Sortări

Bucket, Radix, Quick, Merge, Heap ?

Bucket Sort

- Elementele vectorului sunt distribuite în bucket-uri după anumite criterii
- Bucket-urile sunt reprezentate de elemente ale unui vector de liste înlănțuite
- Fiecare bucket conține elemente care îndeplinesc aceleași condiții

IDEE:

- Fie **v** vectorul de sortat și **b** vectorul de buckets
- Se inițializează vectorul auxiliar cu liste (buckets) goale
- Iterăm prin **v** și adăugăm fiecare element în bucket-ul corespunzător
- Sortăm fiecare bucket (discutăm cum)
- Iterăm prin fiecare bucket, de la primul la ultimul, adăugând elementele înapoi în **v**

Bucket Sort

Vizualizare:

https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BucketSort.html

Bucket Sort

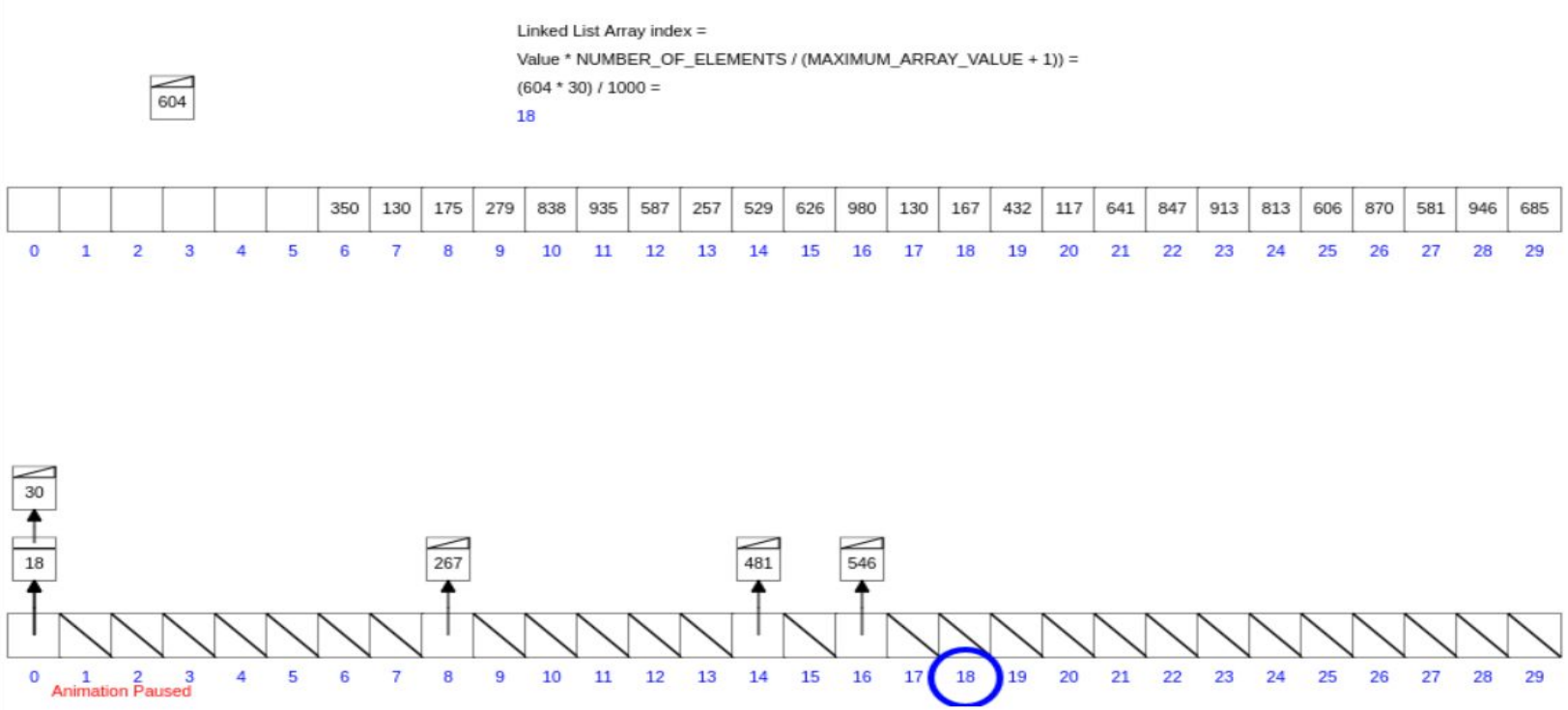
Cum adăugăm elementele în bucket-ul corespunzător?

