

FLUXONIUM + LC-RESONATOR COUPLING: BIC STATES

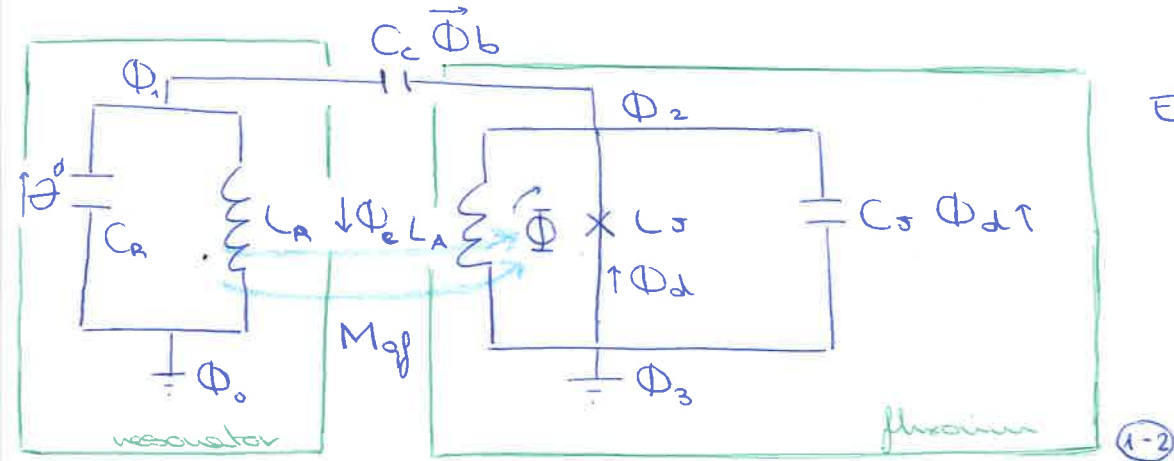
Maria Miki Pérez

Notes SC - JJ Ripoll

SC23

→ Estudio del acoplamiento entre un fluxonium y un resonador LC, este sistema conlleva la aparición de "band states in the continuum" (BIC).

CIRCUIT AND HAMILTONIAN



$$E_J = (\Phi_0 / 2\pi)^2 / L_J$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \Phi_a &= \Phi_1 - \Phi_0 \\ \Phi_b &= \Phi_2 - \Phi_1 \\ \Phi_c &= \Phi_3 - \Phi_2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad \Phi_d + \Phi_c = \bar{\Phi} + \frac{M_{qf}}{L_A} \Phi_a \rightarrow \Phi_d = \bar{\Phi}_{ext} + \frac{M_{qf}}{L_A} \Phi_a - \Phi_c = \bar{\Phi}_{ext} + \frac{M_{qf}}{L_A} (\Phi_1 - \Phi_0) - (\Phi_3 - \Phi_2)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad I_{C,a} &= C_R \ddot{\Phi}_a = C_R (\ddot{\Phi}_1 - \ddot{\Phi}_0) \\ I_{L,a} &= \frac{\Phi_a}{L_A} = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{L_A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{C,b} &= C_c \ddot{\Phi}_b = C_c (\ddot{\Phi}_2 - \ddot{\Phi}_1) \\ I_{L,c} &= \frac{\Phi_c}{L_A} = \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{L_A} \end{aligned}$$

$$I_{C,d} = C_J \ddot{\Phi}_d = C_J (\ddot{\Phi}_2 - \ddot{\Phi}_3)$$

$$I_{J,d} = I_J \sin(\Phi_d / \Phi_0) = I_J \sin\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_3 + \bar{\Phi}_{ext} + \frac{M_{qf}}{L_A} (\Phi_1 - \Phi_0)}{\Phi_0}\right)$$

⑥ Nodo 1:

$$C_R (\ddot{\Phi}_1 - \ddot{\Phi}_0) + \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{L_A} = C_c (\ddot{\Phi}_2 - \ddot{\Phi}_1)$$

