MATEMÁTICA I - AULA: 22/04/2021

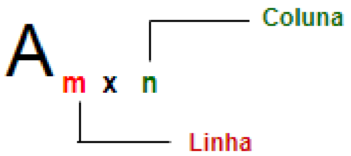
MATRIZES

Matrizes são organizações de informações numéricas ou não em uma tabela retangular formada por linhas e colunas. Essa organização em uma tabela facilita a efetuação de vários cálculos simultâneos com as informações contidas na matriz.

- **DEFINIÇÃO DE MATRIZES**

Toda matriz tem o formato m x n (leia-se: m por n, com m, n $\in$ N*), onde m é o número de linhas e n o número de colunas.

As matrizes são sempre representadas por letras maiúsculas (A, B, C...), que são acompanhadas por índices, nos quais o primeiro número indica a quantidade de linhas, e o segundo, o número de colunas.



- **ORDEM UMA MATRIZ**

A quantidade de linhas (fileiras horizontais) e colunas (fileiras verticais) de uma matriz determina sua ordem. A matriz **A** possui ordem m por n.

- **REPRESENTAÇÃO DE MATRIZES**

As informações contidas em uma matriz são chamadas de elementos e existem diversas maneiras de representar esses elementos nas matrizes, a saber:

- Colchetes: [ ] → forma utilizada na disciplina
- Parênteses: ( )
- Barras Simples: | |
- Barras Duplas: || ||

Essas são as representações mais comuns que se encontram na literatura.

EXEMPLO

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ -> **A ordem da matriz é 2x3**
2 linhas e 3 colunas

2) $B = \begin{bmatrix} -51 & 13 & -1 \end{bmatrix}$ -> **A ordem da matriz é 1x3**
1 linha e 3 colunas

3) $C = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ x & y \end{Vmatrix}$ -> **A ordem da matriz é 2x2**
2 linhas e 2 colunas

Os elementos de uma matriz, isto é, podem ser escritos genericamente utilizando uma representação matemática. O elemento genérico será representado por letras minúsculas (a, b, c...), e, assim como na representação de matrizes, ele também possui índice que indica sua localização. O primeiro número indica a linha em que o elemento está, e o segundo número indica a coluna na qual ele se localiza.

EXEMPLO

Seja a matriz A_{2x3}, dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 16 & 25 \\ 81 & 100 & 9 \end{bmatrix}_{2x3}$$

A listagem de seus elementos a_{ij} é dada por:

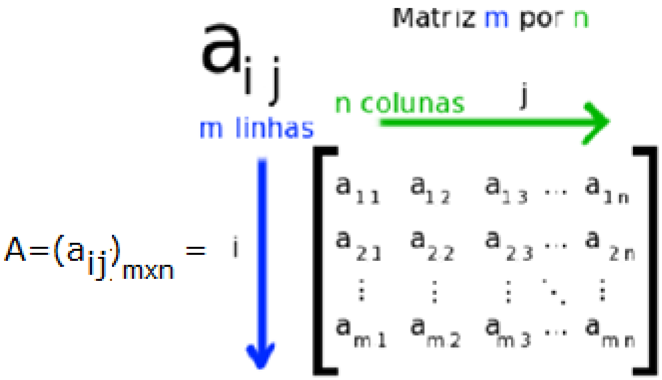
a_{11} **= 4 ->** *(1ª L e 1ª C)* a_{12} **=16 ->** *(1ª L e 2ª C)* a_{13} **= 25** *-> (1ª L e 3ª C)*

a_{21} **= 81 ->** *(2ª L e 1ª C)* a_{22} **= 100 ->** *(2ª L e 2ª C)* a_{23} **= 9 ->** *(2ª L e 3ª C) ,*

onde **L** = Linha e **C** – Coluna.

- **MATRIZ GENERICA**

A matriz genérica é aquela escrita em função de seus elementos genéricos.



$A = (a_{ij})_{mxn}$,

onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, com $i,j \in \mathbb{N}^*$

O significado de alguns elementos a_{ij} para entender melhor.

- $\mathbf{a_{11}}$ representa o elemento da linha 1 e coluna 1.
- $\mathbf{a_{32}}$ representa o elemento da linha 3 e coluna 2.
- $\mathbf{a_{22}}$ representa o elemento da linha 2 e coluna 2.
- $\mathbf{a_{mn}}$ representa o elemento da linha m e coluna n.

EXEMPLO

1) Determine a matriz $A = [a_{ij}]_{2x2}$, que possui a seguinte lei de formação $a_{ij} = j^2 - 2i$.