- Metoda clasică este să împărțim la o valoare și, în funcție de câtul împărțirii, punem valoarea în bucketul corespunzător.

- În animație foloseam 30 de bucketuri și, cum numerele erau până la 1000, înmulțeam cu 30 și împărțeam la 1000

Bucket Sort

Cum adăugăm elementele în bucket-ul corespunzător?



Bucket Sort

Cum adăugăm elementele în bucket-ul corespunzător?

- Metoda clasică este să împărțim la o valoare și, în funcție de cât, să punem în bucketul corespunzător

Cum sortăm bucketurile ?

- Putem aplica recursiv tot bucketsort sau, dacă avem puține elemente, să folosim o sortare simplă (insertion / selection / bubble sort) ....
  - Cum adică să folosim bubble sort? De ce nu quicksort ???
    - Pentru n mic, constanta de la quicksort, mergesort face ca sortarea să fie mai înceată

Bucket Sort

- Câte bucketuri ?
  - Dacă sunt foarte multe, inițializăm spațiu prea mare
  - Dacă sunt prea puține, nu dispersăm suficient...
    - Ce se întâmplă dacă toate pică în același bucket ?
  - Contează foarte mult și distribuția inputului.

Bucket Sort

Complexitate?

- Timp:
  - Average O(n+k)
  - Worst case $O(n^2)$

Algoritm bun dacă avem o distribuție uniformă a numerelor...

- Spațiu:
  - O(n+k)

Radix Sort

- Este un algoritm folosit în special pentru ordonarea șirurilor de caractere
  - Pentru numere - funcționează pe aceeași idee

- Asemănător cu bucket sort - este o generalizare pentru numere mari
- Împărțim în **B** bucketuri, unde **B** este baza în care vrem să considerăm numerele (putem folosi 10, 100, 10^4 sau 2, 2^4, 2^{16} ...)

- Presupunem că vectorul de sortat **v** conține elemente întregi, cu cifre din mulțimea {0, ..., B-1}

Radix Sort

- Cum sunt utilizate bucket-urile?
  - Elementele sunt sortate după fiecare cifră, pe rând
  - Bucket-urile sunt cifrele numerelor
  - Fiecare bucket `b[i]` conține, la un pas, elementele care au cifra curentă = i

- Numărul de bucket-uri necesare?
  - Baza în care sunt scrise numerele

Radix Sort

Complexitate?

- Timp:
  - O(n log max) (discuție mai lungă)

- Spațiu:
  - O(n+b)

Radix Sort

Vizualizare:

https://visualgo.net/bn/sorting

Radix Sort - LSD

- LSD = **L**east **S**ignificant **D**igit (iterativ rapid)

Radix Sort - MSD

- MSD = **M**ost **S**ignificant **D**igit (recursiv, ca bucket sort)

Quick Sort

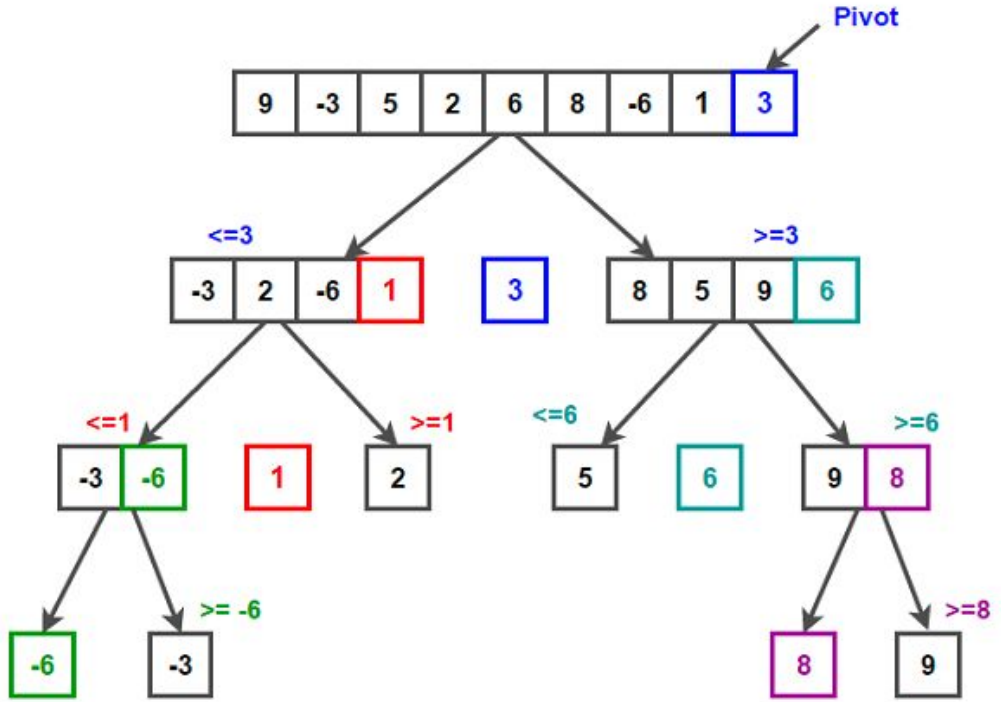
- Algoritm Divide et Impera
- Este un algoritm eficient în practică (implementarea este foarte importantă)

