► **Exemplo 4** Seja $L(x, y)$ a aproximação linear local de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no ponto (3, 4). Compare o erro da aproximação de

$$f(3{,}04;\ 3{,}98) = \sqrt{(3{,}04)^2 + (3{,}98)^2}$$

por $L(3{,}04;\ 3{,}98)$ com a distância entre os pontos (3, 4) e (3,04; 3,98).

Solução Temos

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

com $f_x(3, 4) = \frac{3}{5}$ e $f_y(3, 4) = \frac{4}{5}$. Portanto, a aproximação linear local de f em (3, 4) é dada por

$$L(x, y) = 5 + \tfrac{3}{5}(x - 3) + \tfrac{4}{5}(y - 4)$$

Conseqüentemente,

$$f(3{,}04; 3{,}98) \approx L(3{,}04; 3{,}98) = 5 + \tfrac{3}{5}(0{,}04) + \tfrac{4}{5}(-0{,}02) = 5{,}008$$

Como

$$f(3{,}04; 3{,}98) = \sqrt{(3{,}04)^2 + (3{,}98)^2} \approx 5{,}00819$$

o erro da aproximação está perto de $5{,}00819 - 5{,}008 = 0{,}00019$. Isso é bem menos do que $\frac{1}{200}$ da distância

$$\sqrt{(3{,}04 - 3)^2 + (3{,}98 - 4)^2} \approx 0{,}045$$

entre os pontos (3, 4) e (3,04; 3,98). ◄

Analogamente, para uma função $f(x, y, z)$ que é diferenciável em (x_0, y_0, z_0), a aproximação linear local é

$$\begin{aligned} L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) &+ f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) \\ &+ f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) \end{aligned} \tag{15}$$

As nossas definições nesta seção foram formuladas de tal modo que a continuidade e a linearidade local são conseqüências da diferenciabilidade. Na Seção 14.7 mostraremos que se uma função $f(x, y)$ for diferenciável num ponto (x_0, y_0), então o gráfico de $L(x, y)$ é um plano tangente não-vertical ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.4 *(Ver página 967 para respostas.)*

1. Suponha que $f(x, y)$ seja diferenciável em (x_0, y_0) e seja Δf a variação de f de seu valor em (x_0, y_0) para seu valor em $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.
   (a) $\Delta f \approx$ ________
   (b) O limite que garante que o erro da aproximação em (a) é muito pequeno quando ambos Δx e Δy estão perto de 0 é ________.
2. Calcule a diferencial de cada função.
   (a) $z = xe^{y^2}$ (b) $w = x \operatorname{sen}(yz)$
3. Se f for diferenciável em (x_0, y_0), então a aproximação linear local de f em (x_0, y_0) é $L(x, y) =$ ________.
4. Suponha que $f(1, -2) = 4$ e que $f(x, y)$ seja diferenciável em $(1, -2)$ com $f_x(1, -2) = 2$ e $f_y(1, -2) = -3$. Estime o valor de $f(0{,}9; -1{,}950)$.

EXERCÍCIOS 14.4

ENFOCANDO CONCEITOS

1. Suponha que uma função $f(x, y)$ seja diferenciável no ponto (3, 4) com $f_x(3, 4) = 2$ e $f_y(3, 4) = -1$. Se $f(3, 4) = 5$, estime o valor de $f(3{,}01; 3{,}98)$.
2. Suponha que uma função $f(x, y)$ seja diferenciável no ponto (−1, 2) com $f_x(-1, 2) = 1$ e $f_y(-1, 2) = 3$. Se $f(-1, 2) = 2$, estime o valor de $f(-0{,}99; 2{,}02)$.

3. Suponha que uma função $f(x, y, z)$ seja diferenciável no ponto $(1, 2, 3)$ com $f_x(1, 2, 3) = 1$, $f_y(1, 2, 3) = 2$ e $f_z(1, 2, 3) = 3$. Se $f(1, 2, 3) = 4$, estime o valor de $f(1{,}01; 2{,}02; 3{,}03)$.

