02 • 04 • 24

Tabela Verdade: $\overbrace{(\neg q \to \neg p) \to r}^{A} \models \overbrace{(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)}^{B}$

p	q	r	¬p	¬q	p→q	¬q→¬p	A	B
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1

Logo ∴ $A \models B$ //

SISTEMAS DEDUTIVOS!

AXIOMATIZAÇÃO:

→ ANTE-PÓS:

Sistema dedutivo usado para inferir, derivar ou deduzir as consequências lógicas de um conjunto de fórmulas Γ. Quando Γ infere uma fórmula A, escrevemos $\Gamma \vdash A$ onde:

→ Sequente: $\Gamma \vdash A$

→ Antecedente: Γ (ou hipóteses)

→ Consequente: A (ou conclusão)

Há procedimentos para verificar inferências, e cada um dá origem a um distinto sistema dedutivo

D S T Q Q S S .... 08 • 04 • 24

Dizemos que um Sistema é correto se:

$\Gamma \vdash A$ somente se $\Gamma \models A$

Dizemos que um Sistema é completo se:

$\Gamma \vdash A$ se $\Gamma \models A$

→ Axiomatização ($\vdash_{AX}$)

* Mais antigo;
* forma de inferência.
* Axiomas, "São verdades Básicas"
* Regras de inferência: Permite inferir novas fórmulas a partir de outras já inferidas.

→ Substituição:

1) $p[p := B] = B$

2) $q[p := B] = q$, para $q \neq p$

3) $(\neg A)[p := B] = \neg(A[p := B])$

4) $(A_1 \circ A_2)[p := B] = A_1[p := B] \circ A_2[p := B]$ para $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

→ Modus ponens:

A partir de $A \rightarrow B$ e A infere-se B//

08 • 04 • 24

D S T Q Q S S

Ex:

p	q	p → q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

MP//

→ Dedução: É uma sequência de fórmulas, que cada sequência é uma instância de axioma, ou é obtida por fórmulas de inferência anteriores.

→ Teorema: Um teorema A, é uma fórmula que existe uma dedução. Representamos por $\vdash_{\alpha} A$ ou $\vdash A$.

→ Fórmula dedutível: Uma fórmula A é dedutível a partir de Γ se há uma dedução para que $A_1, A_2 \dots A_n = A$.

→ Ou $A_i \in$ Γ

→ Ou é uma instância do axiomas.

→ Ou é obtida de fórmulas anteriores (Modus ponens)

se Γ = ∅, A é teorema.

→ Teorema da dedução:

$\Gamma, a \vdash B \leftrightarrow \Gamma \vdash a \to B$//

D S T Q Q S S 09 • 04 • 24

Ex: Demonstrar: $p \to q, p \to R \vdash p \to q \wedge R$

pelo teorema da dedução: $p \to q, p \to R, p \vdash q \wedge R$

1. $p \to q$ hipótese
2. $p \to R$ "
3. p "
4. q M.P (1, 3)
5. r M.P (2, 3)
6. $q \to (R \to (q \wedge R))$ $(\wedge_1)$ $\left.\begin{matrix} p := q \\ q := R \end{matrix}\right]$
7. $R \to (q \wedge R)$ M. P(6, 4)
8. $q \wedge R$// M. P(7, 5)

* DEDUÇÃO NATURAL:

* Tem princípios bem definidos:

- hipóteses podem ser introduzidas na prova e deverão ser descartadas até o fim, para concluir a prova.

- Para cada conectivo lógico, duas regras podem ser usadas: inserção e remoção.

17 • 04 • 24 D S T Q Q S S

Ex: $\vdash_{DN} A \to (B \to A)$

(Modus Ponens) Regras:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}\ (\to E)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A]^{i} \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B}\ (\to I)^{i}$$

$[A]^{1}$ $[B]^{2}$

$$\cfrac{\cfrac{A}{B \to A}\ (\to I^{2})}{\underbrace{A \to (B \to A)}}\ (\to I^{1})$$

raiz de conclusão

Ex2: $\vdash_{DN} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$[A \to (B \to C)]^{1}$ $[A \to B]^{2}$ $[A]^{3}$

$$\cfrac{(B \to C)\ (\to E)_{1,3} \qquad B\ (\to E)_{2,3}}{C}\ (\to E)$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{C}{A \to C}\ (\to I)^{3}}{(A \to B) \to (A \to C)}\ (\to I)^{2}}{(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))}\ (\to I)^{1}$$

Ex3: $\vdash_{DN} A \land B \to A$

D S T Q Q S S 11 • 04 • 24

Regra:

$$\dfrac{[A \wedge B]^1}{A}\ (\wedge E)^1$$

$$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\ (\wedge I)$$

$$\dfrac{A}{(A \wedge B) \to A}\ (\to I)^1$$

$$\dfrac{A \wedge B}{A}, \dfrac{A \wedge B}{B}\ (\wedge E_{1 e 2})$$

Ex:. $\vdash_{DN} A \to (B \to (A \wedge B))$

$$\dfrac{[A]^1 \quad [B]^2}{A \wedge B}\ (\wedge I)$$

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B \to (A \wedge B)}\ (\to I)^2}{A \to (B \to (A \wedge B))}\ (\to I)^1$$

Definição Formal de Dedução Natural:

A dedução natural $\Gamma \vdash_{DN} A$ pelo método da árvore cujos nós contém fórmulas tal que:

1) A fórmula A (é a raiz da árvore) (Não confundir com estrutura de dados)

2) As folhas da árvore de dedução são elementos de Γ ou hipóteses formuladas (suposições)

3) Cada "nó" intermediário é obtido pelos superiores da árvore por meio de inserção e remoção.

