Introdução à Lógica de Programação

Compreender os fundamentos das declarações lógicas

Prof. Dr. Dorival M. Machado Junior

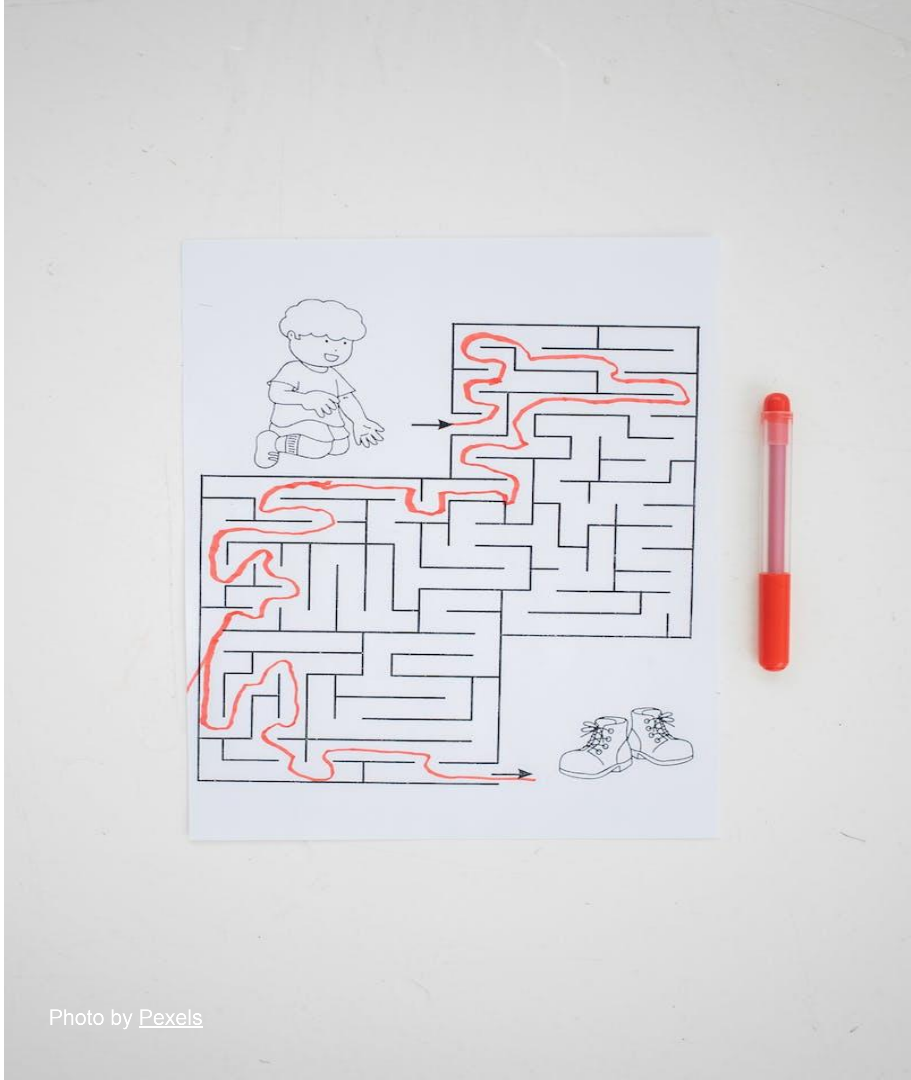


Photo by Pexels

Apresentação inicial

- Prof. Dr. Dorival M. Machado Junior
    - CURRÍCULO ACADÊMICO
        - Doutor em Tecnologias da Inteligência e Design Digital (PUC-SP)
        - Mestre em Tecnologias da Inteligência e Design Digital (PUC-SP)
        - Especialista em Administração de Redes Linux (UFLA)
        - Bacharel em Sistemas de Informação (UEMG/FESP)
        - Professor na Libertas desde 2007

Conteúdo programático da disciplina

- linguagem da lógica proposicional
- propriedades semânticas da lógica proposicional
- introdução à linguagem de programação Python
- métodos para determinação da validade de fórmulas da lógica proposicional
- prática de aplicação da lógica proposicional simples através de linguagem de alto nível
- relações semânticas entre os conectivos da lógica proposicional

