Universidade Tecnológica Federal do Paraná
UTFPR - Campus Apucarana
Departamento Acadêmico de Matemática

MÓDULO 4

Autovalores e autovetores

Curso: Engenharia de Computação

Disciplina: Álgebra Linear

Professor: Alisson C. Reinol

(2022-2)

Conteúdos

- Introdução
- Autovalores e autovetores
- Determinação de autovalores e autovetores
- Propriedades dos autovalores e dos autovetores
- Diagonalização de operadores
- Diagonalização de matrizes simétricas

Introdução

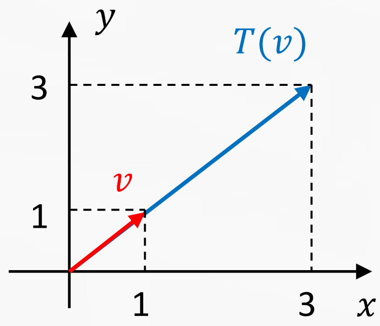
- Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (2x + y, 3y)$$

Introdução

- Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

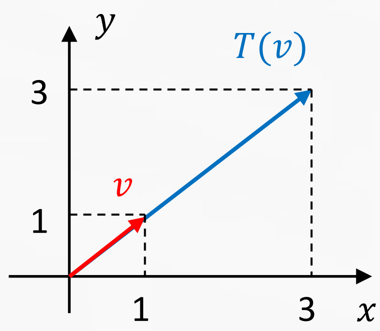
$$T(x, y) = (2x + y, 3y)$$



Observe que:

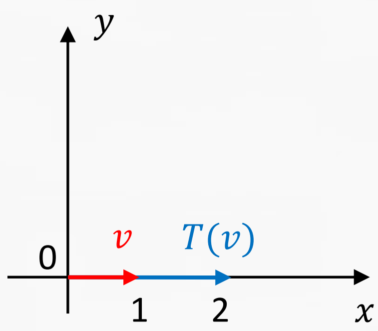
$$T(1,1) = (3,3) = 3\ (1,1)$$

Introdução



- Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (2x + y, 3y)$$



Observe que:

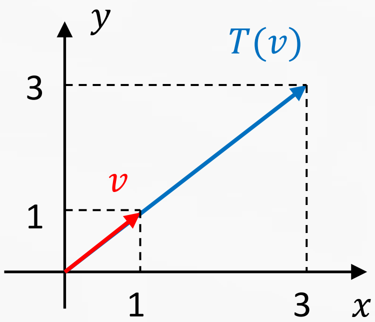
$$T(1,1) = (3,3) = 3\,(1,1)$$

$$T(1,0) = (2,0) = 2\,(1,0)$$

Introdução

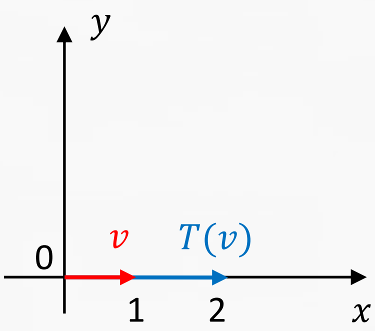
- Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (2x + y, 3y)$$

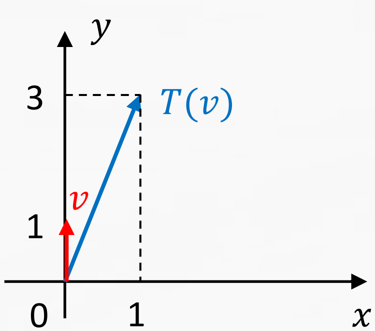


Observe que:

$$T(1,1) = (3,3) = 3\,(1,1)$$



$$T(1,0) = (2,0) = 2\,(1,0)$$



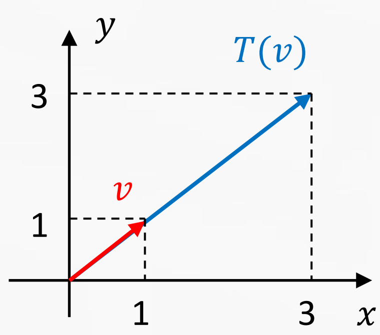
$$T(0,1) = (1,3)$$

Mas nem sempre isso acontece!