- **Divide:** se împarte vectorul în doi subvectori în funcție de un **pivot x**, astfel încât elementele din subvectorul din stânga sunt **≤ x ≤** elementele din subvectorul din dreapta

- **Impera:** se sortează recursiv cei doi subvectori

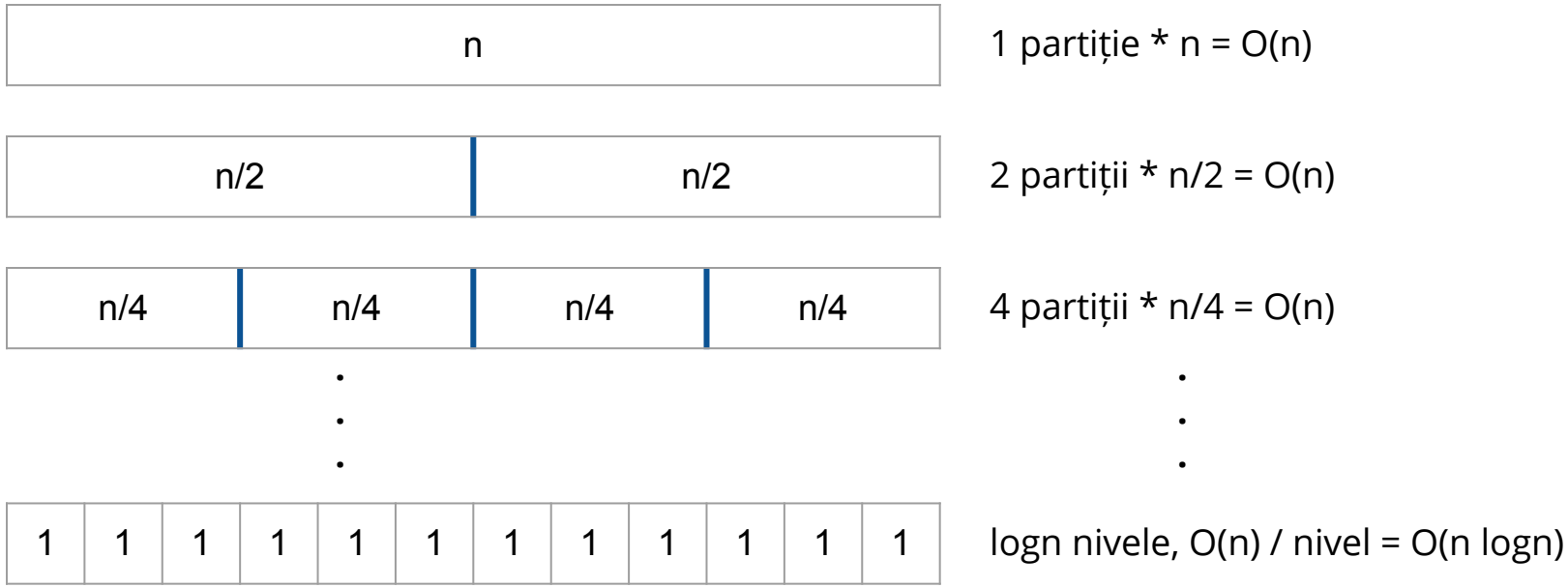
Quick Sort - exemplu

- Pivot ales la coadă
- Contraexemplu ?



