

2. OPERAÇÕES LÓGICAS SOBRE PROPOSIÇÕES

Operações Lógicas são certas operações que, quando pensamos, efetuamos muitas vezes sobre proposições.

Operações Lógicas fundamentais: **negação, conjunção, disjunção, disjunção exclusiva, condicional e bicondicional.**

2.1. NEGAÇÃO (\neg) (\sim) (Não)

Chama-se negação de uma proposição **p** a proposição representada por “**não p**”, cujo valor lógico é a verdade(V) quando **p** é falsa e a falsidade(F) quando **p** é verdadeira.

Simbolicamente, a negação de **p** indica-se pela notação “ $\neg p$ ”, que se lê: “**não p**”.

Tabela da Verdade:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Ou seja, pelas igualdades: $\neg V = F$, $\neg F = V$ e $V(\neg p) = \neg V(p)$

Ex:

(1) **q**: $7 < 3$ (F) e $\neg q$: $7 < 3$ (V), portanto, $V(\neg q) = \neg V(q) = \neg F = V$

(2) **p**: $2 + 3 = 5$ (V) e $\neg p$: $2 + 3 \neq 5$ (F), portanto, $V(\neg p) = \neg V(p) = \neg V = F$

Na linguagem comum a negação efetua-se, nos casos mais simples, antepondo o advérbio “**não**” ao verbo da proposição dada. Assim, p. ex, a negação da proposição:

p: O Sol é uma estrela. $\neg p$: O Sol não é uma estrela.

Ou expressões tais como: “**não é verdade que**”, “**é falso que**”.

Ex: q: Paulo é policial;

$\neg q$: Não é verdade que Paulo é policial; ou $\neg q$: É falso que Paulo é policial.

2.2. CONJUNÇÃO (\wedge) (E)

Chama-se conjunção de duas proposições **p** e **q** a proposição representada por “**p e q**”, cujo valor lógico é a verdade(V) quando as proposições **p** e **q** são ambas verdadeiras e a falsidade(F) nos demais casos.

Simbolicamente, a conjunção de duas proposições **p** e **q** é indicada com a notação: “ **$p \wedge q$** ”, que se lê: “**p e q**”.

Tabela da Verdade:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ou seja, pelas igualdades: $V \wedge V = V$, $V \wedge F = F$, $F \wedge V = F$, $F \wedge F = F$ e $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q)$

Ex:

(1) **p**: A neve é branca. (V)

$\neg q$: $2 < 5$ (V), portanto temos: **p e q**: A neve é branca e $2 < 5$ (V).

$$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge V = V.$$

2.3. DISJUNÇÃO (\vee) (OU)

Chama-se disjunção de duas proposições **p** e **q** a proposição representada por “**p ou q**”, cujo valor lógico é a verdade(V) quando ao menos uma das proposições **p** e **q** é verdadeira e a falsidade(F) quando as proposições **p** e **q** são ambas falsas.

Simbolicamente, a disjunção de duas proposições **p** e **q**, é indicada com a notação: “ **$p \vee q$** ”, que se lê: “**p ou q**”.

Tabela da Verdade:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ou seja, pelas igualdades:

$$V \vee V = V, V \vee F = V, F \vee V = V, F \vee F = F \text{ e } V(p \vee q) = V(p) \vee V(q)$$

Ex:

(1) **p**: Paris é capital da França (V)

q: 9-4=5 (V), portanto temos, $p \vee q$: Paris é capital da França **ou** 9-4=5 (V)

$$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee V = V$$

2.4. DISJUNÇÃO EXCLUSIVA ($\underline{\vee}$) (**OU**)

Na linguagem comum a palavra “**ou**” tem dois sentidos. Assim, p. ex: consideremos as duas seguintes proposições compostas:

P: Carlos é médico ou professor (disjunção inclusiva) - **fraca**

Q: Mário é alagoano ou gaúcho (disjunção exclusiva) - **forte**

De um modo geral, chama-se disjunção exclusiva de duas proposições **p** e **q** a proposição representada simbolicamente por “ **$p \underline{\vee} q$** ”, que se lê: “**ou p ou q**” ou “**p ou q**”, mas não ambos, cujo valor lógico é a verdade(V) somente quando **p** ou **q** é verdadeira, mas não quando **p** e **q** são ambas verdadeiras, e a falsidade(F) quando **p** e **q** são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Tabela da Verdade:

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ou seja, pelas igualdades:

$$V \underline{\vee} V = F, V \underline{\vee} F = V, F \underline{\vee} V = V, F \underline{\vee} F = F \text{ e } V(p \underline{\vee} q) = V(p) \underline{\vee} V(q)$$

2.5. CONDICIONAL (\rightarrow) (SE .. ENTÃO)

Chama-se proposição condicional ou apenas condicional uma proposição representada por “**se p então q**”, cujo valor lógico é a falsidade(F) no caso em que **p** é verdadeira e **q** é falsa e a verdade(V) nos demais casos.

