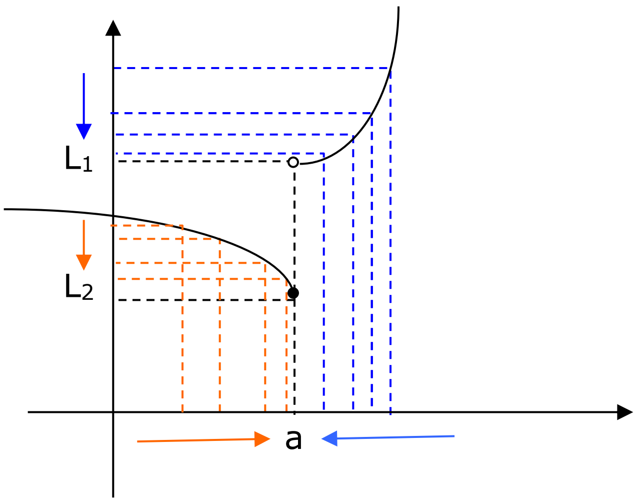
Limite de uma função

Noção Intuitiva

O nosso objetivo é desenvolver uma linguagem que nos permita descrever o comportamento dos valores de uma função nas proximidades de um ponto.

Dada a função y = f(x), conforme ilustrado no gráfico abaixo, e seja "**a**" a abscissa do ponto.
Verifique o que acontece quando o valor de x se aproxima de **a.**



Quando **x** se aproxima de **a** pela direita (representamos por: $x \to a^+$) verificamos que a função se aproxima do valor L_1. Então podemos dizer que: $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$, $\mathbf{L_1}$ é o limite lateral direito da função no ponto de abscissa x = a

Quando **x** se aproxima de **a** pela esquerda (representamos por: $x \to a^-$) verificamos que a função se aproxima do valor L_2. Então podemos dizer que: $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$, $\mathbf{L_2}$ é o limite lateral esquerdo da função no ponto de abscissa x = a

Observamos no gráfico, que quando "**x**" assume valores que se aproximam de "**a**" pela direita (**x > a**), os correspondentes valores da função se aproximam do valor "$\mathbf{L_1}$". Para descrever esse comportamento dizemos que o limite lateral direito da função no ponto de abscissa "**a**" é "$\mathbf{L_1}$". Analogamente, quando "**x**" assume valores que se aproximam de "**a**" pela esquerda (**x < a**), os correspondentes valores da função se aproximam do valor "$\mathbf{L_2}$" e este é chamado de limite lateral esquerdo da função no ponto de abscissa "**a**" .

Exemplo

Calcular os limites laterais da função $y = \begin{cases} 2x+1, \text{se } x \geq 1 \\ -x^2, \text{se } x < 1 \end{cases}$, no ponto de abscissa x = 1.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x+1) = 2(1)+1 = 2+1 = 3$$

3 é o limite lateral direito da função no ponto de abscissa x = 1

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-x^2) = -(1)^2 = -1$$

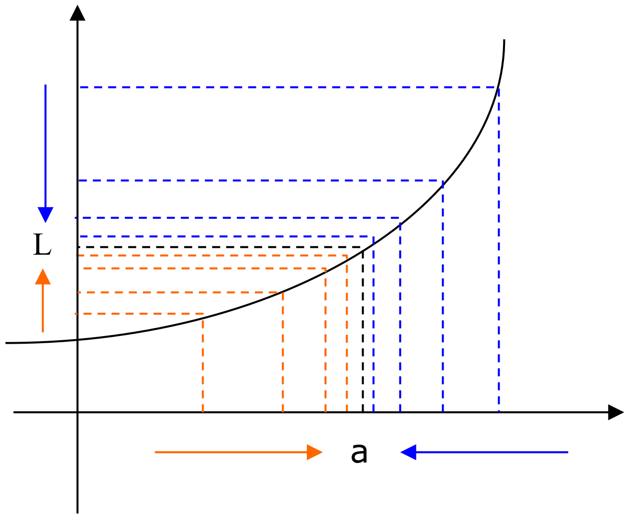
-1 é o limite lateral esquerdo da função no ponto de abscissa x = 1

Exercício

Calcular os limites laterais da função $y = \begin{cases} x^2, \text{se } x \geq 2 \\ 5-2x, \text{se } x < 2 \end{cases}$, no ponto de abscissa x = 2.

