Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Disciplina do 1º Semestre de 2020

IMECC - UNICAMP

Curso Aluno: Bacharelado em Ciência da Computação

ME323 - Introdução aos Modelos Probabilísticos

Respostas Lista de Exercício 5

Aluno: Gabriel Volpato Giliotti
Professor: Sebastião Amorim

Campinas – SP
2020

1-) Grade: a linhas célula preenchida c/ $\emptyset$ ou 1
b colunas

- a fração de células com valor 1, que chamaremos de p, é desconhecida

- Temos que obter uma estimativa (precisa) para p.

$a = (27 + C_6 + g) \times 10^5$ RA: 197569 $C_6 = 9$
$b = (5 + C_5 - g) \times 10^3$ $C_5 = 6$

$g = 1$ p/ masculino $a = 37 \cdot 10^5 = 3{,}7 \cdot 10^6$
$g = \emptyset$ p/ feminino $b = 10 \cdot 10^3 = 1 \cdot 10^4$

a.a.s-c.r = amostra aleatória simples - com reposição

a) Como temos disponíveis funções para escolhas aleatórias no meio computacional, para fazer escolhas para a amostra aleatória podemos percorrer as linhas e colunas aplicando uma das funções e assim receber um número desejado de células aleatórias, fazendo uso de a e b calculados como limite dos índices.

b) $n = 200 + 20C_6 + 10g$
$n = 200 + 20 \cdot 9 + 10 \cdot 1 = 390$ células
$X = 78$ casos positivos
$\hat{p}$ ou Estimativa para $p = 78/390 = 0{,}2$

c) $n = 390$ amostras
$x = 78$ $E(X) = \hat{p} \cdot n = 78$
$\hat{p} = 0{,}2$
Estimativa da variância $V(X) = n \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}$

Estimativa p/ variância $V(X) = \hat{p} \cdot \hat{q}$

$V(X) = 0,2 \cdot 0,8$

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{0,16}{390} = 0,000410256$$

$dp = \sqrt{V(\bar{X})}$ $\quad dp = \sqrt{0,000410256}$

$dp = 0,020254777$

$2dp = 0,040509554$

Intervalo com 95% de confiança: $\{\hat{p} - 2dp, \hat{p} + 2dp\}$

Assim: $\{0,159490446, 0,240509554\}$

Para erro absoluto de 1% fazemos:

$2\,dp = 0,01$

$dp = 0,005$ $\quad n = \frac{V(X)}{dp^2} = \frac{0,16}{0,005^2} = \frac{0,16}{0,000025}$

$n = 6400$

Assim, o tamanho amostral que garante p com erro absoluto menor que 1% e probabilidade de 0,95 é $n \geq 6400$.

d) Para o erro relativo fazemos: 1% de $\hat{p} = 0,01 \cdot 0,2 = 0,002$

Então $2\,dp = 0,002$

$dp = 0,001$ $\quad n = \frac{V(X)}{dp^2} = \frac{0,16}{0,001^2} = \frac{0,16}{0,000001}$

$n = 160.000$

Assim, o tamanho amostral que garante p com erro relativo menor que 1% e probabilidade de 0,95 é $n \geq 160.000$.

2-) a) $\hat{p}$ é uma estimativa de porcentagem do programa de matemática que foi cumprida pelos alunos do Ensino Fundamental.

b) $\bar{X}$ é média populacional dos acertos das questões, em X_i alunos selecionados ao acaso.

c) Para um limitante superior, escolhemos uma pior possível variância $\hat{V}(\bar{X})$. Logo a variância é máxima quando $\hat{p}$ é igual 0,5. (no intervalo de [0, 1], essa é a pior variância).

d) $n = \dfrac{V(X)}{dp^2}$ Sendo Erro $\Rightarrow$ $2dp = 0,05$

$dp = 0,025$

Utilizando a pior variância estimada, temos que

$$n = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,025^2} = \frac{0,25}{0,000625} \qquad n_0 = 400$$

Portanto, para $\bar{X}$ com erro inferior 0,05 e probabilidade 0,95, temos um tamanho amostral $n_0 = 400$.

e) $n_0 = 100$ $\quad \sum_{i=1}^{100} X_i = 30,32 \quad \sum_{i=1}^{100} X_i^2 = 11,68$

$$V(X) = \left(11,68 - 100 \cdot \left(\frac{30,32}{100}\right)^2\right) \Big/ 100$$

$$V(x) = \frac{2,48698}{100} \qquad V(x) = 0,0248698$$

$$dp = \sqrt{V(x)}$$

Logo $dp = 0,157701616$
$2dp = 0,315403232$

Assim, o intervalo para $\bar{X}$ com 95% de confiança é
$(30,00459676 \; , \; 30,635403232)$
$(30 \; , \; 30,6)$

f) Para o tamanho amostral n, temos que

$$2\sqrt{\frac{V(X)}{n}} = 0,01 \rightarrow \frac{10^{-4}}{4} = \frac{V(X)}{n}$$

$$n = \frac{4 \cdot V(X)}{10^{-4}} \qquad n = 40000 \cdot 0,02487$$
$$n = 994,79$$
$$n = 995$$