4. Suponha que uma função $f(x, y, z)$ seja diferenciável no ponto $(2, 1, -2)$ com $f_x(2, 1, -2) = -1$, $f_y(2, 1, -2) = 1$ e $f_z(2, 1, -2) = -2$. Se $f(2, 1, -2) = 0$, estime o valor de $f(1{,}98; 0{,}99; -1{,}97)$.

5. Use as Definições 14.4.1 e 14.4.2 para provar que uma função constante de duas ou três variáveis é diferenciável em toda parte.

6. Use as Definições 14.4.1 e 14.4.2 para provar que uma função linear de duas ou três variáveis é diferenciável em toda parte.

7. Use a Definição 14.4.2 para provar que

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

é diferenciável em $(0, 0, 0)$.

8. Use a Definição 14.4.2 para determinar todos valores de r tais que $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^r$ seja diferenciável em $(0, 0, 0)$.

9-20 Calcule a diferencial dz ou dw da função dada.

9. $z = 7x - 2y$
10. $z = e^{xy}$
11. $z = x^3y^2$
12. $z = 5x^2y^5 - 2x + 4y + 7$
13. $z = \operatorname{arc\,tg} xy$
14. $z = \sec^2(x - 3y)$
15. $w = 8x - 3y + 4z$
16. $w = e^{xyz}$
17. $w = x^3y^2z$
18. $w = 4x^2y^3z^7 - 3xy + z + 5$
19. $w = \operatorname{arc\,tg}(xyz)$
20. $w = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

21-26 Use uma diferencial total para aproximar a variação do valor de f de P para Q. Compare sua estimativa com a variação real de f.

21. $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x$; $P(1, 2)$, $Q(1{,}01; 2{,}04)$
22. $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/2}$; $P(8, 9)$, $Q(7{,}78; 9{,}03)$
23. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{xy}$; $P(-1, -2)$, $Q(-1{,}02; -2{,}04)$
24. $f(x, y) = \ln\sqrt{1 + xy}$; $P(0, 2)$, $Q(-0{,}09; 1{,}98)$
25. $f(x, y, z) = 2xy^2z^3$; $P(1, -1, 2)$, $Q(0{,}99; -1{,}02; 2{,}02)$
26. $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x + y + z}$; $P(-1, -2, 4)$, $Q(-1{,}04; -1{,}98; 3{,}97)$.

27. Um retângulo de comprimento inicial x_0 e largura inicial y_0 foi aumentado, resultando num retângulo de comprimento $x_0 + \Delta x$ e largura $y_0 + \Delta y$ (ver figura a seguir). Qual porção da figura representa o aumento de área do retângulo? Qual porção da figura representa uma aproximação por uma diferencial total do aumento de área?

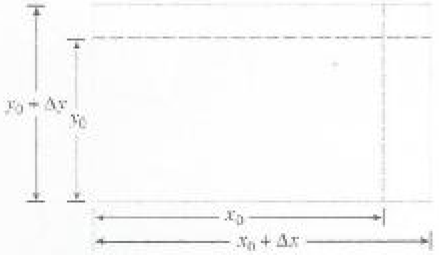


Figure Ex-27

28. O volume V de um cone circular reto de raio r e altura h é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Suponha que a altura decresça de 20 cm para 19,95 cm, enquanto que o raio cresce de 4 cm para 4,05 cm. Use uma diferencial total para aproximar a variação no volume do cone.

29-36 (a) Encontre a aproximação linear local L da função f especificada no ponto P dado. (b) Compare o erro da aproximação de f por L no ponto Q especificado com a distância entre P e Q.

29. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $P(4, 3)$, $Q(3{,}92; 3{,}01)$
30. $f(x, y) = x^{0{,}5}y^{0{,}3}$; $P(1, 1)$, $Q(1{,}05; 0{,}97)$
31. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$; $P(0, 0)$, $Q(0{,}003; 0{,}004)$
32. $f(x, y) = \ln xy$; $P(1, 2)$, $Q(1{,}01; 2{,}02)$
33. $f(x, y, z) = xyz$; $P(1, 2, 3)$, $Q(1{,}001; 2{,}002; 3{,}003)$
34. $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{y + z}$; $P(-1, 1, 1)$, $Q(-0{,}99; 0{,}99; 1{,}01)$
35. $f(x, y, z) = xe^{yz}$; $P(1, -1, -1)$, $Q(0{,}99; -1{,}01; -0{,}99)$
36. $f(x, y, z) = \ln(x + yz)$; $P(2, 1, -1)$, $Q(2{,}02; 0{,}97; -1{,}01)$

37. Em cada parte, confirme que a fórmula enunciada é a aproximação linear local em $(0, 0)$.

(a) $e^x \operatorname{sen} y \approx y$ (b) $\dfrac{2x + 1}{y + 1} \approx 1 + 2x - y$

38. Mostre que a aproximação linear local da função $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ em $(1, 1)$ é

$$x^\alpha y^\beta \approx 1 + \alpha(x - 1) + \beta(y - 1)$$

39. Em cada parte, confirme que a fórmula enunciada é a aproximação linear local em $(1, 1, 1)$.

(a) $xyz + 2 \approx x + y + z$ (b) $\dfrac{4x}{y + z} \approx 2x - y - z + 2$

40. Usando o Exercício 38, o que podemos conjecturar que seja a aproximação linear local de $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ em $(1, 1, 1)$? Verifique sua conjectura encontrando a aproximação linear local.

41. Suponha que uma função $f(x, y)$ seja diferenciável no ponto $(1, 1)$ com $f_x(1, 1) = 2$ e $f(1, 1) = 3$. Seja $L(x, y)$ a aproximação linear local de f em $(1, 1)$. Se $L(1{,}1; 0{,}9) = 3{,}15$, encontre o valor de $f_y(1, 1)$.

42. Suponha que uma função $f(x, y)$ seja diferenciável no ponto $(0, -1)$ com $f_x(0, -1) = -2$ e $f(0, -1) = 3$. Seja $L(x, y)$ a apro-

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.5 (*Ver página 978 para respostas.*)

1. Suponha que $z = xy^2$ e que x e y sejam funções diferenciáveis de t com $x = 1$, $y = -1$, $dx/dt = -2$ e $dy/dt = 3$ quando $t = -1$. Então $dz/dt =$ __________ quando $t = -1$.

2. Suponha que C seja o gráfico da equação $f(x, y) = 1$ e que essa equação defina y implicitamente como uma função diferenciável de x. Se o ponto $(2, 1)$ pertence a C com $f_x(2, 1) = 3$ e $f_y(2, 1) = -1$, então a reta tangente a C no ponto $(2, 1)$ tem inclinação __________.

3. Um retângulo está crescendo de tal modo que, quando seu comprimento mede 5 cm e sua largura 2 cm, o comprimento está crescendo a uma taxa de 3 cm/s e a largura está crescendo a uma taxa de 4 cm/s. Nesse instante, a área do retângulo está crescendo a uma taxa de __________.

4. Suponha que $z = x/y$, onde x e y são funções diferenciáveis de u e v tais que $x = 3$, $y = 1$, $\partial x/\partial u = 4$, $\partial x/\partial v = -2$, $\partial y/\partial u = 1$ e $\partial y/\partial v = -1$ quando $u = 2$ e $v = 1$. Se $u = 2$ e $v = 1$, então $\partial z/\partial u =$ __________ e $\partial z/\partial v =$ __________.

EXERCÍCIOS 14.5

1-6 Use uma forma apropriada da regra da cadeia para determinar dz/dt.

1. $z = 3x^2y^3$; $x = t^4$, $y = t^2$
2. $z = \ln(2x^2 + y)$; $x = \sqrt{t}$, $y = t^{2/3}$
3. $z = 3\cos x - \operatorname{sen} xy$; $x = 1/t$, $y = 3t$
4. $z = \sqrt{1 + x - 2xy^4}$; $x = \ln t$, $y = t$
5. $z = e^{1-xy}$; $x = t^{1/3}$, $y = t^3$
6. $z = \cosh^2 xy$; $x = t/2$, $y = e^t$

7-10 Use uma forma apropriada da regra da cadeia para determinar dw/dt.

