Função Exponencial

A função exponencial é toda função real que pode ser expressa pela forma $y = f(x) = b^x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$.

Sendo:

1) D = R, ou seja, para todo $x \in \mathbf{R}$ existe a imagem b^x
2) Os interceptos da função:
   - Interseção com eixo y :

     Fazendo $x = 0$ temos que $y = b^0 = 1$

     Portanto o ponto é (0, 1)

   - Interseção com eixo x :

     Fazendo $y = 0$ temos que $0 = b^x$ (não existe)

     Portanto a função exponencial não intercepta o eixo x.

3) Gráfico da função:

   Iremos construir os gráficos das funções $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e observar algumas propriedades:

1º) caso : $\mathbf{y = 2^x}$

x	$\mathbf{y = 2^x}$	*Pontos*
-3	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$\mathbf{(-3, \frac{1}{8})}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$	$\mathbf{(-2, \frac{1}{4})}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$	$\mathbf{(-1, \frac{1}{2})}$
0	$2^0 = 1$	**(0,1)**
1	$2^1 = 2$	**(1,2)**
2	$2^2 = 4$	**(2,4)**
3	$2^3 = 8$	**(3,8)**

2º) caso : **y =** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$	*Pontos*
-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = (2)^{3} = 8$	**(-3,8)**
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2)^{2} = 4$	**(-2,4)**
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (2)^{1} = 2$	**(-1,2)**
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$	**(0,1)**
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$	**(1,** $\frac{1}{2}$ **)**
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$	**(2,** $\frac{1}{4}$ **)**
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$	**(3,** $\frac{1}{8}$ **)**

Observando os gráficos podemos dizer que:

(A) Ambas funções possuem o mesmo ponto de interseção com o eixo y: (0,1)

(B) Se b > 1 , então a função exponencial é crescente;

Exemplos: $y = 2^x$, $y = 1{,}5^x$, $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

(C) Se 0 < b < 1, então a função exponencial é decrescente;

Exemplos: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 0{,}25^x$, $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

(D) Para todo valor de b > 0 e todo $x \in$ **R,** o gráfico da função exponencial ($y = b^x$) estará sempre situada acima do eixo x, portanto o conjunto imagem desta função é $Im = R^*_+$.

Importante:

Nas aplicações da função exponencial, é muito comum escrever a função assim:

$$f(x) = K.a^x, \text{ com } K \neq 0,\ b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

A única diferença existente é o ponto de interseção com o eixo y, onde para x = 0, $y = K.b^0 = K.1 = K$, ou seja (0 , K).

Logaritmo e Função Logarítmica

DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

DEFINIÇÃO

$$\log_b^a = c \Leftrightarrow b^c = a, \text{com } a > 0, b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

Sendo que o número **a** recebe o nome de logaritmando, **b** é a base e **c** é o logaritmo de **a** na base **b**.

Exemplos:
Calcule os seguintes logaritmos:
a) $\log_4 16$

solução: $\log_4 16 = x$, então:
$4^x = 16$
$4^x = 4^2$ (comparando)
$x = 2$
Resp.: $\log_4 16 = 2$

b) $\log_3 3$
solução: $\log_3 3 = x$, então:
$3^x = 3$
$3^x = 3^1$ (comparando)
$x = 1$
Resp.: $\log_3 3 = 1$

> Obs.:
> De forma geral:
> $\log_b b = 1$
> com $b > 0$ e $b \neq 1$

c) $\log_4 1$
solução: $\log_4 1 = x$, então:
$4^x = 1$
$4^x = 4^0$ (comparando)
$x = 0$
Resp.: $\log_4 1 = 0$

> Obs.:
> De forma geral:
> $\log_b 1 = 0$
> com $b > 0$ e $b \neq 1$

d) $\log_{10} 0,1$
solução: $\log_{10} 0,1 = x$, então:
$10^x = 0,1$
$10^x = \frac{1}{10}$
$10^x = 10^{-1}$ (comparando)
$x = -1$
Resp.: $\log_{10} 0,1 = -1$

PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS:

$$(\text{P1})\ \text{Logarítmo de um produto}: \log_c^{(a.b)} = \log_c^a + \log_c^b$$

$$(\text{P2})\ \text{Logarítimo de um quociente}: \log_c^{\left(\frac{a}{b}\right)} = \log_c^a - \log_c^b$$

$$(\text{P3})\ \text{Logarítmo da potência}: \log_c^{a^n} = n.\log_c^a$$

$$\text{Obs.}:\ \text{Mudança de base}: \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

Função Logarítmica

A função logarítmica é toda função de R^*_+ em R, que pode ser expressa pela forma $y = f(x) = \log_b x$ ou $f(x) = \log_b x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$.

