

数字信号处理中的 几个关键概念

主讲人 宋辉

清华大学电子工程系 博士
滴滴AI Labs 语音技术部



 2.1 数字信号及其基本运算

 2.2 采样定理

 2.3 时频分析与傅里叶变换

 2.4 作业



2.1 数字信号及其基本运算

信号是信息的物理载体，信息是信号的具体内容。

一维信号 (t)

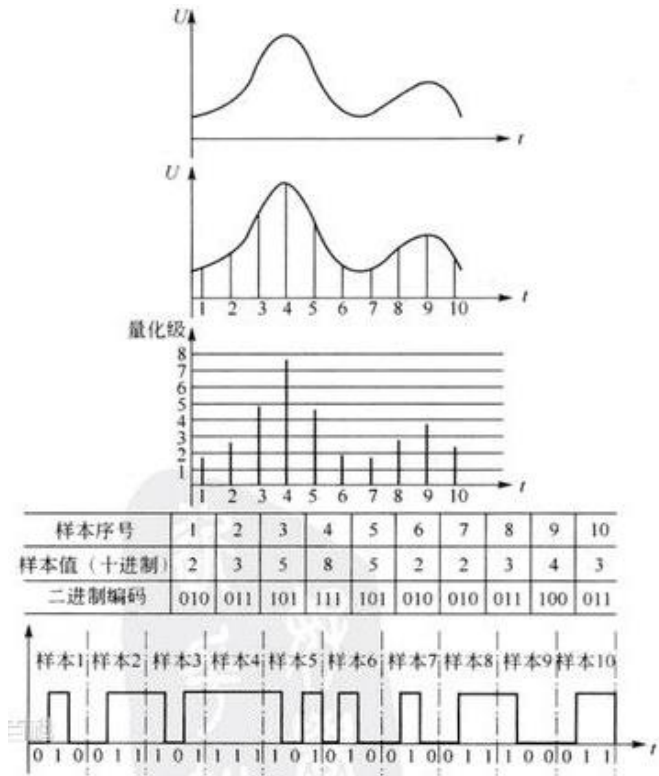
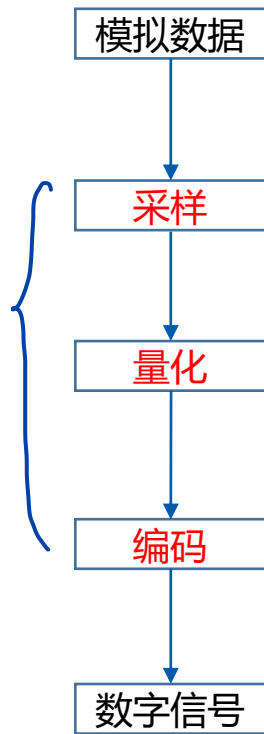
连续时间信号：在连续时间范围内定义的信号，信号的幅度可以是连续的（模拟信号），也可以是离散的。交通灯信号

离散时间信号：时间为离散变量的信号，即独立变量时间被量化了，而幅度仍是连续变化的。采样信号

数字信号：时间离散而幅度量化的信号。
——
→ 将离散时间信号进行量化
幅度



由模拟信号到数字信号



还有 .wav 格式

其实就是上述三部分

Pulse Code Modulation

pcm 格式



数字信号的基本运算

$$x(t) \xrightarrow{x(nT)} \text{抽样} x(n)$$



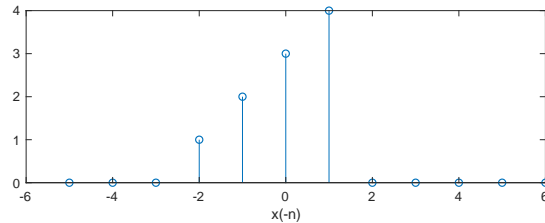
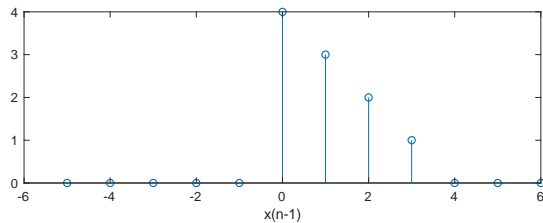
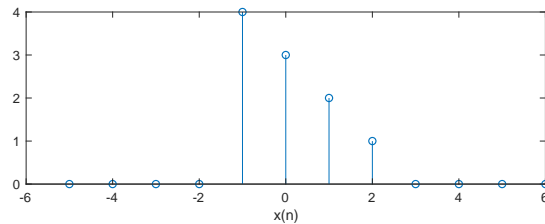
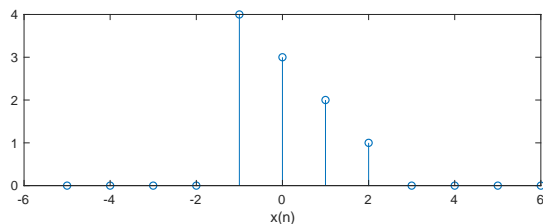
移位

