3. CONSTRUÇÃO DE TABELAS da VERDADE

3.1. TABELA da VERDADE DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Na construção de tabelas da verdade, dadas várias proposições simples como **p, q, r**,..., podemos combiná-las pelos conectivos lógicos:

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$$

E construir proposições compostas, tais como:

$P(p,q) = \neg p \vee (p \rightarrow q)$
$Q(p,q) = (p \leftrightarrow \neg q) \wedge q$
$R(p,q,r) = (p \rightarrow \neg q \vee r) \wedge \neg (q \vee (p \leftrightarrow \neg r))$
$S(r,s) = (p \vee q) \rightarrow (\neg p)$
$(x \quad \rightarrow \quad y)$

Resolução de S(r,s).

p	**q**	**$p \vee q$**	**$\neg p$**	**$(p \vee q) \rightarrow (\neg p)$**
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	V

Então, com o emprego das tabelas da verdade que vimos anteriormente na apostila de operações lógicas fundamentais:

$\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$

É possível construir a tabela da verdade correspondente a qualquer proposição composta dada, tabela da verdade esta que mostrará exatamente os casos em que a proposição composta será verdadeira(V) ou falsa(F), admitindo-se, como é sabido, que o seu valor lógico só depende dos valores lógicos das proposições simples componentes.

3.2. NÚMERO DE LINHAS DE UMA TABELA da VERDADE

O número de linhas de uma tabela da verdade de uma proposição composta depende do número de proposições simples que a integram, sendo dado pelo seguinte teorema:

A tabela da verdade de uma proposição composta com n proposições simples componentes contém 2^n linhas.

$$2^n = c$$

n = número de variáveis
c = número de combinações

3.3. CONSTRUÇÃO DA TABELA da VERDADE DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Na prática, começa-se por contar o número de proposições simples que a integram. Se há n proposições simples componentes: p_1, p_2,..., p_n, então a tabela da verdade contém 2^n linhas. Posto isto, à 1ª proposição simples p_1 atribuem-se $2^n/2 = 2^{n-1}$ valores V seguidos de 2^{n-1} valores F; à 2ª proposição simples p_2 atribuem-se $2^n/4 = 2^{n-2}$ valores V, seguidos de 2^{n-2} valores F, seguidos de 2^{n-2} valores V, seguidos, finalmente, de 2^{n-2} valores F; e assim por diante. De modo genérico, a k-ésima proposição simples p_k($k <= n$) atribuem-se alternadamente $2^n/2^k = 2^{n-k}$ valores V seguidos de igual número de valores F.

Ex: Suponhamos uma proposição composta com quatro (4) proposições simples componentes, a tabela da verdade conterá $2^4 = 16$ linhas, e os grupos de valores V e F se alternaram de 8 em 8 para a 1ª proposição simples p_1, de 4 em 4 para a 2ª proposição simples p_2, de 2 em 2 para a 3ª proposição simples p_3, e, enfim, de 1 em 1 para a 4ª proposição simples p_4.

3.4. EXEMPLIFICAÇÃO

Construir a tabela da verdade da proposição:

$P(p,q) = \neg (p \wedge q) \vee \neg(q \leftrightarrow p)$
1ª Resolução: forma-se, em primeiro lugar, o par de colunas correspondentes às duas proposições componentes p e q. Em seguida, formam-se as colunas para $p \wedge q$, $q \leftrightarrow p$, $\neg(p \wedge q)$, $\neg(q \leftrightarrow p)$ e afinal forma-se a coluna relativa aos valores lógicos da proposição composta dada $\neg(p \wedge q) \vee \neg(q \leftrightarrow p)$.

p	q		p ∧ q	q ↔ p	¬(p ∧ q)	¬(q ↔ p)	¬(p ∧ q) ∨ ¬(q ↔ p)
V	V		V	V	F	F	F
V	F		F	F	V	V	V
F	V		F	F	V	V	V
F	F		F	V	V	F	V

2ª Resolução: forma-se primeiro, as colunas correspondentes às duas proposições simples p e q. Em seguida, à direita, traça-se uma coluna para cada uma dessas proposições e para cada um dos conectivos que figuram na proposição composta dada.

p	q		¬	(p	∧	q)	∨	¬	(q	↔	p)
V	V		F	V	V	V	**F**	F	V	V	V
V	F		V	V	F	F	**V**	V	F	F	V
F	V		V	F	F	V	**V**	V	V	F	F
F	F		V	F	F	F	**V**	F	F	V	F
			3	1	2	1	**4**	3	1	2	1

Portanto, simbolicamente:

P(VV) = F,   P(VF) = V,   P(FV) = V,   P(FF) = V

Ou seja, abreviadamente:

P(VV,VF,FV,FF) = FVVV

3.5. VALOR LÓGICO DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Dada uma proposição composta P(p,q,r,...), pode-se sempre determinar o seu valor lógico (V ou F) quando são dados ou conhecidos os valores lógicos respectivos das proposições componentes p, q, r, ...