Logo:

1) $D = R^*_+$, ou seja todo $x \in R^*_+$ existe a imagem $\log_b x$.

2) Os interceptos da função:
   - Interseção com eixo y :
     Fazendo $x = 0$ temos que $y = \log_b 0$ (não existe), pois $x = 0 \notin D = R^*_+$
   - Interseção com eixo x :
     Fazendo $y = 0$ temos que $0 = \log_b x \Leftrightarrow b^0 = x \Leftrightarrow 1 = x$

     Portanto, o ponto de interseção com o eixo x é (1,0).

3) Gráfico da função:

   Iremos construir os gráficos das funções $y = \log_2 x$ e $y = \log_{1/2} x$ e observar algumas propriedades:

   1º caso: $\mathbf{y = \log_2 x}$, com $\mathbf{D = R^*_+}$.

Lembrando que:
$\log_b b^n = n$, com $b > 0$ e $b \neq 1$

x	**$y = \log_2 x$**	*Pontos*
$\frac{1}{8}$	Sabendo que $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$ então $y = \log_2 2^{-3} = -3$	**($\frac{1}{8}$,-3)**
$\frac{1}{4}$	Sabendo que $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$ então $y = \log_2 2^{-2} = -2$	**($\frac{1}{4}$,-2)**
$\frac{1}{2}$	Sabendo que $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 2^{-1}$ então $y = \log_2 2^{-1} = -1$	**($\frac{1}{2}$,-1)**
1	Sabendo que $1 = 2^0$ então $y = \log_2 2^0 = 0$	**(1,0)**
2	Sabendo que $2 = 2^1$ então $y = \log_2 2^1 = 1$	**(2,1)**
4	Sabendo que $4 = 2^2$ então $y = \log_2 2^2 = 2$	**(4,2)**
8	Sabendo que $8 = 2^3$ então $y = \log_2 2^3 = 3$	**(8,3)**

2º caso: **y = log$_{1/2}$x**, com **D = R*$_+$**.

x	**y = log$_{1/2}$x**	*Pontos*
$\frac{1}{8}$	Sabendo que $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$ então $y=\log_{1/2}(1/2)^3=3$	**($\frac{1}{8}$,3)**
$\frac{1}{4}$	Sabendo que $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ então $y=\log_{1/2}(1/2)^2=2$	**($\frac{1}{4}$,2)**
$\frac{1}{2}$	Sabendo que $\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^1$ então $y=\log_{1/2}(1/2)^1=1$	**($\frac{1}{2}$,1)**
1	Sabendo que $1=\left(\frac{1}{2}\right)^0$ então $y=\log_{1/2}(1/2)^0=0$	**(1,0)**
2	Sabendo que $2=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ então $y=\log_{1/2}(1/2)^{-1}=-1$	**(2,-1)**
4	Sabendo que $4=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ então $y=\log_{1/2}(1/2)^{-2}=-2$	**(4,-2)**
8	Sabendo que $8=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ então $y=\log_{1/2}(1/2)^{-3}=-3$	**(8,-3)**

Observando os gráficos podemos dizer que:

(A) Ambas as funções possuem o mesmo ponto de interseção com o eixo x, (1,0).

(B) Se $b > 1$, então a função logarítmica é crescente;
Exemplos: $\mathbf{y = \log_{2}x}$, $\mathbf{y = \log_{1,5}x}$, $\mathbf{y = \log_{5/2}x}$

(C) Se $0 < b < 1$, então a função logarítmica é decrescente;
Exemplos: $\mathbf{y = \log_{1/2}x}$, $\mathbf{y = \log_{0,3}x}$, $\mathbf{y = \log_{2/5}x}$

(D) Para todo valor de $\mathbf{b > 0}$ e $\mathbf{b \neq 1}$ e todo $\mathbf{x \in R}$, o gráfico da função logarítmica ($y = \log_{b}x$), estará sempre situada a direita do eixo y.

(E) O conjunto imagem da função logarítmica é Im = **R**.