Conteúdo programático da disciplina

Composição de notas*:

- **Bimestre 1**
  - Prova 1 + Prova 2 (80% da nota)
  - Trabalhos (20% da nota)

- **Bimestre 2**
  - Prova 3 + Prova 4 (80% da nota)
  - Trabalhos (20% da nota)

- **Média do semestre**
  - (Bimestre 1 + Bimestre 2) / 2

**Poderá haver mudança na distribuição de acordo com a evolução de conteúdos*

Introdução à Lógica de Programação

- As palavras ”lógica” e ”lógico” são familiares a todos nós
- Ex: comportamento ilógico, procedimento lógico, explicação lógica, espírito lógico, etc.
  - lógico = razoável
  - ilógico = não razoável
- O **estudo da lógica** é o estudo dos **métodos** e princípios usados para distinguir o **raciocínio correto** do incorreto. (Irvin M. Copi)
  - *É possível correr bem somente se estudar física e fisiologia? NÃO!*
- Uma pessoa com conhecimento de lógica tem mais probabilidades de raciocinar corretamente do que aquela que não se aprofundou nos princípios gerais implicados nessa atividade.

Introdução à Lógica de Programação

- Lógica é a análise dos métodos de raciocínio
  - Estudo destes métodos é focado principalmente na forma e não no conteúdo dos argumentos.
    - ***Todo homem é mortal*. *Sócrates é homem*. *Portanto, Sócrates é mortal***
    - ***Todo cão late*. *Totó é um cão*. *Portanto, Totó late.***
  - Do ponto de vista da lógica, estes argumentos tem a mesma estrutura:
    - ***Todo X é Y*. *Z é X*. *Portanto Z é Y.***
- Este estudo objetiva focar na apresentação dos principais fundamentos da **lógica proposicional clássica** necessários à área de Sistemas de Informação.

Introdução à Lógica de Programação

- **Sentenças x Proposições:**
  - João ama Inês
  - Inês é amada por João
- São duas sentenças diferentes, como o mesmo <u>significado</u>.
- Costuma-se usar a palavra ”**proposição**” para designar o significado de uma sentença ou oração declarativa.
- A diferença entre orações e proposições é evidenciada ao observar-se que
  - uma oração declarativa faz sempre parte de uma linguagem determinada, a linguagem em que ela é enunciada
  - as proposições não são peculiares a nenhuma das linguagens em que podem ser expressas.
    - Ex: X, Y, Z.
-

A linguagem da lógica proposicional

- Este estudo segue três passos básicos:
  - 1) especificação de uma linguagem, a partir da qual o conhecimento é representado
  - 2) estudo de métodos que produzam ou verifiquem as fórmulas ou argumentos válidos.
  - 3) definição de sistemas de dedução formal onde são consideradas as noções de prova e consequência lógica.

A linguagem da lógica proposicional

- A definição é semelhante à definição de outras linguagens como a lingua portuguesa por exemplo:
  - O alfabeto, que é constituído pelos símbolos que formam as palavras da linguagem, é definido inicialmente: {a, b, …, z, A, B, …, Z}.
  - Em seguida as palavras da lingua são definidas
  - As palavras são formadas pela concatenação de letras do alfabeto
  - Entretanto, não é qualquer concatenação de letras que forma uma palavra da linguagem
  - Exemplo: ”d” e ”e” = ”de” (pertence à linguagem)
  - ”e” e ”d” = ”ed” (não pertence à linguagem)

A linguagem da lógica proposicional

- A definição da linguagem da lógica proposicional segue estes passos:
  - Inicialmente o alfabeto é considerado;
  - Posteriormente são os elementos que equivalem às palavras

- Na linguagem de lógica proposicional, o equivalente a uma palavra é uma fórmula.