Simbolicamente, a condicional de duas proposições **p** e **q** é indicada com a notação: “ **$p \rightarrow q$** ”, que se lê de uma das seguintes maneiras:

- (i) **p** é condição suficiente para **q**
- (ii) **q** é condição necessária para **p**

Na condicional “**p** → **q**”, diz-se que **p** é o antecedente e **q** o conseqüente. O símbolo “→” é chamado símbolo de implicação. O valor lógico da condicional de duas proposições

Tabela da Verdade:

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ou seja, pelas igualdades:

$V \rightarrow V = V$, $V \rightarrow F = F$, $F \rightarrow V = V$, $F \rightarrow F = V$ e $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q)$

Ex:

- (1) **p**: Galois morreu em duelo (V)
q: pi é um número real (V)
p → **q**: **Se** Galois morreu em duelo, **então** pi é um número real (V)
 $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow V = V$
- (2) **p**: O mês de Maio tem 31 dias (V)
q: A Terra é plana (F)
p → **q**: **Se** o mês de Maio tem 31 dias, **então** a Terra é plana (F)
 $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow F = F$
- (3) **p**: Dante escreveu os Lusíadas (F)
q: Cantor criou a Teoria dos Conjuntos (V)
p → **q**: **Se** Dante escreveu os Lusíadas, **então** Cantor criou a Teoria dos Conjuntos (V)
 $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow V = V$
- (4) **p**: Santos Dummont nasceu no Ceará (F)
q: O ano tem nove meses (F)
p → **q**: **Se** Santos Dummont nasceu no Ceará, **então** o ano tem nove meses (V)
 $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow F = V$

NOTA: Uma condicional **p** → **q** não afirma que o conseqüente **q** se deduz ou é conseqüência do antecedente **p**. Assim, p. ex., as condicionais:

7 é um número ímpar \rightarrow Brasília é uma cidade
 $3+5 = 9 \rightarrow$ Santos Dummont nasceu no Ceará

Não estão a afirmar, de modo nenhum, que o fato de “Brasília ser uma cidade” se deduz do fato de “7 ser um número ímpar” ou que a proposição “Santos Dummont nasceu no Ceará” é consequência da proposição “ $3+5 = 9$ ”. O que uma condicional afirma é unicamente uma relação entre os valores lógicos do antecedente e de consequente de acordo com a tabela da verdade anterior.

2.6. BICONDICIONAL (\leftrightarrow) (SE E SOMENTE SE)

Chama-se proposição bicondicional ou apenas condicional uma proposição representada por “**p se e somente se q**”, cujo valor lógico é a verdade(V) quando **p** e **q** são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a falsidade(F) nos demais casos. Simbolicamente, a bicondicional de duas proposições **p** e **q** é indicada com a notação: **p \leftrightarrow q**, que também se lê de uma das seguintes maneiras:

- (i) **p** é condição necessária e suficiente para **q**
- (ii) **q** é condição necessária e suficiente para **p**

O valor lógico da bicondicional de duas proposições

Tabela da Verdade:

p	q	p \leftrightarrow q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ou seja, igualdades:

$V \leftrightarrow V = V$, $V \leftrightarrow F = F$, $F \leftrightarrow V = F$, $F \leftrightarrow F = V$ e $V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q)$

Ex:

- (1) **p**: Roma fica na Europa (V)
q: A neve é branca (V)
p \leftrightarrow q: Roma fica na Europa **se e somente se** a neve é branca (V)
 $V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow V = V$
- (2) **p**: Lisboa é capital de Portugal (V)
q: $\tan \pi/4 = 3$ (F)
p \leftrightarrow q: Lisboa é capital de Portugal **se e somente se** $\tan \pi/4 = 3$ (F)
 $V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow F = F$

- (3) **p**: Vasco da Gama descobriu o Brasil (F)
q: Tiradentes foi enforcado (V)
p \leftrightarrow **q**: Vasco da Gama descobriu o Brasil **se e somente se** Tiradentes foi enforcado (F)

$$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow V = F$$

- (4) **p**: A Terra é plana (F)
q: 2 é um número ímpar (F)
p \leftrightarrow **q**: A Terra é plana **se e somente se** 2 é um número ímpar (V)

$$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow F = V$$