1.4

a) $f\left\{ e^{-j\omega_1 t} \cos(\omega_c t) \right\}, \ \omega_1, \omega_c \in \mathbb{R}$

Aplicando la identidad trigonometrica $\cos(\omega_c t)$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}\right)$$

$$e^{-j\omega t}\cos(\omega_c t) = e^{-j\omega_1 t} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-j(\omega_1 - \omega_c)t} + e^{-j(\omega_1 + \omega_c)t}\right)$$

Aplicando la T.F

$$f\left\{ e^{-j\omega_0 t} \right\} = 2\pi\,\delta(\omega - \omega_c)$$

$$F\left\{ e^{-j\omega_1 t}\cos(\omega_c t) \right\} = \frac{1}{2}\left[F\left\{ e^{-j(\omega_1 - \omega_c)t} \right\} + F\left\{ e^{-j(\omega_1 + \omega_c)t} \right\} \right]$$

$$\Rightarrow F\left\{ e^{-j\omega_1 t}\cos(\omega_c t) \right\} = \frac{1}{2}\left[2\pi\,\delta(\omega - (\omega_1 - \omega_c)) + 2\pi\,\delta(\omega - \omega_1 + \omega_c) \right]$$

$$\boxed{F\left\{ e^{-j\omega_1 t}\cos(\omega_c t) \right\} = \pi\left[\delta(\omega - (\omega_1 - \omega_c)) + \delta(\omega - (\omega_1 + \omega_c)) \right]}$$

b) $F\{u(t)\cos^2(w_c t)\}$, $w_c \in \mathbb{R}$ $\quad u(t)$ Funcion escalon

Aplicando la identidad trigonometrica.

$$\cos^2(w_c t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2w_c t)$$

$$u(t)\cos^2(w_c t) = u(t)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2w_c t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}u(t)\cos(2w_c t)$$

Aplicando propiedades lineales de T.F

$$F\{u(t)\cos^2(w_c t)\} = \frac{1}{2}F\{u(t)\} + \frac{1}{2}F\{u(t)\cos(2w_c t)\}$$

La T.F de $u(t)$ es

$$\boxed{F\{u(t)\} = \pi\,\delta(w) + \frac{1}{jw}}$$

Ahora para $u(t)\cos(2w_c t)$ se utiliza la propiedad de modulacion.

$$F\{(u(t)\cos(w_o t)\} = \frac{1}{2}\left[F\{u(t)e^{jw_o t}\} + F\{u(t)e^{-jw_o t}\}\right]$$

Ademas, $F\{u(t)e^{\pm jw_o t}\} = \boxed{\pi\,\delta(w \mp w_o) + \frac{1}{j(w \mp w_o)}}$

Entonces

$$F\{u(t)\cos(2w_c t)\} = \frac{1}{2}\left[\pi\,\delta(w - 2w_c) + \frac{1}{j(w-2w_c)} + \right.$$

$$\pi\,\delta(\omega+2\omega c)+\frac{1}{j(\omega+2\omega c)}\Big]$$

$$\mathcal{F}\left\{u(t)\cos^2(\omega_c t)\right\}=\frac{1}{2}\left(\pi\,\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)+\frac{1}{4}\Big[\pi\,\delta(\omega-2\omega c)+$$

$$\frac{1}{j(\omega-2\omega c)}+\pi\,\delta(\omega+2\omega c)+\frac{1}{j(\omega+2\omega c}\Big]$$

$$\mathcal{F}\left\{u(t)\cos^2(\omega c t)\right\}=\frac{\pi}{2}\,\delta(\omega)+\frac{1}{2j\omega}+\frac{\pi}{4}\Big[\delta(\omega-2\omega c)+$$

$$\delta(\omega+2\omega c)\Big]+\frac{1}{4j}\left[\frac{1}{\omega-2\omega c}+\frac{1}{\omega+2\omega c}\right]$$

c) $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{7}{\omega 2+6\omega+45}\cdot\frac{10}{(8+j\omega/3)^2}\right\}$

Aplicando el teorema de convolucion para la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{F(\omega)*G(\omega)\right\}=2\pi\cdot f(t)\cdot g(t)$$

Donde.

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}\left\{F(\omega\right\},\quad g(t)=\mathcal{F}^{-1}\left\{G(\omega)\right\}$$

Calcular la transformada inversa de la primera funcion $f(t)$

$$F(\omega)=\frac{7}{\omega^2+6\omega+45}\qquad \omega^2+6\omega+45=(\omega^2+6\omega+9)+36$$
$$=(\omega+3)^2+6^2$$

$F(\omega)=\dfrac{7}{(\omega+3)^2+6^2}$, Aplicando la propiedad par de transformada.

