8. SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÕES BOOLEANAS UTILIZANDO DIAGRAMAS DE VEITCH-KARNAUGH

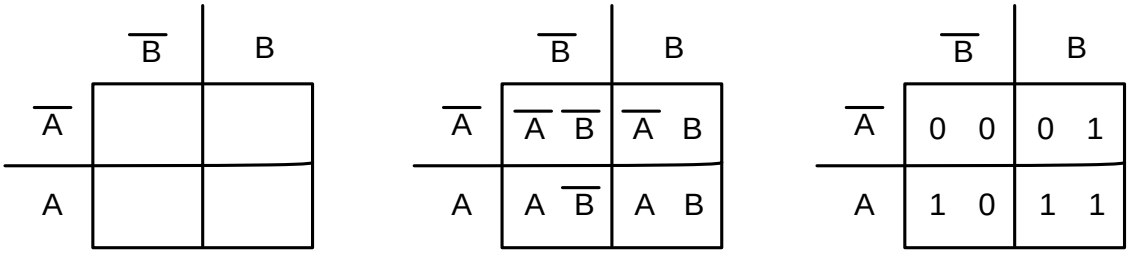
8.1. INTRODUÇÃO

No Capítulo 7, trabalhou se com os circuitos lógicos sem a preocupação com as simplificações desses circuitos. Na prática, porém, estes circuitos obtidos admitem geralmente simplificações.

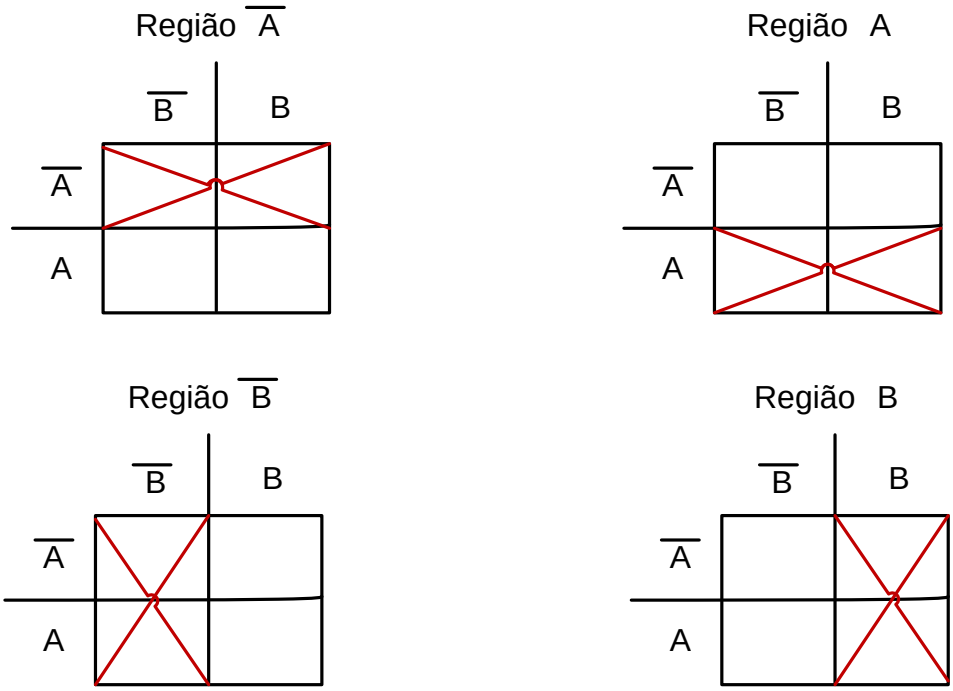
Para entrar no estudo da simplificação dos circuitos lógicos, torna-se necessário fazer um breve estudo sobre **Diagramas (Mapas) de Veitch-Karnaugh**. Estes diagramas ou mapas permitem a simplificação de maneira mais rápida dos casos extraídos de tabelas da verdade, obtidas de situações quaisquer. Serão estudados os diagramas para 02, 03, 04 e 05 variáveis.

8.2. DIAGRAMA VEITCH-KARNAUGH para 02 Variáveis

As figuras a seguir mostram a formação de um diagrama de Veitch-Karnaugh para 02 variáveis:



No mapa, encontram-se todas as possibilidades assumidas entre as variáveis A e B. As figuras a seguir mostram todas as regiões do mapa.



Como simplificar circuitos lógicos utilizando os mapas de duas variáveis:

1. Dada a expressão booleana, correspondente ao circuito lógico combinacional, inicie a localização junto ao mapa de cada uma das partes da expressão;

2. Após as localizações (item 1), deve-se proceder com o agrupamento dos valores “1”. Em mapas de duas variáveis o agrupamento pode ser feito por

intermédio da formação de pares e quadras (mapa totalmente preenchido de 1 constitui-se uma quadra);

3. Após a execução dos itens 1 e 2, obtém-se a expressão simplificada. Ver ilustrações a seguir:

$S = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,B$

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	1	1
A	0	0

Cada parte da expressão corresponde ao valor "1". As demais partes do mapa devem ser preenchidos com "0"

Expressão Simplificada: $S = \overline{A}$

$S = \overline{A}\,B + A\,\overline{B} + A\,B$

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	0	1
A	1	1

P1 = Par Vermelho (vertical) Região B
P2 = Par Azul (Horizontal) Região A

S = P1 + P2

Expressão Simplificada: $S = A + B$

EXERCÍCIOS para EXPLICAÇÃO

1) Localizar no mapa e obter a expressão simplificada correspondente:

a) $S = A\,\overline{B} + A\,B$

b) $S = \overline{A}\,\overline{B} + A\,\overline{B} + A\,B$

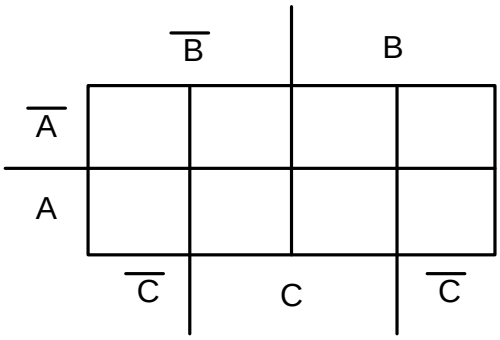
2) Simplificar o Circuito do Semáforo de 02 Ruas construído nas aulas anteriores, conforme tabela verdade apresentada a seguir. Em seguida, traçar uma comparação das expressões e os circuitos originais (antes da

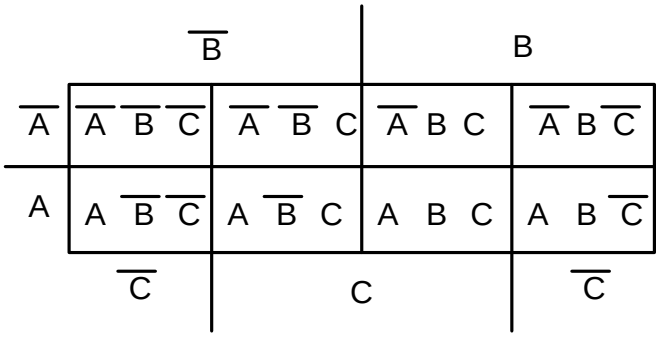
simplificação) com as expressões e circuitos simplificados, analisando em termos de redução (Cap. 7).

