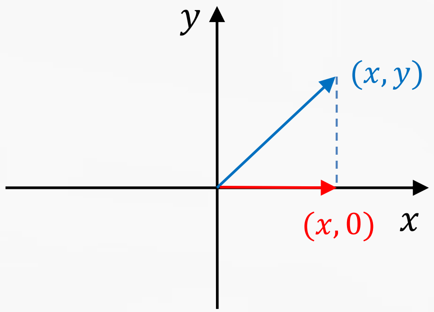


Essa transformação leva cada vetor v do $\mathbb{R}^2$ num vetor αv de mesma direção e sentido, mas de norma maior, se $\alpha > 1$, ou de norma menor, se $0 < \alpha < 1$.

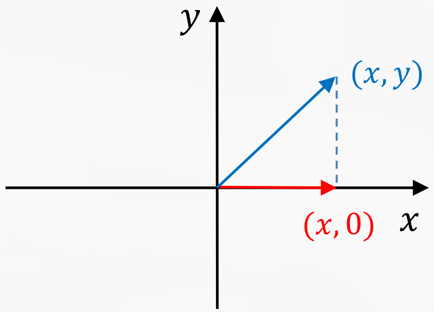
4) **Reflexão em relação à origem:** $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(v) = -v$.



5) **Projeção sobre o eixo-x:** $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$.

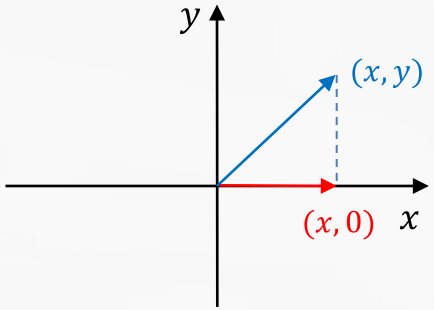


5) **Projeção sobre o eixo-$\boldsymbol{x}$:** $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$.



Observação: Projeção sobre o eixo-y: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (0, y)$.

5) **Projeção sobre o eixo-x:** $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$.

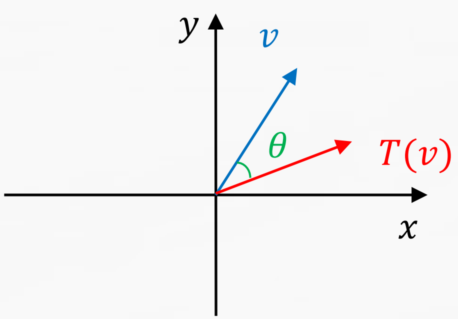


Observação: Projeção sobre o eixo-y: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (0, y)$.

6) **Rotação de um ângulo θ:** (no sentido anti-horário): $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$T(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta)$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



7) **Operador derivada:** Seja P_n o conjunto dos polinômios com coeficientes reais e de grau menor ou igual a n (incluindo o polinômio nulo). A aplicação derivada $D: P_n \to P_n$ dada por $D(p) = p'$ é um operador linear.

De fato, dados $p, q \in P_n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, das regras de derivação segue que:

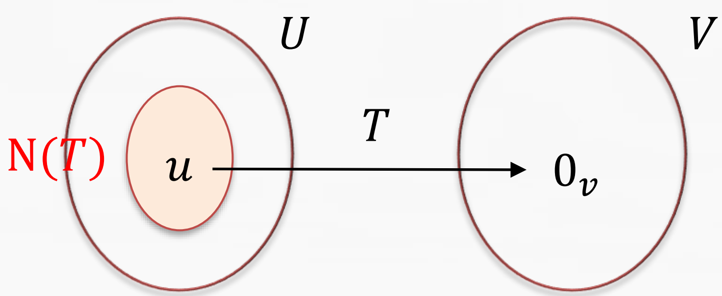
i) $D(p+q) = (p+q)' = p' + q' = D(p) + D(q)$

ii) $D(\alpha p) = (\alpha p)' = \alpha p' = \alpha\, D(p)$

Núcleo e imagem de uma transformação linear

Definição: Sejam U e V espaços vetoriais e $T: U \to V$ uma transformação linear. O ***núcleo*** de T é o subconjunto

$$\mathrm{N}(T) = \{u \in U \;/\; T(u) = 0_v\} \subset U.$$



Exemplos:

1) Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x - y, 2x - 2y)$.

