Engenharia de Computação

COENC-AP

LÓGICA DE PREDICADOS

Professora Dra. Tamara Angélica Baldo

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
APUCARANA

BIBLIOGRAFIA DA AULA:

Figura: Souza, João Nunes de. Lógica para ciência da computação e áreas afins. 3 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

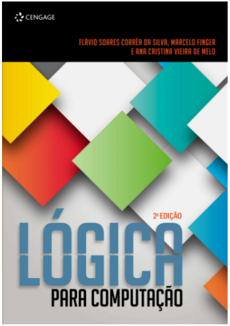


Figura: SILVA, F. S. C. da; FINGER, M.; MELO, A. C. de. Lógica para computação. 2.ed. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2018.

ORGANIZAÇÃO DA AULA:

- Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos Semânticos de Dedução

ORGANIZAÇÃO DA AULA:

- Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos Semânticos de Dedução

SINTAXE

- Lógica de Predicados é uma extensão da Lógica Proposicional

(Definição: Alfabeto) O alfabeto da Lógica de Predicados:

1. Símbolos de Pontuação: (,)
2. Um conjunto enumerável de símbolos para variáveis: $x, y, z, w, x_1, y_1, \ldots$
3. Um conjunto enumerável de símbolos para funções: $f, g, h, f_1, g_1, \ldots$
4. um conjunto enumerável de símbolos para predicados: $p, q, r, p_1, q_1, \ldots$
5. Conectivos: $\neg, \vee, \forall, \exists$

   obs: os conectivos $\longrightarrow, \wedge, \longleftrightarrow$ podem ser reescritos utilizando os acima

SINTAXE

- Elementos básicos:
  - termos
  - átomos
  - fórmulas

(Definição: Termo) O conjunto dos termos da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz:

- as variáveis são termos
- se $t_1, \ldots, t_n$ são termos e $\breve{f}$ é um símbolo para função n-ária, então $\breve{f}(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo

SINTAXE

(**Definição: Átomo**) O conjunto de átomos da Linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz:

1. os símbolos proposicionais são átomos
2. se $t_1, \ldots, t_n$ são termos e $\breve{p}$ um símbolo para predicado n-ário, então, $\breve{p}(t_1, \ldots, t_n)$ é um átomo

SINTAXE

(Definição: Fórmula) O conjunto das fórmulas da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz:

1. Todo átomo é uma fórmula
2. Se H é uma fórmula, então $\neg H$ é uma fórmula
3. Se H e G é uma fórmula, então $H \vee G$ é uma fórmula
4. Se H é uma fórmula e $\check{x}$ uma variável, então $((\forall \check{x})H)$ e $((\exists \check{x})H)$ são fórmulas

Notação: De forma análoga a Lógica Proposicional as letras maiúsculas (com possíveis subíndices) também representam fórmulas

(Definição: Expressão) Uma expressão é um termo ou uma fórmula

SINTAXE

(Correspondência entre quantificadores) É possível definir o quantificador $\exists$ a partir do $\forall$ (e vice-versa). Considere uma fórmula H e uma variável $\check{x}$. Os quantificadores existencial e universal, se relacionam:

1. $((\forall \check{x})H)$ denota $\neg((\exists \check{x})\neg H) = \neg(\exists \check{x})H$
2. $((\exists \check{x})H)$ denota $\neg((\forall \check{x})\neg H) = \neg(\forall \check{x})H$

SINTAXE

(Tamanho de uma fórmula) Dada uma fórmula H da Lógica de Predicados, o comprimento/tamanho/complexidade de H, denotado por $|H|$ ou por $comp[H]$, é definido como:

- Se H é um átomo, então $|H| = 1$
- $|\neg H| = 1 + |H|$
- Se $H = A \bigcirc B$, então $|A \bigcirc B| = 1 + |A| + |B|$, onde $\bigcirc = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \longleftrightarrow\}$
- Se $H = (\boxminus x)G$, onde $\boxminus = \{\forall, \exists\}$ então $|(\boxminus x)G| = 1 + |G|$

Exemplo 1: $|p(x) \longrightarrow q(y)| = 1 + |p(x)| + |q(y)| = 3$

Exemplo 2: $|(\forall x)p(x) \longleftrightarrow (\exists y)q(y)| =$

$= 1 + |(\forall x)p(x)| + |(\exists y)q(y)| = 1 + 1 + |p(x)| + 1 + |q(y)| =$

$= 3 + 1 + 1 = 5$

SINTAXE

- Classificação de variáveis: livre ou ligada
- Para entender a classificação das variáveis precisamos entender o escopo do quantificador