7. $w = 5x^2y^3z^4$; $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^5$
8. $w = \ln(3x^2 - 2y + 4z)^3$; $x = t^{1/2}$, $y = t^{2/3}$, $z = t^{-2}$
9. $w = 5\cos xy - \operatorname{sen} xz$; $x = 1/t$, $y = t$, $z = t^3$
10. $w = \sqrt{1 + x - 2yz^4x}$; $x = \ln t$, $y = t$, $z = 4t$

ENFOCANDO CONCEITOS

11. Suponha que
$$w = x^3y^2z^4; \quad x = t^2, \quad y = t + 2, \quad z = 2t^4$$
Encontre a taxa de variação de w em relação a t em $t = 1$ usando a regra da cadeia e então confira sua resposta expressando w como uma função de t e derivando.

12. Suponha que
$$w = x \operatorname{sen} yz^2; \quad x = \cos t, \quad y = t^2, \quad z = e^t$$
Encontre a taxa de variação de w em relação a t em $t = 0$ usando a regra da cadeia e então confira sua resposta expressando w como uma função de t e derivando.

13. Suponha que $z = f(x, y)$ seja diferenciável no ponto $(4, 8)$ com $f_x(4, 8) = 3$ e $f_y(4, 8) = -1$. Se $x = t^2$ e $y = t^3$, encontre dz/dt para $t = 2$.

14. Suponha que $w = f(x, y, z)$ seja diferenciável no ponto $(1, 0, 2)$ com $f_x(1, 0, 2) = 1$, $f_y(1, 0, 2) = 2$ e $f_z(1, 0, 2) = 3$. Se $x = t$, $y = \operatorname{sen}(\pi t)$ e $z = t^2 + 1$, encontre dw/dt para $t = 1$.

15. Explique como a regra da derivada do produto de funções de uma só variável pode ser vista como uma decorrência da regra da cadeia aplicada a uma função particular de duas variáveis.

16. Um aluno tenta derivar a função x^x usando a regra da derivada de potências, obtendo o resultado errado $x \cdot x^{x-1}$. Um outro aluno tenta derivar x^x tratando-a como uma função exponencial, obtendo o resultado errado $(\ln x)x^x$. Use a regra da cadeia para explicar por que a derivada correta é a soma desses dois resultados errados.

17-22 Use uma forma apropriada da regra da cadeia para determinar $\partial z/\partial u$ e $\partial z/\partial v$.

17. $z = 8x^2y - 2x + 3y$; $x = uv$, $y = u - v$
18. $z = x^2 - y \operatorname{tg} x$; $x = u/v$, $y = u^2v^2$
19. $z = x/y$; $x = 2\cos u$, $y = 3\operatorname{sen} v$
20. $z = 3x - 2y$; $x = u + v\ln u$, $y = u^2 - v\ln v$
21. $z = e^{x^2y}$; $x = \sqrt{uv}$, $y = 1/v$
22. $z = \cos x \operatorname{sen} y$; $x = u$, $y = u^2 + v^2$

23-30 Use formas apropriadas da regra da cadeia para encontrar as derivadas.

23. Seja $T = x^2y - xy^3 + 2$; $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. Encontre $\partial T/\partial r$ e $\partial T/\partial\theta$.
24. Sejam $R = e^{2s-t^2}$; $s = 3\phi$, $t = \phi^{1/2}$. Encontre $dR/d\phi$.
25. Sejam $t = u/v$; $u = x^2 - y^2$, $v = 4xy^3$. Encontre $\partial t/\partial x$ e $\partial t/\partial y$.
26. Sejam $w = rs/(r^2 + s^2)$; $r = uv$, $s = u - 2v$. Encontre $\partial w/\partial u$ e $\partial w/\partial v$.
27. Seja $z = \ln(x^2 + 1)$, onde $x = r\cos\theta$. Encontre $\partial z/\partial r$ e $\partial z/\partial\theta$.

