[1]Examen la GAL, an I, sem. II, Informatică, Seria 13
25.06.2021

Nume și prenume: ______________________________

Grupa: __________

1. Decideți care dintre următoarele mulțimi sunt subspații vectoriale reale ale lui $\mathbb{R}^3$: (1 punct)
   (a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - z = 0\}$; (0.2p)
   (b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0\}$; (0.2p)
   (c) $W_3 = \{\alpha(1, 2, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; (0.2p)
   (d) $W_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + 4z = 1\}$; (0.2p)
   (e) $W_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 3z^2 = 0\}$. (0.2p)
   Justificați răspunsurile.

2. Fie aplicația $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, (2 puncte)

$$f(x, y, z) = (-x + 3y - z, -3x + 5y - z, -3x + 3y + z).$$

   (a) Arătați că f este aplicație liniară și scrieți matricea lui f în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. (0.5p)
   (b) Arătați că f este un endomorfism diagonalizabil. (1p)
   (c) Determinați o bază în care f are forma diagonală. (0.5p)

3. În spațiul vectorial euclidian $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, <\ ,\ >)$ (unde $<\ ,\ >$ este produsul scalar canonic) se consideră vectorii $f_1 = (1, -1, 1)$ și $f_2 = (2, 1, 2)$. (2.5 puncte)
   (a) Calculați $\|f_1\|$, $\|f_2\|$ și unghiul dintre f_1 și f_2. (0.5p)
   (b) Determinați **un** vector nenul $f_3 \in \mathbb{E}^3$ astfel încât f_3 să fie perpendicular pe f_1 și f_2. (0.5p)
   (c) Pentru f_3 obținut la punctul (b), ortonormați sistemul $\{f_1, f_2, f_3\}$ prin procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt. (1p)
   (d) Determinați **în mod optim** coordonatele vectorului $v = (1, 2, -1)$ în reperul ortonormat obținut la punctul (c). (0.5p)

4. Fie $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ conica de ecuație (2 puncte)

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 3y + 2 = 0.$$

   (a) Să se precizeze natura și genul conicei date. (0.5p)
   (b) Să se reducă $\mathcal{C}$ la forma canonică, precizându-se schimbarea izometrică de reper efectuată. (1p)
   (c) Să se calculeze excentricitatea conicei $\mathcal{C}$. (0.5p)

5. În $\mathbb{R}^3$ se consideră varietățile liniare $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ definite prin: (1.5 puncte)

$$\mathcal{A}_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 4\}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \}$$

[1]Subiectele 1-5 sunt obligatoriil. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore. Baftă!

(a) Determinaţi varietatea liniară $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. (0.75p)

(b) Precizaţi spaţiul vectorial director al subspaţiului de la punctul (a). (0.25p)

(c) Găsiţi varietatea liniară ce trece prin punctul $P = (1, -1, 2)$ şi este paralel şi de aceeaşi dimensiune cu $\mathcal{A}_1$. (0.5p)

= EXAMEN GAL (var. 14) GRUIA GABRIEL

1

a) $x+3y-z=0$

not $x=\alpha,\ y=\beta;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R} \Rightarrow z=\alpha+3\beta$

$W_1=\{(\alpha,\beta,\alpha+3\beta) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\in\mathbb{R}^3$

$W_1\subset\mathbb{R}^3$ subsp. vect. dacă $\begin{cases}\forall x,y\in W_1 \Rightarrow x+y\in W_1\\ \forall h\in\mathbb{R} \text{ și } x\in W_1 \Rightarrow hx\in W\end{cases}$ not (*)

evident, deoarece $x+3y-z=0$, $a+3b-c=0$ $\Rightarrow (x+a)+3(y+b)+z(c=0$

și

$\alpha(\underbrace{x+3y-z}_{0})=0$

$\Rightarrow W_1$ subsp. vect. al $\mathbb{R}^3$

b) $x^2+y^2-3z^2=0$

not $x=\alpha,\ y=\beta \Rightarrow z=\pm\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{3}}$

$W_2=\{(\alpha,\beta,\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{3}}) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$

(*), fie $x,y\in W_2$, $x=(\alpha,\beta,\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{3}})$

$y=(a,b,-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{3}})$

$\Rightarrow x+y=(\alpha+a,\beta+b,\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{3}}-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{3}})\notin W_2$

$\Rightarrow W_2$ nu e subsp. vect. al $\mathbb{R}^3$

c) $\alpha(1,2,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(*)

1) fie $x, y \in W_3$; $\left.\begin{array}{l} x = \alpha(1,2,1) \\ y = \beta(1,2,1) \end{array}\right| \Rightarrow x+y = (\alpha+\beta)(1,2,1) \in W_3$,

$\forall x, y \in W_3$

2) fie $k \in \mathbb{R}$ și $x \in W_3 \Rightarrow kx = k\alpha(1,2,1) \in W_3$,

pt că $\alpha \cdot k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow W_3$ subsp. vect. al $\mathbb{R}^3$

d) $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+4z = 1$

(*)

