2.2

① Solucion por conclusion

Sabemos que la respuesta impulso del sistema es

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

luego

$$y_{conv}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} e^{-2\tau} \left[e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) \right] d\tau$$

$$= e^{-t} \int_{0}^{t} e^{-2\tau} e^{\tau}\, dt = e^{-t} \int_{0}^{t} e^{-\tau}\, d\tau$$

$$= e^{-t} \left[-e^{-\tau} \right]_{0}^{t}$$

$$= e^{-t} (1 - e^{-t})$$

$$= e^{-t} - e^{-2t}$$

y multiplicamos por $u(t)$ para anular en $t < 0$

Conclusion

$$y_{conv}(t) = (e^{-t}\ e^{-2t})\, u(t) = y_{ODE}(t)$$

ambos coinciden exactamente.

② Comprobacion de $h(t)$ para $x(t) = \delta(t)$

partimos de:

$$y'(t) + y(t) = \delta(t), \quad y(0^-) = 0$$

- para $t \neq 0$, $\delta(t) = 0$, la solucion es homogenea: $y = Ce^{-t}$

- Integramos la EDO en un intervalo $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ alrededor, de $t=0$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y'(t)\,dt + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\,dt \Rightarrow [y]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + O(\varepsilon) = 1$$

Como $y(0^-) = 0$ y el segundo termino tiende a cero al hacer $\varepsilon \to 0$, obtenemos $y(0^+) = 1$

luego para $t > 0$, $y(0^+) = 1$ es la condicion, y la solucion homogenea es:

$$h(t) = y(t) = 1 \cdot e^{-t} = e^{-t}, \quad t > 0$$

entonces con $h(t) = 0$, para $t < 0$

$$\boxed{h(t) = e^{-t}\, u(t)}$$

3 comprobacion manual de la integral de convolucion

partimos de.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

con $x(\tau) = e^{-2\tau} u(\tau)$ y $h(t-\tau) = e^{-(t-\tau)} u(t-\tau)$

1- Acotamos soportes

- $x(\tau) \neq$ solo si $\tau \geq 0$
- $h(t-\tau) \neq$ solo si $t - \tau \geq 0 \iff \tau \leq t$

$\Rightarrow$ Integracion efectiva desde $\tau = \max(0, t-\infty)$

$= 0$ hasta $\tau = \min(t, \infty) = t$

2- integral

$$y(t) = \int_0^t e^{-2\tau} e^{-(t-\tau)}\, d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{-2\tau} e^{\tau}\, d\tau$$

$$= e^{-t}\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau = e^{-t}\left[-e^{-\tau}\right]_0^t = e^{-t}(1-e^{-t})$$

3.- Para forzar $y(t)=0$ si $t<0$, multiplicamos por $u(t)$

$$\boxed{y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\,u(t)}$$

Con esto queda verificado que la integral de convolucion reproduce exactamente la solucion obtenida por EDO