Nodo 2:

$$C_c (\ddot{\Phi}_2 - \ddot{\Phi}_1) + C_J (\ddot{\Phi}_2 - \ddot{\Phi}_3) + I_J \sin\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_3 + \bar{\Phi}_{ext} + \frac{M_{qf}}{L_A} (\Phi_1 - \Phi_0)}{\Phi_0}\right) = \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{L_A}$$

$$\textcircled{7} \Phi_0 = \Phi_3 = 0$$

Nodo 1:

$$\textcircled{A} C_R \ddot{\Phi}_1 + \frac{\Phi_1}{L_R} = C_c (\ddot{\Phi}_2 - \ddot{\Phi}_1)$$

Nodo 2:

$$\textcircled{B} C_c (\ddot{\Phi}_2 - \ddot{\Phi}_1) + C_s \ddot{\Phi}_2 + I_s \sin \left(\frac{\Phi_2 + \Phi_{ext} + \frac{M_{fs}}{L_R} \Phi_1}{\varphi_0} \right) = -\frac{\Phi_2}{L_A}$$

\textcircled{8}

$$\textcircled{A} \frac{d}{dt} [-C_c \dot{\Phi}_2 + (C_c + C_R) \dot{\Phi}_1] = -\frac{\Phi_1}{L_R}$$

$$\downarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_1}$$

$$\mathcal{L} = -C_c \dot{\Phi}_2 \dot{\Phi}_1 + \frac{(C_c + C_R)}{2} \dot{\Phi}_1^2 - \frac{\Phi_1^2}{2L_R} + F(\Phi_2, \dot{\Phi}_2)$$

$$\textcircled{B} \frac{d}{dt} [(C_c + C_s) \dot{\Phi}_2 - C_c \dot{\Phi}_1] = -\frac{\Phi_2}{L_A} - I_s \sin \left(\frac{\Phi_{ext} + \Phi_2 + \frac{M_{fs}}{L_R} \Phi_1}{\varphi_0} \right)$$

$$\downarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{(C_c + C_s)}{2} \dot{\Phi}_2^2 + \frac{(C_c + C_R)}{2} \dot{\Phi}_1^2 - C_c \dot{\Phi}_2 \dot{\Phi}_1 - \frac{\Phi_2^2}{2L_A} - \frac{\Phi_1^2}{2L_R} + E_s \cos \left(\frac{\Phi_2 + \Phi_{ext} + \frac{M_{fs}}{L_R} \Phi_1}{\varphi_0} \right)$$

\textcircled{9}

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_2} = (C_c + C_s) \dot{\Phi}_2 - C_c \dot{\Phi}_1$$

$$q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_1} = (C_c + C_R) \dot{\Phi}_1 - C_c \dot{\Phi}_2$$

Utilizaremos mejor la notación de capacitancias:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \vec{\Phi}^T C \vec{\Phi} + f(\vec{\Phi}) \Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{2} \vec{Q}^T C \vec{Q} - f(\vec{\Phi})$$

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} q \\ Q \end{pmatrix}$$

\nearrow flujo inductivo \nearrow carga inductiva
 \searrow flujo fluxum \searrow carga fluxum

$$C = \begin{pmatrix} C_c + C_R & -C_c \\ -C_c & C_c + C_s \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{|Q|} \begin{pmatrix} C_c + C_s & C_c \\ C_c & C_c + C_R \end{pmatrix}$$