A linguagem da lógica proposicional

- **sobre o ALFABETO**
  - é constituído de infinitos símbolos
  - Dividido em 4 classes de símbolos
  - O alfabeto da lógica proposicional é constituído por:
    - Símbolos de pontuação: (,).
    - Símbolos de verdade: true, false.
    - Símbolos proposicionais: P, Q, R, S, P1, Q1, R1, S1, P2, Q2, …
    - Conectivos proposicionais: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

A linguagem da lógica proposicional

- **sobre o ALFABETO**
  - Os conectivos proposicionais possuem as seguintes denominações:
    - O símbolo ¬ é denominado por ”**não**”
    - O símbolo ∨ é denominado por ”**ou**”
    - O símbolo ∧ é denominado por ”**e**”
    - O símbolo → é denominado por ”**se … então**” ou ”**implica**”
    - O símbolo ↔ é denominado por ”**se somente se**” , ”**iff**” ou ”**bi-implicação**”

A linguagem da lógica proposicional

- **sobre as FÓRMULAS**
  - As fórmulas da linguagem da lógica proposicional são construídas a partir dos símbolos do alfabeto conforme as regras a seguir:
    - Todo símbolo de verdade é uma fórmula
    - Todo símbolo proposicional é uma fórmula
    - Se H é uma fórmula então (¬H), a negação de H, é uma fórmula
    - Se H e G são fórmulas então (H∨G) é uma fórmula. Esta fórmula é a disjunção das fórmulas H e G.
    - Se H e G são fórmulas então (H∧G) é uma fórmula. Esta fórmula é a conjunção das fórmulas H e G.
    - Se H e G são fórmulas então (H→ G) é uma fórmula. Neste caso H é o antecedente e G é o consequente da fórmula (H→G).
    - Se H e G são fórmulas então (H↔ G) é uma fórmula. Neste caso H é o lado esquerdo e G o lado direito da fórmula (H↔G).

A linguagem da lógica proposicional

- **sobre as FÓRMULAS**
  - Exemplo de construção de fórmulas:
    - P, Q e *true* são fórmulas conforme definição prévia
    - A partir das fórmulas P e Q, obtém-se a fórmula $(P \vee Q)$
    - Utilizando as fórmulas $(P \vee Q)$ e *true*, obtém-se a fórmula:
      - $((P \vee Q) \rightarrow \text{true})$.
  - Este raciocínio segue indefinidamente e infinitas fórmulas podem ser obtidas.

A linguagem da lógica proposicional

- **sobre as FÓRMULAS**
  - Exemplo de fórmulas mal formadas:
  - As concatenações dos símbolos a seguir não constituem fórmulas.
  - Neste caso, não é possível obtê-las a partir das regras de definição anterior
    - PR, (R true $\leftrightarrow$) e (true $\rightarrow \leftrightarrow$ (R true $\rightarrow$))

A linguagem da lógica proposicional

- **Notação**
  - Na lingua portuguesa é frequente a omissão de símbolos de pontuação, o que nem sempre altera a compreensão dos significados das sentenças.
  - Na lógica proposicional isto é considerado de forma semelhante.
  - No exemplo a seguir, os parânteses ou símbolos de pontuação são omitidos quando não há problemas sobre interpretação das fórmulas.

$$(((\mathbf{P} \vee \mathbf{R}) \rightarrow \textbf{true}) \leftrightarrow (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{S})) \quad \text{pode ser reescrito como}$$

$$\begin{gathered}(\mathbf{P} \vee \mathbf{R}) \rightarrow \textbf{true} \\ \leftrightarrow \\ \mathbf{Q} \wedge \mathbf{S}\end{gathered}$$

  - Ou ainda como $((\mathbf{P} \vee \mathbf{R}) \rightarrow \textbf{true}) \leftrightarrow (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{S})$.

A linguagem da lógica proposicional

- **Notação**
  - Outra forma de simplificar a escrita das fórmulas é considerar a ordem de precedência dos conectivos.
  - Como na aritmética, há uma precedência entre os conectivos proposicionais, o que possibilita a eliminação de símbolos de pontuação.

    2 + 4 x 5 equivale a **(2 + (4 x 5))**
  - Isto ocorre porque a multiplicação tem precedência sobre a adição
  - Neste caso a multiplicação é executada inicialmente. Ao colocar parênteses, eles são colocados inicialmente perto da multiplicação.
  - Existem também as operações sem precedência como a multiplicação e divisão.

