MATEMÁTICA I - AULA: 14/05/2021

MATRIZES

➢ Multiplicação de matrizes

Sejam as matrizes A = $(a_{ij})_{mxn}$ e B = $(b_{ij})_{nxp}$ o PRODUTO dessas matrizes representado por A x B, é definida como uma matriz C = $(c_{ij})_{mxp}$, onde cada elemento c_{ij} é obtido pela seguinte expressão:

$$C_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} \quad ,$$

para todo $1 \leq i \leq n$ e todo $1 \leq j \leq n$.

Observação 1: *Só é possível realizar o produto das matrizes AxB se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B.*

$A_{mx\underbrace{n \quad x \quad B_{n}}}xp$ número de linhas de A **igual** ao número de colunas de B Nesse caso, **é possivel** fazer AxB	$A_{mx\underbrace{n \quad x \quad B_{z}}}xp$ número de linhas de A **diferente** do número de colunas de B Nesse caso, **não é possível** fazer AxB

Observação 2: *A ordem (ou dimensão) da matriz C = A x B será dada pelo número de linhas da matriz A e pelo número de colunas da matriz B.*

número de linha de A **igual** ao número de coluna de B

$$A_{mxn} \times B_{nxp} = C_{mxp}$$

número de linha de C tem que ser **igual** ao número de linha de A

número de coluna de C tem que ser **igual** ao número de coluna de B

Observação 3: *Para a multiplicação de matrizes* ***não vale*** *a propriedade comutativa, O produto AxB* ***é diferente*** *do produto BxA (ou seja,* AxB **≠** BxA).

EXEMPLO:

1) Dadas as matrizes A e B, determinar o produto AxB.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2x2} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2x2}$$

Observação:

A resolução será feita passo a passo para melhor entendimento da operação de multiplicação de matrizes. Até porque como mencionado anteriormente o processo é diferente de somar ou subtrair matrizes. Não esquecer essa observação.

Para melhor compreensão dessa operação será utilizada a técnica visual com o auxílio de figuras geométricas (círculo azul e retângulo verde). Os cálculos do produto das matrizes A e B são feitos multiplicando-se os elementos das "figuras iguais" e somando-se os resultados dessa multiplicação. E será resolvido visualmente de duas maneiras para facilitar o processo de multiplicação. O objetivo é diminuir as dificuldades.

Solução 1:

1º passo: escrever as matrizes lado a lado. A matriz AxB é de ordem 2x2.

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

2º passo: multiplicar a 1ª linha de A com a 1ª coluna de B (1ªL x 1ªC).

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2x2} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{(a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21})}^{\mathbf{1^aL \times 1^aC}} & (\qquad\qquad) \\ (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) \end{bmatrix}_{2x2}$$

3º passo: multiplicar a 1ª linha de A com a 2ª coluna de B (1ªL x 2ªC).

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & \boxed{b_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21}) & \overbrace{(a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22})}^{\mathbf{1^aL \times 2^aC}} \\ (\qquad\qquad) & (\qquad\qquad) \end{bmatrix}_{2x2}$$

4º passo: multiplicar a 2ª linha de A com a 1ª coluna de B (2ªL x 1ªC).

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21}) & (a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22}) \\ \underbrace{(a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21})}_{\mathbf{2^aL \times 1^aC}} & (\qquad\qquad) \end{bmatrix}_{2x2}$$

5º passo: multiplicar a 2ª linha de A com a 2ª coluna de B (2ªL x 2ªC).

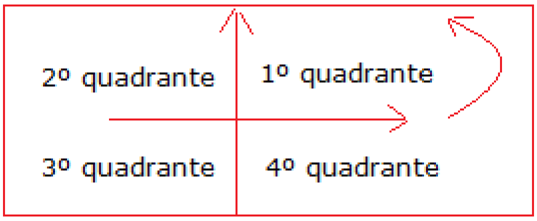
$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & \boxed{b_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21}) & (a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22}) \\ (a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21}) & \underbrace{(a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22})}_{\mathbf{2^aL \times 2^aC}} \end{bmatrix}_{2x2}$$

Portanto:

$$A \times B = \begin{bmatrix} (a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21}) & (a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22}) \\ (a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21}) & (a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22}) \end{bmatrix}_{2x2}$$

Solução 2:

Esse método consiste em escrever as matrizes em forma tabular (matriz A no 3º quadrante e matriz B no 1º quadrante). Lembrete de quadrante.