(Escopo do Quantificador) Seja E uma fórmula da Lógica de Predicados

- Se $(\forall x)H$ é uma subfórmula de E, então o escopo de $\forall x$ é uma subfórmula de E
- Se $(\exists x)H$ é uma subfórmula de E, então o escopo de $\exists x$ é uma subfórmula de E

SINTAXE

Exemplo: considere a fórmula $(\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x,y,w,z) \longrightarrow (\forall y)q(z,y,x,f(z_1)))$

- Escopo do $(\forall x)$ em E é $((\forall z)p(x,y,w,z) \longrightarrow (\forall y)q(z,y,x,f(z_1)))$
- Escopo do $(\exists y)$ em E é $((\forall z)p(x,y,w,z) \longrightarrow (\forall y)q(z,y,x,f(z_1)))$
- Escopo do $(\forall z)$ em E é $p(x,y,w,z)$
- Escopo do $(\forall y)$ em E é $q(z,y,x,f(z_1)))$

SINTAXE

(Definição: Livre ou Ligada) Sejam x uma variável e E uma fórmula:

- Uma ocorrência de x em E é ligada se x está no espaço de um quantificador $(\forall x)$ ou $(\exists x)$ em E
- Uma ocorrência de x é livre em E se não for ligada

SINTAXE

Exemplo (cont.): considere a fórmula
$(\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x,y,w,z) \longrightarrow (\forall y)q(z,y,x,f(z_1)))$

- z ocorre livre a $q(z,y,x,f(z_1)))$, pois z não está no escopo de nenhum quantificador em z
- z ocorre ligada a $p(x,y,w,z)$, pois está no escopo $(\forall z)$
- a variável y ocorre ligada a $q(z,y,x,f(z_1))$, pois está no escopo dos quantificadores $(\forall y)$ e $(\exists y)$. OBS: analisar o quantificador mais próximo.
- Escopo do $(\forall y)$ em E é $q(z,y,x,f(z_1))$

OBS: $(\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x_g, y_g, w_v, z_g) \longrightarrow (\forall y)q(z_v, y_g, x_g, f(z_{1_v})))$, para facilitar a identificação os índices v e g foram colocados na fórmula para identificas as variáveis livres e ligadas, respectivamente.

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ APUCARANA

SINTAXE

- **(Símbolos livres)** Dada uma fórmula E, os símbolos livres são as variáveis que ocorrem livres em E, os símbolos de função e os símbolos de predicados

  No exemplo: O conjunto $\{w, z, z_1, p, q, f\}$ são símbolos livres de E

(Definição: Fórmula Fechada) Uma fórmula é fechada quando não possui variáveis livres

SINTAXE

(Definição: Formas Normais) Seja H uma fórmula na Lógica de Predicados

- H está na FNC (forma normal conjuntiva) se é uma conjunção de disjunções de literais
- H está na FND (forma normal disjuntiva) se é uma disjunção de conjunção de literais

OBS1: **Literais:** é um átomo ou a negação de um átomo na Lógica de Predicados

OBS2: Forma Normal é 'similar' ao raciocínio da Lógica Proposicional

ORGANIZAÇÃO DA AULA:

- Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos Semânticos de Dedução

SEMÂNTICA

- Contém: quantificadores, variáveis, funções e predicados
- Interpretações são mais elaboradas que na Lógica Proposicional e, por isso, interpretar fórmulas da Lógica de Predicados requer mais atenção aos detalhes

SEMÂNTICA

Interpretação informal de um PREDICADO

- Para interpretar um átomo, como $p(x)$, devemos definir o domínio da interpretação (e da valoração: T ou F). Ou seja, não é tão simples quanto na Lógica Proposicional, onde não necessário definir tal domínio.
- O resultado da interpretação de um átomo é VERDADEIRO (1) ou FALSO (0).
- O resultado da interpretação de uma constante é um elemento do domínio da interpretação.
- Os átomos podem ser combinados com conectivos e a interpretação das fórmulas é de modo semelhante a Lógica Proposicional.
- O símbolo p é um objeto sintático que pertence ao Alfabeto da Lógica de Predicados. A interpretação de p, representada por $V(p)$ ou $I[p]$ é um objeto semântico que pertence ao conjunto $\{T, F\}$ (ou $\{0, 1\}$)

