Universidade Tecnológica Federal do Paraná
UTFPR - Campus Apucarana
Departamento Acadêmico de Matemática

MÓDULO 1

Sistemas de equações lineares

Curso: Engenharia Têxtil

Disciplina: Geometria Analítica e Álgebra Linear

Professor: Alisson C. Reinol

(2022-2)

Conteúdos

- Sistemas de equações lineares
- Solução de um sistema linear
- Sistema linear homogêneo
- Resolução de sistemas lineares

Sistemas de equações lineares

- Uma ***equação linear*** é uma equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

na qual $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as ***variáveis*** ou ***incógnitas***; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os respectivos ***coeficientes*** das variáveis e b é o ***termo independente***.

Sistemas de equações lineares

- Uma ***equação linear*** é uma equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

na qual $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as ***variáveis*** ou ***incógnitas***; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os respectivos ***coeficientes*** das variáveis e b é o ***termo independente***.

Exemplos:

a) $x - 2y = 3$

b) $xy - z = 0$

c) $x^2 + y^2 = 1$

d) $x + y = 1$

Sistemas de equações lineares

- Uma ***equação linear*** é uma equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

na qual $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as ***variáveis*** ou ***incógnitas***; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os respectivos ***coeficientes*** das variáveis e b é o ***termo independente***.

Exemplos:

a) $x - 2y = 3$ *é linear*

b) $xy - z = 0$ *não é linear* ** por causa do xy*

c) $x^2 + y^2 = 1$ *não é linear* ** por causa do* x^2 *e* y^2

d) $x + y = 1$ *é linear*

- Um conjunto de equações lineares é chamado de ***sistema de equações lineares***:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + x_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Um conjunto de equações lineares é chamado de ***sistema de equações lineares***:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + x_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplo: $\begin{cases} 2x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 2 \\ 3x + y - z + t = 0 \end{cases}$ sistema de equações lineares com 3 equações e 4 incógnitas.

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que o sistema do exemplo anterior pode ser escrito da forma:

$AX = B$ *(faça as contas para conferir!)*

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que o sistema do exemplo anterior pode ser escrito da forma:

$$AX = B$$ *(faça as contas para conferir!)*

Chamamos:

A: *matriz dos coeficientes*;

X: *matriz das incógnitas*;

B: *matriz dos termos independentes*

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que o sistema do exemplo anterior pode ser escrito da forma:

$$AX = B$$ *(faça as contas para conferir!)*

Chamamos:

A: *matriz dos coeficientes;*

X: *matriz das incógnitas;*

B: *matriz dos termos independentes*

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B}$$

C : *matriz completa (ou ampliada) do sistema*

- De maneira geral, podemos escrever qualquer sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + x_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

na forma matricial: $\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}$ ou $AX = B$,

onde A é a matriz dos coeficientes, X é a matriz das incógnitas e B é a matriz dos termos independentes.

Exemplo: Considere o sistema $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$

Exemplo: Considere o sistema $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$

Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matriz completa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução de um sistema linear

- Os valores das variáveis que transformam uma equação linear em identidade, isto é, que satisfazem a equação, constituem sua ***solução***. Esses valores são denominados ***raízes*** da equação linear.

Solução de um sistema linear

- Os valores das variáveis que transformam uma equação linear em identidade, isto é, que satisfazem a equação, constituem sua ***solução***. Esses valores são denominados ***raízes*** da equação linear.

Exemplo: A equação $2x + y = 10$ admite, entre outras, as raízes $x = 3$ e $y = 4$, pois $2 \cdot 3 + 4 = 10$.

Solução de um sistema linear

- Os valores das variáveis que transformam uma equação linear em identidade, isto é, que satisfazem a equação, constituem sua ***solução***. Esses valores são denominados ***raízes*** da equação linear.

Exemplo: A equação $2x + y = 10$ admite, entre outras, as raízes $x = 3$ e $y = 4$, pois $2 \cdot 3 + 4 = 10$.

- Os valores das variáveis que transformam ***simultaneamente todas as equações*** de um sistema linear em identidade constituem a ***solução*** do sistema. Esses valores são denominados ***raízes*** do sistema de equações lineares.

- O ***conjunto solução*** de um sistema linear é o conjunto formado por todas as soluções deste sistema.

- O ***conjunto solução*** de um sistema linear é o conjunto formado por todas as soluções deste sistema.

Classificação de um sistema linear

- Os sistemas lineares são classificados de acordo com a quantidade de soluções que apresentam.

- O ***conjunto solução*** de um sistema linear é o conjunto formado por todas as soluções deste sistema.