1º passo: multiplicar a 1ª linha de A com a 1ª coluna de B (1ªL x 1ªC).

$$\begin{array}{cc|c} & A\,.\,B & \begin{array}{c} 1^aC \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} \end{bmatrix} \end{array} \\ \hline 1^aL & \begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \overbrace{(a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21})}^{1^aL \times 1^aC} & (\qquad) \\ (\qquad) & (\qquad) \end{bmatrix}_{2x2} \end{array}$$

2º passo: multiplicar a 1ª linha de A com a 2ª coluna de B (1ªL x 2ªC).

$$\begin{array}{cc|c} & A\,.\,B & \begin{array}{c} 2^aC \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & \boxed{b_{22}} \end{bmatrix} \end{array} \\ \hline 1^aL & \begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21}) & \overbrace{(a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22})}^{1^aL \times 2^aC} \\ (\qquad) & (\qquad) \end{bmatrix}_{2x2} \end{array}$$

3º passo: multiplicar a 2ª linha de A com a 1ª coluna de B (2ªL x 1ªC).

$$A \,.\, B \qquad \begin{array}{c} 1^{a}C \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \\ 2^{a}L & \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} (a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21}) & (a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22}) \\ \underbrace{(a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21})}_{\mathbf{2^{a}L \times 1^{a}C}} & (\qquad\qquad) \end{bmatrix}_{2x2}$$

4º passo: multiplicar a 2ª linha de A com a 2ª coluna de B (2ªL x 2ªC).

$$A \,.\, B \qquad \begin{array}{c} 2^{a}C \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & \boxed{b_{22}} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \\ 2^{a}L & \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} (a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21}) & (a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22}) \\ (a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21}) & \underbrace{(a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22})}_{\mathbf{2^{a}L \times 2^{a}C}} \end{bmatrix}_{2x2}$$

Portanto:

$$A \times B = \begin{bmatrix} (a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21}) & (a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22}) \\ (a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21}) & (a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22}) \end{bmatrix}_{2x2}$$

Para resolver os exercícios não é necessário fazer passo a passo. Isso foi feito no exercício 1 para auxiliar o processo de resolução.

2) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}_{2x2}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}_{2x2}$, determinar:

2.1) AxB **2.2)** BxA.

Solução:

- **2.1)** AxB

A ordem da matriz AxB é 2x2 (número de linha de A x número de coluna de B).

$$A \text{ x } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ x } \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1.7 + 3.0) & (1.2 + 3.(-6)) \\ (-2.7 + 5.0) & ((-2).2 + 5.(-6)) \end{bmatrix}$$

$$A \text{ x } B = \begin{bmatrix} (7 + 0) & (2 - 18) \\ (-14 + 0) & (-4 - 30) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -16 \\ -14 & -34 \end{bmatrix}$$

Portanto: $A \text{ x } B = \begin{bmatrix} 7 & -16 \\ -14 & -34 \end{bmatrix}$

- **2.2)** BxA

A ordem da matriz BxA é 2x2 (número de linha de B x número de coluna de A).

$$B \text{ x } A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (7.1 + 2.(-2)) & (7.3 + 2.5) \\ (0.1 + (-6).(-2)) & (0.3 + (-6).5) \end{bmatrix}$$

$$B \text{ x } A = \begin{bmatrix} (7 - 4) & (21 + 10) \\ (0 + 12) & (0 - 30) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 31 \\ 12 & -30 \end{bmatrix}$$