Quick Sort

- În cel mai bun caz, pivotul x este chiar mediana, adică împarte vectorul în 2 subvectori de n/2 elemente fiecare



Quick Sort

Worst case?

- Când alegem cel mai mic sau cel mai mare element din vector la fiecare pas
- Una din cele două partiții va fi goală
- Cealaltă partiție are restul elementelor, mai puțin pivotul
- Număr de apeluri recursive?
  - n - 1
- Lungime partiție?
  - n - k (unde k = numărul apelului recursiv) → O(n - k) comparații
- Complexitate finală?
  - $O(n^2)$

Quick Sort

Cum alegem pivotul?

- Primul element
- Elementul din mijloc
- Ultimul element
- Un element random
- Mediana din 3
- Mediana din 5, 7 (**atenție** când vectorul devine mic, facem mult calcul pentru puțin)

https://en.wikipedia.org/wiki/Quicksort#Choice_of_pivot

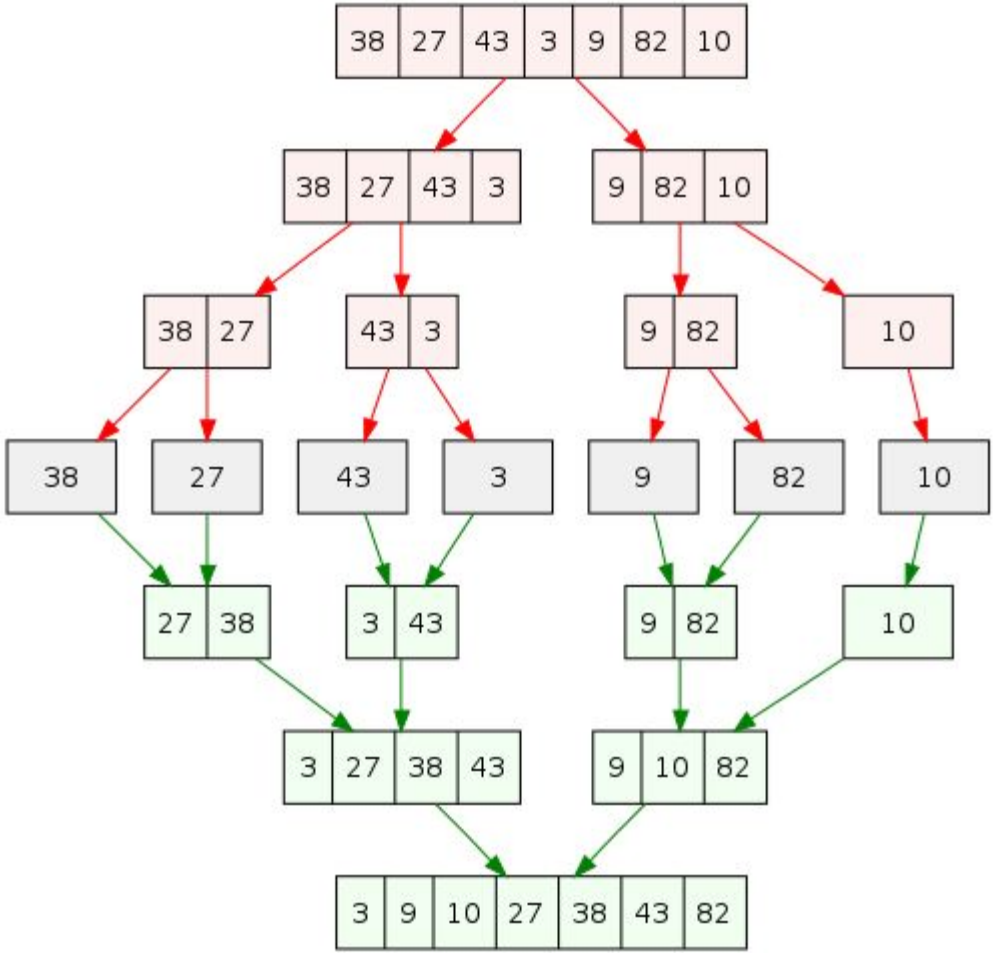
Merge Sort

- Algoritm Divide et Impera

- **Divide:** se împarte vectorul în jumătate și se sortează independent fiecare parte

- **Impera:** se sortează recursiv cei doi subvectori

Merge Sort - exemplu



Merge Sort

- Când se oprește recursivitatea?
  - Când vectorul ajunge de lungime 1 sau 2 (depinde de implementare)
  - La fel ca la quicksort, ne-am putea opri mai repede ca să evităm multe operații pentru puține numere

- Algoritm de merging
  - Creem un vector temporar
  - Iterăm cele două jumătăți sortate de la stânga la dreapta
  - Copiem în vectorul temporar elementul mai mic dintre cele două

Merge Sort vs Quick Sort

De ce e Quick Sort mai rapid în practică atunci când cazul ideal de la Quick Sort e când împărțim în 2 exact ce face Merge Sort?