FUNÇÃO CONTÍNUA

Vejamos agora a função y = f(x), conforme ilustrado no gráfico abaixo, e seja "**a**" a abscissa do ponto.



Quando **x** se aproxima de **a** pela direita (representamos por: $x \to a^+$) verificamos que a função se aproxima do valor L. Então podemos dizer que: $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, **L** é o limite lateral direito da função no ponto de abscissa x = a

Quando **x** se aproxima de **a** pela esquerda (representamos por: $x \to a^-$) verificamos que a função se aproxima do valor L. Então podemos dizer que: $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, **L** é o limite lateral esquerdo da função no ponto de abscissa x = a

Como neste caso os limites laterais, à direita e à esquerda, convergiram para o mesmo resultado L, podemos então dizer que o limite da função quando **x** se aproxima de **a,** existe, é único, e igual a L (Teorema da unicidade do Limite).

$$Se \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se **a** pertencer ao domínio desta função, então podemos afirmar que a função é contínua neste ponto, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = L$$

REGRA PRÁTICA:

Para determinar o valor do limite de uma função num dado ponto, basta substituir o valor de x da função pelo número ao qual se tende. Se o resultado dessa operação for um número determinado e finito, então a função é contínua neste ponto e o valor obtido será o valor limite da função.

Exemplos:

Verificar, usando limites, se a função é contínua no ponto em cada caso:

a) $f(x) = x^2 + 1$ e o ponto de abscissa x = 2

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 + 1) = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5,$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

e $f(2) = (2)^2 + 1 = 5$

Logo a função é contínua em x = 2.

b) $f(x) = x^2$ e o ponto de abscissa x = 2

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2) = (2)^2 = 4,$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2) = (2)^2 = 4$$

E $f(2) = (2)^2 = 4$

Logo a função é contínua em x = 2.

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ e o ponto de abscissa x = 2

Atenção: O denominador da função não pode ser zero, então D = R – {2}

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(2)^2-4}{(2)-2} = \frac{0}{0}(F.I.)$$ (Forma Indeterminada)

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}(x+2) = (2)+2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(2)^2-4}{(2)-2} = \frac{0}{0}(F.I.)$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}(x+2) = (2)+2 = 4$$ (Forma Indeterminada)

Neste caso embora os limites laterais sejam iguais a quatro, a função não está definida para x = 2, logo ela não é contínua no ponto.

IMPORTANTE:

É importante lembrar que no cálculo do $\lim_{x\to a} f(x)$, o que interessa é o comportamento da função f(x) quando **x** se aproxima de **a** e não o que acontece com a função em **x = a**.

ATENÇÃO: Limite de uma constante: $\lim_{x\to a} k = k$

Exemplo:

$\lim_{x\to 3} 5 = 5$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

1. Calcule os seguintes limites:

$a) \lim_{x\to -1}(x^3 - 2x^2 - 4x + 3) =$

$b) \lim_{x\to -1} \frac{3x^2 - 5x + 4}{2x+1} =$

$$c)\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^3-3x^2-2x-5}{2x^2-9x+2}\right)^2=$$

$$d)\lim_{x\to -1}\sqrt{\frac{2x^2+3x-4}{5x-4}}=$$

$$e)\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{\frac{3x^3-5x^2-x+2}{4x+3}}=$$

$$f)\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2x^2+3x+2}}{6-4x}=$$

2. Calcule os limites:

Exemplo: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{(2)^2 - 4}{(2)^2 - 2(2)} = \frac{0}{0}$ (F. I.)