设某一序列 $x(n]$ ，当 $m > 0$ 时， $x(n-m)$ 表示序列 $x(n]$ 逐项依次延时（右移） m 位。



翻褶

设某一序列 $x(n]$ ，则 $x(-n)$ 是以 $n=0$ 的纵轴为对称轴将 $x(n]$ 加以翻褶。





数字信号的基本运算



和

$$z(n) = x(n) + y(n)$$



积

$$z(n) = x(n) \cdot y(n)$$



累加

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$



差分

$$y(n) = x(n) - x(n-1]$$
$$\sum_{k=-\infty}^n x(k) - \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k)$$

Q: 一阶差分运算具有高通滤波的效果, 为什么?



数字信号的基本运算



尺度变换

对于序列 $x(n]$ ，形如 $x(mn)$ 或者 $x(\frac{n}{m})$ (m 为正整数) 的序列为 $x(n)$ 的尺度变换序列。

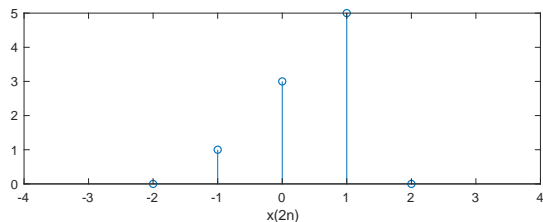
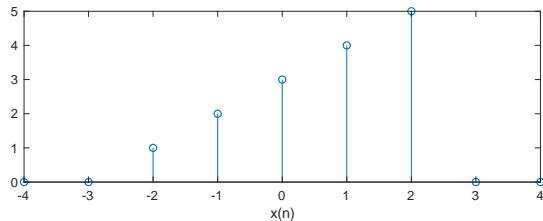
以 $m=2$ 为例， $x(2n)$ 是以低一倍的抽样频率从 $x(n)$ 中每隔两点取一点，这种运算称为抽取，通常表示为 $\boxed{\downarrow M}$ 。类似的， $x(\frac{n}{2})$ 称为插值。

插值后接 低通滤波

平滑滤波

降采样

例如 16k \rightarrow 8k
在降采样前需抗混叠滤波





数字信号的基本运算

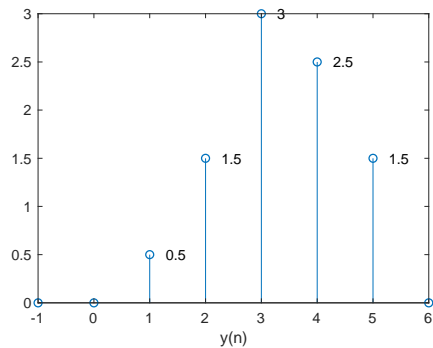
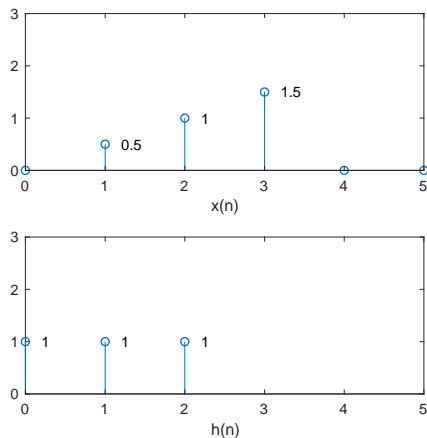


线性卷积 (linear convolution)