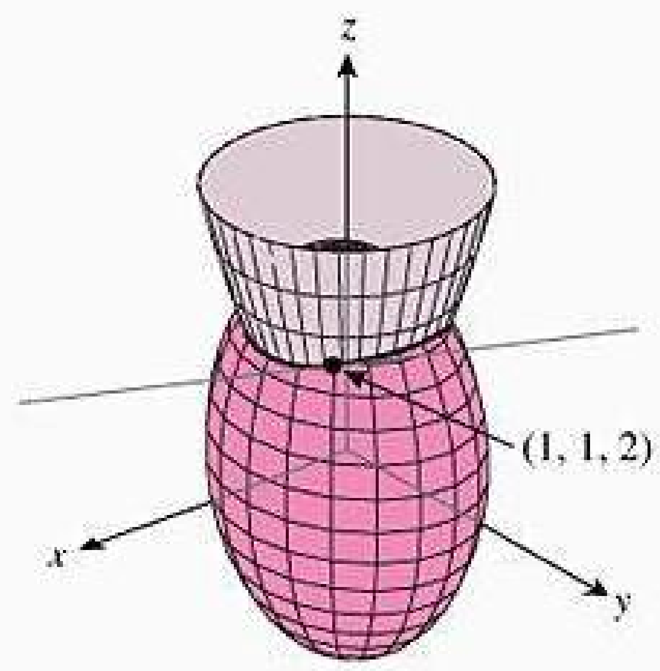


Figura 14.7.7

▶ Exemplo 3 Obtenha as equações paramétricas da reta tangente à curva de interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ no ponto (1, 1, 2) (Figura 14.7.7).

Solução Começamos reescrevendo as equações das superfícies como

$$x^2 + y^2 - z = 0 \quad \text{e} \quad 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 9 = 0$$

e tomamos

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z \quad \text{e} \quad G(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 9$$

Precisaremos dos gradientes dessas funções no ponto (1, 1, 2). Os cálculos são

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \nabla G(x, y, z) = 6x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$
$$\nabla F(1, 1, 2) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \nabla G(1, 1, 2) = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Assim, o vetor tangente em (1, 1, 2) à curva de interseção é

$$\nabla F(1, 1, 2) \times \nabla G(1, 1, 2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 12\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

Como qualquer múltiplo escalar deste vetor fará exatamente o mesmo, podemos multiplicar por $\frac{1}{2}$ para reduzir o tamanho dos coeficientes e usar o vetor $6\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ para determinar a direção da reta tangente. Esse vetor e o ponto (1, 1, 2) fornecem as equações paramétricas

$$x = 1 + 6t, \quad y = 1 - 7t, \quad z = 2 - 2t \; ◀$$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.7 (*Ver página 996 para respostas.*)

1. Suponha que $f(x, y)$ seja diferenciável no ponto (3, 1) com $f(3, 1) = 4$, $f_x(3, 1) = 2$ e $f_y(3, 1) = -3$. Uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto (3, 1, 4) é ________;

$x =$ ________, $y =$ ________, $z =$ ________

são equações paramétricas da reta normal ao gráfico de f no ponto (3, 1, 4).

2. Uma equação do plano tangente ao gráfico de $z = x^2\sqrt{y}$ no ponto (2, 4, 8) é ________; as equações paramétricas da reta normal ao gráfico de $z = x^2\sqrt{y}$ no ponto (2, 4, 8) são

$x =$ ________, $y =$ ________, $z =$ ________

3. Suponha que $f(1, 0, -1) = 2$ e que $f(x, y, z)$ seja diferenciável em $(1, 0, -1)$ com $\nabla f(1, 0, -1) = \langle 2, 1, 1 \rangle$. Uma equação do plano tangente à superfície de nível $f(x, y, z) = 2$ no ponto $(1, 0, -1)$ é ________; as equações paramétricas da reta normal à superfície de nível pelo ponto $(1, 0, -1)$ são

$x =$ ________, $y =$ ________, $z =$ ________

4. A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e o plano $x + y + z = 5$ intersectam num círculo que passa pelo ponto (2, 1, 2). Equações paramétricas da reta normal a esse círculo em (2, 1, 2) são

$x =$ ________, $y =$ ________, $z =$ ________

EXERCÍCIOS 14.7 [C] CAS

1-8 Encontre uma equação para o plano tangente e equações paramétricas para a reta normal à superfície no ponto P.