$\frac{0}{0}$ é uma indeterminação, como os polinômios **$x^2 - 4$** e **$x^2 - 2x$** anulam-se para x = 2, portanto pelo *Teorema de D'Alembert*, são divisíveis por **$x - 2$**, logo:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \frac{(x+2)}{x}$$

Considerando que no cálculo do limite de uma função, quando x tende a **a**, interessa o comportamento da função quando x se aproxima de **a** e não o que ocorre com a função quando x = a, concluímos que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)}{x} = 2$$

$a) \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$

$b) \lim\limits_{x \to -2} \frac{4 - x^2}{x + 2} =$

$c) \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} =$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} =$

$$e)\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}=$$

$$f)\lim_{x\to -\frac{3}{2}}\frac{6x^2+11x+3}{2x^2-5x-12}=$$

3.. Calcule os limites:

Exemplo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{0}{0}\quad \textit{(forma indeterminada)}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da fração pelo "conjugado" do numerador, temos:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(\sqrt{x})^2-(1)^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

e então:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

$a)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=$

$b)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}=$

$c)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=$

$$d)\lim_{x\to 3}\frac{2-\sqrt{x+1}}{x^2-9}=$$

$$e)\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}=$$

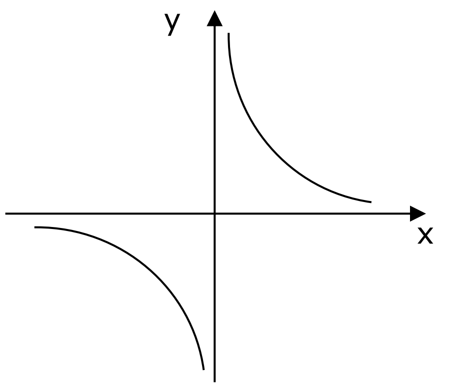
LIMITES NO INFINITO E LIMITES INFINITOS

Limites dos tipos $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ são denominados **<u>LIMITES NO INFINITO</u>**. A notação simbólica **$x\to+\infty$,** que se lê: **x tendendo a mais infinito**, é usada para traduzir a idéia de que ***x vai se tornando cada vez maior e tão grande quanto se possa imaginar***. Por outro lado, a notação **$x\to-\infty$,** que se lê: **x tendendo a menos infinito** significa que ***x vai se tornando cada vez menor que qualquer numero negativo que se possa imaginar.***

Por um **<u>LIMITE INFINITO</u>**, entendemos um limite da forma $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), onde **$x\to p$,** pode ser substituído por **$x\to p_+$, $x\to p_-$** , **$x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$.** De forma intuitiva, a notação simbólica $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$ traduz a seguinte idéia: ***para x tendendo a p, o valor de f(x) vai se tornando cada vez maior e ultrapassando o valor de qualquer número positivo, por maior que seja tal número.***

Exemplo 1

Seja a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, com $x \neq 0$.



Calcule:

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$

Solução:

x	10	100	1000	100.000	1.000.000	$x\to+\infty$
1/x	0,1	0,01	0,001	0,00001	0,000001	$1/x\to 0$

Quando o denominador x vai se tornando cada vez maior, o valor da fração 1/x vai se aproximando cada vez mais de zero. Ou seja, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

Raciocinando intuitivamente como no exemplo 1, teremos $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ e, genericamente, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, onde n é um número positivo qualquer.

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$

x	1	0,1=1/10	0,01=1/100	0,001=1/1000	0,000001=1/1.000.000	x→0
1/x	1	10	100	1000	1.000.000	1/x→ +∞

Assim, $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0_+} = +\infty$

Exemplo 2

Calcule

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1000}{x^5}$

Sabendo que $\lim\limits_{x \to p} k.f(x) = k.\lim\limits_{x \to p} f(x) = k.L$, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1000}{x^5} = 1000.\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^5} = 1000.0 = 0$$

Assim, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1000}{x^5} = 0$. Quando x vai se tornando cada vez maior, $1000/x^5$ vai ficando cada vez mais próximo de zero.

Logo, podemos concluir que: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{k}{x^n} = 0$

Operando com o símbolo ∞.