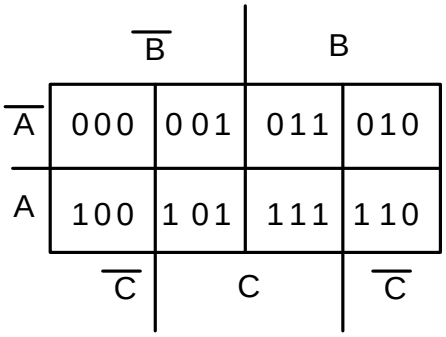
A	B	V_1	V_{m1}	V_2	V_{m2}
0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

8.3. DIAGRAMA VEITCH-KARNAUGH para 03 Variáveis

As figuras a seguir mostram a formação de um diagrama de Veitch-Karnaugh para 03 variáveis:

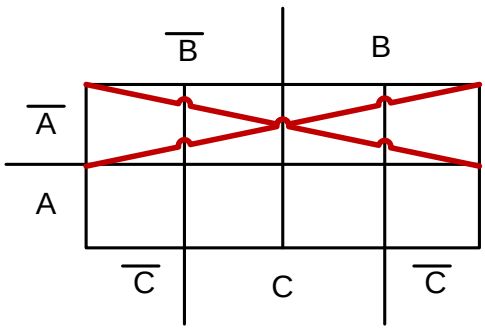




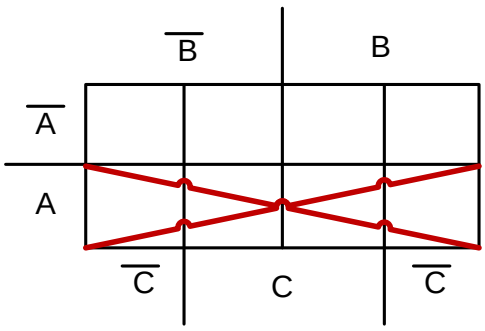


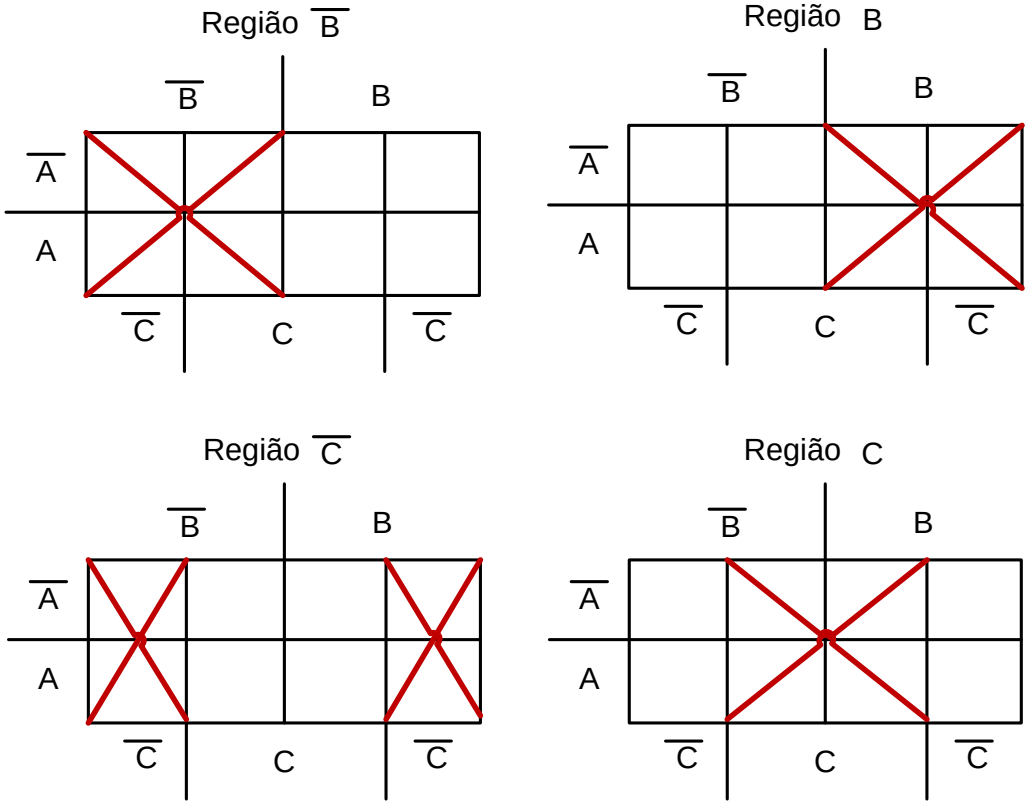
No mapa, encontram-se todas as possibilidades assumidas entre as variáveis A, B e C. As figuras a seguir mostram todas as regiões do mapa.

Região $\overline{A}$



Região A





Como simplificar circuitos lógicos utilizando os mapas de três variáveis:

1. Dada a expressão booleana, correspondente ao circuito lógico combinacional, inicie a localização junto ao mapa de cada uma das partes da expressão;

2. Após as localizações (item 1), deve-se proceder com o agrupamento dos valores “1”. Em mapas de três variáveis o agrupamento pode ser feito por intermédio da formação de pares, quadras e/ou oitavas (mapa totalmente preenchido de 1 constitui-se uma oitava);

3. Após a execução dos itens 1 e 2, obtém-se a expressão simplificada. Ver ilustrações a seguir:

$S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,C + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C$

	$\overline{B}$		B	
$\overline{A}$	1	1	1	1
A	1	1	0	0
	$\overline{C}$	C		$\overline{C}$

Q1 = Quadra Vermelha (horizontal)
Q2 = Quadra Azul

S = Q1 + Q2

Expressão Simplificada: $S = \overline{A} + \overline{B}$

$S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,C + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C$

	$\overline{B}$		B	
$\overline{A}$	1	1	1	1
A		1	0	0
	$\overline{C}$	C		$\overline{C}$

Q1 = Quadra Vermelha (horizontal)
P1 = Par Azul (vertical)

S = Q1 + P1

Expressão Simplificada: $S = \overline{A} + (\overline{B}\,C)$

EXERCÍCIOS para EXPLICAÇÃO

1) Localizar no mapa e obter a expressão simplificada correspondente:

a) $S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C + A\,B\,\overline{C}$

b) $S = A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C + A\,B\,C + A\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,\overline{C}$

c) $S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$

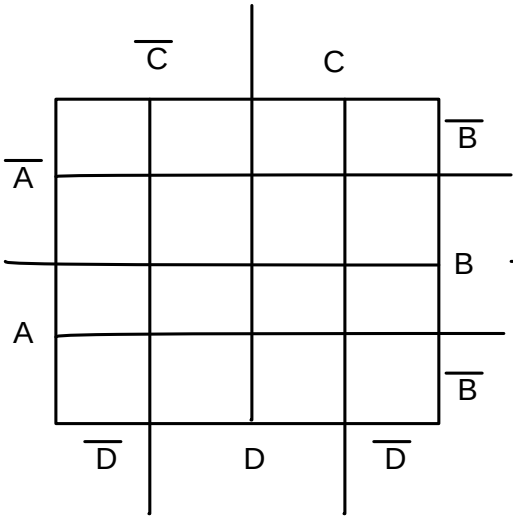
d) $S = A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C + \overline{A}\,B\,C$

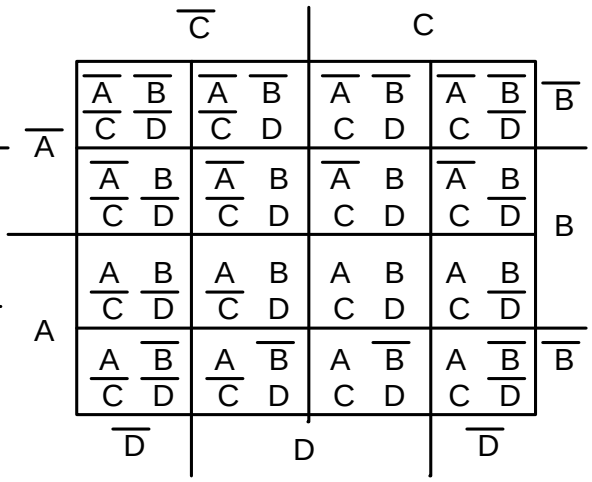
2) Simplificar o circuito do Amplificador de Som construído nas aulas anteriores, conforme tabela verdade apresentada a seguir. Em seguida, traçar uma comparação das expressões e os circuitos originais (antes da simplificação) com as expressões e circuitos simplificados, analisando em termos de redução (Cap. 7).