Temos que $(1,1) \in N(T)$, *pois* $T(1,1) = (0,0)$.

2) Determine o núcleo da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x - y, 2x - 2y)$.

Exemplos:

1) Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x-y, 2x-2y)$.

Temos que $(1,1) \in N(T)$*, pois* $T(1,1) = (0,0)$.

2) Determine o núcleo da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x-y, 2x-2y)$.

Da definição, segue que: $N(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ T(x,y) = (0,0)\}$. *Assim,*

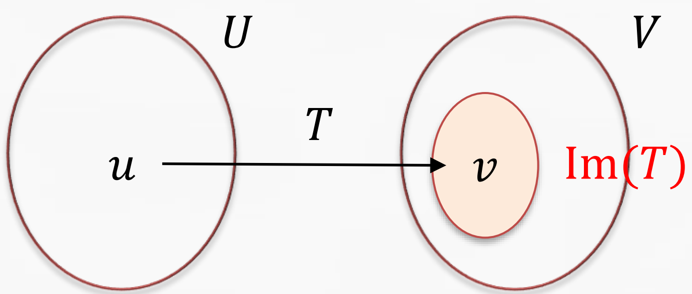
$$T(x,y) = (0,0) \ \Leftrightarrow \ (x-y, 2x-2y) = (0,0) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

A solução do sistema anterior é $x = y$*. Logo,* $N(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = y\} = [(1,1)]$.

Pois os vetores de $N(T)$ são da forma $(x,x) = x\,(1,1)$,
ou seja, são combinações lineares do vetor $(1,1)$

Definição: Sejam U e V espaços vetoriais e $T: U \to V$ uma transformação linear. A ***imagem*** de T é o subconjunto

$$\mathrm{Im}(T) = \{v \in V \;/\; T(u) = v, \text{para algum } u \in U\} \subset V$$



Exemplos:

1) Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$.

Temos que $(0,3) \in Im(T)$, *pois* $T(1, -1) = (0,3)$.

2) Determine a imagem da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$.

2) Determine a imagem da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$.

Da definição, segue que:

$Im(T) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ T(x, y) = (a, b), para\ algum\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. *Assim,*

$$(a, b) = T(x, y) = (x + y, 2x - y) = (x, 2x) + (y, -y) = \underbrace{x(1,2) + y(1, -1)}_{\text{Combinação linear dos vetores } (1,2) \text{ e } (1,-1).}$$

Note que dado um vetor $(a, b) \in Im(T)$ *ele pode ser escrito como combinação linear dos vetores* $(1, 2)$ *e* $(1, -1)$. *Logo,* $Im(T) = [(1, 2), (1, -1)]$.

2) Determine a imagem da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$.

Da definição, segue que:

$Im(T) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ T(x, y) = (a, b), para\ algum\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. *Assim,*

$$(a, b) = T(x, y) = (x + y, 2x - y) = (x, 2x) + (y, -y) = \underbrace{x(1,2) + y(1,-1)}_{\text{Combinação linear dos vetores } (1,2) \text{ e } (1,-1).}$$

Note que dado um vetor $(a, b) \in Im(T)$ ele pode ser escrito como combinação linear dos vetores $(1, 2)$ e $(1, -1)$. Logo, $Im(T) = [(1, 2), (1, -1)]$.

Outro modo: $\{(1,0), (0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^2$ (domínio de T) e

$$T(1, 0) = (1, 2) \quad e \quad T(0, 1) = (1, -1).$$

Logo, $Im(T) = [(1,2), (1, -1)]$. isto é, a imagem de T é o subespaço gerado pelas imagens do vetores da base canônica do domínio $\mathbb{R}^2$

Observações:

1) Considere uma transformação linear $T: U \to V$. Note que $N(T) \neq \emptyset$ e $\mathrm{Im}(T) \neq \emptyset$, pois, como $T(0_u) = 0_v$, então $N(T)$ e $Im(T)$ possuem pelo menos os vetores nulos de U e de V, respectivamente.

