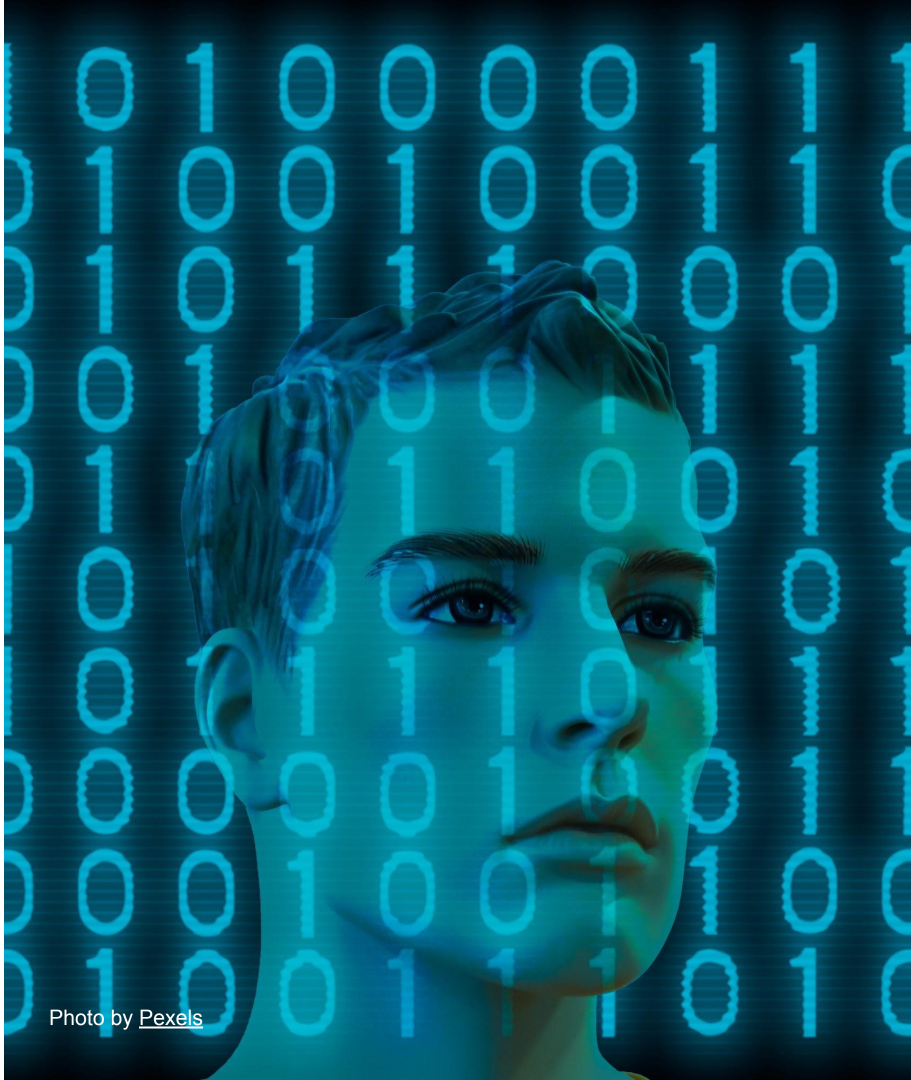
A semântica da Lógica Proposicional

Começando a ter significado...

Prof. Dr. Dorival M. Machado Junior



Conteúdo programático da disciplina

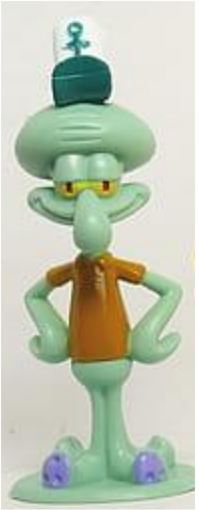
- linguagem da lógica proposicional
- propriedades semânticas da lógica proposicional
- introdução à linguagem de programação Python
- métodos para determinação da validade de fórmulas da lógica proposicional
- prática de aplicação da lógica proposicional simples através de linguagem de alto nível
- relações semânticas entre os conectivos da lógica proposicional

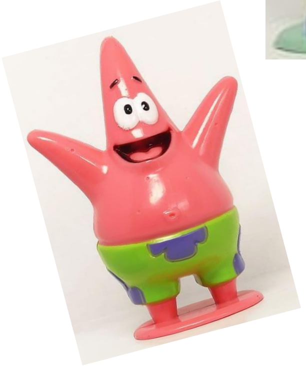
A semântica da Lógica Proposicional

- **Entendendo a nomenclatura**
  - Resultado **T** significa ***True*** (**verdadeiro**, também representado por V)
  - Resultado **F** significa ***False*** (**falso**)

