MATEMÁTICA I - AULA: 27/05/2021

➢ Matriz Inversa (ou Matriz Invertível)

Como não é possível realizar a operação de divisão com matrizes, os matemáticos criaram técnicas de forma que possa fazer a inversão de uma matriz da mesma forma que se faz para encontrar o inverso de um número real.

- **Definição:**

Seja a matriz quadrada A_{nxn} , a **matriz inversa** para A é representada por A^{-1}_{nxn} , e definida tal que:

$$A_{nxn} \, . \, A^{-1}_{nxn} = A^{-1}_{nxn} \, . \, A_{nxn} = I_{nxn} \quad ,$$

onde I_{nxn} é uma matriz identidade de ordem n, também quadrada (número de linhas é igual ao número de colunas). Para todo $1 \leq i \leq n$ e todo $1 \leq j \leq n$.

Observação 1: *matriz identidade de ordem n (os elementos da diagonal principal são todos 1 (um) e nas outras posições são 0 (zero).*

Observação 2: *Encontrar uma matriz inversa ou matriz invertível é uma forma de resolver equações matriciais que têm a forma A . X = B.*

Observação 3: *É importante lembrar que uma matriz pode não ter inversa. Se uma matriz A possuir inversa, então se diz que A é invertível, sendo que a sua inversa é uma matriz única. Se A não for invertível, então se diz que A é uma matriz singular (quando o determinante é nulo).*

➢ Condição para saber se uma matriz é invertível

Para saber se uma matriz é invertível é necessário encontrar o seu determinante. Se o determinante de uma matriz for diferente de zero, então a matriz é invertível. Caso contrário, ela não possui uma matriz inversa.

- ### Determinante de matriz

A teoria de determinante é válida somente para matriz quadrada. Aqui na disciplina, serão utilizadas matrizes quadradas de ordem 2 para matrizes inversas. Sendo assim, será dado somente o método de resolução de determinante para matriz de ordem 2.

- ### Determinante de matriz quadrada de ordem 2

O determinante de uma matriz de ordem 2 é calculado fazendo a multiplicação dos elementos da diagonal principal e subtraindo a multiplicação dos elementos da diagonal secundária. A representação de determinante de uma matriz A= $(a_{ij})_{2x2}$ é dada por det (A), para todo 1≤ i ≤ n e todo 1≤ j ≤ n. Então:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

DS $(a_{12} \cdot a_{21})$ DP $(a_{11} \cdot a_{22})$

$$\det(A) = \underbrace{a_{11} \cdot a_{22}}_{\text{produto dos elementos de DP}} - \underbrace{a_{12} \cdot a_{21}}_{\text{produto dos elementos de DS}},$$

onde DP = Diagonal Principal e DS = Diagonal Secundária.

Observação: *O cálculo do determinante da matriz será utilizado* ***apenas*** *para verificar* ***se a matriz possui inversa ou não****.*

EXEMPLO:

1) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \frac{2}{5} & 7 \end{bmatrix}_{2x2}$, determinar a inversa da matriz A.

Solução:

1º passo: verificar se a matriz A tem inversa calculando o determinante.

$$\det(A) = \left(1\,.\,7 - \frac{3}{1}\,.\,\frac{2}{5}\right) = \frac{7}{1} - \frac{6}{5} = \frac{35-6}{5} = \frac{29}{5}$$

Como det (A) ≠ 0, então existe a matriz inversa.