$$|Q| = (C_c + C_R)(C_c + C_s) - C_c^2 = C_c C_s + C_c C_R + C_R C_s$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{C_c + C_R}{C_c C_s + C_c C_R + C_R C_s} Q^2 + \frac{1}{2} \frac{C_c + C_s}{C_c C_s + C_c C_R + C_R C_s} q^2 + \frac{C_c}{C_c C_s + C_c C_R + C_R C_s} Qq - \frac{\Phi_2^2}{2L_A} - \frac{\Phi_1^2}{2L_R} - E_s \cos \left(\frac{\Phi_2 + \Phi_{\text{ext}} + \frac{M_R}{L_R} \Phi_1}{\varphi_0} \right)$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{C_c + C_R}{C_c C_s + C_c C_R + C_R C_s} Q^2 + \frac{\Phi_2^2}{2L_A} - E_s \cos \left(\frac{\Phi_2 + \Phi_{\text{ext}} + \frac{M_R}{L_R} \Phi_1}{\varphi_0} \right) +$$

$\tilde{H}_{\text{fluxion}}(\Phi_{\text{ext}}, \Phi_1)$, hamiltoniano del fluxion con capacitancia renormalizada: $C_s^{-1} \rightarrow \tilde{C}_s^{-1} = \frac{C_c + C_R}{C_c C_s + C_c C_R + C_R C_s}$ y campo externo dependiente del flujo del resonador. $C_c C_s + C_c C_R + C_R C_s$

$$+ \frac{1}{2} \frac{C_c + C_s}{C_c C_s + C_c C_R + C_R C_s} q^2 + \frac{\Phi_1^2}{2L_R} + \frac{C_c}{C_c C_s + C_c C_R + C_R C_s} Qq$$

$\tilde{H}_{\text{resonador}}$, hamiltoniano de resonador LC con capacitancia renormalizada:

$$C_R^{-1} \rightarrow \tilde{C}_R^{-1} = \frac{C_c + C_s}{C_c C_s + C_c C_R + C_R C_s}$$

termino de acoplamiento capacitivo (H coupling)

El Hamiltoniano total del sistema se puede escribir como una suma de terminos:

$$H = \tilde{H}_f + \tilde{H}_r + H_c$$

Donde \tilde{H}_r el Hamiltoniano del resonador puede ser escrito en base a los operadores creación y destrucción como

$$\tilde{H}_r = \hbar \tilde{\omega}_R (\tilde{C}_R, L_R) [a^\dagger + 1/2], \quad \tilde{\omega}_R = \frac{1}{\sqrt{L_R \tilde{C}_R}}$$

ACOPLLO CAPACITIVO:

Estudiamos el acoplamiento capacitivo a distintos órdenes.

$$H_c = \frac{C_c}{C_c C_s + C_c C_R + C_R C_s} qQ$$

Este viene dado por los operadores de carga de qubit y resonadores desacoplados. El operador de carga del resonador es:

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2Z}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad Z = \sqrt{\frac{L_R}{\tilde{C}_R}}$$

Y el operador de carga del fluxonium se puede obtener únicamente y viene dado por:

$$Q = \frac{i\tilde{C}}{h} \left\{ 2\Delta\tilde{\Phi}_* (S_-^2 - S_+^2) + i \left(Eb - \frac{3}{2}\Delta b \right) S_y \right\}$$

a primer orden en la base de bajas energías.

Luego el término de acoplamiento capacitivo viene dado por:

$$H_c = \frac{i\tilde{C} (C_c C_f + C_f C_A + C_c C_A)}{h (C_c C_f + C_f C_A + C_A C_c) (C_c + C_A)} \sqrt{\frac{h}{2Z}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \left\{ 2\Delta\tilde{\Phi}_* (S_-^2 - S_+^2) + i \left(Eb - \frac{3}{2}\Delta b \right) S_y \right\} =$$

$$H_c = \frac{C_c}{(C_c + C_A) \sqrt{h2Z}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \left\{ 2\Delta\tilde{\Phi}_* (S_-^2 - S_+^2) + i \left(Eb - \frac{3}{2}\Delta b \right) S_y \right\}$$

ACOPLO INDUCTIVO:

→ El término del acoplamiento inductivo viene dado por la variación que el flujo del resonador induce en el flujo que atraviesa el fluxonium.