(Decaimiento exponencial)

$$F\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2+w^2} \rightarrow H(w) = \frac{7}{w^2+6^2} \rightarrow a=6$$

$$F^{-1}\left\{\frac{2(6)}{6^2+w^2}\right\} = e^{-6|t|}$$, ajustando los constantes

$$H(w) = \frac{7}{12}\cdot\frac{12}{w^2+6^2} \rightarrow h(t) = F^{-1}\{H(w)\}$$

$$= \frac{7}{12} e^{-6|t|}$$

luego aplicando la propiedad de dezplazamiento en frecuencia.

$$H(w+3) \rightarrow w+3=0 \quad w_0=-3 \qquad f(t) = F^{-1}\{H(w+3)\} = e^{-j3t}\, h(t)$$

$$\boxed{f(t) = \frac{7}{12} e^{-j3t} e^{-6|t|}}$$

~~Calcular la transformada inversa de la primera Funcion f(t)~~

$$\cancel{f(w) = \frac{7}{w^2+6w+45} \qquad w^2+6w+45 = (w^2+6w+a)}$$

calcular la transformada inversa de la segunda funcion g (t)

$$G(w) = \frac{10}{(8+jw/3)^2}$$, Aplicando el par de transformada.

$$F\{t\, e^{-at}\, u(t)\} = \frac{1}{(a+jw)^2}$$

Entonces

$$G(w) = \frac{10}{\left(\frac{1}{3}(24+jw)\right)^2} = \frac{10}{\frac{1}{9}(24+jw)^2} = \frac{90}{(24+jw)^2}$$

La expresion $\dfrac{90}{(24+jw)^2}$ coincide con la forma

$$\frac{1}{(a+jw)^2} \Rightarrow g(t) = F^{-1}\left\{\frac{90}{(24+jw)^2}\right\} = 90 \cdot F^{-1}\left\{\frac{1}{(24+jw)^2}\right\}$$

$$\boxed{g(t) = 90\, t\, e^{-24t}\, u(t)}$$

Aplicando teorema de convolucion $y(t) = 2\pi \cdot f(t) \cdot g(t)$

$$y(t) = 2\pi \cdot \left(\frac{7}{12} e^{-j3t} e^{-6(t)}\right) \cdot \left(90\, t\, e^{-24t}\, u(t)\right)$$

$$y(t) = 105\pi\, e^{-j3t}\, e^{-6(t)}\, t\, e^{-24t}\, u(t) \rightarrow u(t) \quad 0 \text{ para } t<0$$

$|t|\; t$ para $t \geq 0$

$$e^{-6(t)} e^{-24t} = e^{-6t} \cdot e^{-24t} = e^{-3t} \quad (\text{para } t \geq 0)$$

$$\boxed{y(t) = 105\pi t \cdot e^{-(30+j3)t}\, u(t)}$$

d) $F\{3t^3\}$ Aplicando la propiedad de linealidad

$F\{3t^3\} = 3 \cdot F\{t^3\}$ Aplicando la propiedad de Diferenciacion en frecuencia

$$F\{t^n x(t)\} = j^n \frac{d^n}{dw^n} X(w) \rightarrow \begin{matrix} n=3 \\ x(t)=1 \end{matrix}$$

$$\boxed{F\{1\} = 2\pi\, \delta(w)} \qquad X(w) = F\{x(t)=1\}$$

$$F\{t^3\} = j^3 \frac{d^3}{dw^3}\left[2\pi\, \delta(w)\right] \rightarrow j^3 = j^2 \cdot j = (-1)j = -j$$

$$f\{t^3\} = -j \cdot 2\pi \frac{d_3}{d\omega^3} \delta(\omega) \to \boxed{\frac{d^3}{d\omega^3} \delta(\omega) = \delta^{(3)}(\omega)}$$

$$f\{3t^3\} = 3 \cdot (-j 2\pi \, 6^{(3)}(\omega)$$

$$\boxed{f\{3t^3\} = -j\, 6 \cdot 2\pi \, \delta^{(3)}(\omega)}$$

e) $\frac{B}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a^2 + (\omega - n\omega_0)^2} + \frac{1}{a + j(\omega - n\omega_0)} \right)$

donde $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ $\omega_0 = 2\pi/T$

$B, T \in \mathbb{R}^+$

$x(\omega) = c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_0)$ si $x(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$

multiplicacion de una señal aperiodica $f(t)$ por un tren de impulsos periodicos.

$x(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0)$

La constante de escala es B:

La funcion de forma base en frecuencia es:

$f(t) = f^{-1}\{f(\omega)\}$, como $f(\omega)$ es una suma se puede aplicar la propiedad de linealidad.

$$F^{-1}\left\{ \frac{1}{a^2 + \omega^2} \right\} + f^{-1}\left\{ \frac{1}{a + j\omega} \right\}$$

Para el primer termino aplicando la propiedad de par de transformada.

$$f^{-1}\left\{ e^{-a(t)} \right\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2} \rightarrow F^{-1}\left\{ \frac{1}{a^2+\omega^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2a} e^{-a(t)}$$

Para el segundo termino aplicando la misma propiedad anterior

$$f^{-1}\left\{ e^{-a(t)} u(t) \right\} = \frac{1}{a+j\omega} \rightarrow f^{-1}\left\{ \frac{1}{a+j\omega} \right\} = e^{-at} u(t)$$

entonces la funcion base $f(t)$ es:

$$f(t) = \frac{1}{2a} e^{-a(t)} + e^{-at} u(t)$$

ahora se construye la señal final en el dominio del tiempo

$$x(t) = B \cdot f(t) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \right)$$

$$x(t) = B \cdot \left(\frac{1}{2a} e^{-a(t)} + e^{-at} u(t) \right)$$

$$x(t) = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t-kT), \quad f(kT) = \frac{1}{2a} e^{-a(kT)} + e^{-a(kT)} u(kT)$$

entonces, la expresion final para la señal en el tiempo es:

$x(t)$, la expresion

$$\boxed{x(t) = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2a} e^{-a(kT)} + e^{-a(kT)} u(kT) \, \delta(t-kT) \right)}$$