Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Disciplina do 1º Semestre de 2020

IMECC - UNICAMP

Curso Aluno: Bacharelado em Ciência da Computação

ME323 - Introdução aos Modelos Probabilísticos

Respostas Lista de Exercício 3

Aluno: Gabriel Volpato Giliotti
Professor: Sebastião Amorim

Campinas – SP
2020

1.) a) Área Superficial da Esfera = $4\pi r^2$

raio da Terra ≅ 6300 Km

Área superficial da Terra (A_{ST}) = $4 \cdot \pi \cdot 6300 \cdot 6300$

$A_{ST} \approx 499\,000\,000$ Km^2

Profundidade Media dos Oceanos = 4 Km

$0{,}7 \cdot 499.000.000 \cdot 4 \approx 1400\,000.000$ $Km^3 \approx 1{,}4 \cdot 10^{18}$ m^3

(Volume de água da Terra)

$1{,}4 \cdot 10^{18}$ m^3 $= 1{,}4 \cdot 10^{21}$ Litros de água   d = 1 Kg/L

$= 1{,}4 \cdot 10^{21}$ Kg $1 m^3 = 1000$ L

$0{,}018$ Kg — $6 \cdot 10^{23}$ moléculas de água

$1{,}4 \cdot 10^{21}$ — X

$X \approx 4{,}7 \cdot 10^{46}$ moléculas de água

b) $\dfrac{1{,}4 \cdot 10^{18}\ m^3}{4{,}7 \cdot 10^{46}\ \text{moléculas}} \approx 3 \cdot 10^{-29}$ m^3/molécula

$0{,}03$ nm^3/molécula

Diâmetro do vírus = 120 nm = $1{,}2 \cdot 10^{-7}$ m

raio do vírus = 60 nm = $6 \cdot 10^{-8}$ m

↓

Volume do vírus ≈ $9 \cdot 10^2$ nm^3

$\dfrac{9 \cdot 10^2\ nm^3}{3 \cdot 10^{-2}\ nm^3} = 3 \cdot 10^4$ O vírus tem um volume na ordem de 10^4 vezes maior que uma molécula de água

c) Raio da Terra ≈ 6400 Km
Distância do nível do mar até o fim da atmosfera = 12 Km

$$\text{Volume ATm} = \frac{4}{3}\pi(rt + 12\cdot10^3)^3 - \frac{4}{3}\pi rt^3$$

$$V\text{ATm} = \frac{4}{3}\pi\, 10^9\,(6412^3 - 6400^3)$$

$$\therefore\ V\text{ATm} = 6{,}2\cdot10^{18}\ m^3 \text{ na CNTP}$$

$$PV = nRT \rightarrow n = \frac{PV}{RT} \qquad n = \frac{1\cdot 6{,}2\cdot10^{18}\cdot10^9}{0{,}082\cdot 288{,}15}$$

$$n \simeq 2{,}6\cdot10^{26} \text{ mols}$$

Se nº de moléculas $= 6\cdot10^{23} \rightarrow$ Nº de moleculas na ATm $\cong 1{,}6\cdot10^{50}$

2-) X = função identidade; $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

x	$P\{X=x\}$
1	1/10
2	3/10
3	2/10
4	2/10
5	1/10
6	1/10

a) $E(X) = \sum x \cdot P\{X=x\}$
$\forall x \in \Omega_x$

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{10} + 2\cdot\frac{3}{10} + 3\cdot\frac{2}{10} + 4\cdot\frac{2}{10} + 5\cdot\frac{1}{10} + 6\cdot\frac{1}{10} = 3{,}2$$

$$V(X) = (1/10)(1-3{,}2)^2 + (3/10)\cdot(2-3{,}2)^2 + (2/10)(3-3{,}2)^2 + (2/10)(4-3{,}2)^2 + (1/10)\cdot(5-3{,}2)^2 + (1/10)(6-3{,}2)^2$$