11 • 04 • 24 D S T Q Q S S

4) toda a suposição (Hipótese formulada) devem ser descartadas por regra.

5) Uma regra pode descartar uma ou mais fórmulas idênticas.

★ TABLEUAX ANALÍTICOS:

- Os métodos de inferência anteriormente provam fórmulas a partir de hipóteses.

- Nenhum método anterior prova maneira clara de obter procedimento de decisão;
  - Permite verificar a validade de um sequente.

- Os anteriores não permitem provar se $\Gamma \nvdash A$ ou seja, a falsidade do sequente.

- CUIDADO: $\Gamma \nvdash A$ não implica em $\Gamma \vdash \neg A$ //.

- Tableau analítico é baseado em refutação, para provar $B \vdash A$, afirmamos a veracidade de B e a falsidade A, na esperança de uma contradição.

- Se obtivermos contradição o sequente é verdadeiro

- Se não, temos um contraexemplo.

- Em tableaux usa-se fórmulas Marcadas

D S T Q Q S S .... 11 • 04 • 24

Formula marcada: Se $B_1 \vdash A_1$ ...

TB_1

:

Há formulas de expansão em linha e em cabeça. $\alpha \to$ linha; $\beta \to$ cabeça;

:

TB_n

FA_1

FA_n

Ex: $\vdash_{TA} P \vee \neg P$:

1. $F\, P \vee \neg P$
2. Fp
3. $F \neg P$
4. Tp ∴ Como 2 e 4 entram em contradição ∴ $\vdash_{TA} P \vee \neg P$ é (V)

Ex: $q, p \to r \vdash_{TA} p \to r$:

1. $T\, p \to q$
2. $T\, q \to R$
3. $F\, p \to R$
4. Tp
5. FR

de 5. FR → 7. Tq

6. Fp Tq

X 4,6

8. Fq TR

X 7,8 X 5,8

∴ Todos os ramos em contradição ∴ $q, p \to r \vdash_{TA} p \to r$ (V)

11 • 04 • 24 D S T Q ~~Q~~ S S

O tableaux é um método decidível.

Se $\Gamma \vDash A$, então gero um TA fechado $\Gamma \vdash_{TA} A$

Se $\Gamma \nvDash A$, então gero ao menos um ramo saturado e aberto!

EXERCÍCIOS MARCADOS

$\boxed{\text{ANEXO-01}}$

Pg 44 - 2.7)

b) $p \to q, \neg q \vdash \neg p$

$$[p \to q]^4 \quad [\neg q]^4 \quad [p]^1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p \to q] \quad [p]}{q}\,(\to E)^1 \quad [\neg q]}{\bot}\,(\bot I)^1}{\neg p}\,(\neg I)^1$$

e) $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \wedge \neg q$

POUCO ESPAÇO

PRÓXIMA FOLHA:

D S T Q Q Q S .... 12 • 04 • 24

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(p \land q)]^{H} \quad \dfrac{[p]^1 \; [q]^2}{p \land q}\,(\land I)^1}{\perp \; (\perp I)}}{\dfrac{\neg p \quad \neg q \;\; (\neg I)^1 \; e \; (\neg I)^2}{\neg p \land \neg q \;\; (\land I)}}$$

i) $(p \lor q) \land (p \lor R) \vdash (p \lor q) \land (q \land R)$

distributivo: $(p \lor q) \land (p \lor R) \equiv p \lor (q \land R)$, então:

$[(p \lor q) \land (p \lor R)]$ $[p]$ $[q]$ $[R]$

$p \lor q \quad p \lor R$

$p \quad q \quad R \qquad (\land E)^2$

$q \quad R \qquad (\land E)^1$

$p \quad q \land R \qquad (\land I)^1$

$p \lor (q \land R) \qquad (\lor I)^1$

Pg 52 - 2.10)

a) $\neg q \to \neg p \vdash p \to q$

1. T. $\neg q \to \neg p$
2. F. $p \to q$
3. T. p
4. F. q

5. F. q

6. F. $\neg q$ — T. $\neg p$

X 6, 1 — X 6, 3

18 • 04 • 24 D S T Q Q S S

e) $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \wedge \neg q$

- 1. T. $\neg(p \wedge q)$
- 2. F. $\neg p \wedge \neg q$

x 3. F. $(p \wedge q)$

4. T $(p \wedge \neg q)$

5. T p

6. T $\neg q$

7. F. q

F.p   F q

X

F,S   Aberto//