2.3

① Linealidad sistema 1

Sea $x_1[n] \rightarrow y_1[n]$, y $x_2[n-1] - y_1[n-1]$

$$y_1[n] = \frac{x_1[n]}{3} + 2x_1[n-1] - y_1[n-1]$$

$$y_2[n] = \frac{x_2[n]}{3} + 2x_2[n-1] - y_2[n-1)$$

Se quiere probar que

$x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$

$y[n] = ay_1[n] + by_2[n]$

Sustituyendo.

$$y[n] = \frac{ax_1[n] + bx_2[n]}{3} + 2(ax_1[n-1] + bx_2[n-1]) - y[n-1]$$

Comparacion directa.

$y[n-1] = ay_1[n-1] + by_2[n-1]$

$y[n] = ay_1[n] + by_2[n]$

Se cumple la propiedad de linealidad.

$x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$, entonces:

$$y[n-n_0] = \frac{x[n-n_0]}{3} + 2x[n-n_0-1] - y[n-n_0-1]$$

Como la forma de la ecuacion no cambia al desplazar la entrada se dice que el sistema es invariante en el tiempo

El sistema es $\boxed{SLIT}$

② Sistema 2 Linealidad

Sea $x[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$; $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x^2[k]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (a^2 x_1^2[k] + b x_2[k])^2$$

Factorizando se obtiene

$$\sum_{k=-\infty}^{n} (a^2 x_1^2[k] + 2ab\, x_1[k] + b^2 x_2^2[n]) \neq$$

$$a \sum x_1^2 + b \sum x_2^2 [k]$$

no cumple la propiedad de linealidad

→ invarianza en el tiempo.

desplazando $x[n] \to [x[n-n_0]]$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x^2[k-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x^2[k] = y[n-n_0]$$

Cumple la invarianza en el tiempo

linealidad $\boxed{X}$

invariante $\boxed{\checkmark}$

El sistema no es $\boxed{SLIT}$

③ Sistema $y[n]\ \tilde{x}\ (x[n-1], x_n, x[n+1])$

Se tiene en cuenta que la mediana no es una operacion lineal es:

$x_1 = [1, 1, 1]$; $\tilde{x} = 1$

$x_2 = [3, 3, 3]$; $\tilde{x} = 3$

pero $0.5 * 1 + 0,5 * 3 = 2$ → Falla.

$x_3 = [0, 5, 100]$ $\tilde{x} = 5$

$x_4 = [0, 6, 100]$ $\tilde{x} = 6$

$x = x_3 + x_4 = [0, 11, 200]$ $x = 11$

pero no siempre ocurre $x_3 + x_4 = 5 + 6 = 11$ por lo que el comportamiento no es garantizado

No lineal

invarianza en el tiempo:

Si se dezplaza la señal, tambien se dezplaza la ventana el sistema si es variante en el tiempo

linealidad $\boxed{X}$

invarianza $\boxed{✓}$

El sistema no es SLIT

(4) Sistema $y(t) = Ax(t) + B$

linealidad

Se requiere que:

$T\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aT\{x_1(t)\} + bT\{x_2(t)\}$

Verificacion: $T\{x(t)\} = Ax(t) + B$

Entonces

$T\{ax_1 + bx_2\} = A(ax_1 + bx_2) + B$

mientras que:

$aT\{x_1\} + bT\{x_2\} = a(Ax_1 + B) + b(Ax_2 + B)$

$= A(ax_1 + bx_2) + (a + b)B$

Solo si $B = 0$

Pero si $B \neq 0$

Es lineal cuand $B = 0$

invarianza en el tiempo

Si se dezplaza en el tiempo

$x(t) \rightarrow x(t-t_0) = \quad y(t) = Ax(t-t_0) + B = y(t-t_0)$

es variante en el tiempo

Solo si $B = 0$ es SLIT

Si $B \neq 0$ no es SLT

2.5 Sea la señal gaussiana $x(t) = e^{-at^2}$

$x(t) = e^{-at^2} \quad a \in \mathbb{R}^+$

sistema A $\quad y_A(t) = x^2(t)$

sistema B un SLIT con respuesta impulso $h_B(t)$ $= Be^{bt^2}$

Salida de serie

$x(t) \xrightarrow[h_B(t)]{} y(t) \xrightarrow{\text{Cuadrado}} y_A(t)$

1) $x(t) * h_B(t) \rightarrow y(t)$

2) $y_A(t) = y^2(t)$

Convolucion de $x(t)$ y $h_B(t)$

$$y(t) = x(t) * h_B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h_B(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(\tau) = e^{-a\tau^2} \quad h_B(t-\tau) = B e^{-b(t-\tau)^2}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{a\tau} \cdot B e^{-b(t-\tau)^2}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau^2} \cdot B e^{-b(t-\tau)^2} d\tau$$

$$y(t) = B \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau^2} \cdot B e^{-b(t-\tau)^2} d\tau$$

Sustituyendo

$$y(t) = B \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau^2} e^{-b(t^2 - 2(-\tau + \tau^2))} d\tau$$

$$y(t) = B e^{-bt^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+b)\left[\left(-\frac{\tau - bt}{a+b}\right)^2 - \left(\frac{bt}{a+b}\right)^2\right]} d\tau$$

$$= B e^{-bt^2} e^{\frac{b^2 t^2}{a+b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+b)(\tau - \mu)^2} d\tau$$

La integral gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k(\tau-\mu)^2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{k}} \cdot k = a+b$$

$$y(t) = B \sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\, e^{-bt^2 + \frac{b^2 t^2}{a+b}}$$

Simplificando

$$-bt^2 + \frac{b^2 t^2}{a+b} = t^2 \left(-\frac{b(a+b) + b^2}{a+b} \right) = \frac{-abt^2}{a+b}$$

$$y(t) = B\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\, e^{\frac{-abt^2}{a+b}}$$

Aplicar $y_A(t) = y^2(t)$

$$y_A = \left(B\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\, e^{\frac{-bt^2}{a+b}}\right)^2$$

$$y(t) = B^2 \frac{\pi}{a+b}\, e^{-2\frac{abt^2}{a+b}}$$

Salida del sistema Serie.

$$x(t) \rightarrow y_A(t) = x^2(t) \xrightarrow{h_B(t)} y(t)$$

Aplicar A directamente

$$y_A(t) = x^2(t) = (e^{-at^2})^2$$

$$y_A(t) = e^{-2at^2}$$

Convolucion con $h_B(t) = Be^{-bt}$

$$y(t) = y_A(t) * h_B(t) = \int^{\infty} e^{-2aT^2} \cdot Be^{-b(t-T)^2}\, dT$$

$$\boxed{y(t) = B\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2aT^2} \cdot e^{-2\frac{abt^2}{2a+b}}}$$