SEMÂNTICA

Interpretação informal de uma FUNÇÃO

- Para interpretar uma função, como $f(x)$, devemos definir o domínio da interpretação I.
- O resultado da interpretação de um termo é um elemento do domínio, ou universo da interpretação.
- Os termos não podem ser combinados utilizando conectivos, como ocorre com os átomos.
- O símbolo f é um objeto sintático que pertence a Lógica de Predicados. Por outro lado, $I[f(x)]$ é um objeto semântico que pertence ao domínio das interpretações.
  - A interpretação para f é uma função semântica $I[f]$, cujo domínio e contradomínio é o conjunto que define o universo da interpretação: $I[f]$: domínio de $I \longrightarrow$ domínio de I

SEMÂNTICA

Proposições

- $e_1 \rightarrow s_1$
- $e_2 \rightarrow s_2$
- $e_3 \rightarrow s_3$

SEMÂNTICA

Predicados

$e(i)$ "o indivíduo i pratica esportes",

$s(i)$ "o indivíduo i tem boa saúde".

$(\forall i)\ e(i) \rightarrow s(i),$

onde $i = \{$ Marcelo, Ana, Flávio $\}$

SEMÂNTICA

como poderíamos escrever que o filho de qualquer pessoa que pratica esportes tem boa saúde?

Função $f : U \to U$

$(\forall i)\ e(i) \to s(f(i))$

SEMÂNTICA

Interpretação de ÁTOMOS e TERMOS

Seja U um conjunto não vazio. Uma interpretação I sobre o domínio, ou universo (U), na Lógica de Predicados, é uma função cujo domínio é o conjunto dos símbolos de função, de predicados e da Lógica de Predicados. A interpretação dos termos e átomos, segundo I, é dada por:

- 1. Para toda variável $\check{x}$, $I[\check{x}]$ (ou ainda, $\check{x}_I$) é um elemento semântico que pertence ao domínio U
- 2. Para todo símbolo proposicional $\check{P}$, $I[\check{P}] = \check{P}_I$ é um elemento semântico que pertence ao conjunto $\{T, F\}$ (ou ainda, $\{1, 0\}$)
- 3. Para todo símbolo de função $\check{f}$, n-ário, $I[\check{f}] = \check{f}_I$ é uma função semântica n-ária em U, ou seja, $\check{f}_I : U^n \longrightarrow U$

SEMÂNTICA

Interpretação de ÁTOMOS e TERMOS (cont..)

- 4. Para todo símbolo de predicado $\breve{p}$, n-ário, $I[\breve{p}] = \breve{p}_I$ é um predicado semântico n-ário em U, ou seja, $\breve{p}_I : U^n \longrightarrow \{T, F\}$
- 5. Dado um termo $\breve{f}(t_1, \ldots, t_n)$, então $I[\breve{f}(t_1, \ldots, t_n)] = \breve{f}_I(t_1, \ldots, t_n)$
- 6. Dado um átomo $\breve{p}(t_1, \ldots, t_n)$, então $I[\breve{p}(t_1, \ldots, t_n)] = \breve{p}_I(t_1, \ldots, t_n)$

U^n **denota o produto cartesiano** $UxUx \ldots xU$

SEMÂNTICA

Interpretação de FÓRMULAS com estruturas iniciais simples

- **Fórmula com estrutura inicial simples:** Uma fórmula tem estrutura inicial simples, na Lógica de Predicados, se e somente se, ela tem uma das formas $(\neg H)$, $(H \vee G)$, $(H \wedge G)$, $(H \longrightarrow G)$, $(H \longleftrightarrow G)$

Exemplo [tipo $H \longrightarrow G$]:

$$((\forall x)p(x) \longrightarrow (\exists y)q(y))$$

SEMÂNTICA

Interpretação de FÓRMULAS com estruturas iniciais simples

- **Interpretação de fórmula com estrutura inicial simples:** Seja E uma fórmula da Lógica de Predicados que possui uma estrutura inicial simples. Seja I a interpretação sobre o domínio U. A interpretação de E, conforme I (denotada por $I[E]$) é determinada pelas regras:
  - 1. Se $E = (\neg H)$, onde H é uma fórmula, então
    $I[E] = I[(\neg H)] = 1$ se $I[H] = 0$ e
    $I[E] = I[(\neg H)] = 0$ se $I[H] = 1$
  - 2. Se $E = (H \vee G)$, onde H e G são fórmulas, então
    $I[E] = I[(H \vee G)] = 1$ se $I[H] = 1$ e/ou $I[G] = 1$ e
    $I[E] = I[(H \vee G)] = 0$ se $I[H] = 0$ e $I[G] = 0$