Ex:
(**1**) Sabendo que valores lógicos das proposições p e q são respectivamente V e F, determinar o valor lógico (V ou F) da proposição:

$P(p,q) = \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Resolução: Temos, sucessivamente:

$V(P) = \neg(V \vee F) \leftrightarrow \neg V \wedge \neg F = \neg V \leftrightarrow F \wedge V = F \leftrightarrow F = V$

(**2**) $P(p,q) = (p \vee q) \rightarrow (r \wedge s) : \{V,F\} \rightarrow \{V,F\}$

Resolução: $P(V,F,V,F) = (V \vee F) \rightarrow (V \wedge F) = V \rightarrow F = F$

(**3**) Sejam as proposições p: pi = 3 e q: 2/2 = 0. Determinar o valor lógico (V ou F) da proposição:

$P(p,q) = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p \wedge q)$

Resolução: As proposições componentes p e q são ambas falsas, isto é, V(p) = F e V(q) = F.

Portanto:

$V(P) = (F \rightarrow F) \rightarrow (F \rightarrow F \wedge F) = V \rightarrow (F \rightarrow F) = V \rightarrow V = V$

(**4**) Sabendo que V(r) = V, determinar o valor lógico (V ou F) da proposição:
$p \rightarrow \neg q \vee r$.

Resolução: Como r é verdadeira(V), a disjunção ($\neg q \vee r$) é verdadeira(V). Logo, a condicional dada é verdadeira(V), pois, o seu conseqüente é verdadeiro(V).

3.6. USO DE PARÊNTESES

O uso de parênteses indica as prioridades e modificam as tabelas da verdade. O uso incorreto pode trazer ambiguidades.
Vamos adotar à seguinte convenção.

a) O conectivo ($\neg$) negação é usado para o argumento mais próximo.

Por ex: $\neg p \wedge q = (\neg p) \wedge q$

b) A ordem de precedência é:

(1) $\neg$ (2) $\wedge$ (3) $\vee$ (4) $\rightarrow$ (5) $\leftrightarrow$

Ex:

$p \vee q \rightarrow r$	significa	$(p \vee q) \rightarrow r$
$p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$	significa	$p \leftrightarrow (q \rightarrow r)$
$p \vee q \wedge r$	significa	$p \vee (q \wedge r)$

EXERCÍCIOS (valendo pontos para a avaliação/prova)

1) Construir as tabelas da verdade das seguintes proposições, passando pelas três resoluções citadas na apostila.

a) $(q \wedge r) \vee s$

b) $[q \vee r] \rightarrow [(q \vee s) \rightarrow (p \vee s)]$

c) $(p \rightarrow r) \rightarrow q$

2) Construir as tabelas da verdade das seguintes proposições e em seguida determinar P(VV,VF,FV,FF) no caso de arranjos binários e P(VVV,VVF,VFV,VFF,FVV,FVF,FFV,FFF) no caso de arranjos ternários.

a) $\neg(p \vee \neg q)$

b) $\neg(p \rightarrow \neg q)$

c) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$

d) $\neg p \rightarrow (q \rightarrow p)$

e) $(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge q$

f) $q \leftrightarrow \neg q \wedge p$

g) $(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow q \rightarrow p$

h) $(p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow \neg p \wedge q$

i) $\neg p \wedge r \rightarrow q \vee \neg r$

j) $p \rightarrow r \leftrightarrow q \vee \neg r$

l) $p \rightarrow (p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow q \vee r$

m) $(p \wedge q \rightarrow r) \vee (\neg p \leftrightarrow q \vee \neg r)$

3) Sabendo que as proposições x=0 e x=y são verdadeiras e que as proposições y=z e y=t são falsas, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

a) $x=0 \wedge x=y \rightarrow y \# z$

b) $x\#0 \vee y=t \rightarrow y=z$

c) $x\#y \vee y\#z \rightarrow y=t$

d) $x\#0 \vee x\#y \rightarrow y\#z$

e) $x=0 \rightarrow (x\#y \vee y\#t)$

4) Suprimir o maior número possível de parêntesis nas seguintes proposições:

a) $((q \leftrightarrow (r \vee q)) \leftrightarrow (p \wedge (\neg(\neg q))))$

b) $((p \wedge (\neg(\neg q))) \leftrightarrow (q \leftrightarrow (r \vee q)))$
c) $(((p \vee q) \rightarrow (\neg r)) \vee ((((\neg q) \wedge r) \wedge q)))$

5) Sabendo que os valores lógicos das proposições p,q e r são respectivamente V, F e F, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:
a) $(p \leftrightarrow p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
b) $(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow [(p \vee r) \wedge q]$
c) $(p \wedge q) \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$