线性卷积后的长度
 $N_1 + N_2 - 1$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n)$$

由卷积的定义可知，卷积在图形表示上可分为四步：翻褶、移位、相乘、相加。



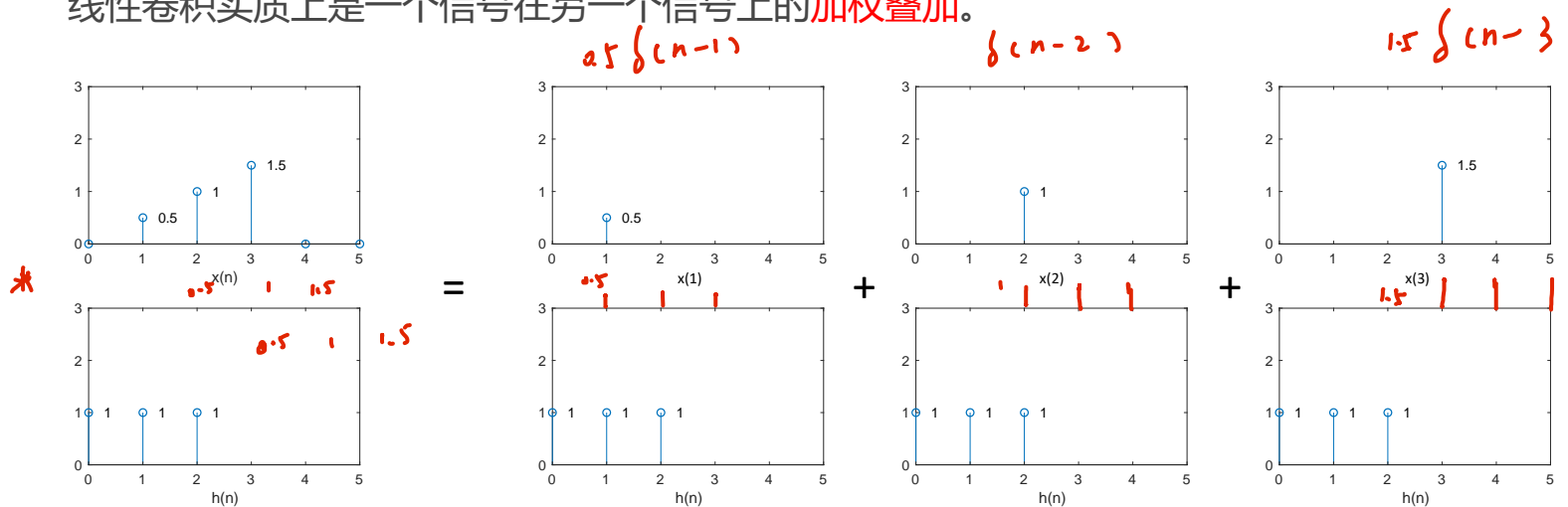
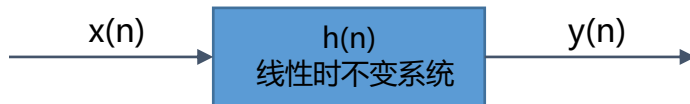


数字信号的基本运算



线性卷积的另一种理解

线性卷积实质上是一个信号在另一个信号上的**加权叠加**。



对于线性时不变系统，如果已知系统的单位冲激响应，那么将单位冲激响应与输入信号求卷积，就得到了输出信号。

0 0.5 1.5 3 2.5 1.5
0 1 2 3 4 5



数字信号的基本运算



线性卷积的应用：模拟远场数据



near-field
speech

*



room impulse
response

=



simulated farfield
speech



数字信号的基本运算



圆周移位 (circular shift)

$x(n)$ 有限长

$$x_m(n) = x((n+m))_N \underline{R_N(n)} \rightarrow \text{取主值}$$

其中, $x((n+m))_N$ 表示 $x(n)$ 经过周期 (N) 延拓后的序列, 再移位 m 。

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{other } n \end{cases} \quad \text{延拓窗}$$



数字信号的基本运算



圆周卷积 (circular convolution)

如果 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是长度为 N 的有限长序列 ($0 \leq n \leq N-1$)，并且

