Função

Noção intuitiva de função

Função entre duas grandezas: duas grandezas **x** e **y** estão relacionadas de tal forma que, se, para cada valor atribuído a grandeza **x,** existir um único valor associado da grandeza **y,** então podemos dizer que y é uma função da grandeza x.

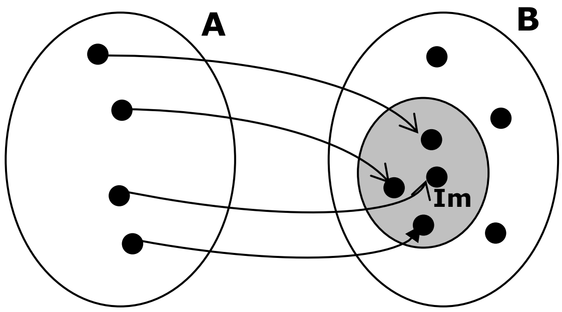
Assim, por exemplo, dizemos que:

- a altura de uma pessoa é função de sua idade;
- o preço pago pela gasolina colocada no tanque do automóvel é função da quantidade de litros comprados;
- o preço pago por uma corrida de taxi é função do número de quilômetros percorridos.
- A área de um círculo é função de seu raio.

Definição

Dados dois conjunto não vazios **A** e **B**, *uma função de A em B* é uma relação que a cada elemento **x** de **A** faz corresponder um único elemento **y** de **B**.

Im ⊂ B



Domínio **Contra-domínio**

É importante observar que:

- todo elemento de A deve ser associado a algum elemento em B;
- para um dado elemento de A associamos um único elemento em B.

Assim, para que uma função fique caracterizada, é necessário conhecermos seu domínio (A), o contradomínio(B) e uma regra (ou lei) que associe a todo elemento **x** de A, um único elemento **y** de B. Logo, o domínio de uma função f de A em B, **f: A → B,** será sempre o conjunto A e seu conjunto imagem será um subconjunto de B.

- *Notação*

Sendo **x** um elemento de **A** e **y** um elemento de **B**, indicamos uma função de A em B com a seguinte notação:

y = f(x) (lê-se: "y é igual a f de x")

na qual ***f*** representa uma lei de correspondência entre os valores de **x** e **y**.

O conjunto dos pares ordenados é indicado, de forma genérica, por:

$F = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$

(lê-se: "F é o conjunto dos pares ordenados pertencentes a **A** cartesiano **B**, tal que y é função de x")

Exemplo:
A lei de correspondência que associa cada valor real **x** ao número **y**, sendo *y o dobro de x* é uma função definida por *y = 2x* ou *f(x) = 2x*. O domínio e o conjunto imagem dessa função são R. A notação da função é, portanto, f: **R→ R** tal que y = 2x.

Então:
- para x = 4 , dizemos que y = 2.(4) = 8, ou então que f(4) = 8
- a imagem de -2 é f(-2) = 2(-2) = -4
- x = 2,5 corresponde a y = 2.(2,5) = 5
- y = 10 é a imagem de x = 5.

Observação:
Quando, na expressão da função (lei de correspondência), substituímos a letra **x** por um número e efetuamos as operações indicadas, estamos calculando o valor numérico da função, ou seja, determinando o valor da imagem de **x**.

Exercícios propostos de aplicação:

1. Escreva funções, descrevendo os seguintes fatos:
a) Receita R de um comerciante que vende a quantidade variável q de mercadorias ao preço unitário de $50,00;

b) Juros simples J ganhos por um investidor que emprega $50.000,00, à taxa de 8% ao mês, durante um tempo indeterminado de n meses;

c) Salário mensal y de um operário que ganha $330,00 fixos mais $1,50 por hora extra, sabendo que o número x de horas extras varia todo mês.

2. Um operário, que ganha salário variável de acordo com as horas extras que trabalha paga $100,00 de prestação de casa própria, gasta 60% do seu salário em manutenção e poupa o restante. Determine uma expressão matemática para cada uma das funções consumo e poupança, isto é, expresse seu consumo C e sua Poupança S em função de sua renda variável y.