Introdução

- Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

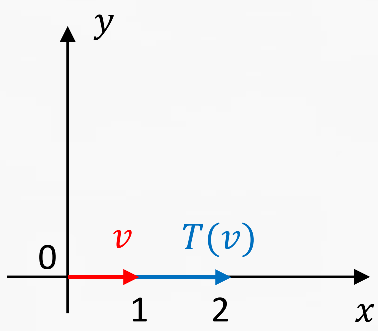
$$T(x, y) = (2x + y, 3y)$$



Observe que:

$$T(1,1) = (3,3) = 3\,(1,1)$$

Dizemos que (1,1) é autovetor de T associado ao autovalor 3

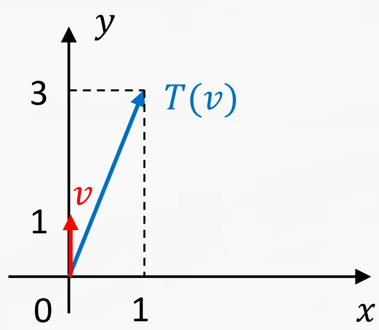


$$T(1,0) = (2,0) = 2\,(1,0)$$

Dizemos que (1,0) é autovetor de T associado ao autovalor 2

$$T(0,1) = (1,3)$$

Mas nem sempre isso acontece!



Autovalores e autovetores

Definição: Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $T: V \to V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0_v$, é um ***autovetor*** (ou ***vetor próprio***) de T se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$T(v) = \lambda\, v.$$

Neste caso, λ é um ***autovalor*** (ou ***valor próprio***) de T associado ao autovetor v.

Autovalores e autovetores

Definição: Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $T: V \to V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0_v$, é um ***autovetor*** (ou ***vetor próprio***) de T se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$T(v) = \lambda\, v.$$

Neste caso, λ é um ***autovalor*** (ou ***valor próprio***) de T associado ao autovetor v.

Observação: Na definição anterior, observe que se v é autovetor de um operador linear, então sempre teremos $v \neq 0_v$ (ou seja, v sempre é diferente do vetor nulo). Agora, se λ é um autovalor, então podemos ter $\lambda = 0$.

Exemplo: Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (2x + y, 3y).$$

Exemplo: Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (2x + y, 3y).$$

Observe que:

$T(1,1) = (3,3) = 3\,(1,1)$

Logo, 3 é um autovalor de T associado ao autovetor (1,1)

$T(1,0) = (2,0) = 2\,(1,0)$

Logo, 2 é um autovalor de T associado ao autovetor (1,0)

Exemplo: Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x,y) = (2x + y, 3y).$$

Observe que:

$T(1,1) = (3,3) = 3\,(1,1)$

Logo, 3 é um autovalor de T associado ao autovetor (1,1)

$T(1,0) = (2,0) = 2\,(1,0)$

Logo, 2 é um autovalor de T associado ao autovetor (1,0)

- Como determinar todos os autovalores e autovetores de um operador linear?

Determinação de autovalores e autovetores

- Já vimos que é sempre possível associar um operador linear a uma matriz quadrada.

Determinação de autovalores e autovetores

- Já vimos que é sempre possível associar um operador linear a uma matriz quadrada.

Exemplo: Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (2x + y, 3y)$$

Determinação de autovalores e autovetores

- Já vimos que é sempre possível associar um operador linear a uma matriz quadrada.

Exemplo: Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (2x + y, 3y)$$

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 3y \end{bmatrix}$$

A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *é a matriz canônica do operador linear* T.

Definição: Dada uma matriz quadrada A de ordem n, entendemos por ***autovalores*** e ***autovetores da matriz A*** os autovalores e os autovetores do operador linear associada a esta matriz em relação à base canônica. Neste caso,

$$Av = \lambda v.$$

Definição: Dada uma matriz quadrada A de ordem n, entendemos por ***autovalores*** e ***autovetores da matriz A*** os autovalores e os autovetores do operador linear associada a esta matriz em relação à base canônica. Neste caso,

$$Av = \lambda v.$$

Exemplo: Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + y, 3y)$.