1. $z = 4x^3y^2 + 2y$; $P(1, -2, 12)$

2. $z = \frac{1}{2}x^7y^{-2}$; $P(2, 4, 4)$

3. $z = xe^{-y}$; $P(1, 0, 1)$

4. $\ln\sqrt{x^2 + y^2}$; $P(-1, 0, 0)$

5. $z = e^{3y}$ sen $3x$; $P(\pi/6, 0, 1)$

6. $z = x^{1/2} + y^{1/2}$; $P(4, 9, 5)$

7. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; $P(-3, 0, 4)$

8. $x^2y - 4z^2 = -7$; $P(-3, 1, -2)$

✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.8 (Ver página 1005 para respostas.)

1. Os pontos críticos da função $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$ são __________.

2. Suponha que $f(x, y)$ tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas em toda parte e que a origem seja um ponto crítico de f. Decida qual informação (se houver) é fornecida pelo teste da derivada segunda se
   (a) $f_{xx}(0, 0) = 2,\ f_{xy}(0, 0) = 2,\ f_{yy}(0, 0) = 2$
   (b) $f_{xx}(0, 0) = -2,\ f_{xy}(0, 0) = 2,\ f_{yy}(0, 0) = 2$
   (c) $f_{xx}(0, 0) = 3,\ f_{xy}(0, 0) = 2,\ f_{yy}(0, 0) = 2$
   (d) $f_{xx}(0, 0) = -3,\ f_{xy}(0, 0) = 2,\ f_{yy}(0, 0) = -2$

3. Decida qual informação (se houver) é fornecida pelo teste da derivada segunda para a função $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ no ponto
   (a) $(0, 0)$ (b) $(-1, -1)$ (c) $(1, 1)$

4. Uma caixa retangular tem área de superfície total de 2 m^2. Expresse o volume da caixa como uma função das dimensões x e y da base da caixa.

EXERCÍCIOS 14.8 Recurso Gráfico [C] CAS

1-2 Localize todos os máximos e mínimos absolutos, se houver, por inspeção. Então verifique sua resposta usando Cálculo.

1. (a) $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$
   (b) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$
   (c) $f(x, y) = x + 2y - 5$

2. (a) $f(x, y) = 1 - (x + 1)^2 - (y - 5)^2$
   (b) $f(x, y) = e^{xy}$
   (c) $f(x, y) = x^2 - y^2$

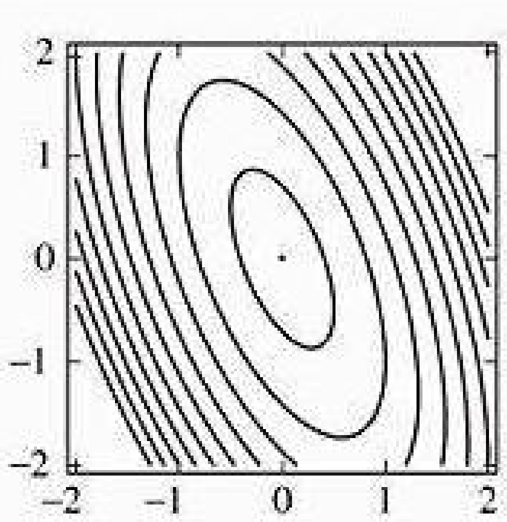
3-4 Complete os quadrados e localize todos os máximos e mínimos absolutos, se houver, por inspeção. Então verifique sua resposta usando Cálculo.