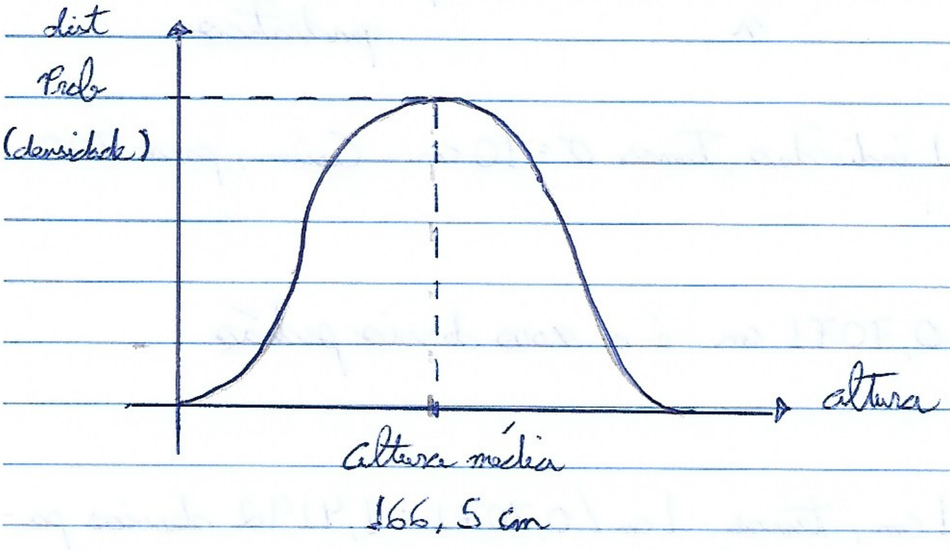
$$V(X) = 2{,}16$$

b) $E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ $V(X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

$E(X_n) = 3,2\,n$ $V(X_n) = 2,16\,n$

3- a) Seja i a idade em anos, um jovem adulto é um ser humano com idade no intervalo $20 \leq i \leq 34$.

b) Supondo que temos 210 milhões de brasileiros, temos que aproximadamente 105 milhões são adultos entre 20 e 59 anos. Dessa população estima-se que 51% fazem parte do grupo de jovens adultos. Logo, segundo a definição dada, temos aproximadamente 54 milhões de brasileiros entre 20 e 34 anos.



c) Item a) (172, 26)

Altura média p/ homens = 172 cm

Desvio padrão = 26 cm

e) Utilizando como base dados de pirâmides etárias do IBGE e dados sobre altura média de homens e mulheres, chegamos aos resultados apresentados nos itens anteriores, onde foi assumida função de probabilidade de poisson para altura média.

f) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias do sorteio de n pessoas ao acaso.

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_K \cdot \frac{1}{n}$$ → Considere uma distribuição homogênea pois qualquer pessoa tem mesma probabilidade de ser escolhida.

Então: $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_K}{n} \Rightarrow \frac{X_K}{n} = P(X_K) \Rightarrow \bar{X} = E(X)$

Com 140 cm e 200 cm como extremos, temos 6 desvios padrões (-3 à +3) para 99,9% dos casos com 60 cm, o que resulta em um desvio padrão de 10 cm.

Agora, considerando V(X) e o exposto sobre E(X), temos que $V(X) = \sum_i \frac{(\text{desvio altura})^2 (i)}{n}$, que é o desvio médio quadrático.

g) Considerando 1 indivíduo, temos $\sigma = 10$ cm. Assim, para 200 indivíduos temos:

$$\frac{10}{\sqrt{200}} = 0,7071 \text{ cm}$$ é o novo desvio padrão

Considerando 1 cm, temos 1 cm / 0,7071 = 1,4142 desvios padrões, com 83% de probabilidade.

h) 95% de certeza = 2 desvios padrões = 5 mm = 0,5 cm → dp = 0,25 cm. Para o desvio considerado (10 cm), temos 10/0,25 = 40 vezes o desvio padrão de 1 indivíduo, ou 0,7071/0,25 o desvio de 200 indivíduos. Para multiplicar por 40 o desvio padrão, devemos multiplicar a variância pelo quadrado disso, ou seja, o tamanho da amostra = 1600 indivíduos.

tilibra

4-) Probabilidade de, ao retirar uma bolinha, ela estar marcada é $m/1000$.

Probabilidade de, ao retirar uma bolinha, ela não estar marcada é $1 - \frac{m}{1000}$

Usando a fórmula da distribuição binomial, podemos pensar no somatório abaixo para calcular a probabilidade de encontrar pelo menos uma bolinha marcada ao retirar n bolinhas ao acaso:

$$C_n^1 \left(\frac{m}{1000}\right)^1 \left(1 - \frac{m}{1000}\right)^{n-1} + C_n^2 \left(\frac{m}{1000}\right)^2 \left(1 - \frac{m}{1000}\right)^2 + \dots$$

$$\dots + C_n^{n-1} \left(\frac{m}{1000}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{m}{1000}\right)^1 + C_n^n \left(\frac{m}{1000}\right)^n \left(1 - \frac{m}{1000}\right)^0$$

Assim, temos que a probabilidade pode ser dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} C_n^i \left(\frac{m}{1000}\right)^i \left(1 - \frac{m}{1000}\right)^{n-i}$$