Definição: Dada uma matriz quadrada A de ordem n, entendemos por ***autovalores*** e ***autovetores da matriz A*** os autovalores e os autovetores do operador linear associada a esta matriz em relação à base canônica. Neste caso,

$$Av = \lambda v.$$

Exemplo: Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + y, 3y)$.

Temos que $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *é a matriz canônica de* T. *Já vimos que 3 é um autovalor de* T *associado ao autovetor* $(1,1)$. *Agora, note que*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \underbrace{3}_{\lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v},$$

ou seja, 3 é o autovalor da matriz A associado ao autovetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Determinação dos autovalores

- Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e seja A a sua matriz canônica, ou seja, $A = [T]$. (Observe que A é uma matriz quadrada de ordem n).

Determinação dos autovalores

- Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e seja A a sua matriz canônica, ou seja, $A = [T]$. (Observe que A é uma matriz quadrada de ordem n).

- Se λ é um autovalor de T associado ao autovetor v, então

$$A\,v = \lambda\,v$$

v é matriz coluna de ordem $n \times 1$

$$A\,v - \lambda\,v = 0$$

0 é a matriz nula de ordem $n \times 1$

$$A\,v - \lambda\,I\,v = 0$$

I é a matriz identidade de ordem n

$$(A - \lambda\,I)\,v = 0$$

Como $v \neq 0_{n\times 1}$, então $\det(A - \lambda\,I) = 0$.

Determinação dos autovalores

- Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e seja A a sua matriz canônica, ou seja, $A = [T]$. (Observe que A é uma matriz quadrada de ordem n).

- Se λ é um autovalor de T associado ao autovetor v, então

$$A\,v = \lambda\,v$$

$$A\,v - \lambda\,v = 0$$

$$A\,v - \lambda\,I\,v = 0$$

$$(A - \lambda\,I)\,v = 0$$

$\det(A - \lambda\,I) = 0$ é chamada de ***equação característica***

$\det(A - \lambda\,I)$ é chamado de ***polinômio característico***

Como $v \neq 0_{n\times1}$, então $\det(A - \lambda\,I) = 0$.

- As *raízes da equação característica* serão os *autovalores* do operador T (ou da matriz A).

- As *raízes da equação característica* serão os *autovalores* do operador T (ou da matriz A).

Exemplo: Determine os autovalores do operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + y, 3y)$.

- As *raízes da equação característica* serão os *autovalores* do operador T (ou da matriz A).

Exemplo: Determine os autovalores do operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + y, 3y)$.

Temos que $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *é a matriz canônica de* T*. Então:*

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

As raízes da equação característica são $\lambda_1 = 2$ *e* $\lambda_2 = 3$.

Portanto, $\lambda_1 = 2$ *e* $\lambda_2 = 3$ *são os autovalores de* T.

Determinação dos autovetores

- Para obter os autovetores de T, basta substituir os valores de λ obtidos anteriormente na equação

$$(A - \lambda I)\, v = 0.$$

Determinação dos autovetores

- Para obter os autovetores de T, basta substituir os valores de λ obtidos anteriormente na equação

$$(A - \lambda\, I)\, v = 0.$$

Exemplo: Considere novamente o operador linear do exemplo anterior:

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \qquad T(x, y) = (2x + y, 3y).$$

Determinação dos autovetores

- Para obter os autovetores de T, basta substituir os valores de λ obtidos anteriormente na equação

$$(A - \lambda\, I)\, v = 0.$$

Exemplo: Considere novamente o operador linear do exemplo anterior:

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \qquad T(x, y) = (2x + y, 3y).$$

Já vimos que $\lambda_1 = 2$ *e* $\lambda_2 = 3$ *são os autovalores de* T. *Então:*

- *Para* $\lambda_1 = 2$*:*

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da igualdade anterior, obtemos que $y = 0$. *Logo,* $v_1 = (x, 0)$, *com* $x \neq 0$, *são os autovetores de* T *associados ao autovalor* $\lambda_1 = 2$.