1) fie $x, y \in W_4$; $\begin{array}{l} x = 2a+3b+4c \\ y = 2m+3n+4p \end{array} \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y = 2(a+m)+3(b+n)+4(c+p) = 2 \notin W_4$

$\Rightarrow W_4$ nu e subsp. vect. al $\mathbb{R}^3$

e) $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+3z^2 = 0$

(*)

$x^2+y^2+3z^2 = 0 \Rightarrow W_5$ conține doar vectorul nul

$\Rightarrow W_5$ subsp. vect. al $\mathbb{R}^3$

② $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = (-x+3y-z, -3x+5y-z, -3x+3y+z)$

a) f apl. lin $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x+y) = f(x)+f(y); \forall x,y \in \mathbb{R}^3 \\ f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x); \forall x \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

1) fie $\left.\begin{array}{l} x = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 \\ y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow x+y = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

$f(x+y) = (-(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)-(z_1+z_2), -3(x_1+x_2)+$
$+5(y_1+y_2)-(z_1+z_2), -3(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)+(z_1+z_2))$

$= (-x_1+3y_1-z_1, -3x_1+5y_1-z_1, -3x_1+3y_1+z_1)+$
$+(-x_2+3y_2-z_2, -3x_2+5y_2-z_2, -3x_2+3y_2+z_2)$
$= f(x)+f(y)$

2) $f(\alpha \cdot x) = (-\alpha x_1 + 3\alpha y_1 - \alpha z_1; -3\alpha x_1 + 5\alpha y_1 - \alpha z_1,$
$-3\alpha x_1 + 3\alpha y_1 + \alpha z_2) =$
$= (\alpha(-x_1+3y_1-z_1), \alpha(-3x_1+5y_1-z_1), \alpha(-3x_1+3y_1+z_1))$
$= \alpha(-x_1+3y_1-z_1, -3x_1+5y_1-z_1, -3x_1+3y_1+z_1)$
$= \alpha \cdot f(x)$

1), 2) $\Rightarrow$ f apl. liniară

$B_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$

$f(e_1) = (-1, -3, -3)$
$f(e_2) = (3, 5, 3)$
$f(e_3) = (-1, -1, -1)$

$\Rightarrow A_f = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow -(\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \end{matrix} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow Spec(f) = (1, 2, 2)$; $\begin{matrix} ma(\lambda_1) = 1 \\ ma(\lambda_2) = ma(\lambda_3) = 2 \end{matrix}$

subsp. proprii:

$S_{\lambda_1 = 1} : \begin{cases} -2x + 3y - z = 0 \\ -3x + 4y - z = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} \Rightarrow z = 3y - 2x = x \\ \\ \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y \end{matrix}$

$\Rightarrow x = y = z$ not α, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow V_{\lambda_1} = \{ \alpha(1,1,1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

$S_{\lambda_{2,3} = 2} : \begin{cases} -3x + 3y - z = 0 \end{cases}$, not $y = \alpha$, $z = \beta$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 3x = 3\alpha - \beta \Rightarrow x = \frac{3\alpha - \beta}{3}$

$\Rightarrow V_{\lambda_{2,3}} = \{ \alpha(1,1,0) + \beta(-\frac{1}{3}, 0, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

$\begin{matrix} \dim V_{\lambda_1} = 1 \\ \dim V_{\lambda_{2,3}} = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ma(\lambda_1) + ma(\lambda_{2,3}) = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \\ mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i), \forall i = \overline{1,3} \end{cases}$

$\Rightarrow f$ diagonalizabilă (*)

c) (*) $\Rightarrow \exists B \subset \mathbb{R}^3$ bază form. din vectorii proprii ai lui f, în rap. cu care matricea asoc. lui f are forma diagonală: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \{ (1,1,1), (1,1,0), (-\frac{1}{3}, 0, 1) \}$

③ $f_1=(1,-1,1)$, $f_2=(2,1,2)$

a) $\|f_1\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$

$\|f_2\|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$

Fie $\alpha=\sphericalangle(f_1,f_2)$; avem $\cos\alpha=\dfrac{\langle f_1,f_2\rangle}{\|f_1\|\|f_2\|}=\dfrac{+3}{3\sqrt{3}}=+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \alpha=\arccos\left(+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ~~$=\pi-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$~~

b) Fie $f_3=(a,b,c)\in E_3$ a.î. $\begin{cases} f_3\perp f_1 \\ f_3\perp f_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\langle f_3,f_1\rangle=0\\ \langle f_3,f_2\rangle=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=0\\ 2a+b+2c=0\end{cases} \Rightarrow a=-c,\ b=0 \Leftrightarrow f_3=(-\alpha,0,\alpha)$
$c=\text{not } \alpha$

