

## Taller 2

1.3

Encuentre la función de densidad espectral (T. Fourier) para las siguientes señales (sin aplicar propiedades)

- la transformada de Fourier continua de una señal  $x(t)$  está definida como:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

a)  $x(t) = e^{-a|t|}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$

Como la señal es par debemos escribir

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & , t \geq 0 \\ e^{at} & , t < 0 \end{cases}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^0 (e^{at} e^{-j\omega t}) dt + \int_0^{\infty} (e^{-j\omega t} e^{-at}) dt$$

$$\int_{-\infty}^0 (e^{at} - j\omega t) dt = \int_{-\infty}^0 (e^{(a-j\omega)t}) dt$$

$$= \left[ \frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \right]_{-\infty}^0 = \left[ \frac{1}{a-j\omega} \right] - 0 = \frac{1}{a-j\omega}$$

$$\int_0^{\infty} (e^{-(a+j\omega)t}) dt = \left[ \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right]_0^{\infty} = 0 - \left[ \frac{-1}{(a+j\omega)} \right]$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Rightarrow X(\omega) \cdot \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \boxed{\frac{2a}{a^2 + \omega^2}}$$

b.  $\cos(\omega_c t)$ ,  $\omega_c \in \mathbb{R}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_c t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\cos(\omega_c t) = \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2} (e^{-j\omega t}) \right) dt$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j(\omega_c - \omega)t}) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j(\omega_c + \omega)t}) dt$$

\* integral de una exponencial compleja es un delta de Dirac.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(a)t} dt = 2\pi \delta(a)$$

Aplicando en cada termino se tiene.

$$X(\omega) = \frac{1}{2} (2\pi \delta(\omega - \omega_c) + 2\pi \delta(\omega + \omega_c))$$

$$X(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

c)  $\sin(\omega s t)$ ,  $\omega s \in \mathbb{R}$ :

Aplicando la definición de la transformada de Fourier se tiene.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega s t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

aplicando la identidad trigonométrica  $\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega s t} - e^{-j\omega s t}}{2j} (e^{-j\omega t}) dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j(\omega s - \omega)t} - e^{-j(\omega s + \omega)t}) dt \end{aligned}$$

Como la integral de una exponencial compleja es una delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\alpha)t} dt = 2\pi \delta(\alpha)$$

- $\alpha = \omega s - \omega \rightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega s)$
- $\alpha = -(\omega s + \omega) \rightarrow 2\pi \delta(\omega + \omega s)$

$$X(\omega) = \frac{1}{2j} (2\pi \delta(\omega - \omega s) - 2\pi \delta(\omega + \omega s))$$

$$X(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega s) - \delta(\omega + \omega s)] \cdot \frac{1}{j}$$

$$X(\omega) = j\pi [\delta(\omega + \omega s) - \delta(\omega - \omega s)]$$

d)  $x(t) = f(t) \cdot \cos(\omega_c t)$ ,  $\omega_c \in \mathbb{R}$

Aplicando definicion de la transformada de fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega_c t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

identidad trigonométrica

$$\cos(\omega_c t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}) \cdot e^{-j\omega t}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (e^{j(\omega_c - \omega)t} + e^{-j\omega(\omega_c + \omega)t}) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j(\omega - \omega_c)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j(\omega + \omega_c)t} dt \right]$$

cada una de estas integrales corresponde a T.F de  $f(t)$  evaluada en las frecuencias desplazadas así que por definicion

$$X(\omega) = \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_c) + F(\omega + \omega_c)]$$

e).  $x(t) = e^{-a(t)^2}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$

Señal Gaussiana.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|^2} \cdot e^{-j\omega t} dt, \text{ pero como } |t|^2 = t^2 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2 - j\omega t} dt.$$

llevando  $-at^2 - j\omega t$  a una forma factorizada. Se tiene  $(t^2 - bt)$

$$-at^2 - j\omega t = -a \left( \frac{-at^2}{-a} + \frac{-j\omega t}{-a} \right)$$

completando el cuadrado de  $t^2 + \frac{j\omega}{a}t$

$$\boxed{-a \left( t^2 + \frac{j\omega}{a}t \right)} \rightarrow (x-y)^2 \text{ o } (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$x = t$$

$$2yt = \frac{j\omega}{a}t$$

$$t^2 + \frac{j\omega}{a}t + \left( \frac{j\omega}{2a} \right)^2 - \left( \frac{j\omega}{2a} \right)^2$$

$$\boxed{y = \frac{j\omega}{2a}}$$

$$-at^2 - j\omega t = -a \left[ \left( t + \frac{j\omega}{2a} \right)^2 - \left( \frac{j\omega}{2a} \right)^2 \right]$$

$$= -a \left( t + \frac{j\omega}{2a} \right)^2 - \frac{j^2 \omega^2}{4a^2}$$

recordando que  $j^2 = -1$ , queda

$$-a \left( \left( t + \frac{j\omega}{2a} \right)^2 - \frac{(-1) \omega^2}{4a^2} \right) = -a \left( t + \frac{j\omega}{2a} \right)^2 + \frac{\omega^2}{4a^2} \cdot (\cancel{a})$$

$$= -a \left( t + \frac{j\omega}{2a} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4a}$$

Sustituyendo y simplificando en la integral

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[ -a \left( t + \frac{j\omega}{2a} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4a} \right]} dt$$

Separada la parte constante del exponente que no depende de  $t$

$$x(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a \left( t + \frac{j\omega}{2a} \right)^2} dt$$

Realizando un cambio de variable

$$u = t + \frac{j\omega}{2a}, \quad du = dt \quad \text{cuando } t \rightarrow -\infty, u \rightarrow -\infty + \frac{j\omega}{2a} \approx -\infty$$

$$\text{cuando } t \rightarrow +\infty, u \rightarrow +\infty + \frac{j\omega}{2a} \approx +\infty$$

$$x(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-au} du \rightarrow \text{integral gaussiana es una integral (estable) estandar.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}, \quad \text{en este caso } c=a \text{ y la variable (y por lo tanto) es } u \text{ por lo tanto.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \rightarrow x(\omega) = \left[ e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right]$$

f)  $x(t) = A \text{rect}_d(t)$ ,  $A, d \in \mathbb{R}$

$$\text{rect}_d(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \leq \frac{d}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad x(t) = A \quad \text{Si } |t| \leq \frac{d}{2}$$

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \text{rect}_d(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

acotando los límites de integración.

$$x(\omega) = A \int_{-d/2}^{d/2} e^{-j\omega t} dt = A \left[ \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$= A \cdot \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega(d/2)} - e^{-j\omega(-d/2)})$$

aplicando la identidad trigonométrica.  $e^{-j\theta} - e^{j\theta} = -2j \sen \theta$

$$x(\omega) = \frac{A}{-j\omega} (-2j \sen(\omega d/2)) = \frac{A \cdot 2 \sen(\omega d/2)}{\omega}$$

Utilizando la definición de sinc normalizado  
(en radianes)

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \cdot x(\omega) \cdot A \cdot d \frac{\sin(\omega d/2)}{(\omega d/2)}$$

$$x(\omega) = A \cdot d \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega d}{2}\right)$$