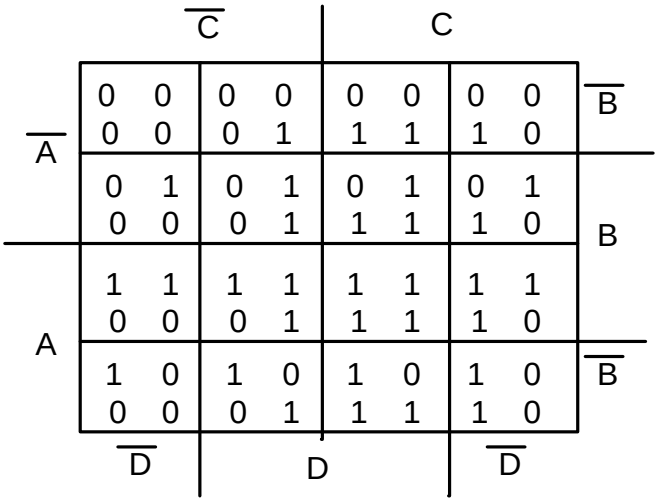
A	B	C	S_A	S_B	S_C
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

8.4. DIAGRAMA VEITCH-KARNAUGH para 04 Variáveis

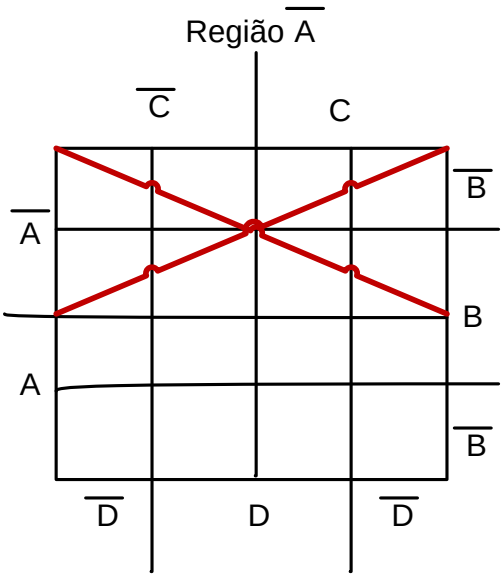
As figuras a seguir mostram a formação de um diagrama de Veitch-Karnaugh para 04 variáveis:

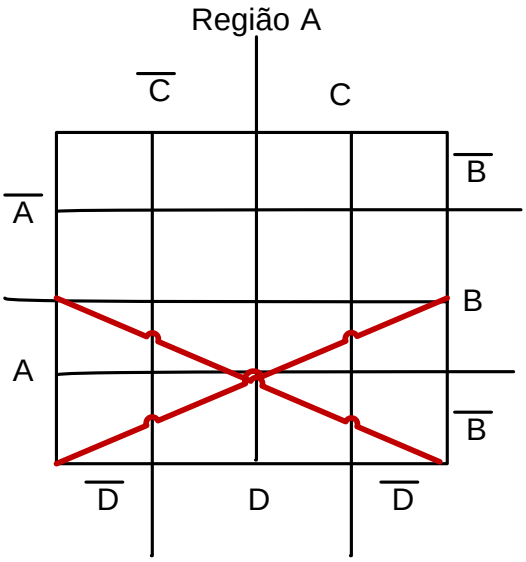


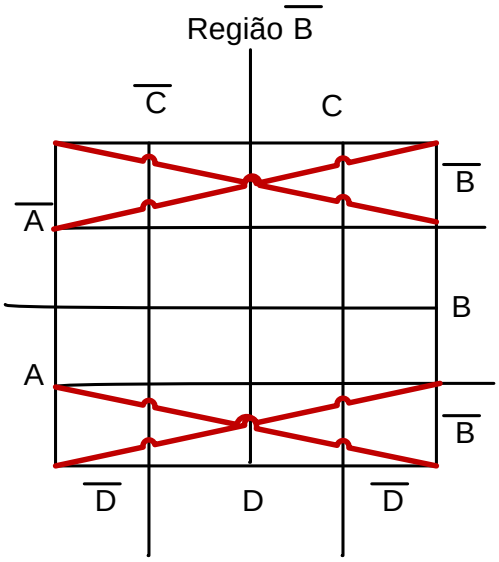


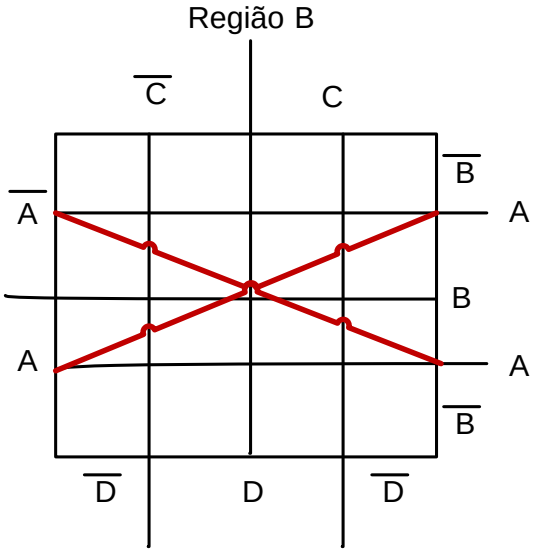


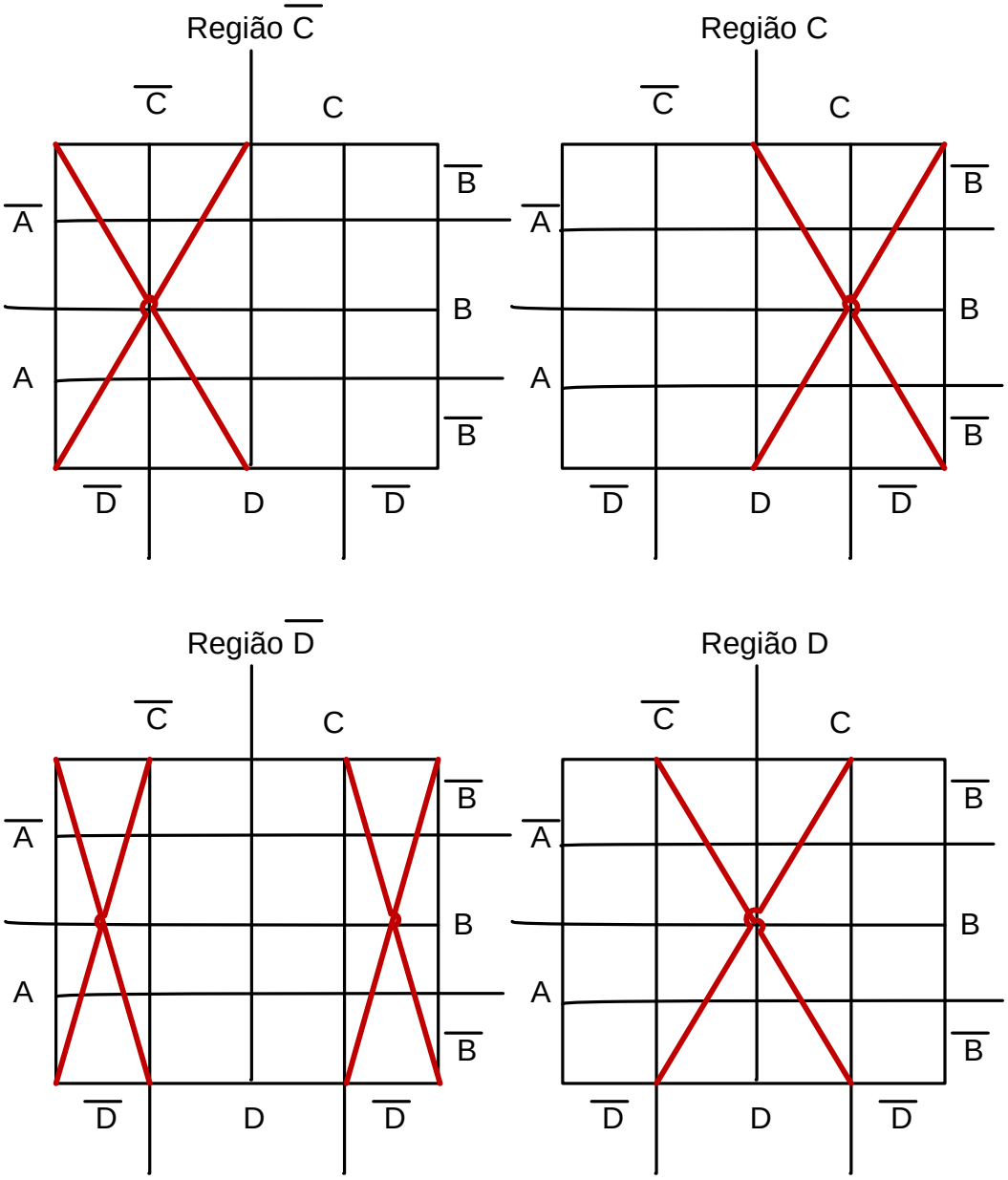
No mapa, encontram-se todas as possibilidades assumidas entre as variáveis A, B, C e D. As figuras a seguir mostram todas as regiões do mapa.