$$-E_J \cos \left(\frac{\Phi_f}{\Phi_0} + \frac{Mf\Phi}{L_A} \Phi_A \right) \approx -E_J \frac{Mf\Phi}{L_A} \Phi_A \sin(\Psi_f) + \frac{1}{2} \frac{Mf\Phi^2}{L_A^2 \Phi_0} \Phi_A^2 \cos(\Psi_f) + \dots$$

$$Mf\Phi \rightarrow 0 + E_J \cos(\Psi_f)$$

Aproximamos entonces la fase del acoplamiento:

$$H_c = \frac{Mf\Phi}{L_A} \Phi_A \sin(\Psi_f)$$

Donde Φ_A es el flujo en el resonador:

$$\Phi_A = \sqrt{\frac{hZ}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad Z = \sqrt{\frac{L_A}{\tilde{C}_A}}$$

Y el operador de flujo del fluxonium en el espacio de bajas energías es:

$$\hat{\Psi} = \tilde{\Phi}_* S_z + b (S_x S_z + S_z S_x)$$

Luego la interacción viene dada por:

$$H_c = \frac{Mf\Phi}{L_A} \sqrt{\frac{hZ}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(\tilde{\Phi}_* S_z + b (S_x S_z + S_z S_x))$$

para interacciones pequeñas $Mf\Phi \ll 1$.

(se suele tomar $\sin(\Psi) \approx \Psi$)

BIC-STATES:

→ Analizaremos las transiciones permitidas y prohibidas en el flujo inducido por el acoplamiento a un resonador.

Acoplamiento capacitivo

→ Encontraremos una transición prohibida $|0\rangle \rightarrow |+\rangle$ que fue un estado BIC. Esto ocurre debido a la simetría de paridad que respeta el Hamiltoniano cuando $\Phi_{ext} = 0$, $(\Phi_f, \Phi_v) \rightarrow (-\Phi_f, -\Phi_v)$, que no permite transiciones entre estados con la misma paridad y que se sigue respetando al ser el operador de carga impar una vez realizado el acoplamiento.

→ Nos centramos ahora en el subespacio del qubit para verificar que no ocurren estas transiciones:

Decaimiento $|1+\rangle \rightarrow |1-\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle + | H_c | 1-\rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle + | 1 + \langle - | 1) \right] \left\{ 2\Delta\tilde{\Phi}_A (S_-^2 - S_+^2) + i(\epsilon_b - 2\Delta b) S_y \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle + | 1 + \langle - | 1) \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|1+\rangle - |1-\rangle) \right] = \frac{1}{2} \left\{ 2\Delta\tilde{\Phi}_A \langle + | S_+^2 | 1-\rangle + i(\epsilon_b - 2\Delta b) \right. \\ &\quad \left. [\langle + | S_y | 1+\rangle - \langle + | S_y | 1-\rangle + \langle - | S_y | 1+\rangle - \langle - | S_y | 1-\rangle] + 2\Delta\tilde{\Phi}_A \langle - | S_-^2 | 1+\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ 2\Delta\tilde{\Phi}_A + 2\Delta\tilde{\Phi}_A \} = 2\Delta\tilde{\Phi}_A \xrightarrow{\text{hay transición}} \end{aligned}$$

Decaimiento $|1+\rangle \rightarrow |0\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle + | H_c | 0\rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle + | 1 + \langle - | 1) \right] \left\{ 2\Delta\tilde{\Phi}_A (S_-^2 - S_+^2) + i(\epsilon_b - 2\Delta b) S_y \right\} \\ |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} i(\epsilon_b - 2\Delta b) (\langle + | S_y | 0\rangle + \langle - | S_y | 0\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} i(\epsilon_b - \frac{3}{2}\Delta b) (-i, i) = 0 \xrightarrow{\text{BIC}} \end{aligned}$$