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k)$$

$$DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

$$Y(k) = X_1(k)X_2(k)$$

频域相乘，时域圆周卷积

则

$$\begin{aligned} y(n) = IDFT[Y(k)] &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N \right] R_N(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m)x_1((n-m))_N \right] R_N(n) \end{aligned}$$

定义为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的圆周卷积。

注意：与线性卷积相比，圆周卷积多了**周期延拓**和**取主值序列**两个步骤。因此必须指定圆周卷积的点数 N 。



圆周卷积和线性卷积的关系

↓
可通过傅里叶快速计算

→ 但更关注线性

因此找关系

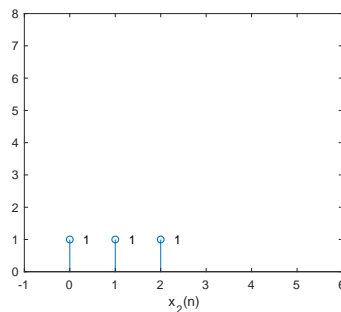
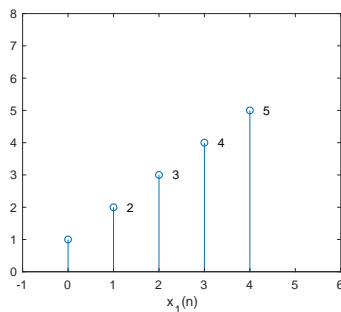
圆周卷积

$$\begin{aligned} y(n) &= IDFT[Y(k)] = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N \right] R_N(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m)x_1((n-m))_N \right] R_N(n) \end{aligned}$$

线性卷积

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n)$$

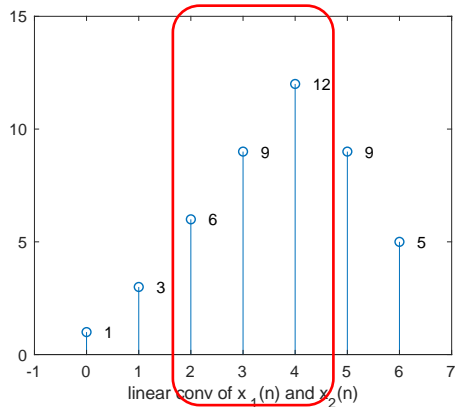
给定两个有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ ，他们的长度分别为： $N_1 = 5$ ， $N_2 = 3$ 。相应的取值如下图，我们重点研究 $0 \leq n \leq N_1 - 1$ 这个区间内，线性卷积和圆周卷积的关系。



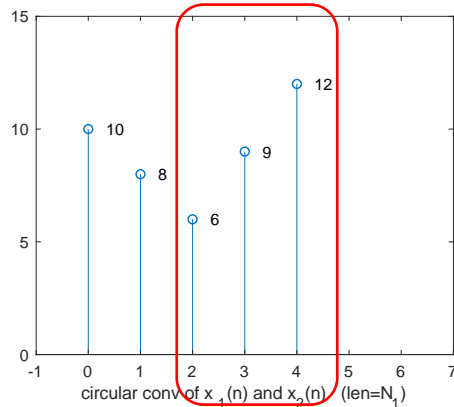


圆周卷积和线性卷积的关系

线性卷积结果



圆周卷积结果



观察：圆周卷积结果的后一部分与线性卷积的结果

一般的，如果两个有限长序列的长度为 N_1 和 N_2 ，且满足 $N_1 \geq N_2$ ，则圆周卷积的后 $N_1 - N_2 + 1$ 个点，与线性卷积的结果一致。

N_2 完全在 N_1 内



数字信号的基本运算

convolution : $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)$

correlation : $r_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)y^*(m-n)$



线性相关 (linear correlation)

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n-m)$$

请大家思考: 线性相关定义的形式与线性卷积的相似与不同?