SEMÂNTICA

Interpretação de FÓRMULAS com estruturas iniciais simples

- cont...
  - 3. Se $E = (H \wedge G)$, onde H e G são fórmulas, então
    $I[E] = I[(H \wedge G)] = 1$ se $I[H] = 1$ e $I[G] = 1$ e
    $I[E] = I[(H \wedge G)] = 0$ se $I[H] = 0$ e/ou $I[G] = 0$
  - 4. Se $E = (H \longrightarrow G)$, onde H e G são fórmulas, então
    $I[E] = I[(H \longrightarrow G)] = 1$ se $I[H] = 0$ e/ou $I[G] = 1$ e
    $I[E] = I[(H \longrightarrow G)] = 0$ se $I[H] = 1$ e $I[G] = 0$
  - 4. Se $E = (H \longleftrightarrow G)$, onde H e G são fórmulas, então
    $I[E] = I[(H \longleftrightarrow G)] = 1$ se $I[H] = 1$ e $I[G] = 1$ e
    $I[E] = I[(H \longleftrightarrow G)] = 0$ se $I[H] = 0$ ou $I[G] = 0$

SEMÂNTICA

Interpretação de FÓRMULAS com quantificadores

- **Interpretação Estendida:**
  - Para facilitar a compreensão, do conceito de interpretação estendida:
    O Paradigma: Suponha que cada indivíduo seja associado a uma interpretação que relaciona objetos sintáticos e semânticos. Seja então I uma interpretação associada a um indivíduo, que tem opinião formada sobre os elementos de seu mundo sintático. Dada as variáveis x e y, então $I[x]$ e $I[y]$ estão definidas, por exemplo, $I[x] = 5$ e $I[y] = 1$ (a interpretação de x e y são os números 5 e 1, respectivamente). Vamos supor que o indivíduo passa a adotar uma nova opinião sobre o valor semântico de x, que agora passa ser 7. Esta nova interpretação é indicada por $< x \leftarrow 7 > I$.

Interpretação de FÓRMULAS com quantificadores

- **Interpretação Estendida:**

  O Paradigma (cont.): Desta forma:
  $< x \leftarrow 7 > I[x] = 7$ e $< x \leftarrow > I[y] = 1$, ou seja, a interpretação de y não muda.

  * Se houver, agora, uma nova interpretação para x, agora sendo 8, então teremos $< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[x] = 8$ e $< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[y] = 1$
  * Se houver, agora, uma nova interpretação para y, agora sendo 4, então teremos $< y \leftarrow 4 >< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[x] = 8$ e $< y \leftarrow 4 >< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[y] = 4$

SEMÂNTICA

Interpretação de FÓRMULAS com quantificadores

- **Interpretação Estendida:** Seja I uma interpretação sobre o domínio U. Considere x uma variável qualquer da Lógica de Predicados e d um elemento de U. Uma extensão de I, conforme x e d, é uma interpretação sobre U denotada por $< x \leftarrow d > I$, tal que:

$$< x \leftarrow d > I[\breve{y}] = \begin{cases} d, \text{ se } \breve{y} = x \\ I[\breve{y}], \text{ se } \breve{y} \neq x \end{cases}$$

SEMÂNTICA

Interpretação Estendida Considere a extensão de I sobre o domínio dos números $\mathbb{N}$, tais que $I[x] = 4$, $I[a] = 5$, $I[y] = 4$, $I[f] = +$ e $I[p] =>$.

$$< x \leftarrow 2 > I[y] = 4$$

$$< x \leftarrow 2 > I[f] = +$$

$$< x \leftarrow 2 > I[x] = 2$$

$$< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[y] = 9$$

$$< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[x] = 2$$

$$< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[x] = 7$$

SEMÂNTICA

Interpretação de Fórmulas com Quantificadores

(Definição: Regra semântica para fórmulas com quantificadores) Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados, x uma variável e I uma interpretação sobre o domínio U. Os valores semânticos de $I[(\forall x)H]$ e $I[(\exists x)H]$ são definidos:

- $I[(\forall x)H] = T$ se, e somente se, $\forall d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = T$
- $I[(\forall x)H] = F$ se, e somente se, $\exists d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = F$
- $I[(\exists x)H] = T$ se, e somente se, $\exists d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = T$
- $I[(\exists x)H] = F$ se, e somente se, $\forall d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = F$

SEMÂNTICA

Exemplo: Seja I uma interpretação sobre os alunos de Computação ($\mathbb{C}$), os predicados p e q e a constante a. E, f é uma função unária, onde:

$I[p(x)] = T$ se, e somente se, x_I é inteligente

$I[q(x, y)] = T$ se, e somente se, x_I gosta de y_I

$I[f(x)] =$ o colega preferido de x_I

$I[a] =$ José

$H = (\forall x)q(x, a) \vee p(f(x))$

Logo, tem-se que $I[H] = T \Leftrightarrow I[(\forall x)q(x, a) \vee p(f(x))] = T$

$\Leftrightarrow I[(\forall x)q(x, a)]$=T e/ou $I[p(f(x))] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{C}; < x \leftarrow d > I[q(x, a)] = T$ e/ou $I[p(f(x))] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{C}; q_I(d, \text{José}) = T$ e/ou $p_I(f_I(x_I))] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{C}$; "$d$ gosta de José" e/ou "o colega preferido de x_I é inteligente" $\Leftrightarrow$ " todo aluno de Computação gosta de José e/ou o colega preferido de x_I é inteligente"

SEMÂNTICA

Exemplo (números pares): Considere a fórmula H_{par}, tal que
$H_{par}(y) = (\exists x)(\bar{2}\check{\times}x\hat{=}y) = T$
Na fórmula $H_{par}(y)$ a variável y ocorre livre. E, a interpretação $I[y] = n$, onde $I[H_{par}(y)] = T$, se n é par.

$I[H_{par}(y)] = T \Leftrightarrow I[(\exists x)(\bar{2}\check{\times}x\hat{=}y)] = T$
$\Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > I[(\bar{2}\check{\times}x\hat{=}y)] = T$
$\Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > (2xd = y_I)$ é verdadeiro
$\Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > (2xd = n)$ é verdadeiro

ORGANIZAÇÃO DA AULA:

- Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos Semânticos de Dedução

PROPRIEDADES SEMÂNTICAS

- Satisfatibilidade
- Validade
- Contradição semântica
- Implicação
- Equivalência

PROPRIEDADES SEMÂNTICAS

Satisfatibilidade: Uma fórmula H é satisfazível quando existe pelo menos uma interpretação I, tal que $I[H] = T$

Exemplo: Seja $H = (\forall x)p(x, y)$ e I uma interpretação em $\mathbb{N}$, tal que, $I[y] = 0$ e $I[p] = \geq$. Logo, neste contexto, $I[H] = T$

PROPRIEDADES SEMÂNTICAS

(Definição: Fórmula Tautologicamente Válida) Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. Então, H é tautologicamente se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = T$. E, além disso, para determinar se $I[H] = T$ não é necessário interpretar os quantificadores de H.

(Definição: Fórmula Válida) Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. Então H é válida, se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = T$

PROPRIEDADES SEMÂNTICAS

Conclusões (Validade):

- Se H é uma tautologia, então H é tautologicamente válida e, portanto, é válida
- Tautologia é um caso particular de validade
- Os conceitos de validade e tautologicamente válida não são equivalentes

PROPRIEDADES SEMÂNTICAS

Contradição semântica: Dada uma fórmula H na Lógica de Predicados, H é uma contradição semântica se, e somente se, para toda interpretação $I[H] = F$

Exemplo: Seja uma fórmula $H = (\forall x)p(x) \land (\exists x)\neg p(x)$, com domínio U. Supondo que:

$I[H] = T \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x) \land (\exists x)\neg p(x)] = T$

$\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T$ e $I[(\exists x)\neg p(x)] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ e $\exists c \in U; < x \leftarrow c > I[\neg p(x)] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ e $\exists c \in U; < x \leftarrow c > I[p(x)] = F$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; p_I(d) = T$ e $\exists c \in U; p_I(c)] = F$ **(contraditório)**

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ APUCARANA

PROPRIEDADES SEMÂNTICAS

Implicação: H implica semanticamente G, se e somente se, para toda interpretação I, se $I[H] = T$ então $I[G] = T$

Exemplo (não implicação): Verifique se H_1 implica em H_2, domínio $\mathbb{N}$, onde:
$I[q(x)] = T$ se, e somente se, x_I é ímpar
$I[p(x)] = T$ se, e somente se, x_I é par
$H_1 = (\forall x)(p(x) \vee q(x))$ e $H_2 = (\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)$

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ APUCARANA

PROPRIEDADES SEMÂNTICAS

Exemplo(cont.)