Observação: *O número 1 em vermelho significa que quando o numerador é um número inteiro, então para fazer operação com fração coloca-se 1.*

2º passo: utilizar a expressão para determinar a matriz inversa dada por:

$$A_{2x2}\ .\ A^{-1}{}_{2x2} = I_2 \text{ ou simplesmente } A\ .\ A^{-1} = I_2$$

As matrizes A e I_2 são conhecidas. E a matriz A^{-1} é o que quer calcular, sendo assim, os elementos da matriz A^{-1} serão as variáveis a, b, c e d, e representada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2x2}$$

O cálculo da matriz inversa envolve multiplicação de matrizes e igualdade de matrizes. Isso já foi visto. Substituindo as matrizes na expressão para determinar a matriz inversa, tem-se:

$$A\ .\ A^{-1} = I_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \frac{2}{5} & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando as matrizes, tem-se:

$$\begin{bmatrix} (1.a + 3\,.c) & (1.b + 3.\,d) \\ (\frac{2}{5}\,.a + 7\,.c) & (\frac{2}{5}\,.b + 7\,.d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualando as matrizes, obtêm-se dois sistemas de equações dadas por (I) e (II):

$$(\text{I}) \begin{cases} a + 3c = 1 \\ \frac{2}{5}a + 7c = 0 \end{cases} \qquad (\text{II}) \begin{cases} b + 3d = 0 \\ \frac{2}{5}b + 7d = 1 \end{cases}$$

3º passo: Resolver os sistemas de equações pelo método de eliminação de variáveis.

Solução do sistema (I)

eliminar a

$$\begin{cases} a + 3c = 1 & \text{x } (\frac{2}{5}) \\ \frac{2}{5}a + 7c = 0 & \text{x } (-1) \end{cases}$$

Novo sistema após multiplicação

$$\begin{cases} \cancel{\frac{2}{5}a} + \frac{6}{5}c = \frac{2}{5} \\ \cancel{-\frac{2}{5}a} - 7c = 0 \end{cases} \quad +$$

$$\frac{6}{5}c - \frac{7c}{1} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{6c - 35c}{\cancel{5}} = \frac{2}{\cancel{5}}$$

$$-29\,c = 2 \quad \text{x}(-1)$$

$$c = \frac{-2}{29}$$

eliminar c

$$\begin{cases} a + 3c = 1 & \text{x } (-7) \\ \frac{2}{5}a + 7c = 0 & \text{x } (3) \end{cases}$$

Novo sistema após multiplicação

$$\begin{cases} -7a \cancel{-21c} = -7 \\ \frac{6}{5}a \cancel{+ 21c} = 0 \end{cases} \quad +$$

$$\frac{-7a}{1} + \frac{6}{5}a = -7$$

$$\frac{-35a + 6a}{5} = -7$$

$$\frac{-29a}{5} = -7 \quad \text{x}(-1)$$

$$a = \frac{35}{29}$$

Solução do sistema (II)

eliminar b

$$\begin{cases} b + 3d = 0 & \times\left(\frac{2}{5}\right) \\ \frac{2}{5}b + 7d = 1 & \times(-1) \end{cases}$$

Novo sistema após multiplicação

$$\begin{cases} \cancel{\frac{2}{5}b} + \frac{6}{5}d = 0 \\ \cancel{-\frac{2}{5}b} - 7d = -1 \end{cases} \quad +$$

$$\frac{6}{5}d - \frac{7}{1}d = -1$$

$$\frac{6d - 35d}{5} = -1$$

$$-\frac{29}{5}d = -1 \quad \times(-1)$$

$$d = \frac{5}{29}$$

eliminar d

$$\begin{cases} b + 3d = 0 & \times(-7) \\ \frac{2}{5}b + 7d = 1 & \times(3) \end{cases}$$

Novo sistema após multiplicação

$$\begin{cases} -7b - \cancel{21d} = 0 \\ \frac{6}{5}b + \cancel{21d} = 3 \end{cases} \quad +$$

$$-\frac{7}{1}b + \frac{6}{5}b = 3$$

$$\frac{-35b + 6b}{5} = 3$$

$$-\frac{29}{5}b = 3 \quad \times(-1)$$

$$b = \frac{-15}{29}$$

4º passo: Substituindo os valores calculados para a, b, c e d na matriz A^{-1}, tem-se:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{35}{29} & \frac{-15}{29} \\ \frac{-2}{29} & \frac{5}{29} \end{pmatrix}_{2x2}$$

2) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}$, determinar a matriz inversa.