不满足交换律



圆周相关 (circular correlation)

如果: $R_{xy}(k) = X(k)Y^*(k)$

则 $r_{xy}(m) = IDFT[R_{xy}(k)] = \sum_{n=0}^{N-1} y^*(n)x((n+m))_N R_N(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-m))_N R_N(m)$

定义为 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的圆周相关。



圆周相关和线性相关的关系

线性相关和圆周相关的关系，大家也可以用上面的方法尝试验证。

这里直接给出结论：

一般的，如果两个有限长序列的长度为 N_1 和 N_2 ，且满足 $N_1 \geq N_2$ ，则有

圆周相关的^前 $N_1 - N_2 + 1$ 个点，与线性相关的结果一致。

因为少了翻转操作



2.2 采样定理 (Nyquist-Shannon sampling theorem)

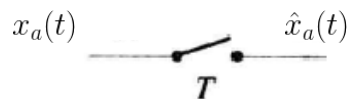
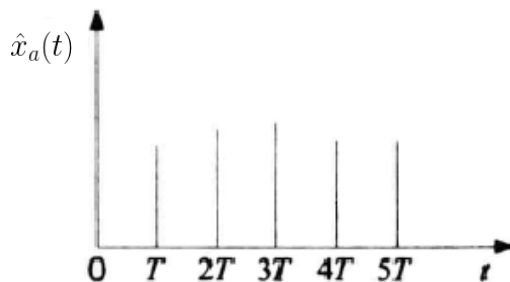
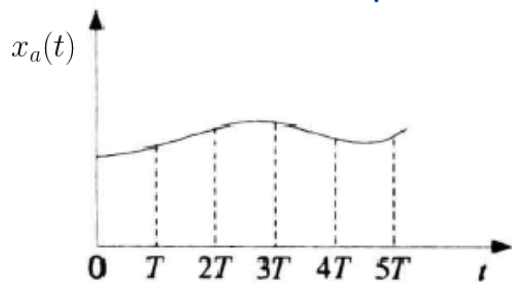


模拟信号的采样:

从模拟到

离散时间信号

频谱如何变





2.2 采样定理 (Nyquist-Shannon sampling theorem)



采样：利用周期性冲激函数序列，从连续信号 $x_a(t)$ 中抽取一系列的离散值，得到采样信号，即离散时间信号 $\hat{x}_a(t)$ 。

冲激函数序列：

$$\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad (2.1)$$

则，采样信号：

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot \delta_T(t) \quad (2.2)$$

将(2.1)代入(2.2)，得：

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - mT) \quad (2.3)$$

由于 $\delta(t - mT)$ 只在 $t = mT$ 处不为零，因此：

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) \delta(t - mT) \quad (2.4)$$



2.2 采样定理



采样后信号频谱的变化

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot \delta_T(t)$$

等式两端取DTFT

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} [\Delta_T(j\Omega) * X_a(j\Omega)] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\Omega - k\Omega_s)) \quad (2.5)$$

其中 $\Delta_T(j\Omega) = DTFT[\delta_T(t)]$

① 采样导致了周期
② 频域采样也会导致时域周期延拓

结论：频谱产生了**周期延拓**，周期为 Ω_s 。

因此，只要各延拓分量与原频谱分量不发生频率交叠，则可以恢复原信号。



2.2 采样定理



公式推导

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} [\Delta_T(j\Omega) * X_a(j\Omega)] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\Omega - k\Omega_s))$$

其中 $\Delta_T(j\Omega) = DTFT[\delta_T(t)]$ 由于 $\delta_T(t)$ 是周期信号 (周期为T) , 则可以表示成傅里叶级数

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\Omega_s t}$$

其中 $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 为采样频率,

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{T} \int_T \delta_T(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_T \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) e^{-jk\Omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_T \delta(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

因为在一个积分区间T $[-T/2, T/2]$ 内, 只有一个冲激函数。



2.2 采样定理



公式推导

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} [\Delta_T(j\Omega) * X_a(j\Omega)] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\Omega - k\Omega_s))$$

$$\Delta_T(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$



2.2 采样定理



奈奎斯特采样定理：

要想采样后能够无失真的还原出原信号，则采样频率必须大于两倍信号谱的最高频率。

$$f_s > 2f_h$$

16kHz语音如何降采样到8kHz?