(∞ = + ∞ e L é um número real)

1. **$\infty + \infty = \infty$**
2. **$-\infty - \infty = -\infty$**
3. **Se $L > 0$, $L \cdot \infty = \infty$**
4. **Se $L < 0$, $L \cdot \infty = -\infty$**
5. **Se $L > 0$, $L \cdot (-\infty) = -\infty$**
6. **Se $L < 0$, $L \cdot (-\infty) = \infty$**
7. **$L + \infty = \infty$**
8. **$L - \infty = -\infty$**
9. **$\infty \cdot \infty = \infty$**
10. **$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$**
11. **$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$**

Indeterminações:

$\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$

Exemplo 3

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 5x + 3)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 5x + 3) = \infty - \infty + 3 = \infty - \infty$ (Forma Indeterminada)

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 5x + 3) = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{x}^2 \left(\frac{x^2}{\mathrm{x}^2} - \frac{5x}{\mathrm{x}^2} + \frac{3}{\mathrm{x}^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{x}^2 \left(1 - \frac{5}{\mathrm{x}} + \frac{3}{\mathrm{x}^2}\right) =$$

$$\left[\lim_{x \to +\infty} \mathrm{x}^2\right] \left[\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{5}{\mathrm{x}} + \frac{3}{\mathrm{x}^2}\right)\right] = \infty.[1 - 0 + 0] = \infty.1 = \infty$$

Dica: Para calcular um limite no infinito, o truque, na maioria das vezes é colocar a mais alta potência de x em evidência ou, então raciocinar com os valores das potências.

Exemplo 4

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+3x-4}{x^2+5}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+3x-4}{x^2+5} = \frac{\infty}{\infty} \text{ que é uma indeterminação}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+3x-4}{x^2+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{3x}{x^3}-\dfrac{4}{x^3}\right)}{x^2\left(\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} x.\frac{\left(1+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}\right)}{\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)} = \left[\lim_{x\to+\infty} x\right]\left[\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}\right)}{\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)}\right] =$$

$$\infty.\frac{1+0-0}{1+0} = \infty.1 = \infty$$

Exemplo 5

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x-1}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x-1} = \frac{\infty}{\infty}, \text{ que é uma indeterminação}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\dfrac{2x}{x}+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(\dfrac{x}{x}-\dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{2+0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$$

Exercícios propostos

1. Calcular:

$a)\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 =$

$b)\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 =$

$c)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) =$

$d)\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 =$

$e)\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 =$

$f)\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 =$

$g)\ \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 =$

$h)\ \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^3 + 4x^2 + 3) =$

$i)\ \lim\limits_{x \to -\infty} (-4x^5 - 2x^3 + x + 3) =$

$j)\ \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-4x^2+3x+8)=$

$k)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-5x+3}{2x^2-x}=$

$l)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-4x^3+1}{4x^2-5x+3}=$

$m)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-3}{3x^5+4x+1}=$

$n) \lim_{x \to \infty} \left(3x + \frac{4}{x^2} \right) =$

$o) \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-5} =$

$p) \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-5} =$

$q) \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+4}{x-5} =$

2. Calcular:

$a) \lim_{x \to 1+} \frac{4}{x-1} =$

$b) \lim_{x \to 1-} \frac{4}{x-1} =$

$c) \lim_{x \to 2+} \frac{x}{x^2-4} =$

$d)\ \lim_{x \to 2-} \frac{x}{x^2 - 4} =$

$e)\ \lim_{x \to 2+} \frac{x}{2 - x} =$

$f)\ \lim_{x \to 2-} \frac{x + 2}{2 - x} =$

$g)\ \lim_{x \to -3-} \frac{2x - 1}{x + 3} =$

$h)\ \lim_{x \to -3+} \frac{2x - 1}{x + 3} =$

$i)\ \lim_{x \to 2+} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4} =$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Calcule:

$a) \lim_{x \to -1} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 5x - 4}{x^2 - 3x + 1} \right) =$

$b) \lim_{x \to -2} \left(\frac{8 + x^3}{x^2 - 4} \right) =$

$c) \lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - 6x + 9}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \right) =$

$d) \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2 - 3x + 4x^2 - 5x^3}{x^2 + 5x + 7} \right) =$

e) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^4 + x^2 + 4}{x^6 - x^7 + 8x^8} \right) =$

f) $\lim_{x \to -4_+} \left(\frac{5 - x}{x + 4} \right) =$

g) $\lim_{x \to -3_-} \left(\frac{2 - x}{x^2 - 9} \right) =$

Respostas: a) −7/5; b) −3; c) 0 ; d) -∞; e) 0 ; f) +∞; g) +∞