Decaimiento $|1-\rangle \rightarrow |0\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle - | H_c | 0\rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle + | 1 - \langle - | 1) \right] \left\{ 2\Delta\tilde{\Phi}_A (S_-^2 - S_+^2) + i(\epsilon_b - 2\Delta b) S_y \right\} \\ |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} i(\epsilon_b - 2\Delta b) (-i, i) = \sqrt{2} (\epsilon_b - 2\Delta b) \xrightarrow{\text{hay transición}} \end{aligned}$$

Acoplamiento inductivo

→ El acoplamiento con flujos externos debería activar estas transiciones. Sin embargo, si estos son pequeños es decir, el flujo externo cumple $\Phi_{ext} \ll \Phi_f$ y la inductancia entre con el resonador $M_{qf}/L_f \ll 1$, vemos que aparece un acoplamiento:

$$H_c = \left(\frac{I_c M_{qf} \Phi_v}{L_R} + \frac{2\pi \Phi_{ext}}{\Phi_0} \right) \sin \left(\frac{2\pi \Phi_f}{\Phi_0} \right)$$

que es de número impar ante cambios de signo en la fase que implica de número que la transición $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$ está prohibida.

→ De nuevo podemos verificar esto calculando en el subespacio de qbit y teniendo:

$$\sin(\varphi) \sim \varphi \sim \tilde{\Phi}_A S_z + b(S_x S_z + S_z S_x)$$

de forma que:

$$H_c = \left(I_c \Phi_{ext} + \frac{I_c M_{qf} \Phi_v}{L_A} \right) [\tilde{\Phi}_A S_z + b(S_x S_z + S_z S_x)]$$

Decaimiento $|1+\rangle \rightarrow |1-\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle + | H_c | - \rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle +1 | + \langle -1 |) \right] \left\{ \left(I_c \Phi_{ext} + \frac{I_c M_{qf} \Phi_v}{L_A} \right) (\tilde{\Phi}_A S_z + b(S_x S_z + S_z S_x)) \right\} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|1+\rangle - |1-\rangle) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(I_c \Phi_{ext} + \frac{I_c M_{qf} \Phi_v}{L_A} \right) \tilde{\Phi}_A (\langle +1 | S_z | 1+\rangle - \langle -1 | S_z | 1-\rangle) = \\ &= \left(I_c \Phi_{ext} + \frac{I_c M_{qf} \Phi_v}{L_A} \right) \tilde{\Phi}_A \rightarrow \text{hay transición activada por el flujo externo.} \end{aligned}$$

Decaimiento $|1+\rangle \rightarrow |0\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle + | H_c | 0 \rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle +1 | + \langle -1 |) \right] \left\{ \left(I_c \Phi_{ext} + \frac{I_c M_{qf} \Phi_v}{L_A} \right) (\tilde{\Phi}_A S_z + b(S_x S_z + S_z S_x)) \right\} |0\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(I_c \Phi_{ext} + \frac{I_c M_{qf} \Phi_v}{L_A} \right) b (\langle +1 | S_z S_x | 0 \rangle + \langle -1 | S_z S_x | 0 \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(I_c \Phi_{ext} + \frac{I_c M_{qf} \Phi_v}{L_A} \right) b (1-1) = 0, \rightarrow \text{Bic} \end{aligned}$$

Decaimiento $|1-\rangle \rightarrow |0\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle - | H_c | 0 \rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle +1 | - \langle -1 |) \right] \left\{ \left(I_c \Phi_{ext} + \frac{I_c M_{qf} \Phi_v}{L_A} \right) (\tilde{\Phi}_A S_z + b(S_x S_z + S_z S_x)) \right\} |0\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(I_c \Phi_{ext} + \frac{I_c M_{qf} \Phi_v}{L_A} \right) b (1+1) = \sqrt{2} b. \end{aligned}$$

$\left(I_c \Phi_{ext} + \frac{I_c M_{qf} \Phi_v}{L_A} \right) \rightarrow$ hay transición activada por el flujo externo.