Classificação de um sistema linear

- Os sistemas lineares são classificados de acordo com a quantidade de soluções que apresentam.

- **Sistema possível (ou compatível):** Diz-se que um sistema de equações lineares é ***possível*** quando admite solução. Um sistema possível pode ser ***determinado*** ou ***indeterminado***:

a) Um sistema é ***possível determinado*** (S.P.D.) quando admite *uma única solução.*

Exemplo: O sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$ é possível determinado, pois tem como raiz unicamente $x = 3$ e $y = 4$.

a) Um sistema é ***possível determinado*** (S.P.D.) quando admite *uma única solução.*

Exemplo: O sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$ é possível determinado, pois tem como raiz unicamente $x = 3$ e $y = 4$.

b) O sistema é ***possível indeterminado*** (S.P.I.) quando admite *infinitas soluções*.

Exemplo: O sistema $\begin{cases} 4x + 2y = 100 \\ 8x + 4y = 200 \end{cases}$ é possível indeterminado, pois admite infinitas soluções:

x	25	24	23	22	21	20	19	18	...
y	0	2	4	6	8	10	12	14	...

Sistema impossível (ou incompatível): Diz-se que um sistema de equações lineares é ***impossível*** (S.I.) quando não admite solução.

Exemplo: O sistema $\begin{cases} 3x + 9y = 12 \\ 3x + 9y = 15 \end{cases}$ é impossível, pois não existem valores de x e y tais que a expressão $3x + 9y$ admite simultaneamente os valores 12 e 15.

Resumo:

Sistema linear

- Possível — *tem solução*
  - Determinado — *tem uma única solução* (S.P.D.)
  - Indeterminado — *tem infinitas soluções* (S.P.I.)
- Impossível — *não tem solução* (S.I.)

Sistema linear homogêneo

- Quando num sistema de equações lineares os termos independentes são todos nulos, o sistema é chamado de ***homogêneo***.

Exemplo: O sistema $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 0 \\ 12x_1 + 24x_2 = 0 \end{cases}$ é um sistema linear homogêneo.

Sistema linear homogêneo

- Quando num sistema de equações lineares os termos independentes são todos nulos, o sistema é chamado de ***homogêneo***.

Exemplo: O sistema $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 0 \\ 12x_1 + 24x_2 = 0 \end{cases}$ é um sistema linear homogêneo.

Observação: Todo sistema linear homogêneo tem, pelo menos, uma solução, denominada ***solução trivial*** ($x_1 = x_2 = \ldots = 0$). Além da solução trivial, o sistema homogêneo pode ter outras soluções denominadas ***soluções próprias***. (Logo, um sistema homogêneo é sempre S.P.D. ou S.P.I.).

Sistema linear homogêneo

- Quando num sistema de equações lineares os termos independentes são todos nulos, o sistema é chamado de ***homogêneo***.

Exemplo: O sistema $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 0 \\ 12x_1 + 24x_2 = 0 \end{cases}$ é um sistema linear homogêneo.

Observação: Todo sistema linear homogêneo tem, pelo menos, uma solução, denominada ***solução trivial*** ($x_1 = x_2 = \ldots = 0$). Além da solução trivial, o sistema homogêneo pode ter outras soluções denominadas ***soluções próprias***. (Logo, um sistema homogêneo é sempre S.P.D. ou S.P.I.).

No exemplo anterior, $x_1 = -2x_2$ são soluções do sistema (S.P.I.).

Resolução de sistemas lineares

- Agora, veremos alguns métodos para obter as soluções de um sistema de equações lineares.

Resolução de sistemas lineares

- Agora, veremos alguns métodos para obter as soluções de um sistema de equações lineares.

Regra de Cramer: Suponha que se queira resolver o sistema linear de n-equações e n-incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Podemos escrever este sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad AX = B$$

Atenção! A regra de Cramer aplica-se somente a sistemas em que: $n^{\text{º}}\ de\ equações = n^{\text{º}}\ de\ incógnitas$ e $\det A \neq 0$.

Atenção! A regra de Cramer aplica-se somente a sistemas em que: $nº\ de\ equações = nº\ de\ incógnitas$ e $\det A \neq 0$.

Procedimentos:

1) calcula-se o determinante D da matriz A (matriz dos coeficientes);

Atenção! A regra de Cramer aplica-se somente a sistemas em que: $n^{o}\ de\ equações = n^{o}\ de\ incógnitas$ e $\det A \neq 0$.

