MATEMÁTICA I - AULA: 13/05/2021

ATENÇÃO: Foi criada no Teams uma nova sala

Nome da sala: **NOVA SALA MATEMÁTICA I**

Chave de acesso: **vdgz7dw** (caso não tenha o nome adicionado)

MATRIZES

- **TIPOS DE MATRIZES**

Algumas matrizes merecem uma atenção especial e apresentam nomes próprios.

1) Matriz quadrada

Uma matriz é quadrada quando o **número de linhas é igual ao número de colunas**. A representação da matriz que possui n linhas e n colunas é A_n (lê-se: matriz quadrada de ordem n).

EXEMPLO

a) $A_{2x2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \\ 4 & -9 & -1 \end{bmatrix}$

Nas matrizes quadradas, existem dois elementos muito importantes, as diagonais: principal e secundaria. As condições para cada diagonal são dadas por:

- **Diagonal principal** é formada por elementos que possuem índices iguais, ou seja, é todo elemento a_{ij} com i = j.
- **Diagonal secundária** é formada por elementos a_{ij} com i + j = n +1, em que n é ordem da matriz.

aij com i=j

aij com i+j = n+1

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonal Secundária

Diagonal Principal

,

onde n é o número de colunas.

2) Matriz identidade

A matriz identidade é uma matriz quadrada que possui **todos os elementos da diagonal principal iguais a 1** e os **demais elementos iguais a 0**, sua lei de formação é:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

A representação dessa matriz é I_n, em que n é a ordem da matriz quadrada.

EXEMPLO

a) $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) Matriz unitária

É uma matriz quadrada de ordem um, ou seja, possui uma linha e uma coluna e, portanto, **apenas um elemento**.

EXEMPLO

a) $A = [-1]_{1x1}$ b) $B = I_1 = (1)_{1x1}$ c) $C = \| 5 \|_{1x1}$

Esses são exemplos de matrizes unitárias, com destaque para matriz B, que é uma **matriz de identidade unitária**.

4) Matriz nula

Uma matriz é dita nula se todos os seus elementos são iguais à zero. A representação da matriz nula de ordem m por n é O_{mxn}.

$$O_{4x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz O é nula de ordem 4.

5) Matriz oposta

Sejam duas matrizes de ordens iguais: $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{ij}]_{mxn}$. Essas matrizes serão chamadas de opostas se, e somente se, $a_{ij} = -b_{ij}$. Desse modo, **os elementos correspondentes devem ser números opostos**. Isso significa que a matriz B = -A.

EXEMPLO

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 7 & 14 & -8 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \qquad B_{3x3} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -9 \\ -7 & -14 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

- > A = - B

6) Matriz Linha

É uma matriz que possui somente uma linha (ordem 1 x n)

EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

7) Matriz Coluna

É uma matriz que possui uma única coluna (ordem m x 1)

EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

8) Matriz Booleana

A matriz booleana é definida como sendo uma matriz, cujos elementos são compostos apenas de zero e um. Matrizes booleanas são úteis porque podem representar objetos abstratos como relações binárias ou gráficos .

EXEMPLO:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x2}$ 2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3}$

Observação: Este tipo de matriz é muito importante em computação. Essas matrizes são utilizadas em Grafo para modelagem de problemas.

OPERAÇÂO COM MATRIZES

➢ Matriz transposta

Seja $A = [a_{ij}]_{mxn}$ uma matriz qualquer. A transposta da matriz A é denotada por A^t e é dada por $A^t = [a_{ij}]_{nxm}$. Ou seja, $\mathbf{A^t}$ é obtida a partir da matriz **A** trocando ordenadamente **as colunas pelas linhas** ou **as linhas pelas colunas**. Observe que na definição foi trocado n por m na matriz transposta.

EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Observação:

1) Os elementos da 1ª coluna da matriz A são os elementos da 1ª linha de A^t.
2) Os elementos da 2ª coluna da matriz A são os elementos da 2ª linha de A^t.