Região $\overline{A}$
$\overline{C}$
C
$\overline{B}$
$\overline{A}$
B
A
$\overline{B}$
$\overline{D}$
D
$\overline{D}$


Região A
$\overline{C}$
C
$\overline{B}$
$\overline{A}$
B
A
$\overline{B}$
$\overline{D}$
D
$\overline{D}$


Região $\overline{B}$
$\overline{C}$
C
$\overline{B}$
$\overline{A}$
B
A
$\overline{B}$
$\overline{D}$
D
$\overline{D}$


Região B
$\overline{C}$
C
$\overline{B}$
$\overline{A}$
A
B
A
A
$\overline{B}$
$\overline{D}$
D
$\overline{D}$



Como simplificar circuitos lógicos utilizando os mapas de quatro variáveis:

1. Dada a expressão booleana, correspondente ao circuito lógico combinacional, inicie a localização junto ao mapa de cada uma das partes da expressão;

2. Após as localizações (item 1), deve-se proceder com o agrupamento dos valores “1”. Em mapas de quatro variáveis o agrupamento pode ser feito por intermédio da formação de pares, quadras, oitavas e/ou hexas (mapa totalmente preenchido de 1 constitui-se uma hexa);

3. Após a execução dos itens 1 e 2, obtém-se a expressão simplificada. Ver ilustrações a seguir:

$$S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}$$

	$\overline{C}$		C		
$\overline{A}$	1	0	0	1	$\overline{B}$
	0	0	0	0	B
A	0	0	0	0	
	1	0	0	1	$\overline{B}$
	$\overline{D}$	D		$\overline{D}$	

Q1 = Quadra Vermelha

S = Q1

Expressão Simplificada: $S = \overline{B}\,\overline{D}$

$$S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,B\,C\,D + \overline{A}\,B\,C\,\overline{D} + A\,B\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,B\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,C\,D$$

	$\overline{C}$		C		
$\overline{A}$	1	1	0	0	$\overline{B}$
	1	1	1	1	B
A	1	1	0	0	
	1	1	1	0	$\overline{B}$
	$\overline{D}$	D		$\overline{D}$	

O1 = Oitava Vermelha (vertical)
Q1 = Quadra Azul (horizontal)
P1 = Par Verde (horizontal)

S = O1 + Q1 + P1

Expressão Simplificada: $S = \overline{C} + \overline{A}\,B + A\,\overline{B}\,D$

EXERCÍCIOS para EXPLICAÇÃO

1) Localizar no mapa e obter a expressão simplificada correspondente:

a) $S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,B\,C\,D +$
$A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,C\,D + A\,B\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,B\,\overline{C}\,D +$
$A\,B\,C\,D$

b) $S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} +$
$A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,B\,\overline{C}\,D + A\,B\,C\,D$

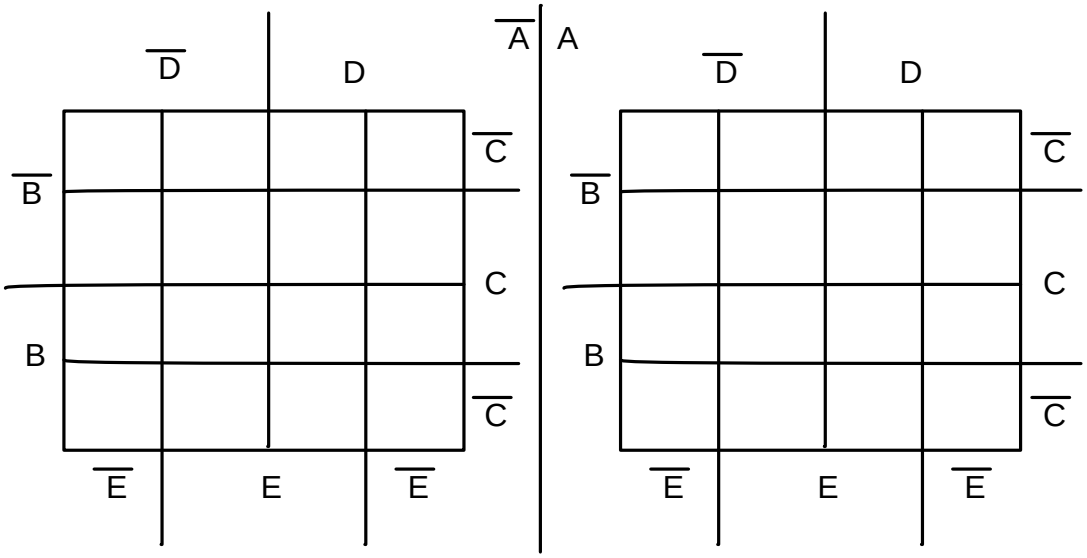
c) $S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \overline{A}\,B\,C\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,C\,D + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D} +$
$A\,\overline{B}\,C\,D + A\,B\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,B\,\overline{C}\,D + A\,B\,C\,\overline{D} + A\,B\,C\,D$

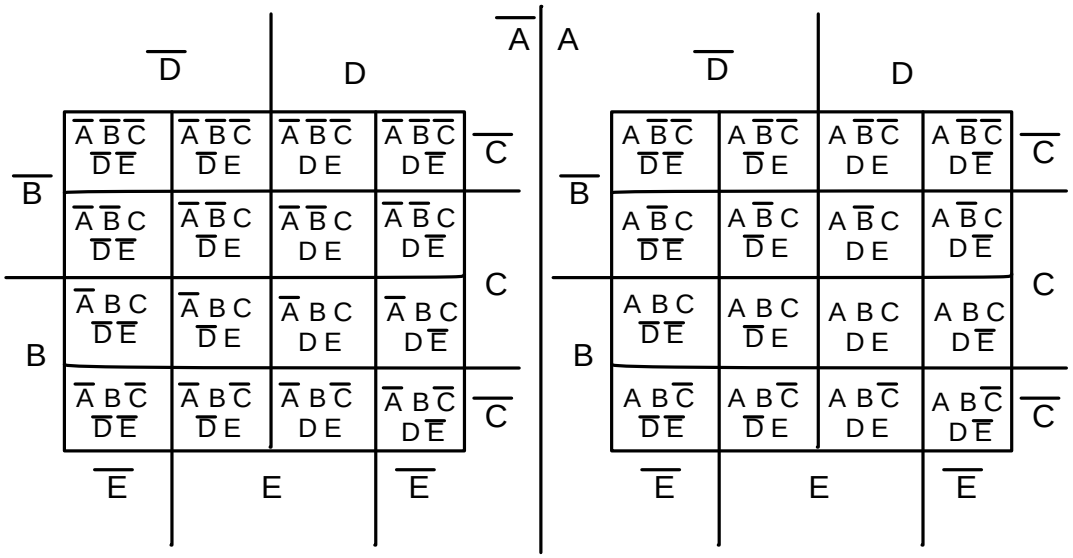
2) Simplificar o circuito do Sistema de Intercomunicadores (Central Telefônica) construído nas aulas anteriores, conforme tabela verdade apresentada a seguir. Em seguida, traçar uma comparação das expressões e os circuitos originais (antes da simplificação) com as expressões e circuitos simplificados, analisando em termos de redução (Cap. 7)