空间“采样定理”

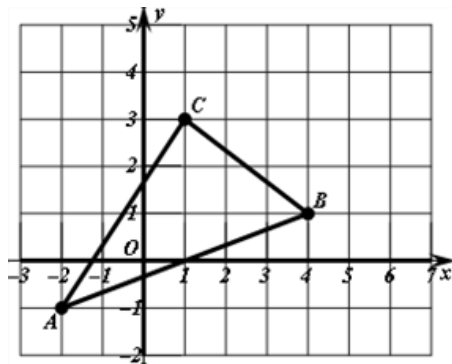
	频域	空域
采样	冲激函数序列	麦克风
采样率	f_s	d
信号的最高频率	f_h	λ_{min}
防混叠条件	$f_s > 2f_h$	$d < \lambda_{min}/2$



2.3 时频分析与傅里叶变换



变换是一种常用的数学工具



$$A(-2, -1) \quad -2\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y$$

$$B(4, 1) \quad 4\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$$

$$C(1, 3) \quad \mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y$$

其中 \mathbf{e}_x 和 \mathbf{e}_y 构成标准正交基，满足如下条件：

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_x\| = \|\mathbf{e}_y\| = 1 \\ \langle \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y \rangle = 0 \end{cases}$$

前面的系数表示平面中的点在这个基向量方向上有多少个单位长度。



2.3 时频分析与傅里叶变换



利用正弦波模拟方波

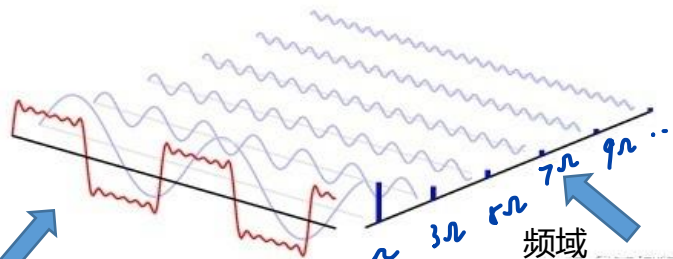


$N = 0$

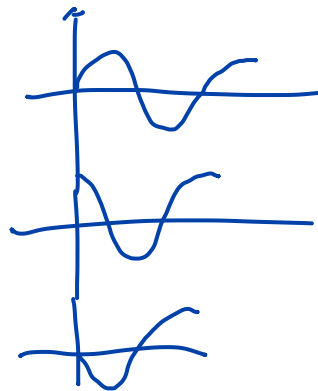
何为“频域”？

- ① $n, 3n, \dots$
- ② 幅度
- ③ 相位

时域



频域





2.3 时频分析与傅里叶变换



傅里叶级数 (Fourier Series)

如果 $x(t)$ 是一个周期为 T_0 的周期性连续函数，则 $x(t)$ 可展开成傅里叶级数：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$$

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

解读： $\Omega_0 = 2\pi F = \frac{2\pi}{T_0}$ 傅里叶级数系数的计算，实质上是通过内积的方式，“抽取”对应频率分量的系数。

$$x(t) e^{-jk\Omega_0 t} \begin{cases} k\Omega_0 \rightarrow 1 \\ \text{其他} \rightarrow 0 \end{cases}$$



2.3 时频分析与傅里叶变换



连续傅里叶变换 (Fourier Transform)

连续非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换可以表示为：

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

解读：这应该是大家在“信号与系统”里学到的第一个傅里叶变换公式。它仍然是通过内积的方式，“抽取”对应频率分量的系数。

与傅里叶级数不同的是，由于时域信号非周期，因此频域中是连续谱。



2.3 时频分析与傅里叶变换



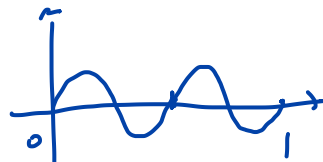
离散时间傅里叶变换 (Discrete Time Fourier Transform)

离散非周期信号 $x(n)$ 的 DTFT 可以表示为：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

解读：DTFT与傅里叶级数互为正反变换。



$$T = 2$$

$$n = 2kT$$

$$\omega = \frac{\Omega}{F_s} = 2\pi \frac{F}{F_s}$$



2.3 时频分析与傅里叶变换



离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform)

离散周期信号 $x(n)$ 的 DFT 可以表示为：

频域采样
时域周期

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$
$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

解读：DFT只针对有限长序列或周期序列。

DFT相当于对DTFT中的正变换加以采样，造成时域信号的周期性，因此时域信号应限制在一个周期内。凡是用到离散傅里叶变换的时候，有限长序列都是作为周期序列的一个周期来表示的，都隐含有周期性意义。



