5. EQUIVALÊNCIA LÓGICA e IMPLICAÇÃO LÓGICA

5.1. EQUIVALÊNCIA LÓGICA

5.1.1. Definição

Diz-se uma proposição P(p,q,r,...) é logicamente equivalente ou apenas equivalente a uma proposição Q(p,q,r,...), se as tabelas-verdade destas duas proposições são **idênticas**.

Notação: P(p,q,r,...) $\Leftrightarrow$ Q(p,q,r,...)

Portanto, se as proposições P(p,q,r,...) e Q(p,q,r,...) forem ambas tautológicas ou ambas contradições, então são **equivalentes ($\Leftrightarrow$)**.

OBS: O Símbolo "$\leftrightarrow$" é de operação e o símbolo "$\Leftrightarrow$" é de relação.

5.1.2. Propriedades

É imediato que a relação de equivalência lógica entre proposições goza das propriedades reflexiva (R), simétrica (S) e transitiva (T), isto é, simbolicamente:

(i) (R) P(p,q,r,...) $\Leftrightarrow$ Q(p,q,r,...)

(ii) (S) Se P(p,q,r,...) $\Leftrightarrow$ Q(p,q,r,...), então
Q(p,q,r,...) $\Leftrightarrow$ P(p,q,r,...)

(iii) (T) Se P(p,q,r,...) $\Leftrightarrow$ Q(p,q,r,...) e
Q(p,q,r,...) $\Leftrightarrow$ R(p,q,r,...), então
P(p,q,r,...) $\Leftrightarrow$ R(p,q,r,...)

5.1.3. Exemplos

(1) $\neg (p \wedge \neg p) \Leftrightarrow p \vee \neg p$, se e somente se, é tautológica:

p		**$\neg$p**	**(p $\wedge$ $\neg$p)**	**$\neg$(p $\wedge$ $\neg$p)**	**$\Leftrightarrow$**	**$\neg$p**	**p $\vee$ $\neg$p**
V		F	F	**V**	V	F	**V**
F		V	F	**V**	V	V	**V**

É tautologia, logo são equivalentes. O mesmo acontece com a contradição.

(2) As condicionais "$p \rightarrow p \wedge q$" e "$p \rightarrow q$" têm tabelas-verdade idênticas:

p	**q**		**p ∧ q**	**p → p ∧ p**	**p → q**
V	V		V	**V**	**V**
V	F		F	**F**	**F**
F	V		F	**V**	**V**
F	F		F	**V**	**V**

Por conseqüência, estas condicionais são equivalentes, isto é, subsiste a equivalência lógica:

$$p \rightarrow p \wedge p \Leftrightarrow p \rightarrow q$$

5.2. IMPLICAÇÃO LÓGICA

5.2.1. Definição

Diz-se que uma proposição P(p,q,r,...) implica logicamente ou apenas implica uma proposição Q(p,q,r,...), se Q(p,q,r,...) é verdadeira (V) todas as vezes que P(p,q,r,...) é **verdadeira** (V).

Notação: P(p,q,r,...) $\Rightarrow$ Q(p,q,r,...)

OBS: O Símbolo "$\rightarrow$" é de operação e o símbolo "$\Rightarrow$" é de relação.

5.2.2. Propriedades

É imediato que a relação de implicação lógica entre proposições goza das propriedades reflexiva(R) e transitiva(T), isto é, simbolicamente:

(i) (R) P(p,q,r,...) $\Rightarrow$ Q(p,q,r,...)

(ii) (T) Se P(p,q,r,...) $\Rightarrow$ Q(p,q,r,...) e
Q(p,q,r,...) $\Rightarrow$ R(p,q,r,...), então
P(p,q,r,...) $\Rightarrow$ R(p,q,r,...)

5.2.3. Exemplos

(1) As tabelas-verdade das proposições: $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \leftrightarrow q$, são:

p	**q**		**$p \wedge q$**	**$p \vee q$**	**$p \leftrightarrow q$**
V	V		V	V	V
V	F		F	V	F
F	V		F	V	F
F	F		F	F	V

A proposição "$p \wedge q$" é verdadeira (V) somente na linha 1 e, nesta linha, as proposições "$p \vee q$" e "$p \leftrightarrow q$" também são verdadeiras(V). Logo, a primeira proposição implica cada uma das outras duas proposições, isto é:

$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q \qquad \text{e} \qquad p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$$

(2) "$(p \leftrightarrow q) \wedge p$" implica a proposição "q", pois, a condicional "$(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$" é tautológica conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	**q**		**$p \leftrightarrow q$**	**$(p \leftrightarrow q) \wedge p$**	**$(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$**
V	V		V	V	**V**
V	F		F	F	**V**
F	V		F	F	**V**
F	F		V	F	**V**

Portanto, simbolicamente: $(p \leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$.

EXERCÍCIOS (valendo pontos para a avaliação/prova)

1) Demonstrar por tabelas-verdade as seguintes equivalências:

a) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \rightarrow q$
b) $p \leftrightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$
c) $q \leftrightarrow p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q$
d) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \wedge r$
e) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$
f) $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \wedge \neg r \rightarrow \neg q$

2) Mostrar que as proposições "$x=1 \vee x<3$" e "$\neg(x<3 \wedge x=1)$ não são equivalentes".

3) Provar as implicações:
a) $(\neg p \wedge q) \Rightarrow \neg p$
b) $(p \wedge q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
e) $(p \rightarrow q) \Rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

4) Mostre que p ↔ ¬q não implica p → q.

5) Testes

x		x > 2	x < 8	x > 2 ∧ x < 8	x > 2 ∨ x < 8
7					
3,14					
2					
-1					
8,57					