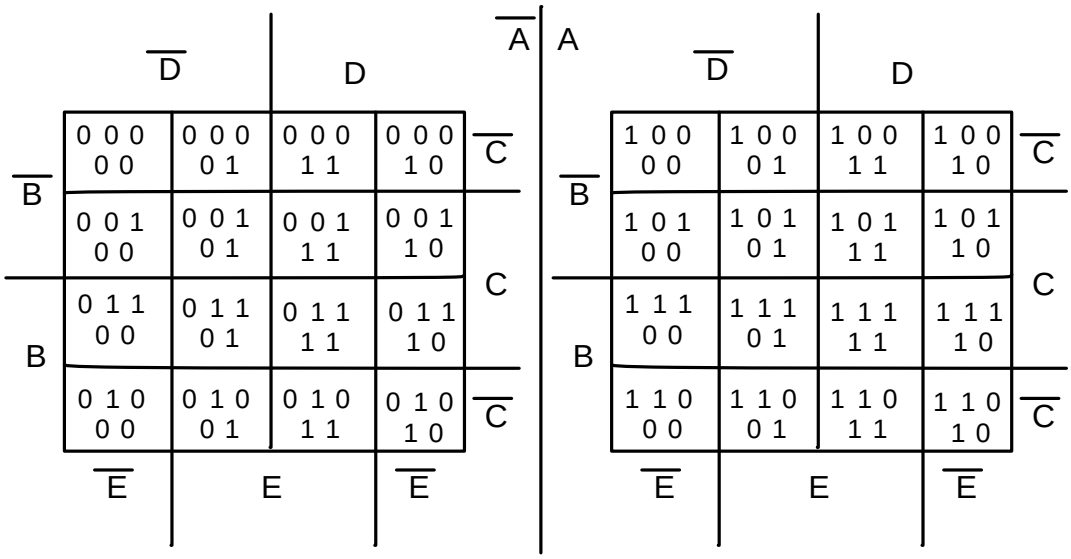
A	B	C	D		S_A	S_B	S_C	S_D
0	0	0	0		0	0	0	0
0	0	0	1		0	0	0	1
0	0	1	0		0	0	1	0
0	0	1	1		0	0	1	0
0	1	0	0		0	1	0	0
0	1	0	1		0	1	0	0
0	1	1	0		0	1	0	0
0	1	1	1		0	1	0	0
1	0	0	0		1	0	0	0
1	0	0	1		1	0	0	0
1	0	1	0		1	0	0	0
1	0	1	1		1	0	0	0
1	1	0	0		1	0	0	0
1	1	0	1		1	0	0	0
1	1	1	0		1	0	0	0
1	1	1	1		1	0	0	0

8.5. DIAGRAMA VEITCH-KARNAUGH para 05 Variáveis

As figuras a seguir mostram a formação de um diagrama de Veitch-Karnaugh para 05 variáveis:

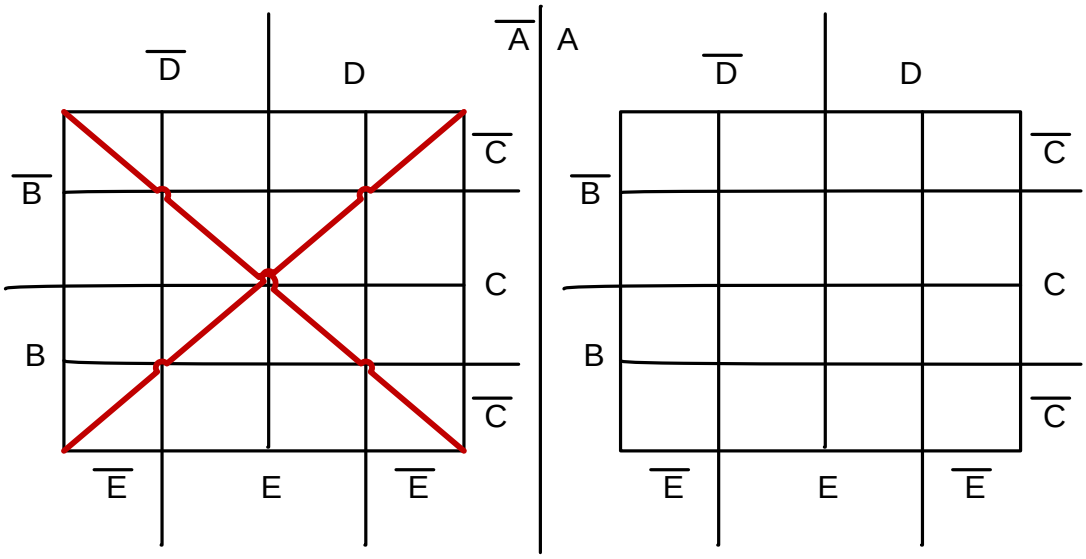




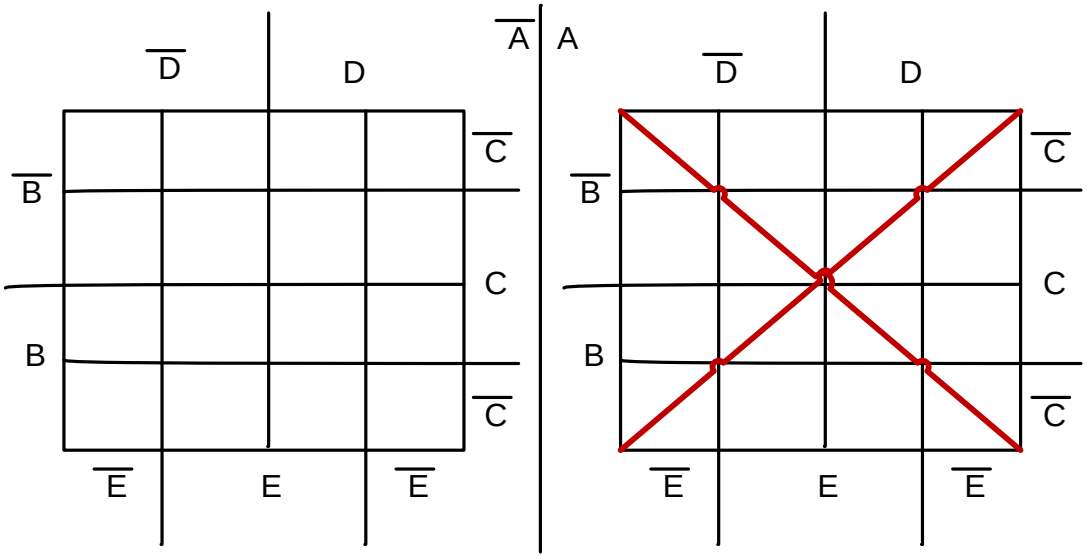


No mapa, encontram-se todas as possibilidades assumidas entre as variáveis A, B, C, D e E. As figuras a seguir mostram todas as regiões do mapa.