Procedimentos:

1) calcula-se o determinante D da matriz A (matriz dos coeficientes);

Como exemplo, considere o sistema $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$

Temos que $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. *Logo,* $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$

2) calcula-se o determinante D_i da matriz que se obtém da matriz dos coeficientes, substituindo os coeficientes da variável x_i pela coluna dos termos independentes;

2) calcula-se o determinante D_i da matriz que se obtém da matriz dos coeficientes, substituindo os coeficientes da variável x_i pela coluna dos termos independentes;

Considerando-se o sistema do exemplo anterior: $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$

Temos que:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 3$$

2) calcula-se o determinante D_i da matriz que se obtém da matriz dos coeficientes, substituindo os coeficientes da variável x_i pela coluna dos termos independentes;

Considerando-se o sistema do exemplo anterior: $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$

Temos que:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 3$$

Substitui-se a coluna com os coeficientes de x pelos termos independentes

Substitui-se a coluna com os coeficientes de y pelos termos independentes

Substitui-se a coluna com os coeficientes de z pelos termos independentes

3) Calcula-se cada x_i pela fórmula:

$$\boxed{x_i = \frac{D_i}{D}}$$

3) Calcula-se cada x_i pela fórmula:

$$\boxed{x_i = \frac{D_i}{D}}$$

Voltando ao exemplo, temos que:

$$D = 3, \qquad D_x = 3, \qquad D_y = -3, \qquad D_z = 3.$$

Logo, $x = \frac{D_x}{D} = \frac{3}{3} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-3}{3} = -1, \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{3}{3} = 1$

Portanto, $S = \{(1, -1, 1)\}$ *é o conjunto solução do sistema (S.P.D.).*

3) Calcula-se cada x_i pela fórmula:

$$\boxed{x_i = \frac{D_i}{D}}$$

Voltando ao exemplo, temos que:

$$D = 3, \qquad D_x = 3, \qquad D_y = -3, \qquad D_z = 3.$$

Logo, $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{3}{3} = 1, \qquad y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-3}{3} = -1, \qquad z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{3}{3} = 1$

Portanto, $S = \{(1, -1, 1)\}$ *é o conjunto solução do sistema (S.P.D.).*

Observação: A regra de Cramer aplica-se somente para sistemas S.P.D.

Método de Gauss:

- Dizemos que um sistema, em que existe pelo menos um coeficiente não-nulo em cada equação, está ***escalonado*** se a sua matriz completa está na forma escalonada.

Método de Gauss:

- Dizemos que um sistema, em que existe pelo menos um coeficiente não-nulo em cada equação, está ***escalonado*** se a sua matriz completa está na forma escalonada.

Exemplos:

a) $$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ \quad\;\; 2y = 3 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 2x - 4y + 5z = 8 \\ \qquad\quad 4y - z = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 4x - y + z = 9 \\ \quad\; 2y - 3z = 2 \\ \qquad\quad 4z = -5 \end{cases}$$

Método de Gauss:

- Dizemos que um sistema, em que existe pelo menos um coeficiente não-nulo em cada equação, está ***escalonado*** se a sua matriz completa está na forma escalonada.

Exemplos:

a) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 2y = 3 \end{cases}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{cases} 2x - 4y + 5z = 8 \\ 4y - z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y + z = 9 \\ 2y - 3z = 2 \\ 4z = -5 \end{cases}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

As matrizes completas dos sistemas estão na forma escalonada

- O método de Gauss consiste em fazer operações elementares sobre as linhas da matriz completa até obter-se uma matriz na forma escalonada.

- O método de Gauss consiste em fazer operações elementares sobre as linhas da matriz completa até obter-se uma matriz na forma escalonada.

Exemplos: **1)** Utilizando o método de Gauss resolva o sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 5y + z = 7 \end{cases}$

- O método de Gauss consiste em fazer operações elementares sobre as linhas da matriz completa até obter-se uma matriz na forma escalonada.

Exemplos: **1)** Utilizando o método de Gauss resolva o sistema $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x+y+z=3 \\ 3x+5y+z=7 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 1x+y+z=3 \\ 3x+5y+z=7 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z=3 & (-2) \quad (-3) \\ 2x+3y-z=1 \\ 3x+5y+z=7 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x+y+z=3 \\ y-3z=-5 & (-2) \\ 2y-2z=-2 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z=3 \\ y-3z=-5 \\ 4z=8 \end{cases}$$

O sistema está escalonado

- O método de Gauss consiste em fazer operações elementares sobre as linhas da matriz completa até obter-se uma matriz na forma escalonada.