  - Interpretação é como se fosse um "ponto de vista", um "significado". Exemplo:
    - Imagine que "**I**" seja o "Patrick" e "J" seja o "Lula Molusco"
    - Imagine também que **X** seja um status de "**com fome**"

      Como devem ser entendidas as expressões:
      - **I[X] = T**
      - **J[X] = F**





- O significado ou semântica dos elementos sintáticos da linguagem da lógica proposicional clássica é determinado pela função **I** denominada **interpretação**
- A função **I** associa a cada fórmula um valor **verdadeiro** ou **falso** (lógica bivalente)

A semântica da Lógica Proposicional

- Um conceito fundamental é diferenciar objetos do seu significado
- Este capítulo objetiva associar a cada objeto sintático um significado
- Desta forma, quando se escreve a fórmula **(P ^ Q)**, dependendo dos resultados de P e Q, esta fórmula pode ser <u>verdadeira</u> ou <u>falsa</u> tendo diferentes significados semânticos.

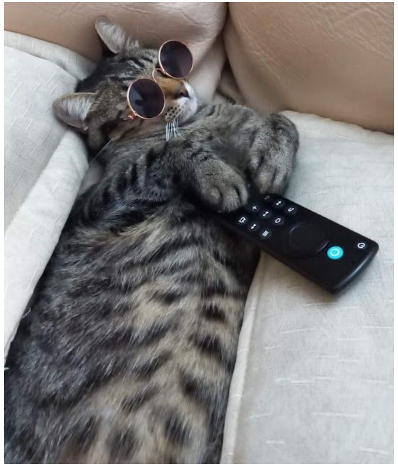
- Exemplo:
    - **P** representa ”**está chovendo**”
    - **Q** representa ”**A rua está molhada**”

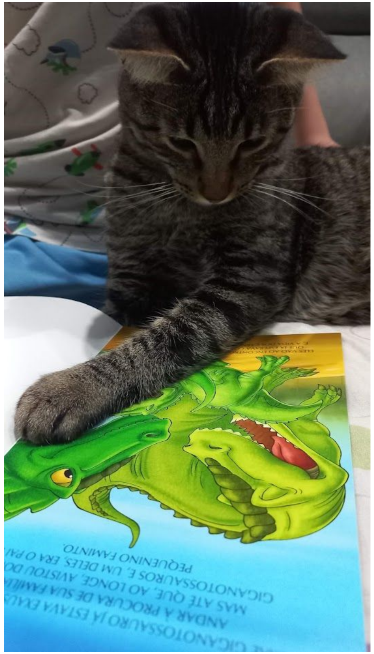
    - Para que a fórmula seja verdadeira, os significados de P e Q devem ser verdadeiros.
    - Isto depende das condições climáticas atuais, que determinam se a Interpretação de P é verdadeira ou falsa, o que pode ser indicado por **I[P]=T** ou **I[P]=F**
    - E também se **I[Q]=T** ou **I[Q]=F**

A semântica da Lógica Proposicional

- No caso em que **I[P]=T**, **I[Q]=F** e **^** é interpretado como a conjunção dos fatos, então: **I[P^Q]=F**

- Esta representação pode ser modificada, obtendo outros resultados.
- Se **P** representa "**O gato Jarvis tem inteligência acima da média**"
- Se **Q** representa "**O gato Jarvis tem inteligência abaixo da média**"
  - A fórmula (P ^ Q) é interpretada como falsa
  - A fórmula (P v Q) é interpretada como verdadeira





A semântica da Lógica Proposicional

- Os símbolos sintáticos definem as fórmulas, que neste caso estão associados a significados semânticos
- Cada fórmula sintática está associada a um significado
- O mundo lógico desta fórmula é dividido em 2 partes:
    - **O mundo sintático**
        - Constituído por símbolos do alfabeto
        - Fórmulas são concatenações de símbolos que representam afirmações
    - **O mundo semântico**
        - Onde se define o significado dos símbolos e fórmulas do mundo sintático
        - O computador é uma máquina estritamente sintática, sendo necessário dar significado ou semântica aos símbolos manipulados
        -
- **Programar = traduzir conhecimento semântico em programa sintático**

Interpretação

- Definição (**função binária**): uma função binária é binária se seu contradomínio possui apenas dois elementos

- Definição (**interpretação**): uma interpretação I, na lógica proposicional, é uma função binária tal que,
    - O domínio **I** é constituído pelo conjunto das fórmulas da lógica proposicional
    - O **contradomínio** de I é o **conjunto {T,F}**
    - O valor da interpretação I, tendo como argumento os símbolos de verdade é dado por I[true] = T e I[false] = F

Tabela Verdade

- As regras semânticas determinam significados como (H∧G) a partir de I[H] e I[G], e não I[∧].