3. $f(x, y) = 13 - 6x + x^2 + 4y + y^2$

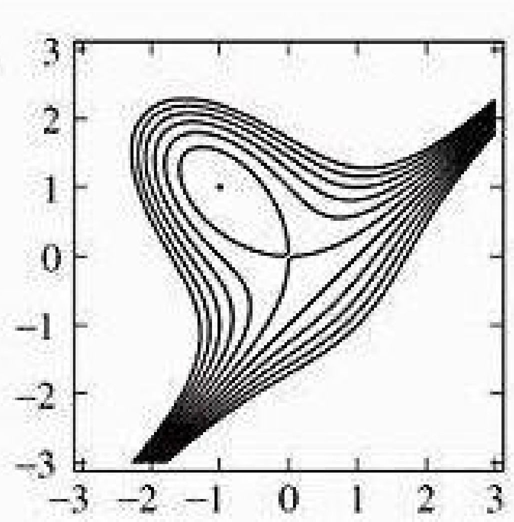
4. $f(x, y) = 1 - 2x - x^2 + 4y - 2y^2$

ENFOCANDO CONCEITOS

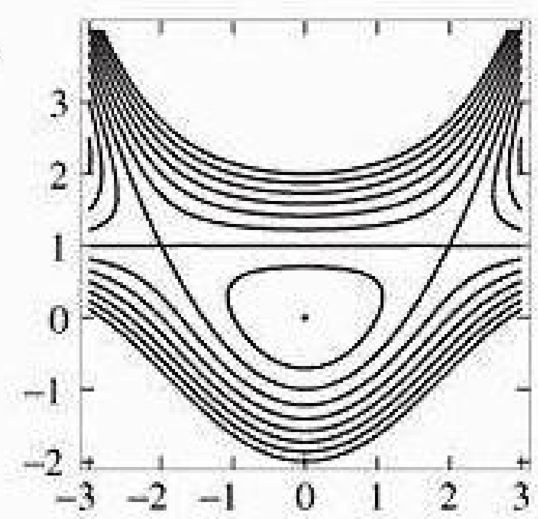
5-8 Os mapas de contornos mostram todos os aspectos significantivos da função. Faça uma conjectura sobre o número e a localização de todos os extremos relativos e os pontos de sela, e então use Cálculo para verificar sua conjectura.

5.


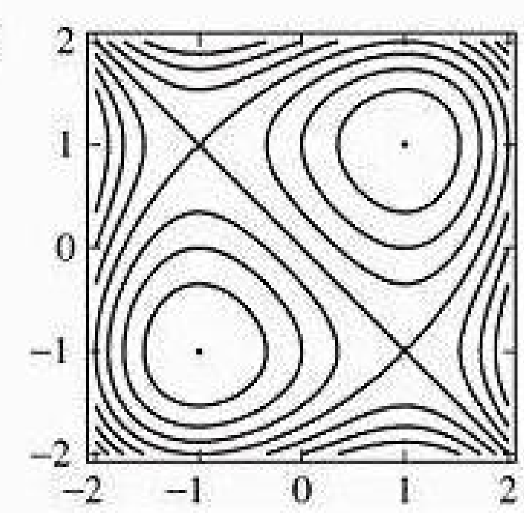
$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$

6.


$f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$

7.


$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$

8.


$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$

9-20 Localize todos os máximos e mínimos relativos e os pontos de sela, se houver.

9. $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$
10. $f(x, y) = x^2 + xy - 2y - 2x + 1$
11. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$
12. $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$
13. $f(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy}$
14. $f(x, y) = xe^y$
15. $f(x, y) = x^2 + y - e^y$
16. $f(x, y) = xy + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y}$
17. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$
18. $f(x, y) = y \operatorname{sen} x$
19. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2+2x)}$
20. $f(x, y) = xy + \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{b^3}{y} \quad (a \neq 0, b \neq 0)$

[C] 21. Use um CAS para gerar um mapa de contornos de
$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4 + 2$$
para $-2 \le x \le 2$ e $-2 \le y \le 2$ e use o mapa para aproximar a localização de todos os extremos relativos e os pontos de sela na região. Verifique sua resposta usando Cálculo e identifique os extremos relativos como máximo relativo ou mínimo relativo.

[C] 22. Use um CAS para gerar o mapa de contornos de
$$f(x, y) = 2y^2x - yx^2 + 4xy$$
para $-5 \le x \le 5$ e $-5 \le y \le 5$, e use o mapa para aproximar a

Pág. 965: 1.

Pág. 966: 4, 12, 21, 24.

Pág. 975: 1, 3, 7, 9, 17, 21

Pág. 994: 1, 3, 4, 5, 8.