Pelos dados do enunciado, tem-se que a matriz A é de ordem 2 por 2, ou seja, possui duas linhas e duas colunas, portanto, a matriz genérica é dada por:

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

Para determinar cada elemento a_{ij} é necessário substituir os valores de i e de j. na lei de formação dada por $a_{ij} = j^2 - 2i$.

$$a_{11} = (1)^2 - 2(1) = -1$$
$$a_{12} = (2)^2 - 2(1) = 2$$
$$a_{21} = (1)^2 - 2(2) = -3 \qquad -> \qquad A_{2X2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$a_{22} = (2)^2 - 2(2) = 0$$

2) Determine a matriz $A = [a_{ij}]_{2x3}$, que possui a seguinte lei de formação

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j \text{ , se } i = j \\ \dfrac{1}{2}\ i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

SOLUÇÃO

A matriz genérica de ordem 2x3 é dada por:

$$A_{2x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Cálculo dos elementos a_{ij}.

$$\boxed{\mathbf{a_{11}}} = 1 + 1 = 2$$

$$\boxed{\mathbf{a_{12}}} = \frac{1}{2}(1) - 2 = \frac{1}{2} - 2 = \frac{1-4}{2} = \frac{-3}{2}$$ soma de fração (fazer mmc)

$$\boxed{\mathbf{a_{13}}} = \frac{1}{2}(1) - 3 = \frac{1}{2} - 3 = \frac{1-6}{2} = \frac{-5}{2}$$ soma de fração (fazer mmc)

$$\boxed{\mathbf{a_{21}}} = \frac{1}{2}(2) - 1 = \frac{2}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\boxed{\mathbf{a_{22}}} = 2 + 2 = 4$$

$$\boxed{\mathbf{a_{23}}} = \frac{1}{2}(2) - 3 = \frac{2}{2} - 3 = 1 - 3 = -2$$

Observação:

$\boxed{}$ onde i=j e $\boxed{}$ onde i≠j

Portanto,

$$A_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

3) Determine a matriz A = $[a_{ij}]_{2x2}$, tal que $a_{ij} = f(i) + f(j)$, onde $f(x) = x + 3$.

SOLUÇÃO

A matriz genérica de ordem 2x2 é dada por:

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

1º passo: determinar os valores de $f(x) = x+3$

Para $x=1$ -> $f(1) = 1 +3 = 4$ -> **$f(1)=4$**

Para $x=2$ -> $f(2) = 2 +3 = 5$ -> **$f(2)= 5$**

2º passo: cálculo dos elementos a_{ij} .

$\mathbf{a_{11}} = f(1) + f(1) = \mathbf{4 + 4} = 8$
$\mathbf{a_{12}} = f(1) + f(2) = \mathbf{4 + 5} = 9$
$\mathbf{a_{21}} = f(2) + f(1) = \mathbf{5} + \mathbf{4} = 9$
$\mathbf{a_{22}} = f(2) + f(2) = \mathbf{5} + \mathbf{5} = 10$

Observação: *os valores de f(1)=4 e f(2)=5 foram substituídos nas equações.*

Portanto,

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Igualdade de matrizes

Duas matrizes A= (aij)mxn e B= (bij)mxn são iguais se:

- Se apresentarem a mesma ordem (ou mesma dimensão);
- Se todos os elementos de A forem iguais aos elementos correspondentes de B (elementos correspondentes são aqueles com os mesmos índices, ou seja, aqueles que estão na mesma linha e mesma coluna).

EXEMPLO

1) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2x2}$; $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2x2}$

Solução:

A = B $\longrightarrow \begin{cases} a_{11} = b_{11} \\ a_{12} = b_{12} \\ a_{21} = b_{21} \\ a_{22} = b_{22} \end{cases}$

Observe que as matrizes apresentam a mesma ordem (ou mesma dimensão).

2) $A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}_{2x2}$; $B = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}_{2x2}$

Observe que as matrizes apresentam a mesma ordem e os elementos correspondentes são iguais (elementos de mesma figura).

3) Dadas as matrizes A e B, determinar o valor de x e y para que A=B.