- Merge Sort are nevoie de un vector suplimentar și face multe mutări suplimentare.

- Quick Sort e “in place”... memoria suplimentară e pentru stivă...

In-Place Merge Sort

- Nu folosim vector suplimentar ca în cazul Merge Sort
  - Nu este O(n logn)
  - Mai complicat
  - O altă opțiune este Block Sort

Intro Sort

- Se mai numește Introspective Sort
- Este sortarea din anumite implementări ale STL-ului
- Este un algoritm hibrid (combină mai mulți algoritmi care rezolvă aceeași problemă)
- Este format din Quick Sort, Heap Sort și Insertion Sort

IDEE:

- Algoritmul începe cu Quick Sort
- Trece în Heap Sort dacă nivelul recursivității crește peste logn
- Trece în Insertion Sort dacă numărul de elemente de sortat scade sub o anumită limită

TimSort

- Sortarea din Python
- Este un algoritm hibrid care îmbină Merge Sort cu sortare prin inserare

IDEE:

- Algoritmul începe cu Merge Sort
- Trece în Insertion Sort dacă numărul de elemente de sortat scade sub o anumită limită (32, 64)

Sortări prin comparație

Vizualizare:

https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/ComparisonSort.html

- Quick Sort
- Merge Sort
- Algoritmi elementari de sortare

Clase de complexitate

- Fie f, g două funcții definite pe $\mathbb{Z}^+$

Notații:

- O(margine superioară - *upper bound*)
- Ω(margine inferioară - *lower bound*)
- Θ(categorie constantă - *same order*)