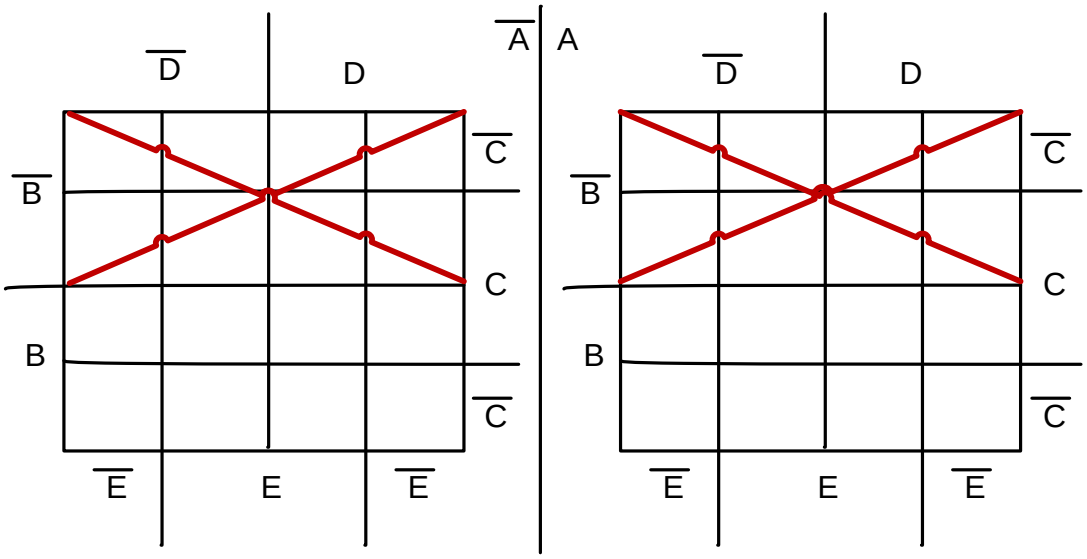
Região $\overline{A}$



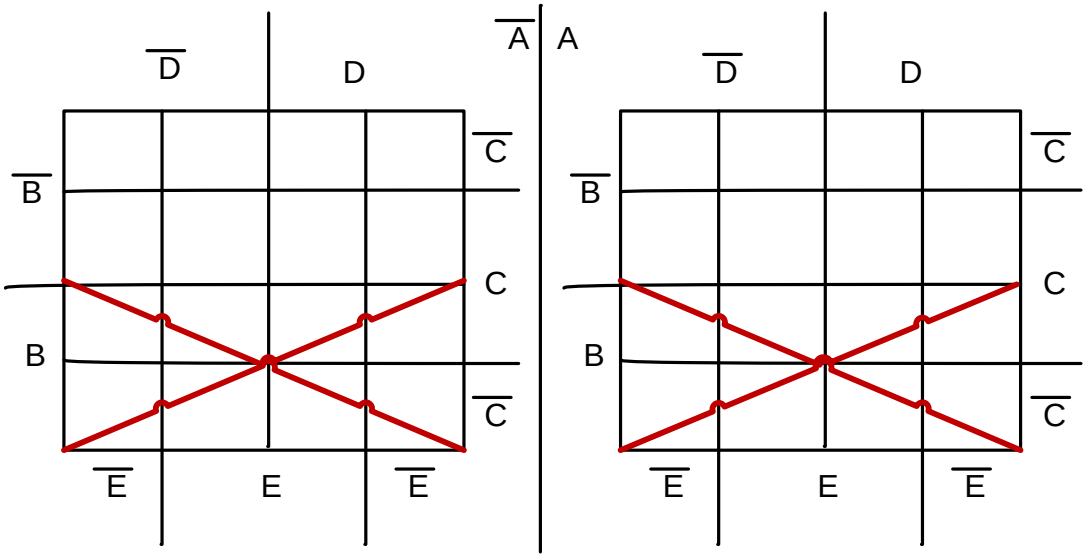
Região A



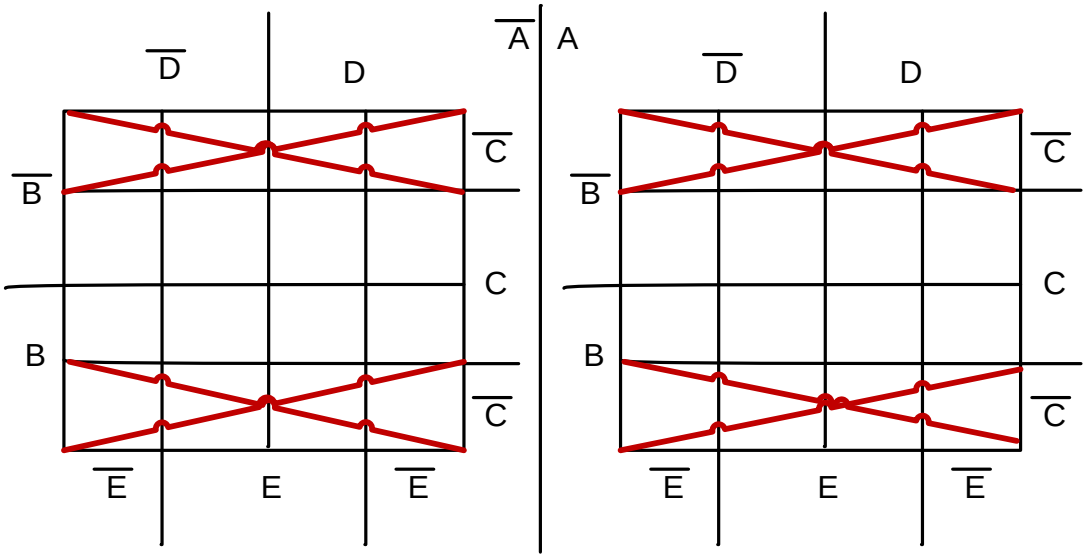
Região $\overline{B}$



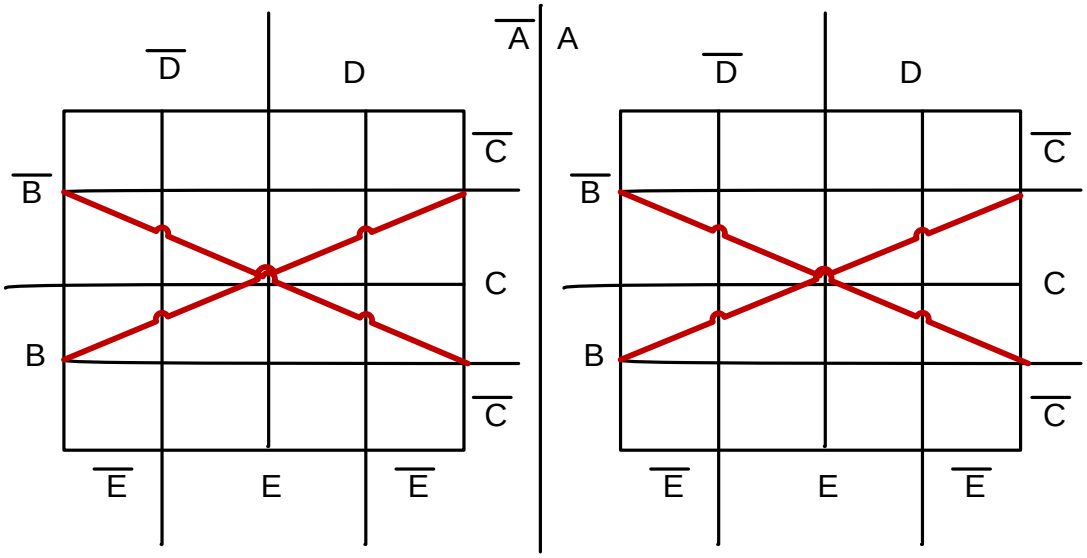
Região B



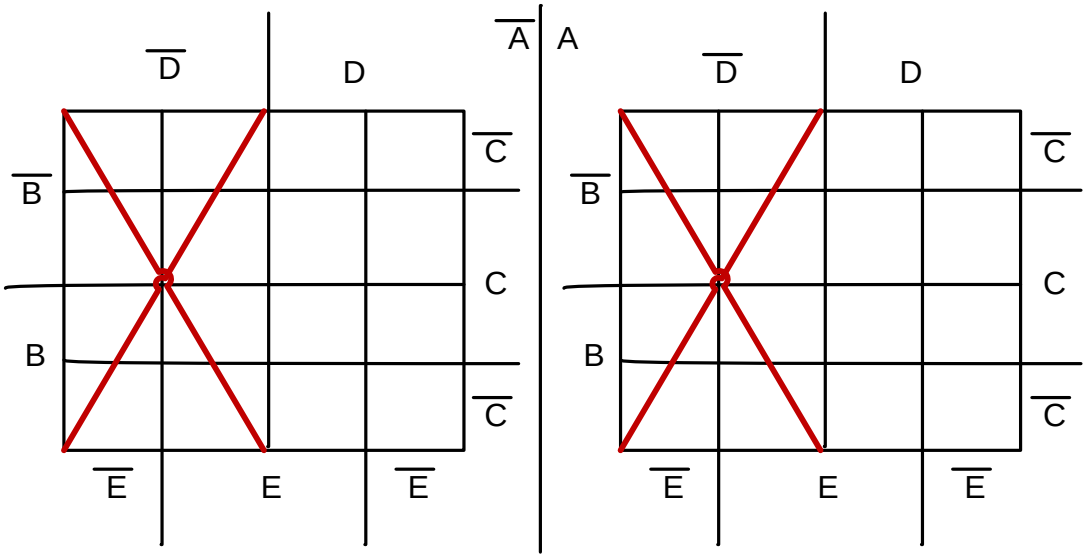
Região $\overline{C}$



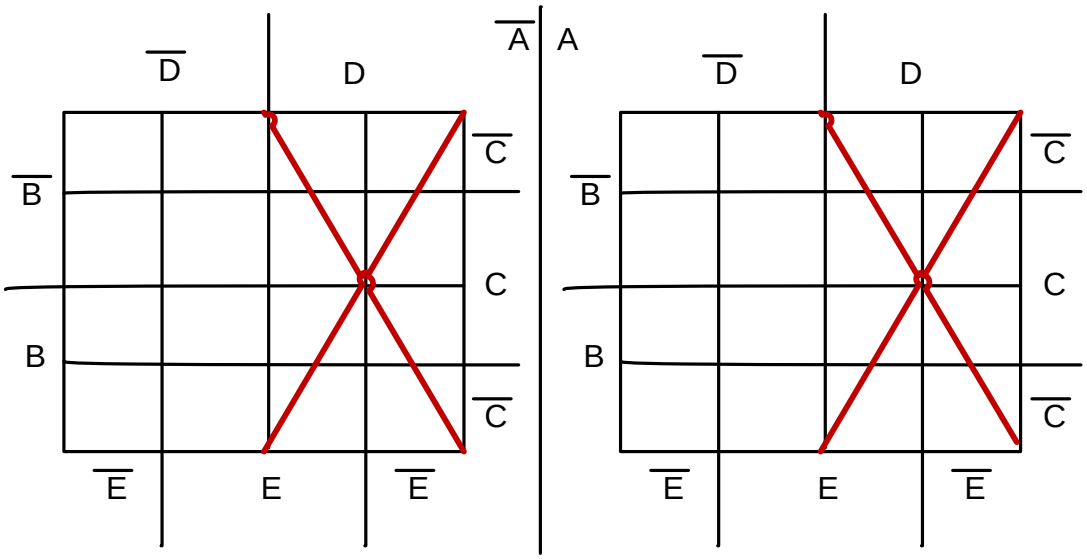
Região C



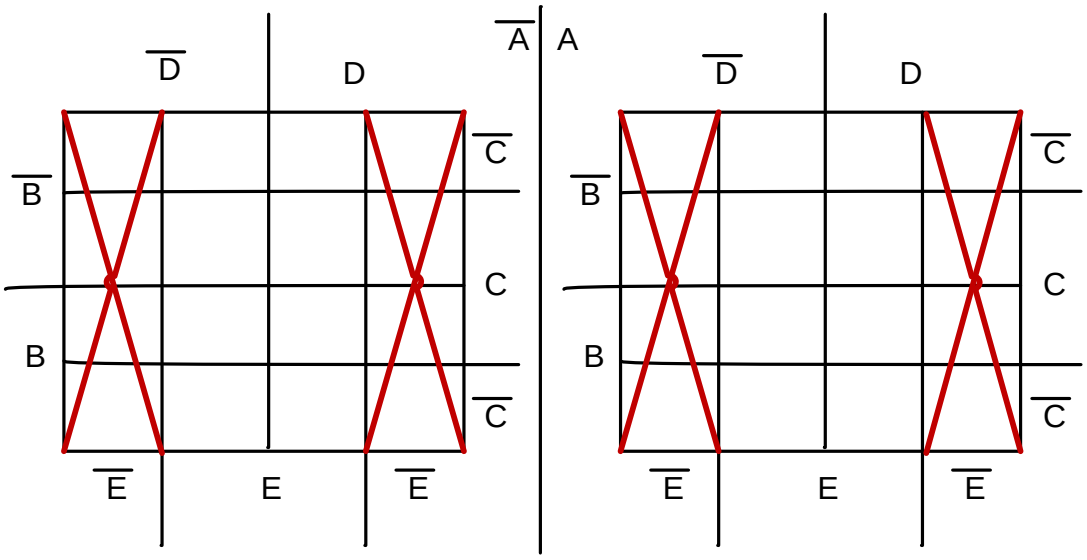
Região $\overline{D}$

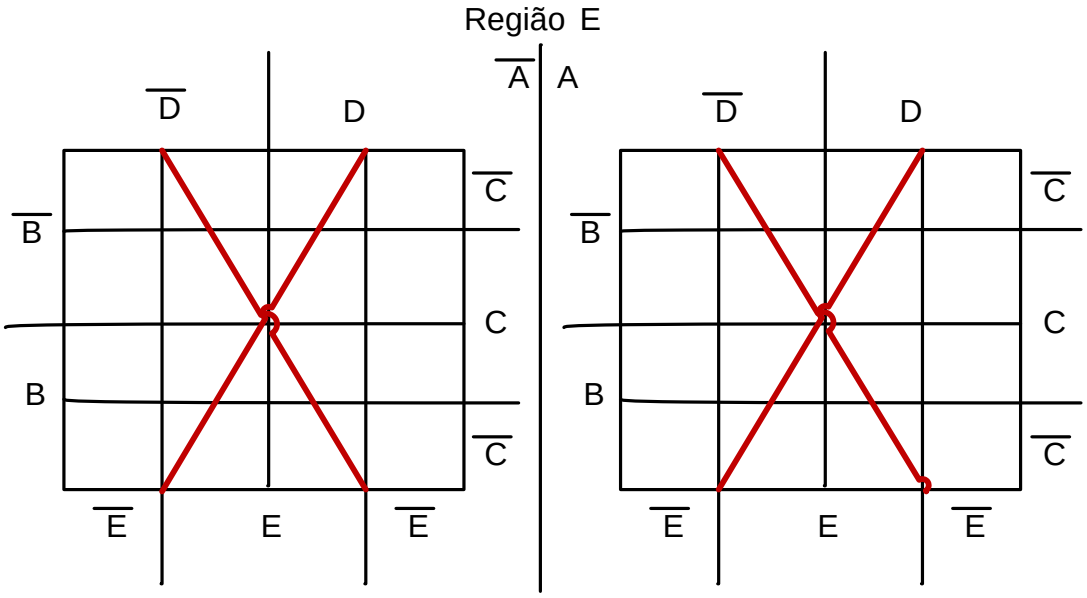


Região D



Região $\overline{E}$





Como simplificar circuitos lógicos utilizando os mapas de cinco variáveis:

1. Dada a expressão booleana, correspondente ao circuito lógico combinacional, inicie a localização junto ao mapa de cada uma das partes da expressão;

2. Após as localizações (item 1), deve-se proceder com o agrupamento dos valores “1”. Em mapas de cinco variáveis o agrupamento pode ser feito por intermédio da formação de pares, quadras, oitavas e/ou hexas;

3. Após a execução dos itens 1 e 2, obtém-se a expressão simplificada. Ver ilustrações a seguir:

$$S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,E + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D\,E + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D\,\overline{E} + \overline{A}\,B\,C\,\overline{D}\,E + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,E + A\,B\,C\,\overline{D}\,\overline{E} + A\,B\,C\,\overline{D}\,E + A\,B\,C\,D\,E + A\,B\,C\,D\,\overline{E}$$

	$\overline{D}$		D		
$\overline{B}$	1	0	0	0	$\overline{C}$
	1	1	1	1	C
B	0	1	0	0	
	0	0	0	0	$\overline{C}$
	$\overline{E}$	E		$\overline{E}$	

