

Taller 2

1.3

Encuentre la función de densidad espectral (T.Fourier) para las siguientes señales (sin aplicar propiedades)

- La transformada de Fourier continua de una señal $x(t)$ está definida como:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

a) $x(t) = e^{-a|t|}$, $a \in \mathbb{R}^+$

Como la señal es par debemos escribir

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^0 (e^{at} e^{-j\omega t}) dt + \int_0^{\infty} (e^{-j\omega t} e^{a-t}) dt$$

$$\int_{-\infty}^0 (e^{at} - j\omega t) dt = \int_{-\infty}^0 (e^{(a-j\omega)t}) dt$$

$$= \left[e^{(a-j\omega)t} \right]_{-\infty}^0 = \left[\frac{1}{a-j\omega} \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{a-j\omega}$$

$$\int_0^{\infty} (e^{-(a+j\omega)t}) dt = \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right]_0^{\infty} = a - \left[\frac{1}{(a+j\omega)} \right]$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Rightarrow X(\omega) \cdot \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \boxed{\frac{2a}{a^2+\omega^2}}$$

b. $\cos(\omega_c t)$, $\omega_c \in \mathbb{R}$

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_c t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\cos(\omega_c t) = \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2}$$

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2} (e^{-j\omega t}) \right) dt$$

$$x(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j(\omega_c - \omega)t}) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j(\omega_c + \omega)t}) dt$$

* integral de una exponencial compleja con un delta de dirac.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(a)t} dt = 2\pi \delta(a)$$

APLICANDO EN CADA TERMINO SE TIENE.

$$x(\omega) = \frac{1}{2} (2\pi \delta(\omega - \omega_c) + 2\pi \delta(\omega + \omega_c))$$

$$x(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

c) $\sin(\omega st)$, $\omega_s \in \mathbb{R}$:

Aplicando la definición de la transformada de Fourier se tiene.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega st) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

aplicando la identidad trigonométrica $\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega st} - e^{-j\omega st}}{2j} (e^{-j\omega t}) dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j(\omega s - \omega)t} - e^{-j(\omega s + \omega)t}) dt \end{aligned}$$

Como la integral de una exponencial compleja es una delta de dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\alpha)t} dt = 2\pi \delta(\alpha)$$

- $\alpha = \omega s - \omega \rightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega s)$
- $\alpha = -(\omega s + \omega) \rightarrow 2\pi \delta(\omega + \omega s)$

$$X(\omega) = \frac{1}{2j} (2\pi \delta(\omega - \omega s) - 2\pi \delta(\omega + \omega s))$$

$$X(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega s) - \delta(\omega + \omega s)] \cdot \frac{1}{j}$$

$$X(\omega) = j\pi [\delta(\omega + \omega s) - \delta(\omega - \omega s)]$$

d) $x(t) = f(t) \cdot \cos(\omega_c t)$, $\omega_c \in \mathbb{R}$

Aplicando definición de la transformada de Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega_c t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

identidad trigonométrica

$$\cos(\omega_c t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (e^{j(\omega_c - \omega)t} + e^{-j(\omega_c + \omega)t}) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j(\omega - \omega_c)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j(\omega + \omega_c)t} dt \right]$$

cada una de estas integrales corresponde a T.F de $f(t)$ evaluada en las frecuencias desplazadas

así que por definición

$$X(\omega) = \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_c) + F(\omega + \omega_c)]$$

c). $x(t) = e^{-a|t|^2}$, $a \in \mathbb{R}$

Señal Gaussiana.

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|^2} \cdot e^{-j\omega t} dt, \text{ pero como } |t|^2 = t^2$$

para todo $t \in \mathbb{R}$

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2 - j\omega t} dt.$$

Llevando $-at^2 - j\omega t$ a una forma factorizada. Se tiene $(t^2 - bt)$

$$-at^2 - j\omega t = -a \left(\frac{-at^2}{-a} + \frac{-j\omega t}{-a} \right)$$

completando el cuadrado de $t^2 + \frac{j\omega t}{a}$

$$\boxed{-a \left(t^2 + \frac{j\omega t}{a} \right)} \rightarrow (x-1)^2 \quad \text{o} \quad (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$x = t \quad 2y t = \frac{j\omega t}{a}$$

$$t^2 + \frac{j\omega t}{a} + \left(\frac{j\omega}{2a} \right)^2 - \left(\frac{j\omega}{2a} \right)^2 \quad \boxed{y = \frac{j\omega}{2a}}$$

$$-at^2 - j\omega t = -a \left[\left(t + \frac{j\omega}{2a} \right)^2 - \left(\frac{j\omega}{2a} \right)^2 \right]$$

$$= -a \left(t + \frac{j\omega}{2a} \right)^2 - \frac{j^2 \omega^2}{4a^2}$$

Recordando que $j^2 = -1$, queda

$$-a \left(\left(t + \frac{j\omega}{2a} \right)^2 - \frac{(-1)\omega^2}{4a^2} \right) = -a \left(t + \frac{j\omega}{2a} \right)^2 + \frac{\omega^2}{4a^2}. (\checkmark)$$

$$= -a \left(t + \frac{j\omega}{2a} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4a}$$

Sustituyendo y simplificando en la integral

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a \left(t + \frac{j\omega}{2a} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4a}} dt$$

Separada la parte constante del exponente que no depende de t

$$x(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a \left(t + \frac{j\omega}{2a} \right)^2} dt$$

Realizando un cambio de variable

$$u = t + \frac{j\omega}{2a}, \quad du = dt \quad \text{cuando } t \rightarrow -\infty, u \rightarrow -\infty + \frac{j\omega}{2a}x - \infty$$

$$\text{cuando } t \rightarrow +\infty, u \rightarrow \infty + \frac{j\omega}{2a} \approx \infty$$

$$x(u) = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-au} du \rightarrow \text{integral gaussiana es una integral estable.}$$

estándar.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}, \quad \text{en este caso } c = a \text{ y la variable (y par) es } u \text{ por lo tanto.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \rightarrow x(u) = \boxed{e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

f) $x(t) = A \text{rect}_d(t), \quad A, d \in \mathbb{R}$

$$\text{rect}_d(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \leq \frac{d}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad x(t) = A$$

$$x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} A \text{rect}_d(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

acotando los límites de integración.

$$x(u) = A \int_{-d/2}^{d/2} e^{-j\omega t} dt = A \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$= A \cdot \frac{1}{-j\omega} (e^{-j(d/2)} - e^{-j\omega(-d/2)})$$

$$e^{-j\omega} - e^{j\omega}$$

aplicando la identidad trigonométrica.

$$= -2j \sin(\omega d/2)$$

$$x(u) = \frac{A}{-j\omega} (-2j \sin(\omega d/2)) = \underline{\underline{A \cdot 2 \sin(\omega d/2)}}$$

utilizando la definición de sinc normalizado
(en radianes)

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \cdot x(\omega) A \cdot \frac{\operatorname{dscn}(\omega d/2)}{(\omega d/2)}$$

$$x(\omega) = A \cdot d \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega d}{2}\right)$$