- *Para* $\lambda_2 = 3$:

$$(A-\lambda_2 I)v_2 = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da igualdade anterior, obtemos que $y = x$. *Logo,* $v_2 = (x, x)$, *com* $x \neq 0$, *são os autovetores de* T *associados ao autovalor* $\lambda_2 = 3$.

- *Para* $\lambda_2 = 3$*:*

$$(A - \lambda_2 I)v_2 = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da igualdade anterior, obtemos que $y = x$*. Logo,* $v_2 = (x, x)$*, com* $x \neq 0$*, são os autovetores de* T *associados ao autovalor* $\lambda_2 = 3$*.*

Observação: A cada autovalor de T estão associados infinitos autovetores.

Propriedades dos autovalores e autovetores

P1) Se v é um autovetor de um operador linear T associado ao autovalor λ, então o vetor αv, com $\alpha \neq 0$, também é um autovetor de T associado ao autovalor λ.

Propriedades dos autovalores e autovetores

P1) Se v é um autovetor de um operador linear T associado ao autovalor λ, então o vetor αv, com $\alpha \neq 0$, também é um autovetor de T associado ao autovalor λ.

P2) Se λ é um autovalor de um operador linear $T: V \to V$, o conjunto S_λ formado por todos os autovetores de T associados ao autovalor λ mais o vetor nulo é um subespaço vetorial de V.

O subespaço $S_\lambda = \{v \in V \ / \ T(v) = \lambda v\}$ é denominado ***subespaço associado ao autovalor*** $\boldsymbol{\lambda}$ ou ***autoespaço associado a*** $\boldsymbol{\lambda}$.

Exemplo: Considerando o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (2x + y, 3y)$, já vimos que:

$v_1 = (x, 0)$, com $x \neq 0$: autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$

$v_2 = (x, x)$, com $x \neq 0$: autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$.

Logo,

$S_2 = \{(x, 0) \ / \ x \in \mathbb{R}\} = [(1,0)]$ *e*

$S_3 = \{(x, x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} = [(1,1)]$

São os autoespaços associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ *e* $\lambda_2 = 3$*, respectivamente.*

Exemplo: Considerando o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (2x + y, 3y)$, já vimos que:

$v_1 = (x, 0)$, com $x \neq 0$: autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$

$v_2 = (x, x)$, com $x \neq 0$: autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$.

Logo,

$S_2 = \{(x, 0) \ / \ x \in \mathbb{R}\} = [(1,0)]$ *e*

$S_3 = \{(x, x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} = [(1,1)]$

São os autoespaços associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ *e* $\lambda_2 = 3$, *respectivamente.*

Exemplo: Considerando o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (2x + y, 3y)$, já vimos que:

$v_1 = (x, 0)$, com $x \neq 0$: autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$

$v_2 = (x, x)$, com $x \neq 0$: autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$.

Logo,

$S_2 = \{(x, 0) \ / \ x \in \mathbb{R}\} = [(1,0)]$ *e*

$S_3 = \{(x, x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} = [(1,1)]$

São os autoespaços associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ *e* $\lambda_2 = 3$, *respectivamente.*

P3) Autovetores associados a autovalores distintos de um operador linear $T: V \rightarrow V$ são linearmente independentes.

Observação:

Sempre que tivermos um operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, o conjunto $\{v_1, v_2\}$ formado pelos autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, é uma base do $\mathbb{R}^2$.

De maneira geral, se $T\colon V \to V$ é um operador linear, $\dim V = n$ e T possuir n autovalores distintos, o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, formado por autovetores associados a cada um dos distintos autovalores, é uma base de V.

Diagonalização de operadores

Definição: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Um operador linear $T: V \to V$ é dito ***diagonalizável*** se existe uma base de V formada por autovetores de T.

Diagonalização de operadores

Definição: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Um operador linear $T: V \to V$ é dito ***diagonalizável*** se existe uma base de V formada por autovetores de T.

Exemplo: O operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (2x + y, 3y)$ é diagonalizável.

Diagonalização de operadores

Definição: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Um operador linear $T: V \to V$ é dito ***diagonalizável*** se existe uma base de V formada por autovetores de T.