    4 x 6 ÷ 3 tem duas interpretações:

    ((4 x 6) ÷ 3) ou **(4 x (6 ÷ 3))**

A linguagem da lógica proposicional

- **Notação**
  - A **ordem de precedência** dos conectivos proposicionais é definida a seguir:
    - Maior precedência: $\neg$
    - Precedência intermediária: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
    - Menor precedência: $\vee$, $\wedge$
  - A utilização desta ordem permite a simplificação das fórmulas com a eliminação de símbolos de pontuação.

A linguagem da lógica proposicional

- **Notação**
  - O conectivo ¬ tem precedência sobre os demais
  - Isto significa que na ausência de pontuação, ele deve ser considerado primeiro.
  - Os conectivos → e ↔ não possuem precedência um sobre o outro e a fórmula P → Q ↔ R possui duas interpretações:

$$((P \rightarrow Q) \leftrightarrow R) \text{ ou } (P \rightarrow (Q \leftrightarrow R))$$

A linguagem da lógica proposicional

- **Notação**
  - Não se considera o significado das fórmulas
  - Cada fórmula é vista como uma concatenação de símbolos
  - Equivalente a apresentar a palavra ”saudade” a alguém que não conhece a lingua portuguesa.
    - A pessoa sabe que tal palavra tem no dicionário de português
    - São necessárias mais informações para que se saiba o significado da palavra
  - As fórmulas estão sendo apresentadas sintaticamente e não se está considerando ainda seu significado semântico.
  - Alguns elementos sintáticos definidos a partir da lógica proposicional, como o comprimento e as subfórmulas, são considerados a seguir

A linguagem da lógica proposicional

- **Notação**
  - O comprimento de uma fórmula da lógica proposicional é um conceito frequentemente utilizado em demonstrações que utilizam indução finita.
  - **Definição (comprimento de uma fórmula)** O comprimento de uma fórmula H da lógica proposicional, denotado por comp[H], é definido como se segue:
    Se H é um símbolo proposicional ou de verdade então comp[H] = 1
    Se H e G são fórmulas da lógica proposicional, então
    $comp[\neg H] = comp[H] + 1$
    $comp[H \lor G] = comp[H] + comp[G] + 1$
    $comp[H \land G] = comp[H] + comp[G] + 1$
    $comp[H \rightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$
    $comp[H \leftrightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$