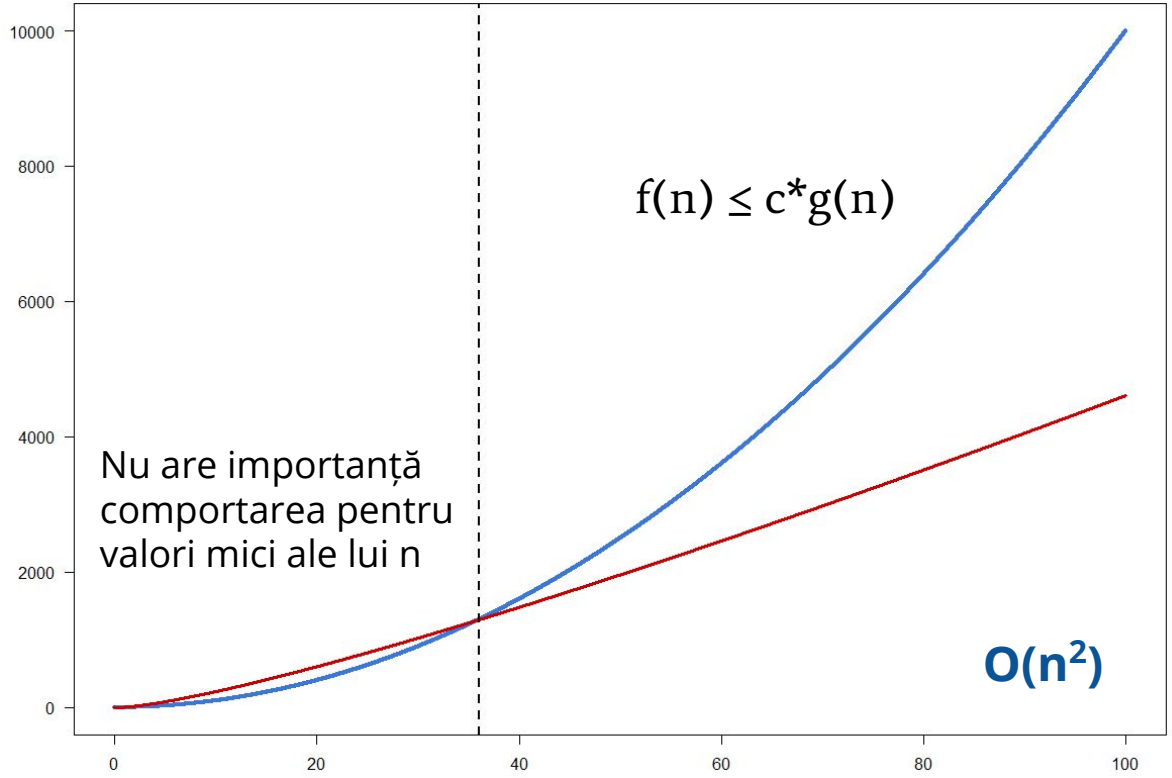
Big-O

- O → mărginire superioară
  - Un algoritm care face 3*n operații este și O(n), dar și O(n^2) și O(n!)
  - În general, vom vrea totuși marginea strânsă, care este de fapt Θ

- $f(n) = O(g(n))$, dacă există constantele *c* și n_0 astfel încât $f(n) \leq c * g(n)$ pentru $n \geq n_0$

Big-O

Ilustrare grafică. Pentru valori mari ale lui n, f(n) este mărginită superior de c*g(n), c > 0



$c*g(n) = n^2$

$f(n) = 10n*\ln(n) + 5$

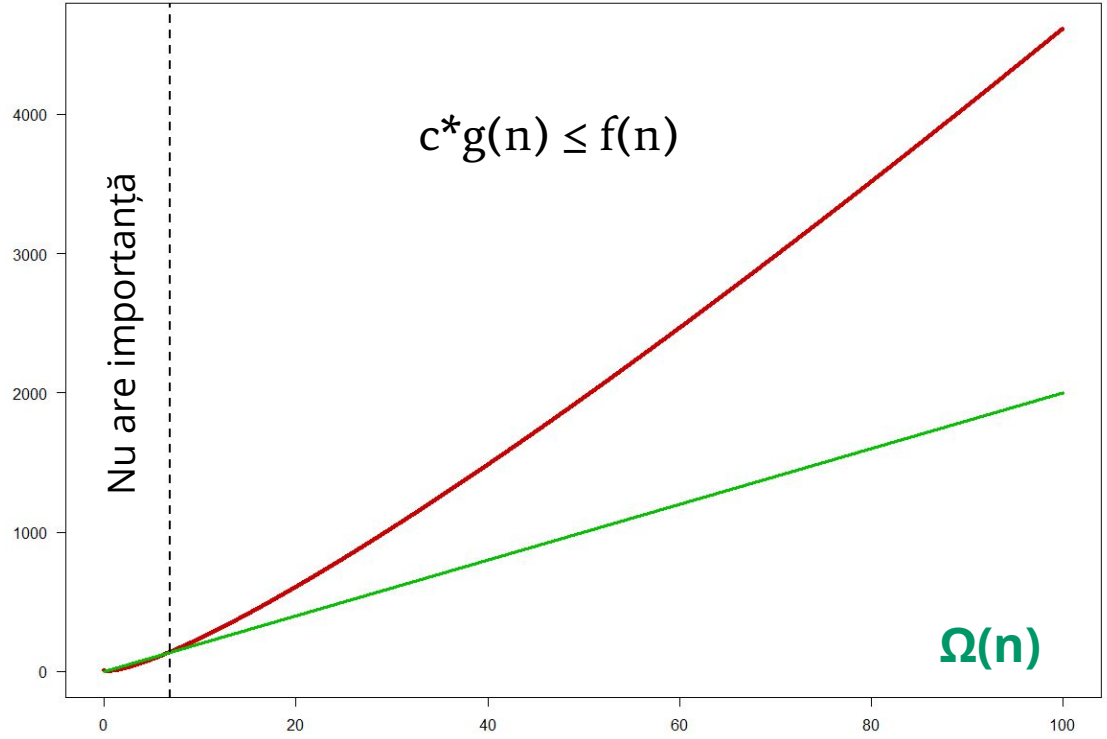
Big-Ω

- $\Omega \rightarrow$ mărginire inferioară

- $f(n) = \Omega(g(n))$, dacă există constantele *c* și n_0 astfel încât $f(n) \geq c * g(n)$ pentru $n \geq n_0$