Exemplo: O operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (2x + y, 3y)$ é diagonalizável.

De fato, já vimos que $v_1 = (x, 0)$ e $v_2 = (x, x)$, com $x \neq 0$, são os autovetores de T associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, respectivamente. Logo, o conjunto $B = \{(1,0), (1,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T.

- Agora, vamos considerar este estudo em termos de matrizes.

- Agora, vamos considerar este estudo em termos de matrizes.

Definição: Seja A a matriz canônica do operador T, isto é, $A = [T]$. A matriz A é ***diagonalizável*** se existe uma matriz inversível P tal que a matriz

$$\mathrm{D} = P^{-1}A\,P$$

é uma matriz diagonal. Neste caso, dizemos que P ***diagonaliza*** A.

- Agora, vamos considerar este estudo em termos de matrizes.

Definição: Seja A a matriz canônica do operador T, isto é, $A = [T]$. A matriz A é ***diagonalizável*** se existe uma matriz inversível P tal que a matriz

$$\mathrm{D} = P^{-1}A\,P$$

é uma matriz diagonal. Neste caso, dizemos que P ***diagonaliza*** A.

Observações:

1) Dizemos que as matrizes A e D são ***semelhantes***.

2) Sejam $T: V \to V$ um operador linear, com $\dim V = n$, e $A = [T]$. Se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V formada por autovetores de T, obtemos a matriz P colocando-se as coordenadas de v_i na i-ésima coluna de P. Neste caso, a matriz D será uma matriz diagonal formada pelos autovalores de T correspondentes aos respectivos autovetores.

2) Sejam $T: V \rightarrow V$ um operador linear, com $\dim V = n$, e $A = [T]$. Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V formada por autovetores de T, obtemos a matriz P colocando-se as coordenadas de v_i na i-ésima coluna de P. Neste caso, a matriz D será uma matriz diagonal formada pelos autovalores de T correspondentes aos respectivos autovetores.

Exemplo: Considere novamente o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (2x + y, 3y)$.

2) Sejam $T: V \to V$ um operador linear, com $\dim V = n$, e $A = [T]$. Se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V formada por autovetores de T, obtemos a matriz P colocando-se as coordenadas de v_i na i-ésima coluna de P. Neste caso, a matriz D será uma matriz diagonal formada pelos autovalores de T correspondentes aos respectivos autovetores.

Exemplo: Considere novamente o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (2x + y, 3y)$.

Temos que $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (1,1)$ são autovetores de T associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Então:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{P^{-1}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}^{A = [T]} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{P} = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}^{D}$$

2) Sejam $T: V \to V$ um operador linear, com $\dim V = n$, e $A = [T]$. Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V formada por autovetores de T, obtemos a matriz P colocando-se as coordenadas de v_i na i-ésima coluna de P. Neste caso, a matriz D será uma matriz diagonal formada pelos autovalores de T correspondentes aos respectivos autovetores.

Exemplo: Considere novamente o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (2x + y, 3y)$.

Temos que $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (1,1)$ são autovetores de T associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Então:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{P^{-1}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}^{A = [T]} \cdot \overbrace{\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array} \end{array}}^{P} = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}^{D}$$

λ_1 λ_2

Diagonalização de matrizes simétricas

Definição: Uma matriz quadrada A de ordem n é dita ***simétrica*** se $A = A^t$.

Neste caso, o operador linear T tal que $[T] = A$ é chamado de ***simétrico***.

Diagonalização de matrizes simétricas

Definição: Uma matriz quadrada A de ordem n é dita ***simétrica*** se $A = A^t$. Neste caso, o operador linear T tal que $[T] = A$ é chamado de ***simétrico***.

Exemplo: O operador $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (4x + 2y, 2x + y)$ é simétrico.

Diagonalização de matrizes simétricas

Definição: Uma matriz quadrada A de ordem n é dita ***simétrica*** se $A = A^t$. Neste caso, o operador linear T tal que $[T] = A$ é chamado de ***simétrico***.

Exemplo: O operador $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (4x + 2y, 2x + y)$ é simétrico.

