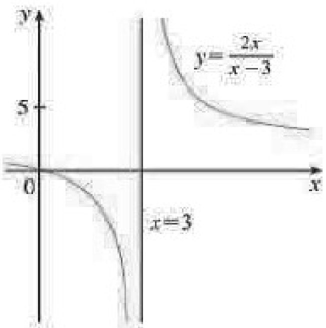


FIGURA 15

Analogamente, se x está próximo a 3 mas é menor que 3, então $x - 3$ é um número negativo pequeno, mas $2x$ ainda é um número positivo (próximo a 6). Portanto, $2x/(x - 3)$ é um número *negativo* grande. Assim,

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

O gráfico da curva $y = 2x/(x - 3)$ está dado na Figura 15. A reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.

EXEMPLO 10 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \text{tg}\, x$.

SOLUÇÃO Como

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$$

existem assíntotas verticais em potencial nos pontos nos quais $\cos x = 0$. De fato, como $\cos x \to 0^+$ quando $x \to (\pi/2)^-$ e $\cos x \to 0^-$ quando $x \to (\pi/2)^+$, enquanto sen x é positivo (próximo de 1) quando x está próximo de $\pi/2$, temos

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \text{tg}\, x = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \text{tg}\, x = -\infty$$

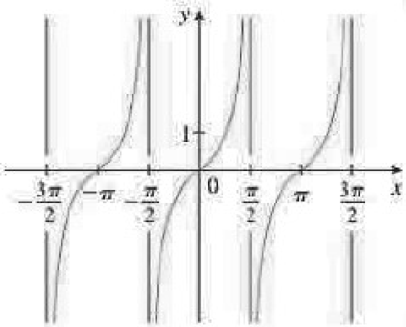


FIGURA 16
$y = \text{tg}\, x$

Isso mostra que a reta $x = \pi/2$ é uma assíntota vertical. Um raciocínio similar mostra que as retas $x = \pi/2 + n\pi$, onde n é um número inteiro, são todas assíntotas verticais de $f(x) = \text{tg}\, x$. O gráfico da Figura 16 confirma isso.

Outro exemplo de uma função cujo gráfico tem uma assíntota vertical é a função logaritmo natural $y = \ln x$. Da Figura 17, vemos que

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

e, assim, a reta $x = 0$ (o eixo y) é uma assíntota vertical. Na realidade, isso é válido para $y = \log_b x$ desde que $b > 1$. (Veja as Figuras 11 e 12 na Seção 1.5.)

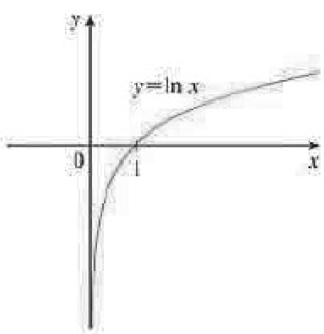


FIGURA 17
O eixo y é uma assíntota vertical da função logaritmo natural.

2.2 Exercícios

1. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique o que significa dizer que

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$$

Nesta situação, é possível que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Explique.

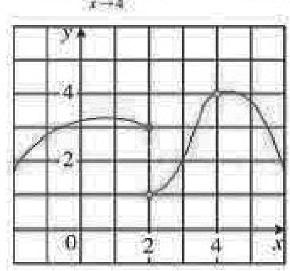
3. Explique o significado de cada uma das notações a seguir.

(a) $\lim_{x \to -5} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

4. Use o gráfico dado de f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

(d) $f(2)$ (e) $\lim_{x \to 4} f(x)$ (f) $f(4)$

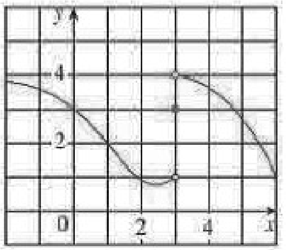


É necessário uma calculadora gráfica ou computador

5. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (e) $f(3)$



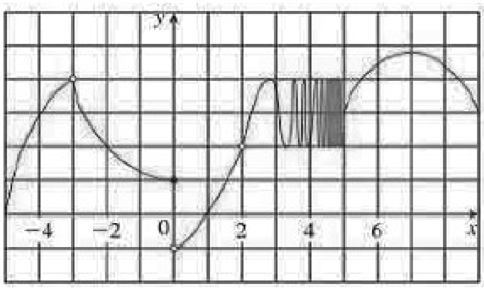
6. Para a função h cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x\to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x\to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x\to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x\to 0^+} h(x)$