- Na lógica proposicional **não se tem o significado dos conectivos isolados**. Entretanto, **para simplificar** o significado de (H∧G), **é indicado como o significado de ∧**

- As regras semânticas também são representadas por tabelas conhecidas como <u>tabelas verdade</u>
- Estas tabelas são associadas aos conectivos proposicionais e às fórmulas da lógica proposicional.
- No caso de fórmulas, as tabelas são construídas a partir das tabelas associadas aos conectivos proposicionais

Tabela Verdade

- Dada uma fórmula H da lógica proposicional, as tabelas verdade são utilizadas na construção de uma tabela verdade associada a H.
- Considere a fórmula **H = (¬P v Q) → (Q ∧ P)**
- A tabela verdade associada a H é dada por:

P	Q	¬P	¬P v Q	Q ∧ P	H
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F

- Observe que a coluna H é obtida a partir das colunas intermediárias ¬P, ¬PvQ, Q∧P

Tabela Verdade

- A definição dos conectivos ¬, v, ∧ e ↔ está associada aos significados de ”não”, ”ou”, ”e”, e ”se somente se”, respectivamente
- O mesmo não ocorre para significado do conectivo: →

- **A semântica do conectivo →**
  - Sejam H e G duas fórmulas.
  - Chama-se **condicional** ou **implicação** a qualquer proposição da forma ”**Se H, então G**”, onde H é o antecedente e G o consequente

Tabela Verdade

- A fórmula ($H \rightarrow G$) possui a seguinte tabela verdade:

H	G	$H \rightarrow G$
T	T	T
T	F	F
F	T	T*
F	F	T

- (*) Não existe a relação ”causa-efeito”.
- Deve-se entender apenas: **Se H é verdadeiro então G é verdadeiro. Caso contrário, não há nenhuma relação.**
- Exemplo:
  - as bolas são redondas implica que a água do mar é salgada. (T)
  - as bolas são quadradas implica que a água do mar é salgada. (T)
- **Uma condicional só é falso quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso**. Em todos os outros casos é verdadeiro.

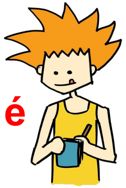


Tabela Verdade

- Vamos exemplificar:
  - Seja **P** a proposição "**Está chovendo**"
  - Seja **Q** a proposição "**O chão está molhado**".
- A implicação "**Se está chovendo, então o chão está molhado**" pode ser representada como **P** → **Q**.

- Agora vamos analisar todas as possibilidades:
- Se **está chovendo** (P é **verdadeiro**) e o **chão está molhado** (Q é **verdadeiro**), então a implicação é **verdadeira**.
- Se **está chovendo** (P é **verdadeiro**), mas o **chão não está molhado** (Q é **falso**), então a implicação é <u>**falsa**</u>.
- Se **não está chovendo** (P é **falso**), então <u>não importa se o chão está molhado ou não</u>, a implicação é **verdadeira**.
  - Se **não está chovendo** (P é **falso**), então o **chão está molhado** (Q é **verdadeiro**), então a implicação é **verdadeira**.
  - Se **não está chovendo** (P é **falso**), então o **chão não está molhado** (Q é **falso**), então a implicação é **verdadeira**.

Tabela “mamão”, “facilitadora de vida”, “mão na roda”, etc.

e ou implicação bi-implicação (igual)

A	B	A ^ B	A v B	A → B	A ↔ B
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

- **Pulos do gato:**
    - 1º) no ”^” (e), vai ser verdadeiro somente se os 2 elementos forem verdadeiros
    - 2º) no ”v” (ou), será verdadeiro se tiver ao menos um verdadeiro
    - 3º) na ”→” (implicação), será falso somente se o primeiro for T e o segundo F
    - 4°) na ”↔” (bi-implicação), será verdadeiro quando os dois forem resultado igual