De fato, $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *é a matriz canônica de* T *e trata-se de uma matriz simétrica, pois* $A = A^t$.

Propriedades:

P1) A equação característica de uma matriz simétrica tem apenas raízes reais.

Propriedades:

P1) A equação característica de uma matriz simétrica tem apenas raízes reais.

P2) Se $T: V \to V$ é um operador linear simétrico com autovalores distintos, então seus autovetores são ortogonais.

Propriedades:

P1) A equação característica de uma matriz simétrica tem apenas raízes reais.

P2) Se $T: V \to V$ é um operador linear simétrico com autovalores distintos, então seus autovetores são ortogonais.

Exemplo: Considere novamente o operador linear simétrico $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (4x + 2y, 2x + y)$.

Temos que $v_1 = (-1,2)$ e $v_2 = (2,1)$ são autovetores de T associados aos autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$. (Verifique!)

Note que v_1 e v_2 são ortogonais. De fato,

$$v_1 \cdot v_2 = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0.$$

Observação: Conforme já vimos anteriormente, os autovetores v_1 e v_2 formam uma base do $\mathbb{R}^2$. Neste caso, a base $B = \{v_1, v_2\}$ é uma ***base ortogonal*** do $\mathbb{R}^2$, pois $v_1 \perp v_2$. Se, além disso, v_1 e v_2 fossem unitários, ou seja, $\|v_1\| = 1$ e $\|v_2\| = 1$, $B = \{v_1, v_2\}$ seria uma ***base ortonormal*** do $\mathbb{R}^2$.

A base canônica $\{(1,0), (0,1)\}$ *do* $\mathbb{R}^2$ *é um exemplo de base ortonormal.*

Observação: Conforme já vimos anteriormente, os autovetores v_1 e v_2 formam uma base do $\mathbb{R}^2$. Neste caso, a base $B = \{v_1, v_2\}$ é uma ***base ortogonal*** do $\mathbb{R}^2$, pois $v_1 \perp v_2$. Se, além disso, v_1 e v_2 fossem unitários, ou seja, $\|v_1\| = 1$ e $\|v_2\| = 1$, $B = \{v_1, v_2\}$ seria uma ***base ortonormal*** do $\mathbb{R}^2$.

A base canônica $\{(1,0),(0,1)\}$ *do* $\mathbb{R}^2$ *é um exemplo de base ortonormal.*

P3) Já vimos que uma matriz A é diagonalizada pela P dos autovetores através de $P^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \mathrm{D}$. No caso em que A é uma matriz simétrica e que os autovetores são unitários, temos que $P^{-1} = P^t$ (a matriz P é chamada de ***ortogonal***). Deste modo,

$$P^t\,A\,P = D$$

e dizemos que P ***diagonaliza*** A ***ortogonalmente***.

Exemplo: Considerando o operador linear simétrico $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (4x + 2y, 2x + y)$, já vimos que $v_1 = (-1,2)$ e $v_2 = (2,1)$ são autovetores de T associados aos autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$.

Exemplo: Considerando o operador linear simétrico $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (4x + 2y, 2x + y)$, já vimos que $v_1 = (-1,2)$ e $v_2 = (2,1)$ são autovetores de T associados aos autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$.

Para obtermos a matriz diagonalizadora P de modo que ela seja ortogonal, os autovetores v_1 e v_2 precisam ser unitários. Uma maneira de fazer isso, é considerando os vetores:

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|}\, v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad e \quad u_2 = \frac{1}{\|v_2\|}\, v_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Assim, $P = \begin{bmatrix} -{}^{1}/_{\sqrt{5}} & {}^{2}/_{\sqrt{5}} \\ {}^{2}/_{\sqrt{5}} & {}^{1}/_{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ *diagonaliza A ortogonalmente. De fato,*

$$P^t\, A\, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(Verifique!)