$\Rightarrow f_3=\alpha(-1,0,1),\ \alpha\in\mathbb{R}^*$ $\Rightarrow f_3$ nu este unic determinabil

alegem $\alpha=1$ $\Rightarrow f_3=(-1,0,1)$

c) $\{f_1=(1,-1,1),\ f_2=(2,1,2),\ f_3=(-1,0,1)\}$

$$\begin{cases} e_1'=f_1=(1,-1,1)\\ e_2'=f_2-\dfrac{\langle f_2,e_1'\rangle}{\|e_1'\|^2}e_1'=(2,1,2)-\dfrac{3}{3}(1,-1,1)=(1,2,1)\\ e_3'=f_3-\dfrac{\langle f_3,e_1'\rangle}{\|e_1'\|^2}e_1'-\dfrac{\langle f_3,e_2'\rangle}{\|e_2'\|^2}e_2'=\\ \quad=(-1,0,1)-(0,0,0)-(0,0,0)=(-1,0,1)\end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1=\dfrac{e_1'}{\|e_1'\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\\ e_2=\dfrac{e_2'}{\|e_2'\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)\\ e_3=\dfrac{e_3'}{\|e_3'\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\end{cases}$$

$\Rightarrow \{e_1,e_2,e_3\}\subset\mathbb{R}^3$ baza ortonormată obț. de la $\{f_1,f_2,f_3\}$

d) $v = (1, 2, -1)$

$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$

$\langle v, e_1 \rangle = v_1 \langle e_1, e_1 \rangle + v_2 \langle e_2, e_1 \rangle + v_3 \langle e_3, e_1 \rangle = v_1$

$\Rightarrow v_1 = \langle v, e_1 \rangle$

analog $\Rightarrow v_2 = \langle v, e_2 \rangle$

$v_3 = \langle v, e_3 \rangle$

$\Rightarrow v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \langle v, e_3 \rangle e_3$

$\Rightarrow v_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$v_2 = \frac{4}{\sqrt{6}}$

$v_3 = -\frac{2}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow [v]_{\{e_1, e_2, e_3\}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{6}}, -\sqrt{2}\right)$

4 c) deoarece conica C este hiperbolă, avem

$e \in (1, +\infty)$ excentricitatea conicii C

4

$$C: \overbrace{x^2+y^2-4xy+3x-3y+2}^{=f(x,y)}=0$$

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; $\delta=\det A=-3$

$A'=\begin{pmatrix}1 & -2 & \frac{3}{2}\\ -2 & 1 & -\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 2\end{pmatrix}$; $\Delta=\det A'=-\frac{3}{2}$

$\delta<0$, $\Delta\neq 0$ $\Rightarrow$ C hiperbolă (gen)

$\Downarrow$

C nedegenerată (naturală)

b) Centrul conicei C este $P_0(x_0, y_0)$, unde (x_0, y_0) se determină ca unică sol. a:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-4y+3=0\\ 2y-4x-3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow P_0\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ centrul conicei C

Efectuăm translația t:

$$t\begin{cases}x'=x-x_0\\ y'=y-y_0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=x+\frac{1}{2}\\ y'=y-\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=x'-\frac{1}{2}\\ y=y'+\frac{1}{2}\end{cases}$$

$t(C): (x')^2-4x'y'+(y')^2+\frac{1}{2}=0$; $\frac{\Delta}{\delta}=\frac{1}{2}$

$\det(A-\lambda I_2)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2-4=0$

$\Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=3\end{cases}$ valori proprii

- Aflăm subspațiile proprii:

$V_{\lambda_1} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid Av = \lambda_1 v \}$.

$(A - \lambda_1 I_2) v = O_{(2,1)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2v_1 - 2v_2 = 0 \\ -2v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2 = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow V_{\lambda_1} = \{ \alpha(1,1) / \alpha \in \mathbb{R} \} = \langle (1,1) \rangle$

$V_{\lambda_2} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid Av = \lambda_2 v \}$

$(A - \lambda_2 I_2) v = O_{(2,1)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2v_1 - 2v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = -v_2$

$\text{not } v_2 = \alpha \ \Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{\lambda_2} = \{ \alpha(-1,1) / \alpha \in \mathbb{R} \} = \langle (-1,1) \rangle$

vectorii proprii:

$\begin{cases} f_1 = (1,1) \\ f_2 = (-1,1) \end{cases}$; $\langle f_1, f_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow f_1 \perp f_2$

reper ortonormat:

$\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \\ e_2 = \dfrac{f_2}{\|f_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) \end{cases}$

rotația:

$\Gamma \begin{cases} x'' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y'' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases}$ $\quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$R \cdot R^t = I_2 \Rightarrow R$ ortogonală

$\Rightarrow R^{-1} = R^t \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'' - y'') \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'' + y'') \end{cases}$

(5) $A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 4\}$

$A_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}\right.$

a) $A_1 \cap A_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \;\middle|\; \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}\right\}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad x_1 = 1$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad x_2 = 1$$

$x_2 + 2x_3 = 3 \Leftrightarrow 2x_3 = 2 \Leftrightarrow x_3 = 1$

$\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \{(1, 1, 1)\}$

b) $\operatorname{dir}(A_1 \cap A_2) = \emptyset$, pt că $A_1 \cap A_2$ este un punct

c) $\operatorname{dir}(A_1) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$

fie A_3 varietatea cerută, a.î. $\operatorname{dir}(A_3) = \operatorname{dir}(A_1)$

$\Rightarrow A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = c\}$

determinăm $c \in \mathbb{R}$ aî $P \in A_3$

$\Rightarrow 1 + 2(-1) + 2 = c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\}$