- $I[H_1] = T \Leftrightarrow I[(\forall x)(p(x) \vee q(x))] = T$
  $\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > I[(p(x) \vee q(x))] = T$
  $\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > I[(p(x)] = T$ ou $I[q(x)] = T$
  $\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N};$ d é par ou d é ímpar

- $I[H_2] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)] = F$
  $\Leftrightarrow I[(\forall x)(p(x)] = F$ e $I[(\forall x)q(x))] = F$
  $\Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > I[(p(x)] = F$ e
  $\exists c \in \mathbb{N}; < x \leftarrow c > I[q(x)] = F$
  $\Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{N};$ d não é par e $\exists c \in \mathbb{N};$ c não é ímpar. Logo, a $I[H_2] = F$ é verdadeira. Ou seja, H_1 não implica H_2

PROPRIEDADES SEMÂNTICAS

Equivalência: H é equivalente semanticamente G, se e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = I[G]$.

ORGANIZAÇÃO DA AULA:

- Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos Semânticos de Dedução

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

...Quais foram os sistemas dedutivos estudados durante a Lógica Proposicional?

- Tabela-Verdade

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

...Quais foram os sistemas dedutivos estudados durante a Lógica Proposicional?

- Tabela-Verdade
- Axiomatização

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

...Quais foram os sistemas dedutivos estudados durante a Lógica Proposicional?

- Tabela-Verdade
- Axiomatização
- Dedução Natural

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

...Quais foram os sistemas dedutivos estudados durante a Lógica Proposicional?

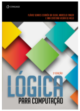
- Tabela-Verdade
- Axiomatização
- Dedução Natural
- Tableaux Analíticos

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

...Quais foram os sistemas dedutivos estudados durante a Lógica Proposicional?

- Tabela-Verdade
- Axiomatização
- Dedução Natural
- Tableaux Analíticos

.... Será que eles funcionam para Lógica de Predicados?



MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

Método da Negação ou redução ao absurdo

- pode ser utilizado em diferentes tipos de demonstração

Exemplo (equivalência): Considere $H_1 = \neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)r(x)$ e $H_2 = (\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))$. Demonstre, utilizando o método da negação, que H_1 implica H_2. Suponha por absurdo que H_1 não implica H_2, ou seja, $I[H_1] = T$ e $I[H_2] = F$

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

Método da Negação ou redução ao absurdo

- Supondo $I[H_1] = T \Leftrightarrow I[\neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)r(x)] = T$

- Supondo $I[H_2] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))] = F$

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

Método da Negação ou redução ao absurdo

- Supondo $I[H_1] = T \Leftrightarrow I[\neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)r(x)] = T$
  $\Leftrightarrow I[\neg(\exists x)p(x)] = T$ ou $I[(\forall x)r(x)] = T$

- Supondo $I[H_2] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))] = F$

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

Método da Negação ou redução ao absurdo

- Supondo $I[H_1] = T \Leftrightarrow I[\neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)r(x)] = T$
  $\Leftrightarrow I[\neg(\exists x)p(x)] = T$ ou $I[(\forall x)r(x)] = T$
  $\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = F$ ou $I[(\forall x)r(x)] = T$
- Supondo $I[H_2] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))] = F$

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

Método da Negação ou redução ao absurdo

- Supondo $I[H_1] = T \Leftrightarrow I[\neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow I[\neg(\exists x)p(x)] = T$ ou $I[(\forall x)r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = F$ ou $I[(\forall x)r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow \forall d \in U, < x \leftarrow d > I[p(x)] = F$ ou
  $\forall c \in U, < x \leftarrow c > I[r(x)] = T$

- Supondo $I[H_2] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))] = F$

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

Método da Negação ou redução ao absurdo

- Supondo $I[H_1] = T \Leftrightarrow I[\neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow I[\neg(\exists x)p(x)] = T$ ou $I[(\forall x)r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = F$ ou $I[(\forall x)r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow \forall d \in U, < x \leftarrow d > I[p(x)] = F$ ou
  $\forall c \in U, < x \leftarrow c > I[r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow \forall d \in U, p_I(d) = F$ ou $\forall c \in U, r_I(c) = T$