Big-Ω

Ilustrare grafică. Pentru valori mari ale lui n, f(n) este mărginită inferior de c*g(n), c > 0



f(n) = 10n*ln(n) + 5

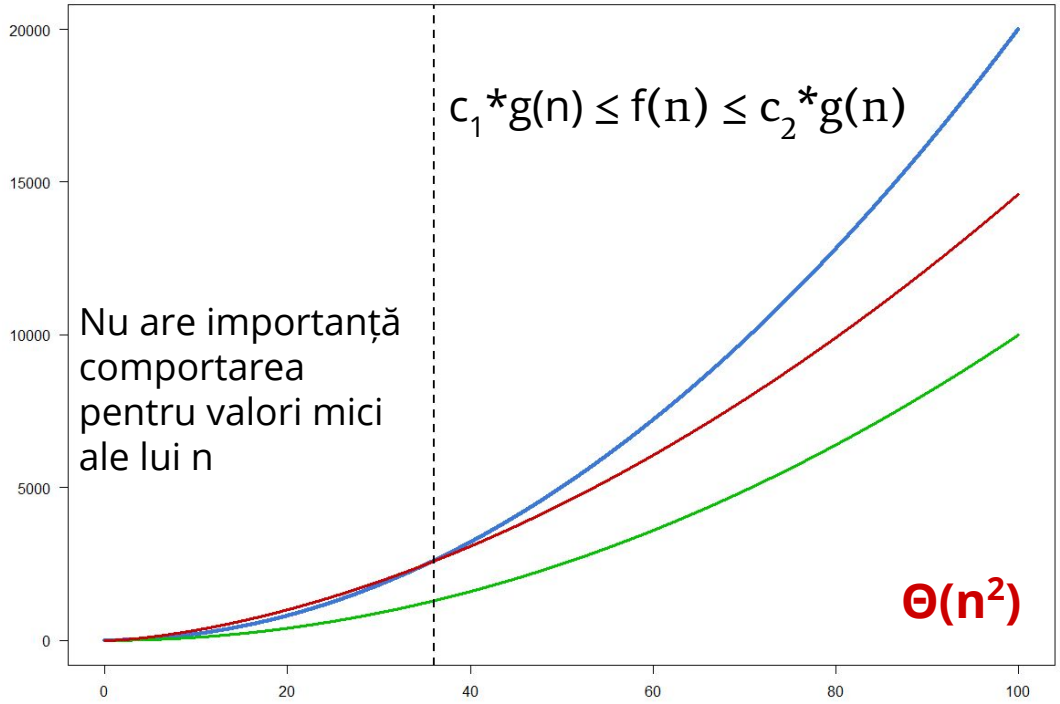
c*g(n) = 20n

Big-Θ

- Θ → marginire dubla (si inferioara si superioara)

Big-Θ

Ilustrare grafică. Pentru valori mari ale lui n, f(n) este mărginită atât inferior cât și superior de $c_1*g(n)$, respectiv $c_2*g(n)$, $c_1, c_2 > 0$



$c_2*g(n) = 2n^2$

$f(n) = n^2 + 10n*\ln(n) + 5$

$c_1*g(n) = n^2$

Complexitatea minimă pentru o sortare prin comparație

Teoremă: Orice algoritm de sortare care se bazează pe comparații face cel putin Ω(n logn) comparații.

Schiță de demonstrație:

Sunt în total n! permutări. Algoritmul nostru de sortare trebuie să sorteze toate aceste n! permutări. La fiecare pas, pe baza unei comparații între 2 elemente, putem, în funcție de răspuns, să eliminăm o parte din comparații. La fiecare pas, putem înjumătăți numărul de permutări → obținem minim $\log_2(n!)$ comparatii, dar

$$\log_2(n!) = \log_2(n) + \log_2(n-1) + \ldots + \log_2(2) = \Omega(n \log n).$$

Complexitatea minimă pentru o sortare prin comparație

Teoremă: Orice algoritm de sortare care se bazează pe comparații face cel putin Ω(n logn) comparații.

Exemplu: N = 3, vrem să sortăm orice permutare a vectorului {1,2,3}:

(1,2,3) (1,3,2) (2,1,3) (2,3,1) (3,1,2) (3,2,1)

Facem o primă comparație, să zicem a_1 ***?*** a_2.
Să zicem că $a_1 > a_2 \rightarrow$ rămân 3 posibilități: (1,2,3) (1,3,2) (2,3,1)

Dacă ulterior comparăm a_1 cu a_3 ... atunci:

- dacă $a_3 > a_1$ am terminat
- dacă $a_1 > a_3$ atunci rămânem cu (1,2,3) (1,3,2) și mai trebuie să facem a 3-a comparație...