Aplicações envolvendo autovalores e autovetores

a) Potência de matriz: Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Então:

$$A^2 = A \cdot A, \qquad A^3 = A^2 \cdot A, \qquad \ldots \qquad A^n = A^{n-1} \cdot A$$

Aplicações envolvendo autovalores e autovetores

a) Potência de matriz: Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Então:

$$A^2 = A \cdot A, \qquad A^3 = A^2 \cdot A, \qquad \dots \qquad A^n = A^{n-1} \cdot A$$

Como calcular A^{2022}?

- Este cálculo torna-se mais fácil se A é diagonalizável.

$$M^{-1}\,A\,M = D, \qquad \text{onde} \quad \mathrm{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}, \qquad D^3 = \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 \end{bmatrix}, \qquad \dots\,, \qquad D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}\,A\,M = D \Leftrightarrow A = M\,DM^{-1} \Leftrightarrow A^k = MD^kM^{-1}$$

- Este cálculo torna-se mais fácil se A é diagonalizável.

$$M^{-1}\,A\,M = D, \qquad \text{onde} \quad \mathrm{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}, \qquad D^3 = \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 \end{bmatrix}, \qquad \dots, \qquad D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}\,A\,M = D \Leftrightarrow A = M\,DM^{-1} \Leftrightarrow A^k = MD^kM^{-1}$$

Voltando ao problema inicial...

$$A^{2022} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^{2022} & 0 \\ 0 & 6^{2022} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Este cálculo torna-se mais fácil se A é diagonalizável.

$$M^{-1}\,A\,M = D, \qquad \text{onde} \quad \mathrm{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}, \qquad D^3 = \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 \end{bmatrix}, \qquad \dots, \qquad D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}\,A\,M = D \Leftrightarrow A = M\,DM^{-1} \Leftrightarrow A^k = MD^kM^{-1}$$

Voltando ao problema inicial...

$$A^{2022} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^{2022} & 0 \\ 0 & 6^{2022} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Potências de matrizes aparecem, por exemplo, no cálculo de equações diferenciais.

b) Google

- É um dos buscadores mais populares do mundo.

b) Google

- É um dos buscadores mais populares do mundo.

- Lista as buscas por ordem de preferência.

b) Google

- É um dos buscadores mais populares do mundo.

- Lista as buscas por ordem de preferência.

- Algoritmo Page Rank → classifica as páginas de acordo com a forma que são vinculadas.

b) Google

- É um dos buscadores mais populares do mundo.

- Lista as buscas por ordem de preferência.

- Algoritmo Page Rank → classifica as páginas de acordo com a forma que são vinculadas.

- Classificação → autovetor associado ao maior autovalor da matriz Google.

- Seja x_i a importância do site i.

- Seja x_i a importância do site i.

- A importância do site i é proporcional à importância dos sites que apontam para ele.

  Exemplo: $x_1 = k\ (x_3 + x_{564} + x_{1243} + x_{2031})$

- Seja x_i a importância do site i.

- A importância do site i é proporcional à importância dos sites que apontam para ele.

  Exemplo: $x_1 = k\ (x_3 + x_{564} + x_{1243} + x_{2031})$

- Conseguimos escrever:

$$A\,x = \frac{1}{k}\,x$$

x: vetor que denota a importância de cada um dos sites

- Seja x_i a importância do site i.

- A importância do site i é proporcional à importância dos sites que apontam para ele.

  Exemplo: $x_1 = k\,(x_3 + x_{564} + x_{1243} + x_{2031})$

- Conseguimos escrever:

$$A\,x = \frac{1}{k}\,x$$

  x: vetor que denota a importância de cada um dos sites

- Procedimento: calcular o autovetor de coordenadas não-negativas (Teorema de Perron). A maior coordenada é a do site mais importante.

Referências bibliográficas

- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. ***Álgebra Linear***. 2 ed. São Paulo – SP: Pearson Makron Books, 1987.

- BOLDRINI, José Luiz; *et al*. ***Álgebra Linear***. 3 ed. São Paulo – SP: Harbra, 1986.

- CALLIOLI, Carlos A.; *et al*. ***Álgebra Linear e Aplicações***. 6 ed. rev. São Paulo – SP: Atual, 1993.

- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. ***Introdução à Álgebra Linear***. 1 ed. São Paulo – SP: Pearson Education do Brasil, 1997.