- Supondo $I[H_2] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))] = F$

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

Método da Negação ou redução ao absurdo

- Supondo $I[H_1] = T \Leftrightarrow I[\neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow I[\neg(\exists x)p(x)] = T$ ou $I[(\forall x)r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = F$ ou $I[(\forall x)r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow \forall d \in U, < x \leftarrow d > I[p(x)] = F$ ou
  $\forall c \in U, < x \leftarrow c > I[r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow \forall d \in U, p_I(d) = F$ ou $\forall c \in U, r_I(c) = T$

- Supondo $I[H_2] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))] = F$

  $\Leftrightarrow (\exists d \in U), < x \leftarrow d > I[(p(x) \rightarrow r(x))] = F$

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
APUCARANA

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

Método da Negação ou redução ao absurdo

- Supondo $I[H_1] = T \Leftrightarrow I[\neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow I[\neg(\exists x)p(x)] = T$ ou $I[(\forall x)r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = F$ ou $I[(\forall x)r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow \forall d \in U, < x \leftarrow d > I[p(x)] = F$ ou
  $\forall c \in U, < x \leftarrow c > I[r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow \forall d \in U, p_I(d) = F$ ou $\forall c \in U, r_I(c) = T$

- Supondo $I[H_2] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)(p(x) \to r(x))] = F$

  $\Leftrightarrow (\exists d \in U), < x \leftarrow d > I[(p(x) \to r(x))] = F$

  $\Leftrightarrow (\exists d \in U), < x \leftarrow d > I[(p(x)] = T$ e
  $< x \leftarrow d > I[r(x)] = F$

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

Método da Negação ou redução ao absurdo

- Supondo $I[H_1] = T \Leftrightarrow I[\neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow I[\neg(\exists x)p(x)] = T$ ou $I[(\forall x)r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = F$ ou $I[(\forall x)r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow \forall d \in U, < x \leftarrow d > I[p(x)] = F$ ou
  $\forall c \in U, < x \leftarrow c > I[r(x)] = T$

  $\Leftrightarrow \forall d \in U, p_I(d) = F$ ou $\forall c \in U, r_I(c) = T$

- Supondo $I[H_2] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))] = F$

  $\Leftrightarrow (\exists d \in U), < x \leftarrow d > I[(p(x) \rightarrow r(x))] = F$

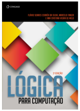
  $\Leftrightarrow (\exists d \in U), < x \leftarrow d > I[(p(x)] = T$ e
  $< x \leftarrow d > I[r(x)] = F$

  $\Leftrightarrow (\exists d \in U), p_I(d) = T$ e $r_I(d) = F$

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

Método do Tableaux Semânticos

- Sequência de fórmulas construídas de acordo com um conjunto de regras
- Similar ao Tableaux Analíticos



Exemplo...

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

Método do Tableaux ANALÍTICOS

Exemplo Vamos provar, usando um tableau analítico, que

$$\forall x(r_1(x) \to r_2(x)) \vdash (\forall x(r_1(x))) \to (\forall x(r_2(x))):$$

$$\begin{array}{c}
T \quad \forall x(r_1(x) \to r_2(x)) \\
F \quad \vdash (\forall x(r_1(x))) \to (\forall x(r_2(x))) \\
T \quad (\forall x(r_1(x))) \\
F \quad (\forall x(r_2(x))) \\
F \quad r_2(a) \\
T \quad r_1(a) \\
T \quad r_1(a) \to r_2(a) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
F \quad r_1(a) \qquad T \quad r_2(a) \\
\times \qquad\qquad \times
\end{array}$$

$$\forall d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] = F$$
$$\exists c \in U; < x \leftarrow c > I[p(x)] = T$$

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO

Método do Tableaux ANALÍTICOS

Construa demonstrações para os sequentes abaixo, usando o método dos tableaux analíticos:

- $\forall x(r_1(x) \vee r_2(x)) \vdash \forall x(r_2(x) \vee r_1(x))$;
- $r_1(a), r_1(b) \vdash r_1(a) \wedge r_1(b)$;
- $r_1(a) \wedge \neg r_1(a) \vdash$;
- $\vdash (r_1(c) \vee r_2(c)) \rightarrow (r_2(c) \vee r_1(c))$;