(g) $\lim_{x\to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x\to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x\to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x\to 5^-} h(x)$

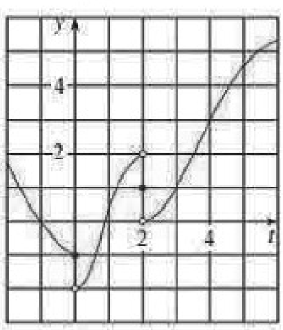


7. Para a função g cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{t\to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t\to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t\to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t\to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t\to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t\to 4} g(t)$

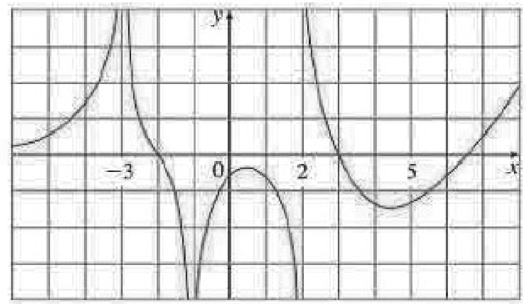


8. Para a função A, cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:

(a) $\lim_{x\to -3} A(x)$ (b) $\lim_{x\to 2^-} A(x)$

(c) $\lim_{x\to 2^+} A(x)$ (d) $\lim_{x\to -1} A(x)$

(e) As equações das assíntotas verticais.

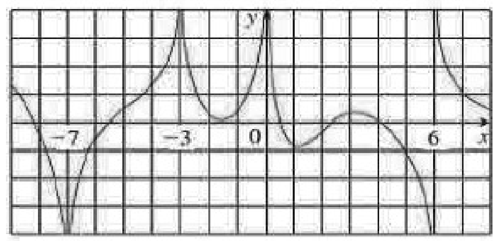


9. Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, determine o seguinte:

(a) $\lim_{x\to -7} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to 6^+} f(x)$

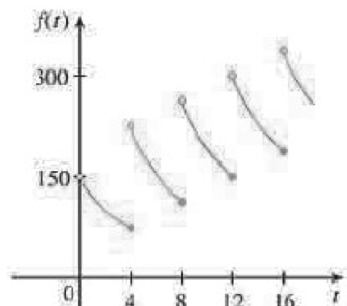
(f) As equações das assíntotas verticais.



10. Um paciente recebe uma injeção de 150 mg de uma droga a cada 4 horas. O gráfico mostra a quantidade $f(t)$ da droga na corrente sanguínea após t horas. Encontre

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

e explique o significado desses limites laterais.



11–12 Esboce o gráfico da função e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x\to a} f(x)$ existe:

11. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leqslant x < 1 \\ 2 - x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x > \pi \end{cases}$

13–14 Use o gráfico da função f para dizer o valor de cada limite, se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ **14.** $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

15–18 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

15. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -2$, $f(1) = 2$

16. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$,
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$, $f(2) = 1$, $f(0)$ não está definido

17. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to -2} f(x) = 2$,
$f(3) = 3$, $f(-2) = 1$

18. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 3$,
$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 0$, $f(0) = 2$, $f(4) = 1$

19–22 Faça uma conjectura sobre o valor do limite (se ele existir) por meio dos valores da função nos números dados (com precisão de seis casas decimais).

19. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$,
$x = 3{,}1,\ 3{,}05,\ 3{,}01,\ 3{,}001,\ 3{,}0001,$
$2{,}9,\ 2{,}95,\ 2{,}99,\ 2{,}999,\ 2{,}9999$

20. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$,
$x = -2{,}5,\ -2{,}9,\ -2{,}95,\ -2{,}99,\ -2{,}999,\ -2{,}9999,$
$-3{,}5,\ -3{,}1,\ -3{,}05,\ -3{,}01,\ -3{,}001,\ -3{,}0001$

21. $\lim_{t \to 0} \dfrac{e^{5t} - 1}{t}$, $t = \pm 0{,}5,\ \pm 0{,}1,\ \pm 0{,}01,\ \pm 0{,}001,\ \pm 0{,}0001$

22. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(4 + h)^3 - 64}{h}$,
$h = \pm 0{,}5,\ \pm 0{,}1,\ \pm 0{,}01,\ \pm 0{,}001,\ \pm 0{,}0001$

23–28 Use uma tabela de valores para estimar o valor do limite. Se você tiver alguma ferramenta gráfica, use-a para confirmar seu resultado.

23. $\lim_{x \to 4} \dfrac{\ln x - \ln 4}{x - 4}$ **24.** $\lim_{p \to -1} \dfrac{1 + p^9}{1 + p^{15}}$

25. $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{\operatorname{tg} 2\theta}$ **26.** $\lim_{t \to 0} \dfrac{5^t - 1}{t}$

27. $\lim_{x \to 0^+} x^x$ **28.** $\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x$

29. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.
(b) Verifique sua resposta da parte (a), calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.

30. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$$

traçando o gráfico da função $f(x) = (\operatorname{sen} x)/(\operatorname{sen} \pi x)$. Forneça sua resposta com precisão de duas casas decimais.
(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.

31–43 Determine o limite infinito.

31. $\lim_{x \to 5^+} \dfrac{x + 1}{x - 5}$ **32.** $\lim_{x \to 5^-} \dfrac{x + 1}{x - 5}$

33. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2 - x}{(x - 1)^2}$ **34.** $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{\sqrt{x}}{(x - 3)^5}$

35. $\lim_{x \to 5^+} \ln(x^2 - 25)$ **36.** $\lim_{x \to 0^+} \ln(\operatorname{sen} x)$

37. $\lim_{x \to (\pi/2)^+} \dfrac{1}{x} \sec x$ **38.** $\lim_{x \to \pi^-} \cot x$

39. $\lim_{x \to 2\pi^-} x \operatorname{cossec} x$ **40.** $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

41. $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$ **42.** $\lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \ln x \right)$

43. $\lim_{x \to 0} (\ln x^2 - x^{-2})$

44. (a) Encontre as assíntotas verticais da função

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

(b) Confirme sua resposta da parte (a) fazendo o gráfico da função.

45. Determine $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x^3 - 1}$ e $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1}$
(a) calculando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para valores de x que se aproximam de 1 pela esquerda e pela direita,
(b) raciocinando como no Exemplo 9, e
(c) a partir do gráfico de f.

46. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\operatorname{tg} 4x)/x$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.
(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximam de 0.

47. (a) Estime o valor do limite $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ com cinco casas decimais. Esse número lhe parece familiar?
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da função $y = (1 + x)^{1/x}$.

48. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = e^x + \ln|x - 4|$ para $0 \leq x \leq 5$. Você acha que o gráfico é uma representação precisa de f?
(b) Como você faria para que o gráfico represente melhor f?

49. (a) Avalie a função $f(x) = x^2 - (2^x/1.000)$ para $x = 1,\ 0{,}8,\ 0{,}6,\ 0{,}4,\ 0{,}2,\ 0{,}1$ e $0{,}05$, e conjecture qual o valor de

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1.000} \right)$$

(b) Avalie $f(x)$ para $x = 0{,}04,\ 0{,}02,\ 0{,}01,\ 0{,}005,\ 0{,}003$ e $0{,}001$. Faça uma nova conjectura.

50. (a) Avalie $h(x) = (\operatorname{tg} x - x)/x^3$ para $x = 1,\ 0{,}5,\ 0{,}1,\ 0{,}05,\ 0{,}01$ e $0{,}005$.
(b) Estime o valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$.
(c) Calcule $h(x)$ para valores sucessivamente menores de x até finalmente atingir um valor de 0 para $h(x)$. Você ainda está confiante que a conjectura em (b) está correta? Explique como