2.3 时频分析与傅里叶变换



离散傅里叶变换的矩阵形式

定义Fourier矩阵:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Fourier矩阵的性质: $\mathbf{F}^H \mathbf{F} = \mathbf{F} \mathbf{F}^H = N \mathbf{I} \quad \rightarrow \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{F}^H$

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{F} \mathbf{x}(n)$$

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{X}(k)$$



傅里叶变换的四种形式

· 抽象 ·

	时间函数	正变换	反变换	频率函数
Fourier Transform	连续 非周期	$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$	非周期 连续
Fourier Series	连续 周期	$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt$	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$	非周期 离散
DTFT	离散 非周期	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$	$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$	周期 连续
DFT	离散 周期	$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$	$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$	周期 离散

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$



离散傅里叶变换的几个问题



频谱泄漏

频谱泄漏是指由于信号截断造成的原始信号频谱扩散现象。

产生频谱泄漏的原因是对信号的**截断**。信号的截断相当于在原始信号 $x(n)$ 与一个窗函数 $w(n)$ 相乘，在频域中相当于各自频谱的卷积过程。卷积的结果造成原始信号频谱的“扩散”（或拖尾、变宽），这就是频谱泄漏。



思考题1：请比较两种窗函数：矩形窗和汉明窗。在对语音信号进行分帧加窗的过程中，哪一种窗函数更好？请说明原因。

频谱函数

$$w_{rec}(n) = R_N(n)$$

$$w_{hamming}(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right] R_N(n)$$



离散傅里叶变换的几个问题



栅栏效应

因为DFT计算频谱只限制在离散点上的频谱，也就是 F_0 的整数倍处的谱，而无法看到连续频谱函数，这就像通过一个“栅栏”观看景象一样，只能在离散点的地方看到真实景象。这种现象称为“栅栏效应”。

减小栅栏效应的方法就是要是频域抽样更密，即增加频域抽样点数，就好像距离“栅栏”的距离边远一些。在不改变时域信号的情况下，必然是在时域信号末端补零。补零后的时域数据，在频谱中的谱线更密，原来看不到的谱分量就有可能看到了。



离散傅里叶变换的几个问题



语音信号DFT的共轭对称性

时域中的语音信号，经过离散傅里叶变换DFT后的频谱是**共轭对称**的。
可通过DFT的公式证明，请大家思考其中的原因，并解答下面的思考题。



思考题2：对于一个长度为 N 的实数序列 $x(n)$ ，离散傅里叶变换为 $X(k)$ 。

(1) 请写出 $X(0)$ 与 $X\left(\frac{N}{2}\right)$ 的值的表达式。

(2) 请证明 $X(k)$ 的共轭对称性，即：

$$X(n-i) = X^*(i) \quad 0 < i < \frac{N}{2}$$



本章回顾



2.1 数字信号及其基本运算



2.2 采样定理



2.3 时频分析与傅里叶变换



2.4 作业



一、思考题

思考题1：请比较两种窗函数：矩形窗和汉明窗。在对语音信号进行分帧加窗的过程中，哪一种窗函数更好？请说明原因。

$$w_{rec}(n) = R_N(n)$$

$$w_{hamming}(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right] R_N(n)$$

思考题2：对于一个长度为 N 的实数序列 $x(n)$ ，离散傅里叶变换为 $X(k)$ 。

(1) 请写出 $X(0)$ 与 $X\left(\frac{N}{2}\right)$ 的值的表达式；

(2) 请证明 $X(k)$ 的共轭对称性，即：

$$X(n-i) = X^*(i) \quad 0 < i < \frac{N}{2}$$



2.4 作业



二、计算题

给定两个有限长序列：

$$x_1(n) = \{1, 5, 7, 3, 2, 1, 6, 9\} \quad 0 \leq n \leq 7 \quad N_1 = 8$$

$$x_2(n) = \{2, 4, 6, 1, 3\} \quad 0 \leq n \leq 4 \quad N_2 = 5$$

分别计算 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的线性卷积和圆周卷积（点数为8）结果，观察二者在哪些位置具有相同的值。

感谢聆听 !
Thanks for Listening●