Observações:

1) Considere uma transformação linear $T: U \to V$. Note que $N(T) \neq \emptyset$ e $\text{Im}(T) \neq \emptyset$, pois, como $T(0_u) = 0_v$, então $N(T)$ e $Im(T)$ possuem pelo menos os vetores nulos de U e de V, respectivamente.

2) Dada uma transformação linear $T: U \to V$, podemos mostrar que $\text{N}(T)$ é um subespaço vetorial de U e $\text{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de V.

Observações:

1) Considere uma transformação linear $T: U \to V$. Note que $N(T) \neq \emptyset$ e $\mathrm{Im}(T) \neq \emptyset$, pois, como $T(0_u) = 0_v$, então $N(T)$ e $Im(T)$ possuem pelo menos os vetores nulos de U e de V, respectivamente.

2) Dada uma transformação linear $T: U \to V$, podemos mostrar que $\mathrm{N}(T)$ é um subespaço vetorial de U e $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de V.

Teorema do Núcleo e da Imagem (ou da Dimensão): Sejam U e V espaços vetoriais e dimensão finita e $T: U \to V$ uma transformação linear. Então,

$$\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim U$$

Matriz de uma transformação linear

- Dada uma transformação linear $T: U \to V$ e fixadas uma base em U e uma base em V, podemos representar a transformação linear T por uma matriz nestas bases.

Matriz de uma transformação linear

- Dada uma transformação linear $T: U \to V$ e fixadas uma base em U e uma base em V, podemos representar a transformação linear T por uma matriz nestas bases.

- Como obter a matriz de uma transformação linear?

Para responder a esta pergunta, considere as bases canônicas do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$$

Para responder a esta pergunta, considere as bases canônicas do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$$

Temos que $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *é a base canônica do* $\mathbb{R}^3$ *(que é o domínio de* T*) e*

$$T(1,0,0) = (2,3), \qquad T(0,1,0) = (-1,1), \qquad T(0,0,1) = (1,-2)$$

Logo, $[T] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ T(1,0,0) & T(0,1,0) & T(0,0,1) \end{array} \end{array}$

Para responder a esta pergunta, considere as bases canônicas do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$$

Temos que $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *é a base canônica do* $\mathbb{R}^3$ *(que é o domínio de* T*) e*

$$T(1,0,0) = (2,3), \qquad T(0,1,0) = (-1,1), \qquad T(0,0,1) = (1,-2)$$

Logo, $[T] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ T(1,0,0) & T(0,1,0) & T(0,0,1) \end{array}$$

A matriz $[T]$ é chamada de ***matriz canônica*** da transformação linear T.

Para responder a esta pergunta, considere as bases canônicas do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$$

Temos que $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *é a base canônica do* $\mathbb{R}^3$ *(que é o domínio de* T*)*

e

$$T(1,0,0) = (2,3), \qquad T(0,1,0) = (-1,1), \qquad T(0,0,1) = (1,-2)$$

Logo, $[T] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ T(1,0,0) & T(0,1,0) & T(0,0,1) \end{array} \end{array}.$

A matriz $[T]$ é chamada de ***matriz canônica*** da transformação linear T.

Note que, em notação matricial, dado $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos:

$$T(v) = [T] \cdot v$$

Observação: De maneira geral, se $T: U \to V$ é uma transformação linear, A e B são bases de U e V, respectivamente, podemos mostrar que:

$$T(v)_B = [T]_B^A \, v_A,$$

onde:

$T(v)_B$ é a matriz coordenada de $T(v)$ na base B,

v_A é a matriz coordenada de v na base A,

$[T]_B^A$ é a matriz de T em relação às bases A e B.

Observação: De maneira geral, se $T: U \to V$ é uma transformação linear, A e B são bases de U e V, respectivamente, podemos mostrar que:

$$T(v)_B = [T]_B^A \, v_A,$$

onde:

$T(v)_B$ é a matriz coordenada de $T(v)$ na base B,

v_A é a matriz coordenada de v na base A,

$[T]_B^A$ é a matriz de T em relação às bases A e B.

No exemplo anterior, consideramos o caso em que A e B são as bases canônicas do $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

- Vimos que, fixadas uma base no domínio e outra no contradomínio, uma transformação linear pode ser representada por uma matriz. Reciprocamente, uma matriz pode ser interpretada como uma transformação linear.