➢ Adição ou soma de matrizes

Dadas as matrizes $A=(a_{ij})_{mxn}$ e $B= (b_{ij})_{mxn}$, a SOMA dessas matrizes é dada pela matriz $C= (c_{ij})_{mxn}$, onde $c_{ij}= a_{ij}+ b_{ij}$ para todo $1\leq i \leq m$ e todo $1\leq j \leq n$.

$$C = A + B$$

Observação: *a soma de matrizes existe se, e somente se, forem de mesma ordem (ou dimensão). Ou seja, as duas matrizes têm que ter m linhas e n colunas.*

$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}_{2x2}$ $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2x2}$ mesma ordem Nesse caso, **é possível** fazer soma	$A=\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}_{2x2}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}_{2x3}$ **ordem diferente** Nesse caso, **não é possível** fazer soma

Visualmente, a soma de matrizes é feita da seguinte forma:

elementos correspondentes

$$\begin{bmatrix} a & b & \dots \\ c & d & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{mxn} + \begin{bmatrix} e & f & \dots \\ g & h & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{mxn} = \begin{bmatrix} (a+e) & (b+f) & \dots \\ (c+g) & (d+h) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{mxn}$$

As reticências indicam que o padrão é o mesmo para os outros elementos.

Observação: *elementos correspondentes são aqueles que ocupam a mesma posição na matriz (mesma linha e mesma coluna).*

EXEMPLO

regra de sinal da multiplicação

(+) x (-) =

1) $$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ \frac{2}{5} & 7 & -3 \end{bmatrix}}_{A_{3x3}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & -7 & 24 \\ 11 & 25 & 10 \\ \frac{3}{2} & -7 & -9 \end{bmatrix}}_{B_{3x3}} = \begin{bmatrix} (1+9) & (-5-7) & (4+24) \\ (3+11) & (2+25) & (0+10) \\ \underbrace{(\frac{2}{5}+\frac{3}{2})}_{\text{soma de fração}} & (7-7) & (-3-9) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & -12 & 28 \\ 14 & 27 & 10 \\ \frac{19}{10} & 0 & -12 \end{bmatrix}}_{C_{3x3}}$$

2) $$\underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_{A_{3x2}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 11 \\ 23 & -17 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}}_{B_{3x2}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 13 \\ -2 & 4 \\ 10 & -40 \end{bmatrix}}_{C_{3x2}} = \begin{bmatrix} (7-2+3) & (3+11+13) \\ (2+23-2) & (1-17+4) \\ (0+5+10) & (4+2-40) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 27 \\ 23 & -12 \\ 15 & -34 \end{bmatrix}}_{D_{3x2}}$$

3) Dadas as matrizes de ordem 2x2, determinar x, y, t e z tal que:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 3 & 2z \end{bmatrix} \overset{\text{soma}}{+} \begin{bmatrix} x & 3 \\ t & z \end{bmatrix} \overset{\text{igualdade}}{=} \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}$$

Solução:

A resolução desse exemplo envolve a **soma de matriz** e **igualdade de matriz**.

Posição 11 : $x + x = 10 \;\rightarrow\; 2x = 10 \;\rightarrow\; x = \frac{10}{2} \;\rightarrow x = 5$