Pág. 1004: 9, 10, 11, 14, 16, 18.

RESPOSTAS (NA ORDEM)

1) $f(x,y) \approx f(3,4) + f_x(x-3) + f_y(y-4) = 5 + 2(x-3) - (y-4)$ and $f(3.01, 3.98) \approx 5 + 2(0.01) - (-0.02) = 5.04$.

4) $L(x,y,z) = f(2,1,-2) - (x-2) + (y-1) - 2(z+2)$, $f(1.98, 0.99, -1.97) \approx 0.02 - 0.01 - 2(0.03) = -0.05$.

12) $dz = (10xy^5 - 2)dx + (25x^2y^4 + 4)dy$.

21. $df = (2x + 2y - 4)dx + 2xdy$; $x = 1$, $y = 2$, $dx = 0.01$, $dy = 0.04$ so $df = 0.10$ and $\Delta f = 0.1009$

24. $df = \dfrac{y}{2(1+xy)}dx + \dfrac{x}{2(1+xy)}dy$; $x = 0$, $y = 2$, $dx = -0.09$, $dy = -0.02$ so $df = -0.09$ and $\Delta f \approx -0.098129$

1. $42t^{13}$

3. $3t^{-2}\sin(1/t)$

7. $165t^{32}$

9. $-2t\cos(t^2)$

17. $\partial z/\partial u = 24u^2v^2 - 16uv^3 - 2v + 3$, $\partial z/\partial v = 16u^3v - 24u^2v^2 - 2u - 3$

21. $\partial z/\partial u = e^u$, $\partial z/\partial v = 0$

1. At P, $\partial z/\partial x = 48$ and $\partial z/\partial y = -14$, tangent plane $48x - 14y - z = 64$, normal line $x = 1 + 48t$, $y = -2 - 14t$, $z = 12 - t$.

3. At P, $\partial z/\partial x = 1$ and $\partial z/\partial y = -1$, tangent plane $x - y - z = 0$, normal line $x = 1 + t$, $y = -t$, $z = 1 - t$.

4. At P, $\partial z/\partial x = -1$ and $\partial z/\partial y = 0$, tangent plane $x + z = -1$, normal line $x = -1 - t$, $y = 0$, $z = -t$.

5. At P, $\partial z/\partial x = 0$ and $\partial z/\partial y = 3$, tangent plane $3y - z = -1$, normal line $x = \pi/6$, $y = 3t$, $z = 1 - t$.

8. By implicit differentiation $\partial z/\partial x = (xy)/(4z)$, $\partial z/\partial y = x^2/(8z)$ so at P, $\partial z/\partial x = 3/8$ and $\partial z/\partial y = -9/16$, tangent plane $6x - 9y - 16z = 5$, normal line $x = -3 + 3t/8$, $y = 1 - 9t/16$, $z = -2 - t$.

9. $f_x = y + 2 = 0$, $f_y = 2y + x + 3 = 0$; critical point $(1,-2)$; $D = -1 < 0$ at $(1,-2)$, saddle point.

10. $f_x = 2x + y - 2 = 0$, $f_y = x - 2 = 0$; critical point $(2,-2)$; $D = -1 < 0$ at $(2,-2)$, saddle point.

11. $f_x = 2x + y - 3 = 0$, $f_y = x + 2y = 0$; critical point $(2,-1)$; $D = 3 > 0$ and $f_{xx} = 2 > 0$ at $(2,-1)$, relative minimum.

14. $f_x = e^y = 0$ is impossible, no critical points.

16. $f_x = y - 2/x^2 = 0$, $f_y = x - 4/y^2 = 0$; critical point $(1,2)$; $D = 3 > 0$ and $f_{xx} = 4 > 0$ at $(1,2)$, relative minimum.

18. $f_x = y\cos x = 0$, $f_y = \sin x = 0$; $\sin x = 0$ if $x = n\pi$ for $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ and $\cos x \neq 0$ for these values of x so $y = 0$; critical points $(n\pi, 0)$ for $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; $D = -1 < 0$ at $(n\pi, 0)$, saddle points.