- Vimos que, fixadas uma base no domínio e outra no contradomínio, uma transformação linear pode ser representada por uma matriz. Reciprocamente, uma matriz pode ser interpretada como uma transformação linear.

Exemplo: Obtenha a transformação linear cuja matriz canônica é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Vimos que, fixadas uma base no domínio e outra no contradomínio, uma transformação linear pode ser representada por uma matriz. Reciprocamente, uma matriz pode ser interpretada como uma transformação linear.

Exemplo: Obtenha a transformação linear cuja matriz canônica é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Se T for a transformação procurada, temos que $M = [T]$. Já vimos que, em notação matricial: $T(v) = [T] \cdot v$. Como a ordem de $[T]$ é 3×2, para que a multiplicação de matrizes seja possível, a ordem da matriz coordenada de v tem que ser 2×1. Logo, $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e:

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ 5x-y \\ 4y \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Assim, M é a matriz canônica da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y) = (2x-3y, 5x-y, 4y)$.

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 2x - 3y \\ 5x - y \\ 4y \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Assim, M é a matriz canônica da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x,y) = (2x - 3y, 5x - y, 4y)$.

Observação: De certo modo, o estudo das transformações lineares pode ser reduzido ao estudo de matrizes.

Operações com transformações lineares

- **Adição:** Sejam $T_1: U \to V$ e $T_2: U \to V$ transformações lineares. Chama-se *soma* das transformações lineares T_1 e T_2 à transformação linear

  $T_1 + T_2: U \to V$ dada por $(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v), \forall\, v \in U.$

  Utilizando as matrizes canônicas de T_1 e T_2, temos que:

$$[T_1 + T_2] = [T_1] + [T_2]$$

Exemplo: Sejam $T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares dadas por $T_1(x, y) = (x + 2y, 2x - y, x)$ e $T_2(x, y) = (-x, y, x + y)$.

Temos que

$$(T_1 + T_2)(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y) = (x + 2y, 2x - y, x) + (-x, y, x + y) =$$

$$= (2y, 2x, 2x + y).$$

Exemplo: Sejam $T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares dadas por $T_1(x,y) = (x+2y, 2x-y, x)$ e $T_2(x,y) = (-x, y, x+y)$.

Temos que

$$(T_1 + T_2)(x,y) = T_1(x,y) + T_2(x,y) = (x+2y, 2x-y, x) + (-x, y, x+y) =$$

$$= (2y, 2x, 2x+y).$$

Ou, usando matrizes: $[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $[T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Matrizes canônicas de T_1 e T_2, respectivamente

$$[T_1 + T_2] = [T_1] + [T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz canônica de $T_1 + T_2$

Logo, $(T_1 + T_2)(x,y) = (2x, 2y, x+y)$.

- **Multiplicação por escalar:** Sejam $T: U \to V$ uma transformação linear e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se produto de T pelo escalar α à transformação linear

$$\alpha T: U \to V \text{ dada por } (\alpha T)(v) = \alpha\, T(v), \forall\, v \in U.$$

Utilizando a matriz canônica de T, temos que:

$$[\alpha T] = \alpha\, [T]$$

- **Multiplicação por escalar:** Sejam $T: U \to V$ uma transformação linear e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se produto de T pelo escalar α à transformação linear

$$\alpha T: U \to V \text{ dada por } (\alpha T)(v) = \alpha\, T(v), \forall\, v \in U.$$

Utilizando a matriz canônica de T, temos que:

$$[\alpha T] = \alpha\, [T]$$

Exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear dada por $T(x, y) = (x + 2y, 2x - y, x)$.