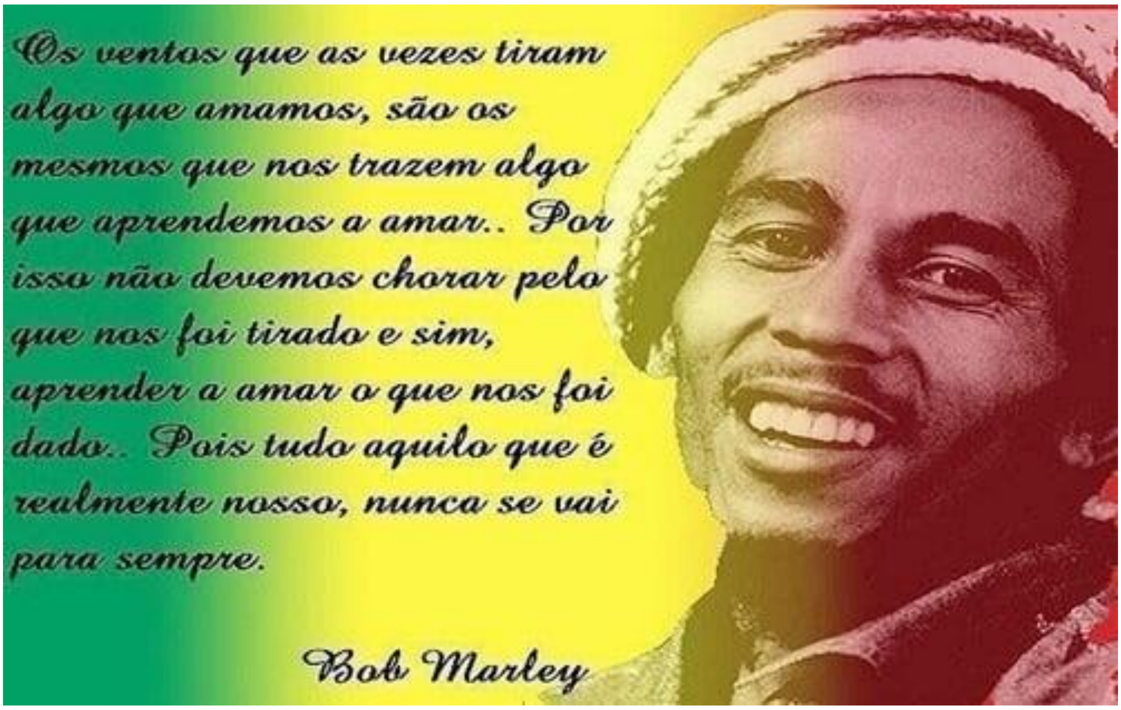
Posição 12 : $y + 3 = -1 \;\rightarrow\; y = -1 - 3 \;\rightarrow\; y = -4$

Posição 21 : $3 + t = 8 \;\rightarrow\; t = 8 - 3 \;\rightarrow\; t = 5$

Posição 22 : $2z + z = 20 \;\rightarrow\; 3z = 20 \;\rightarrow\; z = \frac{20}{3}$

Portanto: **x= 5 , y= -4 , t= 5 e z=** $\mathbf{\frac{20}{3}}$

Posição ij significa: elementos correspondentes (mesma linha e mesma coluna).



LISTA DE EXERCÍCIOS
(Essa atividade não é para nota)
Prazo de entrega até às 23h55 do dia 20-05-2021

Procure fazer a lista de exercício para se preparar para as provas e em caso de dificuldade poder tirar dúvidas ok? O aluno que quiser a correção da lista de exercício, basta enviar resolvida em arquivo pdf no MOODLE na tarefa do dia da aula.

ATENÇÃO: Para entregar a atividade, favor clicar no botão ENVIAR para declarar seu envio como definitivo e não aparecer mensagem de "entrega atrasada".

1) Escreva em forma de tabela a matriz A e B dadas por:

$A = (a_{ij})_{3x3}$, com $a_{ij} = 3.i + j^2$

$B = (b_{ij})_{3x3}$, com $b_{ij} = -i^2 + (-j^2)$

Determinar:

1.1) A+ B

1.2) $B + A^t$

2) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 11 \\ -15 & 7 \end{bmatrix}_{3x2}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -14 & 9 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{3x2}$, determinar:

2.1) A + B

2.2) $B^t + A$

3) Dadas as matrizes de ordem 3x3, determinar x, y, a e b, tal que:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & x+3 \\ 2y-7 & 7a-5 & 2 \\ 5 & 1 & 4b-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3x \\ -7y & 2a & -7 \\ 5 & 0 & 11b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 19 \\ 10 & 13 & -5 \\ 10 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$