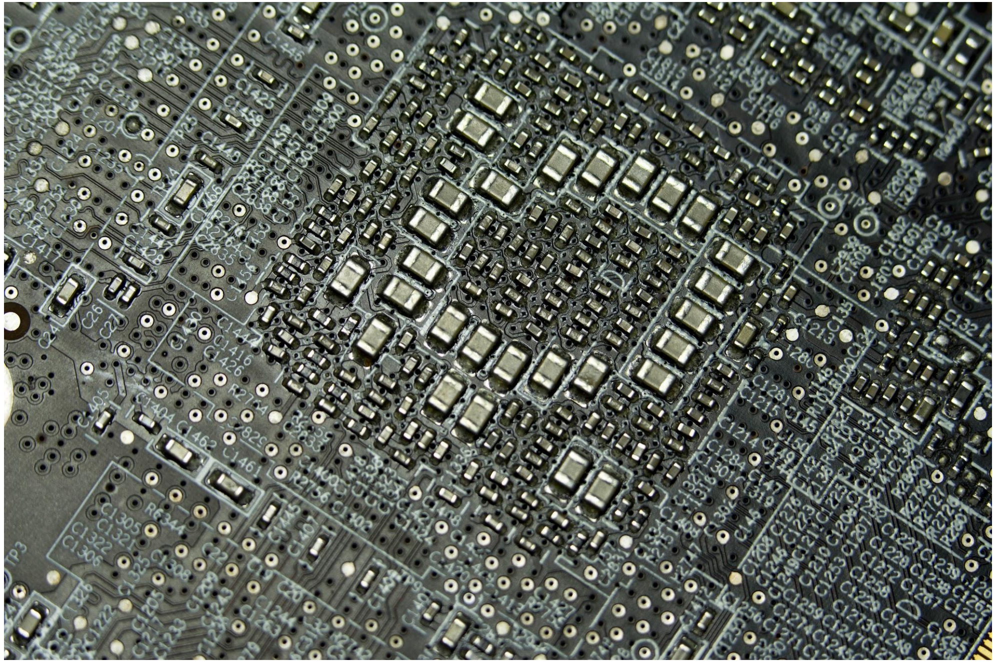
A linguagem da lógica proposicional

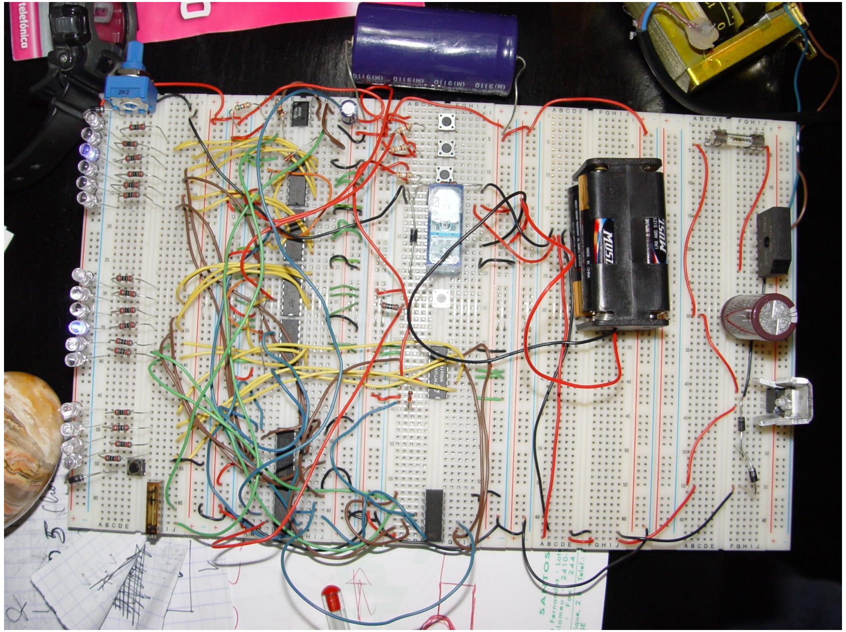
- **Notação**
    - Na definição apresentada, os símbolos de pontuação não são considerados no cálculo do comprimento.
    - O comprimento é obtido contando apenas os símbolos proposicionais, de verdade e os conectivos proposicionais
    - Exemplo:

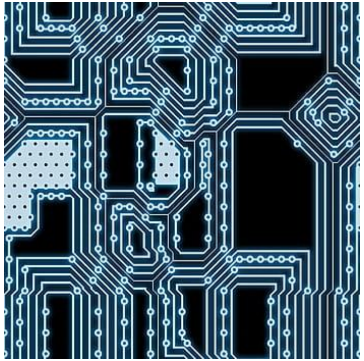
$$\underbrace{(P \rightarrow Q)}_{\text{Comprimento} = 3} e \underbrace{((P \wedge Q) \Leftrightarrow R)}_{\text{Comprimento} = 5}$$

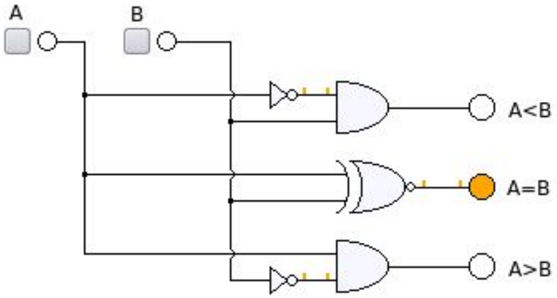
A linguagem da lógica proposicional

- **Notação**
  - **Definição (subfórmula)** seja H uma fórmula da lógica proposicional. Uma subfórmula de H é definida por:
    - H é uma subfórmula de H
    - Se H = (¬G), então G é uma subfórmula de H
    - Se H e uma fórmula do tipo (G∨E), (G∧E), (G→E) e (G ↔ E),
    - então G e E são subfórmulas de H
    - Se G é subfórmula de H,
    - então toda subfórmula de G é subfórmula de H
  - Informalmente, uma subfórmula de H é um pedaço de H que é fórmula








A
B
A<B
A=B
A>B