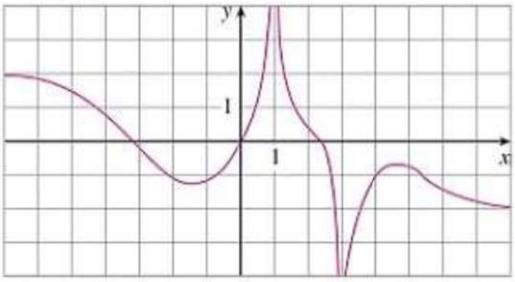
2.6 Exercícios

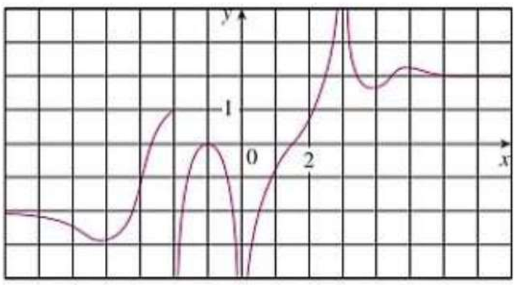
1. Explique com suas palavras o significado de cada um dos itens a seguir.
(a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

2. (a) O gráfico de $y = f(x)$ pode interceptar uma assíntota vertical? E uma assíntota horizontal? Ilustre com gráficos.
(b) Quantas assíntotas horizontais pode ter o gráfico de $y = f(x)$? Ilustre com gráficos as possibilidades.

3. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga quem são.
(a) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
(c) $\lim_{x \to 1} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 3} f(x)$
(e) As equações das assíntotas



4. Para a função g, cujo gráfico é dado, determine o que se pede.
(a) $\lim_{x \to \infty} g(x)$ (b) $\lim_{x \to -\infty} g(x)$
(c) $\lim_{x \to 3} g(x)$ (d) $\lim_{x \to 0} g(x)$
(e) $\lim_{x \to -2^+} g(x)$ (f) As equações das assíntotas



5–10 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

5. $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 5$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -5$

6. $\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$

7. $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$,
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$, f é ímpar

9. $f(0) = 3$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$,
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \infty$,
$\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$

10. $\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, f é par

11. Faça uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2^x}$$

calculando a função $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ e 100. Então, use o gráfico de f para comprovar sua conjectura.

12. (a) Use o gráfico de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar o valor de $\lim_{x \to \infty} f(x)$ com precisão de duas casas decimais.
(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com precisão de quatro casas decimais.

13–14 Calcule o limite justificando cada passagem com as propriedade dos limites que forem usadas.

13. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 7}{5x^2 + x - 3}$ **14.** $\lim_{x \to \infty} \sqrt{\dfrac{9x^3 + 8x - 4}{3 - 5x + x^3}}$

15–42 Encontre o limite ou demonstre que não existe.

15. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{2x + 3}$ **16.** $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x + 5}{x - 4}$

17. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$ **18.** $\lim_{y \to \infty} \dfrac{2 - 3y^2}{5y^2 + 4y}$

19. $\lim_{t \to \infty} \dfrac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$ **20.** $\lim_{t \to \infty} \dfrac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$

21. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$ **22.** $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

23. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{1 + 4x^6}}{2 - x^3}$ **24.** $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{1 + 4x^6}}{2 - x^3}$

25. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x + 3x^2}}{4x + 1}$ **26.** $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x + 3x^2}{4x - 1}$

27. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$ **28.** $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x} - 2x\right)$

29. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$ **30.** $\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

31. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$ **32.** $\lim_{x \to \infty} (e^{-x} + 2\cos 3x)$

33. $\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 2x^7)$ **34.** $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1 + x^6}{x^4 + 1}$

35. $\lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg}(e^x)$ **36.** $\lim_{x \to \infty} \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$

37. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$ **38.** $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 + 1}$

39. $\lim_{x \to \infty} (e^{-2x} \cos x)$ **40.** $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{tg}^{-1}(\ln x)$

41. $\lim_{x \to \infty} [\ln(1 + x^2) - \ln(1 + x)]$ **42.** $\lim_{x \to \infty} [\ln(2 + x) - \ln(1 + x)]$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

43. (a) Para $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, encontre cada um dos seguintes limites.