$\overline{A}$

	$\overline{D}$		D		
$\overline{B}$	0	0	0	0	$\overline{C}$
	0	1	0	0	C
B	1	1	1	1	
	0	0	0	0	$\overline{C}$
	$\overline{E}$	E		$\overline{E}$	

A

Q1 = Quadra Vermelha(esquerdo – horizontal)
Q2 = Quadra Verde (direito – horizontal)
Q3 = Quadra Azul (esquerdo e direito - centro – vertical)
P1 = Par Laranja (esquerdo – vertical)

S = Q1 + Q2 + Q3 + P1

Expressão Simplificada: $S = \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\,B\,C + C\,\overline{D}\,E + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}\,\overline{E}$

EXERCÍCIOS

1) Localizar no mapa e obter a expressão simplificada correspondente:

$$S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D\,E + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,E +$$
$$\overline{A}\,\overline{B}\,C\,D\,E + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D}\,E + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D\,\overline{E} +$$
$$\overline{A}\,B\,C\,\overline{D}\,E + \overline{A}\,B\,C\,D\,\overline{E} + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,E + A\,\overline{B}\,C\,D\,\overline{E}$$
$$A\,B\,C\,\overline{D}\,\overline{E} + A\,B\,C\,\overline{D}\,E + A\,B\,C\,D\,\overline{E} + A\,B\,C\,D\,E$$

$$S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,E + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,E +$$
$$\overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,E + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,\overline{E} +$$
$$\overline{A}\,B\,C\,\overline{D}\,E + A\,\overline{B}\,C\,D\,\overline{E} + A\,B\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E} + A\,B\,\overline{C}\,D\,\overline{E}$$
$$A\,B\,\overline{C}\,D\,E + A\,B\,C\,D\,\overline{E} + A\,B\,C\,D\,E$$

8.6. DIAGRAMA VEITCH-KARNAUGH com CONDIÇÕES IRRELEVANTES

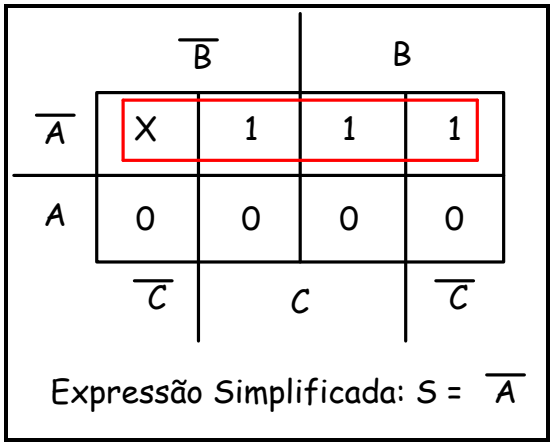
Chama-se condição irrelevante (X) a situação de entrada em que a saída pode assumir 0 ou 1 indiferentemente. Esta condição ocorre principalmente pela impossibilidade prática do caso de entrada acontecer, sendo utilizada em várias situações nos itens anteriores.

Para a sua utilização em diagramas de Veitch-Karnaugh, deve-se, para cada condição irrelevante, adotar 0 ou 1, dos dois, aquele que possibilitar melhor agrupamento e conseqüentemente maior simplificação.

Para esclarecer este processo, segue exemplo:

A	B	C		S
0	0	0		X
0	0	1		1
0	1	0		1
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		0
1	1	0		0
1	1	1		0

Transpondo esta tabela para o diagrama, tem-se:

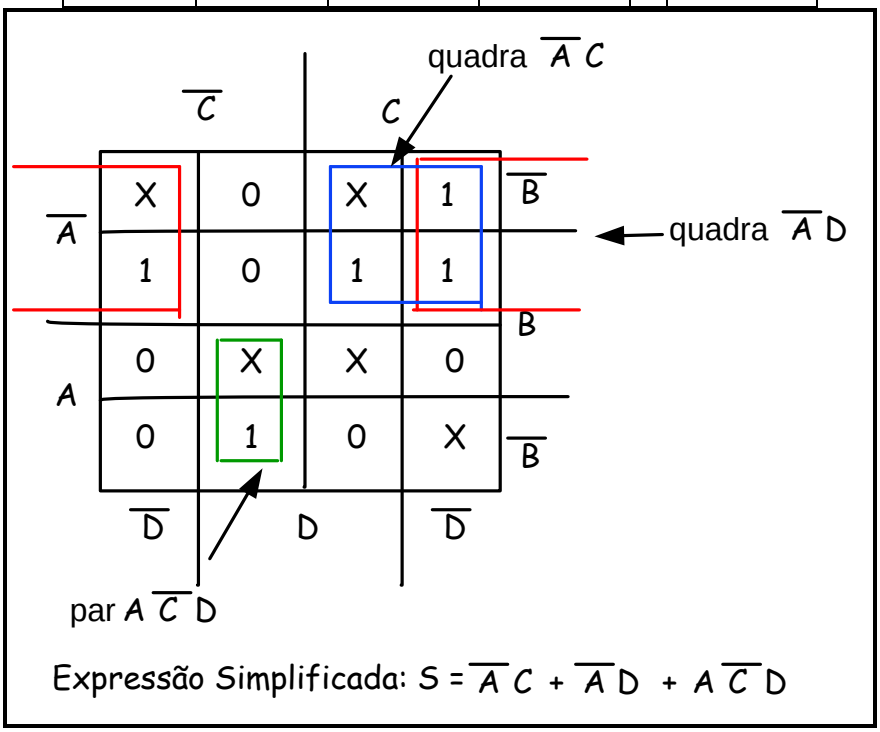


O símbolo (X) indica que neste caso a saída pode assumir 0 ou 1, indiferentemente, já que, ou a situação de entrada é impossível de acontecer, ou, ainda, possibilita qualquer dos 2 valores na saída. Para fins de simplificação, deve-se adotar X = 1, já que assim sendo, pode-se obter uma quadra, ao invés de

2 pares (no caso de X = 0), representando maior simplificação da expressão de saída.

Convém ressaltar que, em uma tabela da verdade, podem ocorrer várias condições irrelevantes que devem ser consideradas independentemente, conforme agrupamento em que se encontram. Exemplificando:

A	B	C	D		S
0	0	0	0		X
0	0	0	1		0
0	0	1	0		1
0	0	1	1		X
0	1	0	0		1
0	1	0	1		0
0	1	1	0		1
0	1	1	1		1
1	0	0	0		0
1	0	0	1		1
1	0	1	0		X
1	0	1	1		0
1	1	0	0		0
1	1	0	1		X
1	1	1	0		0
1	1	1	1		X



Nota-se, no exemplo, que as condições irrelevantes pertencentes aos agrupamentos receberam valor 1, enquanto as deixadas de fora, valor 0.

EXERCÍCIOS

1) A Tabela a seguir, representa as possibilidades de saída obtidas de um projeto envolvendo 03 variáveis A, B e C. Determine a expressão simplificada.

A	B	C		S
0	0	0		1
0	0	1		X
0	1	0		0
0	1	1		1
1	0	0		X
1	0	1		1
1	1	0		X
1	1	1		X

2) Simplifique a expressão representativa da tabela.

A	B	C	D		S
0	0	0	0		1
0	0	0	1		X
0	0	1	0		1
0	0	1	1		0
0	1	0	0		1
0	1	0	1		1
0	1	1	0		1
0	1	1	1		0
1	0	0	0		1
1	0	0	1		0
1	0	1	0		X
1	0	1	1		1
1	1	0	0		X
1	1	0	1		1
1	1	1	0		X
1	1	1	1		0

3) Simplificar o circuito do Controle de Bombeamento de Água construído nas aulas anteriores. Em seguida, traçar uma comparação das expressões e os circuitos originais (antes da simplificação) com as expressões e circuitos simplificados, analisando em termos de redução (ver enunciado no Cap. 7, exercício 3).

8.7. AGRUPAMENTOS DE ZEROS

Pode-se, alternativamente, agrupar as células que valem 0 para obter-se a expressão simplificada em diagramas de Veitch-Karnaugh, porém, com esta prática, obtém-se o complemento da função, ou seja, a saída S' (negado).