$A = \begin{bmatrix} x+3 & 11 \\ 9 & 2y-7 \end{bmatrix}_{2x2}$; $B = \begin{bmatrix} -5 & 11 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}_{2x2}$

Solução:

A = B $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} x+3 & 11 \\ 9 & 2y-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 11 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$

Para que a matriz A seja igual à matriz B, considere as seguintes igualdades:

Na posição a11 = b11 -> x+3 = -5 -> x= -5 -3 -> x= -8

Na posição a12 = b12 -> 11 = 11

Na posição a21 = b21 -> 9 = 9

Na posição a22 = b22 -> 2y - 7 = 13 -> 2y= 13 + 7 -> 2y = 20 -> y =

Portanto: x= -8 e y= 10

Observação: para determinar x e y utilizou-se a resolução da equação de 1º grau.

4) Dadas as matrizes A e B, determinar o valor de a, b, x e y para que A=B.

$A = \begin{bmatrix} a+b & x-y \\ -3a+2b & -x+2y \end{bmatrix}_{2x2}$; $B = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}_{2x2}$

Solução:

Como as duas matrizes são de mesma ordem, então os seus elementos correspondentes devem ser iguais, assim obtém-se um sistema de equações em que é possível encontrar os valores de a, b, x e y.

Observação1: Utilizar nesse exercício o método da eliminação de variáveis para resolução de sistema de equação.

Observação2: O sistema é obtido fazendo a 1ª coluna de A = 1ª coluna de B e a 2ª coluna de A = 2ª coluna de B.

1ª coluna de A = 1ª coluna de B

Eliminar a

$$\begin{cases} a + b = 12 & \times (3) \\ -3a + 2b = 9 \end{cases}$$

- - Multiplicando a 1ª linha por 3, obtém-se o novo sistema dado abaixo:

$$\begin{cases} \cancel{3a} + 3b = 36 \\ \cancel{-3a} + 2b = \ \ 9 \end{cases} \quad + \quad \textbf{(somar as equações)}$$

$$0 \qquad +5b = 45$$

$$b = \frac{45}{5} \quad \rightarrow \quad \boxed{b = 9}$$

1ª coluna de A = 1ª coluna de B

Eliminar b

$$\begin{cases} a + b = 12 & \times (-2) \\ -3a + 2b = 9 \end{cases}$$

- Multiplicando a 1ª linha por 2, obtém-se o novo sistema dado abaixo:

$$\begin{cases} -2a - \cancel{2b} = -24 \\ -3a + \cancel{2b} = \ \ 9 \end{cases} \quad + \quad \textbf{(somar as equações)}$$

$$-5a \quad 0 \quad = -15 \qquad x(-1)$$

$$5a \quad = 15$$

$$a = \frac{15}{5} \quad \rightarrow \quad \boxed{a = 3}$$

2ª coluna de A = 2ª coluna de B

Eliminar x

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

- Somar as duas equações.

$$\begin{cases} \cancel{x} - y = 3 \\ \cancel{-x} + 2y = 2 \end{cases} \quad + \quad \textbf{(somar as equações)}$$

$$0 \qquad +y = 5$$

$$\boxed{y = 5}$$

2ª coluna de A = 2ª coluna de B

Eliminar y

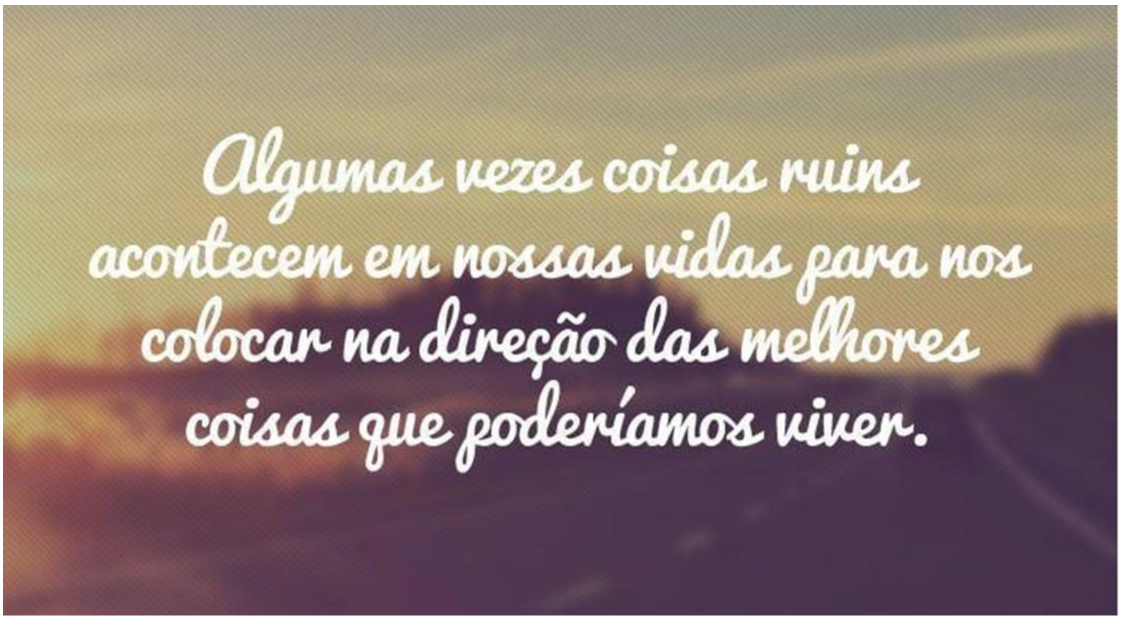
$$\begin{cases} x - y = 3 & \times (2) \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