(i) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

(b) Use uma tabela de valores para obter uma estimativa de $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

(c) Use as informações das partes (a) e (b) para fazer um esboço grosseiro do gráfico de f.

44. Para $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{\ln x}$, encontre cada um dos seguintes limites.

(a) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

(e) Use as informações das partes (a)-(d) para fazer um esboço grosseiro do gráfico de f.

45. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

traçando o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$

(b) Faça uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar qual será o valor do limite.

(c) Demonstre que sua conjectura está correta.

46. (a) Use um gráfico de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar o valor de $\lim_{x \to \infty} f(x)$ com precisão de uma casa decimal.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com precisão de quatro casas decimais.

(c) Encontre o valor exato do limite.

47–52 Encontre as assíntotas horizontais e verticais de cada curva. Confira seu trabalho por meio de um gráfico da curva e das estimativas das assíntotas.

X **47.** $y = \dfrac{5 + 4x}{x + 3}$

48. $y = \dfrac{2x^2 + 1}{3x^2 + 2x - 1}$

X **49.** $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

50. $y = \dfrac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

X **51.** $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

52. $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

53. Estime a assíntota horizontal da função

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2\,000}$$

através do gráfico f para $-10 \leqslant x \leqslant 10$. A seguir, determine a equação da assíntota calculando o limite. Como você explica a discrepância?

54. (a) Trace o gráfico da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

Quantas assíntotas horizontais e verticais você observa? Use o gráfico para estimar os valores dos limites

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

(b) Calculando valores de $f(x)$, dê estimativas numéricas dos limites na parte (a).

(c) Calcule os valores exatos dos limites na parte (a). Você obtém os mesmos valores ou valores diferentes para estes limites? [Em vista de sua resposta na parte (a), você pode ter de verificar seus cálculos para o segundo limite.]

X **55.** Sejam P e Q polinômios. Encontre

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se o grau de P for (a) menor que o grau de Q e (b) maior que o grau de Q.

56. Faça um esboço da curva $y = x^n$ (n inteiro) nos seguintes casos:

(i) $n = 0$ (ii) $n > 0$, n ímpar

(iii) $n > 0$, n par (iv) $n < 0$, n ímpar

(v) $n < 0$, n par

Então, use esses esboços para encontrar os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 0^+} x^n$ (b) $\lim_{x \to 0^-} x^n$

(c) $\lim_{x \to \infty} x^n$ (d) $\lim_{x \to -\infty} x^n$

57. Encontre uma fórmula para uma função f que satisfaça as seguintes condições:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty \quad f(2) = 0$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$$

58. Encontre uma fórmula para uma função que tenha por assíntotas verticais $x = 1$ e $x = 3$ e por assíntota horizontal $y = 1$.

59. Uma função f é a razão de funções quadráticas e possui uma assíntota vertical $x = 4$ e somente um intercepto com o eixo das abscissas em $x = 1$. Sabe-se que f possui uma descontinuidade removível em $x = -1$ e $\lim_{x \to -1} f(x) = 2$. Calcule

(a) $f(0)$ (b) $\lim_{x \to \infty} f(x)$

60–64 Encontre os limites quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$. Use essa informação, bem como as intersecções com os eixos, para fazer um esboço do gráfico, como no Exemplo 12.

60. $y = 2x^3 - x^4$

X **61.** $y = x^4 - x^6$

62. $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

X **63.** $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

64. $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$

X **65.** (a) Use o Teorema do Confronto para determinar $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

(b) Faça o gráfico de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$. Quantas vezes o gráfico cruza a assíntota?

66. Por *comportamento final* de uma função queremos indicar uma descrição do que acontece com seus valores quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$.

(a) Descreva e compare o comportamento final das funções

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

por meio do gráfico de ambas nas janelas retangulares $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ e $[-10, 10]$ por $[-10.000, 10.000]$.

(b) Dizemos que duas funções têm o *mesmo comportamento final* se sua razão tende a 1 quando $x \to \infty$. Mostre que P e Q têm o mesmo comportamento final.

X **67.** Encontre $\lim_{x \to \infty} f(x)$ se, para todo $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x - 1}}$$