Temos que

$$(2T)(x, y) = 2\, T(x, y) = 2\,(x + 2y, 2x - y, x) = (2x + 4y, 4x - 2y, 2x).$$

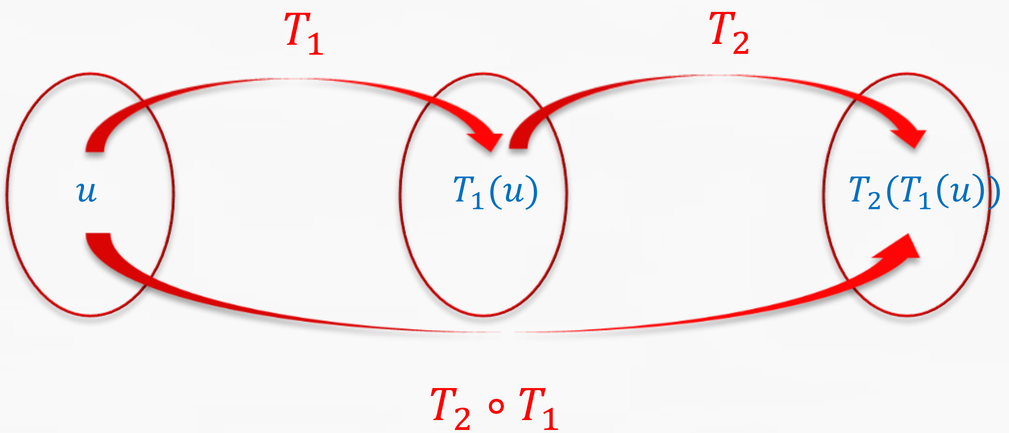
Ou, usando matrizes: $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Matriz canônica de T

$$[2T] = 2\,[T] = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$ Matriz canônica de $2T$

$Logo,\ (2T)(x, y) = (2x + 4y, 4x - 2y, 2x).$

- **Composição:** Sejam $T_1: U \to V$ e $T_2: V \to W$ transformações lineares. Chama-se *aplicação composta* de T_1 com T_2, e se representa por $T_2 \circ T_1$, à transformação linear

$$T_2 \circ T_1: U \to W \text{ dada por } (T_2 \circ T_1)(v) = T_2\big(T_1(v)\big), \forall\, v \in U.$$



Utilizando as matrizes canônicas de T_1 e T_2, temos que:

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2] \cdot [T_1]$$

Exemplo: Sejam $T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares dadas por $T_1(x, y) = (x + 2y, 2x - y, x)$ e $T_2(x, y, z) = (x + y, y + z)$.

Temos que

$$(T_2 \circ T_1)(x, y) = T_2(T_1(x, y)) = T_2(x + 2y, 2x - y, x)$$

Exemplo: Sejam $T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares dadas por $T_1(x,y) = (x+2y, 2x-y, x)$ e $T_2(x,y,z) = (x+y, y+z)$.

Temos que

$$(T_2 \circ T_1)(x,y) = T_2(T_1(x,y)) = T_2(\overbrace{x+2y}^{x}, \overbrace{2x-y}^{y}, \overbrace{x}^{z})$$

$$= \big(\underbrace{(x+2y)+(2x-y)}_{x+y}, \underbrace{(2x-y)+x}_{y+z}\big) = (3x+y, 3x-y).$$

Exemplo: Sejam $T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares dadas por $T_1(x,y) = (x+2y, 2x-y, x)$ e $T_2(x,y,z) = (x+y, y+z)$.

Temos que

$$(T_2 \circ T_1)(x,y) = T_2(T_1(x,y)) = T_2(\overbrace{x+2y}^{x}, \overbrace{2x-y}^{y}, \overbrace{x}^{z})$$

$$= \big(\underbrace{(x+2y)+(2x-y)}_{x+y}, \underbrace{(2x-y)+x}_{y+z}\big) = (3x+y, 3x-y).$$

Ou, usando matrizes: $[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad [T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Matrizes canônicas de T_1 e T_2, respectivamente

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2] \cdot [T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz canônica de $T_1 \circ T_2$

Logo, $(T_1 \circ T_2)(x,y) = (3x+y, 3x-y)$.

Referências bibliográficas

- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. ***Álgebra Linear***. 2 ed. São Paulo – SP: Pearson Makron Books, 1987.

- BOLDRINI, José Luiz; *et al*. ***Álgebra Linear***. 3 ed. São Paulo – SP: Harbra, 1986.

- CALLIOLI, Carlos A.; *et al*. ***Álgebra Linear e Aplicações***. 6 ed. rev. São Paulo – SP: Atual, 1993.

- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. ***Introdução à Álgebra Linear***. 1 ed. São Paulo – SP: Pearson Education do Brasil, 1997.