3. Um vendedor ambulante compra objetos ao preço unitário de $150,00 e vende cada unidade a $250,00.
   a) Expresse seu custo diário C em função da quantidade comprada q.

b) Expresse sua receita diária em função da quantidade vendida q, que se supõe igual a quantidade comprada.

c) Expresse seu lucro diário L em função da quantidade q.

d) Qual o lucro do vendedor por unidade vendida (lucro unitário, L_u, ou lucro médio, L_{me})?

4. Suponha que o mesmo vendedor ambulante do exercício 3 resolveu agora incluir entre seus gastos o custo de sua condução diária de $1.200,00.
   a) Como ficarão agora as funções: custo, receita e lucro do vendedor?

   b) Qual será agora seu lucro por unidade?

5. Em determinada cidade, a tarifa mensal de água é cobrada da seguinte forma: para consumo de até 10m^3, a tarifa é um valor fixo de $8,00. A parte consumida entre 10 m^3 e 20m^3 paga uma tarifa de $1,00 por m^3, e o que excede 20 m^3 paga $1,40 por m^3. Calcule a tarifa de quem consome: (a) 2 m^3 por mês; (b) 15 m^3; (c) 37 m^3 ;(d) chamando de x o consumo mensal (em m^3) e de y a tarifa, obtenha a expressão de y como função de x.

Exercícios de Fixação

1. Certa máquina foi comprada pelo preço de \$80.000,00 (valor nominal) e vendida depois de dez anos (vida útil) por \$30.000,00 (valor residual).
    a) Qual foi sua depreciação total? E qual a depreciação anual?
    b) Expresse a depreciação D como função do tempo t em anos.
    c) Qual o valor da máquina para t = 1, 2, 3 e 10 anos?
    d) Como seria a expressão que dá o valor V da máquina em função do tempo t?

2. Um professor de matemática propõe a sua turma de 40 alunos um exercício-desafio, comprometendo-se a dividir um prêmio de R\$120,00 entre os acertadores. Seja x o número de acertadores (x = 1, 2, 3,..., 40) e y a quantia recebida por cada acertador (em reais). Responda:
    a) Y é função de x? Por quê?
    b) Quais os valores de y para x = 3, x = 8, x = 20 e x = 25?
    c) Qual o valor mínimo que y assume?
    d) Qual é a lei de correspondência entre y e x?

3. O preço do serviço executado por um pintor consiste em uma taxa fixa, que é de R\$25,00, e mais uma quantia que depende da área pintada. A tabela seguinte mostra alguns orçamentos apresentados por esse pintor:

Ärea pintada (em m^2)	Total a pagar (em reais)
5	35
10	45
15	55
20	65
30	85
40	105
80	185

Observando a tabela, responda:

a) Podemos dizer que o total a pagar ***y*** pela pintura é função da área a ser pintada ***x***? Justifique.
b) Como se exprime, matematicamente, o total a pagar y pela pintura de x metros quadrados?
c) Qual é o preço cobrado pela pintura de uma área de $120m^2$?
d) Qual é a área máxima que pode ser pintada dispondo-se de R\$525,00?

4. Considere a tabela para o cálculo do imposto de renda a ser pago pelos contribuintes em certo mês de 2001.

x Renda líquida em R$	**i** Alíquota %	**D** Parcela a deduzir do imposto em reais
Até 900,00	-	-
Acima de 900,00 até 1.800,00	15,0	135,00
Acima de 1.800,00	27,5	n

Considerando x como a renda líquida de um contribuinte, o imposto a pagar é função de x. O contribuinte deve multiplicar a sua renda líquida pelo valor da alíquota e subtrair do resultado a parcela a deduzir. Além disso, tal função deve ser contínua, para não prejudicar nem beneficiar contribuintes cuja renda líquida se situe em faixas distintas da tabela. Note, por exemplo, que ao passar da primeira faixa (isentos) para a segunda (alíquota de 15%), a parcela a deduzir (135,00) não permite saltos no gráfico.

(a) Utilize os valores de i e D da tabela e dê a expressão da função imposto a pagar y, relativa a uma renda x, em cada faixa da tabela;
(b) Determine o valor de **n** da tabela para que a função seja contínua;
(c) Construa o gráfico da função.