Heap Sort

Vizualizare:

https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/HeapSort.html

6 5 3 1 8 7 2 4

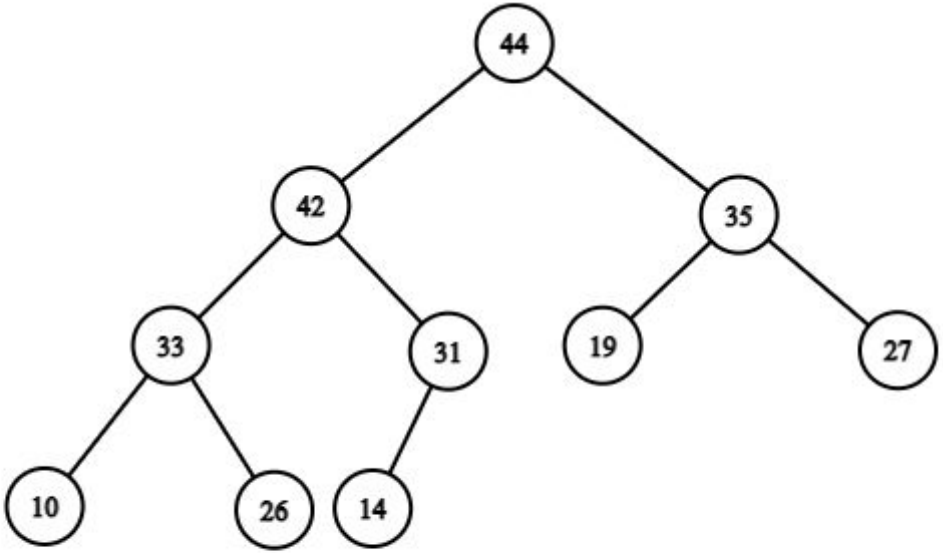
Scurtă introducere în heap-uri

- Ce este un heap?
  - Arbore binar aproape complet
  - Are înălțimea h = logn

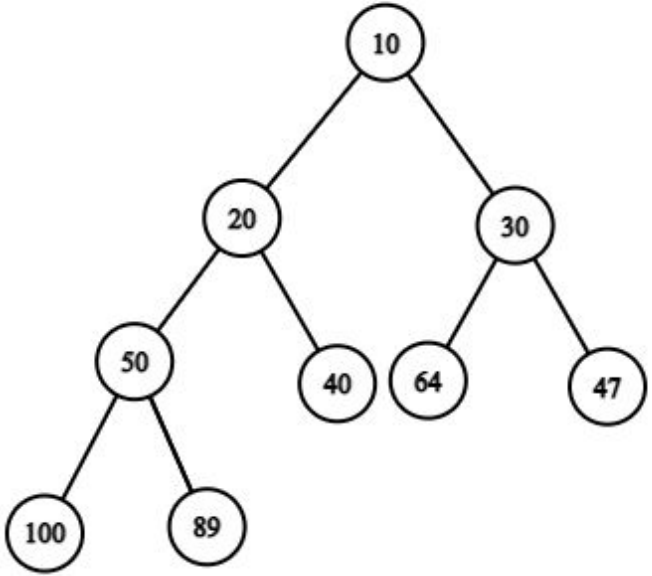
- Max-heap
  - Pentru orice nod X, fie T tatăl lui X
  - T are valoarea ≥ decât valoarea lui X
  - Elementul maxim este în rădăcină

- Min-heap
  - Pentru orice nod X, fie T tatăl lui X
  - T are valoarea ≤ decât valoarea lui X
  - Elementul minim este în rădăcină

Scurtă introducere în heap-uri



Max-heap
Ultima poziție: 14



Min-heap
Ultima poziție: 89

Heap Sort

- În funcție de sortarea dorită (ascendentă sau descendentă) - se folosește max-heap sau min-heap

IDEE:

- Elementele vectorului inițial sunt adăugate într-un heap
- La fiecare pas, este reparat heap-ul după condiția de min/max-heap
- Cât timp mai sunt elemente în heap:
  - Fie X elementul maxim
  - X este interschimbat cu cel de pe ultima poziție în heap
  - X este adăugat la vectorul sortat (final)
  - X este eliminat din heap
  - Heap-ul este reparat după condiția de min/max-heap

Kahoot

Final