Exemplos: **1)** Utilizando o método de Gauss resolva o sistema $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x+y+z=3 \\ 3x+5y+z=7 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 1x+y+z=3 \\ 3x+5y+z=7 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z=3 & (-2) \quad (-3) \\ 2x+3y-z=1 \\ 3x+5y+z=7 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x+y+z=3 \\ y-3z=-5 & (-2) \\ 2y-2z=-2 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z=3 \\ y-3z=-5 \\ 4z=8 \end{cases}$$

O sistema está escalonado

Segue que $z=2, y=1$ *e* $x=0$. *Portanto,* $S=\{(0,1,2)\}$ *e o sistema é S.P.D.*

2) Utilizando o método de Gauss resolva o sistema $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = 5 \end{cases}$

2) Utilizando o método de Gauss resolva o sistema $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x+2y-z=3 \\ 3x+4y-5z=5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y-2z=1 \quad (-1) \quad (-3) \\ x+2y-z=3 \\ 3x+4y-5z=5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y-2z=1 \\ y+z=2 \quad (-1) \\ y+z=2 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x+y-2z=1 \\ y+z=2 \\ 0z=0 \end{cases}$$

Note que z pode assumir qualquer valor real, pois $0z=0$ para qualquer valor de z.

2) Utilizando o método de Gauss resolva o sistema $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x+2y-z=3 \\ 3x+4y-5z=5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y-2z=1 & (-1)\quad(-3) \\ x+2y-z=3 \\ 3x+4y-5z=5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y-2z=1 \\ y+z=2 & (-1) \\ y+z=2 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x+y-2z=1 \\ y+z=2 \\ 0z=0 \end{cases}$$

Note que z pode assumir qualquer valor real, pois $0z=0$ para qualquer valor de z.

Neste caso, temos que $z \in \mathbb{R}$, $y = 2-z$ e $x = 3z-1$.

Logo, $S = \{(3z-1, 2-z, z)\ /\ z \in \mathbb{R}\}$ e o sistema é S.P.I.

Observações:

1) Se durante o escalonamento ocorrer $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$, podemos suprimir esta equação do sistema.

No último exemplo, obtivemos $0z = 0$.

Observações:

1) Se durante o escalonamento ocorrer $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$, podemos suprimir esta equação do sistema.

No último exemplo, obtivemos $0z = 0$.

2) Se durante o escalonamento ocorrer $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$, com $b \neq 0$, o sistema será impossível.

Se tivéssemos obtido $0z = 1$*, por exemplo, não existiria valor de* z *tal que essa igualdade fosse satisfeita. Portanto, o sistema seria S.I. e seu conjunto solução seria* $S = \emptyset$.

Método de Gauss-Jordan:

- Este método é uma complementação ao método de Gauss.

Método de Gauss-Jordan:

- Este método é uma complementação ao método de Gauss.

- O método de Gauss-Jordan consiste em fazer operações elementares sobre as linhas da matriz completa do sistema até colocar-se as primeiras colunas da matriz completa na forma diagonal.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_{22} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Utilizando o método de Gauss-Jordan resolva o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 5y + z = 7 \end{cases}$$

Exemplo: Utilizando o método de Gauss-Jordan resolva o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 5y + z = 7 \end{cases}$$

Já vimos que $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 5y + z = 7 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 3z = -5 \\ 4z = 8 \end{cases}$

Exemplo: Utilizando o método de Gauss-Jordan resolva o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 5y + z = 7 \end{cases}$$

Já vimos que

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 5y + z = 7 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 3z = -5 \\ 4z = 8 \end{cases}$$

continuando...

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 3z = -5 \\ 4z = 8 \quad (1/4) \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 3z = -5 \\ z = 2 \quad (3) \quad (-1) \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x + y \quad = 1 \\ y \quad = 1 \quad (-1) \\ z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x \quad = 0 \\ y \quad = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Exemplo: Utilizando o método de Gauss-Jordan resolva o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 5y + z = 7 \end{cases}$$

Já vimos que $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 5y + z = 7 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 3z = -5 \\ 4z = 8 \end{cases}$

continuando... $\sim \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 3z = -5 \\ 4z = 8 \quad (1/4) \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 3z = -5 \\ z = 2 \quad (3) \quad (-1) \end{cases} \sim$

$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 1 \quad (-1) \\ z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

Obtemos diretamente que

$x = 0, y = 1$ *e* $z = 2.$

Portanto, $S = \{(0, 1, 2)\}.$

Referências bibliográficas

- BOLDRINI, José Luiz; *et al*. ***Álgebra Linear***. 3 ed. São Paulo – SP: Harbra, 1986.

- CALLIOLI, Carlos A.; *et al*. ***Álgebra Linear e Aplicações***. 6 ed. rev. São Paulo – SP: Atual, 1993.

- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. ***Álgebra Linear***. 2 ed. São Paulo – SP: Pearson Makron Books, 1987.