Portanto: $B \text{ x } A = \begin{bmatrix} 3 & 31 \\ 12 & -30 \end{bmatrix}$

Observação:

Conforme citado anteriormente, o resultado de AxB **é diferente** de BxA, pois os seus elementos correspondentes são diferentes.

$$A \text{ x } B = \begin{bmatrix} 7 & -16 \\ -14 & -34 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 31 \\ 12 & -30 \end{bmatrix} = B \text{ x } A$$

Posição 11: $7 \neq 3$

Posição 12: $-16 \neq 31$

Posição 21: $-14 \neq 12$

Posição 22: $-34 \neq 30$

3) Determinar X e Y tal que:

$$\begin{bmatrix} 2x & y \\ 5x & -2y \end{bmatrix}_{2x2} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}_{2x1} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}_{2x1}$$

Solução:

A solução desse exemplo envolve multiplicação de matrizes e igualdade de matrizes. E também resolução de sistema de equação.

1º passo: multiplicar as matrizes

$$\begin{bmatrix} \overbrace{(2x.(-3) + y.7)}^{1^aL \times 1^aC} \\ \underbrace{(5x.(-3) + (-2y).7)}_{2^aL \times 1^aC} \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}_{2x1}$$

2º passo: Calcular a expressão dos parênteses em vermelho tem-se:

$$\begin{bmatrix} -6x + 7y \\ -15x - 14y \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}_{2x1}$$

3º passo: Pela teoria de igualdade de matrizes, obter o sistema de equações:

$$\begin{cases} -6x + 7y = 4 \\ -15x - 14y = -1 \end{cases}$$

4º passo: Resolver o sistema de equação utilizado é o da eliminação da variável x e da variável y. Método mais fácil porque não exige cálculos complexos.

eliminar x

$$\begin{cases} -6x + 7y = 4 & x(15) \\ -15x - 14y = -1 & x(-6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cancel{90x} + 105y = 60 \\ \cancel{90x} + 84y = 6 \end{cases} \quad +$$

$$189y = 66$$

$$y = \frac{66 \; :3}{189 \; :3}$$

$$\boxed{y = \frac{22}{63}}$$

eliminar y

$$\begin{cases} -6x + 7y = 4 & x(14) \\ -15x - 14y = -1 & x(7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -84x + \cancel{98y} = 56 \\ -105x - \cancel{98y} = -7 \end{cases} \quad +$$

$$-189x = 49$$

$$\boxed{x = \frac{-49}{189}}$$

"Descobrir consiste em olhar para o que todo mundo está vendo e pensar uma coisa diferente." (Roger Von Oech)

LISTA DE EXERCÍCIOS

(Essa atividade não é para nota)

Prazo de entrega até às 23h55 do dia 21-05-2021

Procure fazer a lista de exercício para se preparar para as provas e em caso de dificuldade poder tirar dúvidas ok? O aluno que quiser a correção da lista de exercício, basta enviar resolvida em arquivo pdf no MOODLE na tarefa do dia da aula.

ATENÇÃO: Para entregar a atividade, favor clicar no botão ENVIAR para declarar seu envio como definitivo e não aparecer mensagem de "entrega atrasada".

1) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 7/8 & 4 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}_{2x2}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -5/3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2x2}$ e $C = \begin{bmatrix} 1/3 & 6 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}_{2x2}$, determinar:

1.1) $B^t - \frac{1}{13}(A+C)$ **1.2)** A x B **1.3)** (A – C) x (3B + A)

2) Determinar x, y, a e b tal que:

$$\begin{bmatrix} 13x & -7/11 \\ 5 & 2b \end{bmatrix}_{2x2} \cdot \begin{bmatrix} -5/6 & -5a \\ 3y & 9/4 \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} -2x & 3/5 \\ 40y & -23b \end{bmatrix}_{2x2}$$

3) A solução do sistema $\begin{cases} (a-2)\,x + by = 1 \\ (a+2)x + 2by = 5 \end{cases}$ é x=-7 e y=5. Determine os valores de a e b.