5-) a) e c) no Excel

b) Considerando um intervalo de prevalência $p = [0{,}002 \ \ 0{,}013]$ obtido no gráfico construído

Pessoas contaminadas: $P\{T+ \setminus I+\} + P\{T- \setminus I+\}$

$5 \cdot 10^7 [0{,}002 \ \ 0{,}013] \quad (5 \cdot 10^7 - P\{T+ \setminus I+\}) \cdot 0{,}01$

Assumindo sensibilidade de 99%

min:

$100000 + 499000 = 599000$

max:

$650000 + 493500 = 1.143,500$

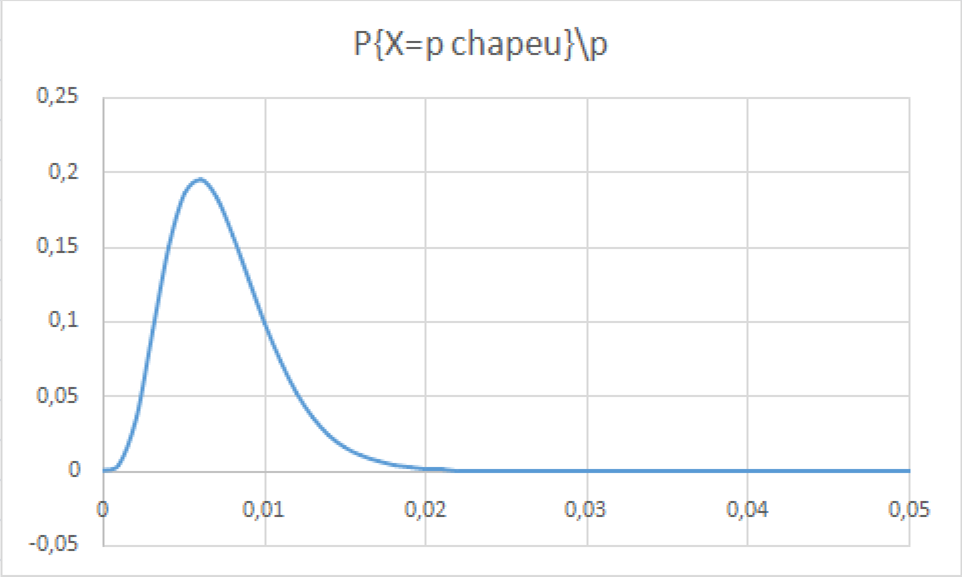
Assim, podemos considerar um intervalo para o nº de pessoas contaminadas [599000 1143500]

5-) a)

n =	680
testes positivos =	4
p chapeu =	0,005882

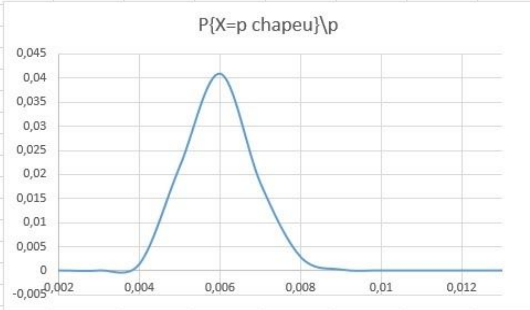
p = % de casos positivos	P{X=p chapeu}\p
0	0
0,001	0,004490098
0,002	0,036504945
0,003	0,093842128
0,004	0,15050071
0,005	0,186323833
0,006	0,195788267
0,007	0,183683417
0,008	0,158575516
0,009	0,128453599
0,01	0,098941242
0,011	0,073155952
0,012	0,052288398
0,013	0,036320718
0,014	0,02462025
0,015	0,016339647
0,016	0,010645162
0,017	0,006822751

Curva de verossimilhança de prevalência



5-) c)

		p = % de casos positivos	P{X=p chapeu}\p
n=	8680	0	0
testes positivos=	51,05882	0,001	4,83166E-23
p chapeu =	0,005882	0,002	2,00079E-11
		0,003	3,43021E-06
		0,004	0,001425219
		0,005	0,021754591
		0,006	0,040947283
		0,007	0,01813132
		0,008	0,002777215
		0,009	0,000188698
		0,01	6,73981E-06
		0,011	1,42837E-07
		0,012	1,96418E-09
		0,013	1,87566E-11
		0,014	1,31124E-13
		0,015	6,99726E-16
		0,016	2,94808E-18
		0,017	1,00807E-20



O gráfico acima foi obtido alterando o valor do n e mantendo o número de testes positivos proporcional. Assim, temos que para diminuir pela metade a largura, temos que realizar em torno de 8500 testes.