- Multiplicando a 1ª linha por 2, obtém-se o novo sistema dado abaixo:

$$\begin{cases} 2x - \cancel{2y} = 6 \\ -x + \cancel{2y} = \ \ 2 \end{cases} \quad + \quad \textbf{(somar as equações)}$$

$$x \quad 0 \quad = 8$$

$$\boxed{x = 8}$$



LISTA DE EXERCÍCIOS
(Essa atividade não é para nota)
Prazo de entrega até às 23h55 do dia 27-04-2021

Procure fazer a lista de exercício para se preparar para as provas e em caso de dificuldade poder tirar dúvidas ok? O aluno que quiser a correção da lista de exercício, basta enviar resolvida em arquivo pdf no MOODLE na tarefa do dia da aula.

ATENÇÃO: Para entregar a atividade, favor clicar no botão ENVIAR para declarar seu envio como definitivo e não aparecer mensagem de "entrega atrasada".

1- Escreva em forma de tabela as matrizes dadas:

1.1- A = $(a_{ij})_{3x3}$, com $a_{ij} = \frac{1}{2}(-i)^2 - \frac{2}{3}(-(j)^2)$

1.2- A = $(a_{ij})_{4x4}$, com $a_{ij} = -i^2 - j^2$

1.3- A = $(a_{ij})_{4x4}$, com $a_{ij} = \frac{-3}{4}i + \frac{1}{3} + \frac{5}{6}j^2$

1.4- A = $(a_{ij})_{3x3}$, com $a_{ij} = \frac{-7}{2}\text{i} + \frac{5}{3}j^2$

2- Construir a matriz A = $(a_{ij})_{3x2}$, para $a_{ij} = f(i) + f(j)$, onde $f(x) = x + 1$

3- O símbolo delta de Kronecker é definido por: $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & se\ i \neq j \\ 1, & se\ i = j \end{cases}$, construa a matriz A = $(a_{ij})_{3x4}$, para $a_{ij} = 3i + j^2\ \delta_{ij}$

4- Seja A = $(a_{ij})_{100x100}$, onde $a_{ij} = i^3 + 2j + 3$. Determinar a_{35} , a_{502} , a_{1010} , a_{39} , a_{7060}

5- Construir a matriz A = $(a_{ij})_{3x3}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} i - j, & se\ i \neq j \\ i + j, & se\ i = j \end{cases}$

6) Escreva em forma de tabela a matriz A = $(a_{ij})_{3x3}$, para $a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{se i} < \text{j} \\ 1, & \text{se } i > j \\ 0, & \text{se i} = \text{j} \end{cases}$

7- Determinar os valores de x, y, z e w para que A=B.

$$A = \begin{bmatrix} -5x - 4 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & y - 12 \\ z^2 & 3 & -w + 8 \end{bmatrix}_{3x3} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -19 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & -12 \\ 144 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

8- Determinar os valores de x, y, t e z para que A=B.

$$A = \begin{bmatrix} 2x & 3y \\ z + t & 6 \end{bmatrix}_{2x2} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 1 & 2z \end{bmatrix}_{2x2}$$

9- Determinar os valores de x para que A=B.

$$A = \begin{bmatrix} x^2 - 6x + 9 & 0 \\ x^2 - 3x - 4 & 1 \end{bmatrix}_{2x2} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}$$

Observação: As raízes iguais das duas equações de segundo grau será o valor de x na resposta.

10- Determinar os valores de x, y, a e b para que A=B.

$$A = \begin{bmatrix} 2x + 3y & 5a - b \\ 3x - y & -2a + 3b \end{bmatrix}_{2x2} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}_{2x2}$$