Solução:

1º passo: det (A) = (-2 . 1) – (3 . 5) = -2 – 15 = -17

Como det(A) ≠ o, então existe a matriz inversa.

2º passo: Considere a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2x2}$, substituir as matrizes na expressão para calcular a matriz inversa $A \cdot A^{-1} = I_2$.

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando as matrizes, tem-se:

$$\begin{pmatrix} (-2.a + 3.c) & (-2.b + 3.d) \\ (5.a + 1.c) & (5.b + 1.d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando as matrizes, obtêm-se dois sistemas de equações dadas por (I) e (II):

$$(I) \begin{cases} -2a + 3c = 1 \\ 5a + c = 0 \end{cases} \qquad (II) \begin{cases} -2b + 3d = 0 \\ 5b + d = 1 \end{cases}$$

3º passo: Resolver os sistemas de equações pelo método de eliminação de variáveis.

Solução do sistema (I)

eliminar a

$$\begin{cases} -2a + 3c = 1 & x(5) \\ 5a + c = 0 & x(2) \end{cases}$$

Novo sistema após multiplicação

$$\begin{cases} \cancel{-10a} + 15c = 5 \\ \cancel{10a} + 2c = 0 \end{cases} +$$

$$17c = 5$$

$$c = \frac{5}{17}$$

eliminar c

$$\begin{cases} -2a + 3c = 1 & x(-1) \\ 5a + c = 0 & x(3) \end{cases}$$

Novo sistema após multiplicação

$$\begin{cases} 2a - \cancel{3c} = -1 \\ 15a + \cancel{3c} = 0 \end{cases} +$$

$$17a = -1$$

$$a = \frac{-1}{17}$$

Solução do sistema (II)

eliminar b

$$\begin{cases} -2b + 3d = 0 & x(5) \\ 5b + d = 1 & x(2) \end{cases}$$

Novo sistema após multiplicação

$$\begin{cases} -\cancel{10b} + 15d = 0 \\ \cancel{10b} + 2d = 2 \end{cases} +$$

$$17d = 2$$

$$d = \frac{2}{17}$$

eliminar d

$$\begin{cases} -2b + 3d = 0 & x(-1) \\ 5b + d = 1 & x(3) \end{cases}$$

Novo sistema após multiplicação

$$\begin{cases} 2b - \cancel{3d} = 0 \\ 15b + \cancel{3d} = 3 \end{cases} +$$

$$17b = 3$$

$$b = \frac{3}{17}$$

4º passo: Substituindo os valores calculados para a, b, c e d na matriz A^{-1} , tem-se:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix}_{2x2}$$

"Não existe falta de tempo, existe falta de interesse. Porque quando a gente quer mesmo, a madrugada vira dia. ***Quinta-feira*** *vira sábado e um momento vira oportunidade."*

(autor desconhecido)

LISTA DE EXERCÍCIOS
(Essa atividade não é para nota)
Prazo de entrega até às 23h55 do dia 03-06-2021

Procure fazer a lista de exercício para se preparar para as provas e em caso de dificuldade poder tirar dúvidas ok? O aluno que quiser a correção da lista de exercício, basta enviar resolvida em arquivo pdf no MOODLE na tarefa do dia da aula.

ATENÇÃO: Para entregar a atividade, favor clicar no botão ENVIAR para declarar seu envio como definitivo e não aparecer mensagem de "entrega atrasada".

1) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 5 \\ 2 & 7 & -4 \\ y & z & -3 \end{bmatrix}_{3x3}$, determinar x, y e z para que $A = A^t$

2) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{2x2}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2x2}$, determinar:

2.1) A . B

2.2) $A^2 + 3\,(B\,.\,A) - 7.\,I_2$ (onde I_2 = matriz identidade)

3) Determinar a inversa das matrizes dadas:

3.1) $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-3}{5} \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{2x2}$

3.2) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{3}{4} & 7 \end{bmatrix}_{2x2}$