Análisis de Datos I

Unidad 6: Pruebas de Hipótesis

Clase: Pruebas de Bondad de Ajuste

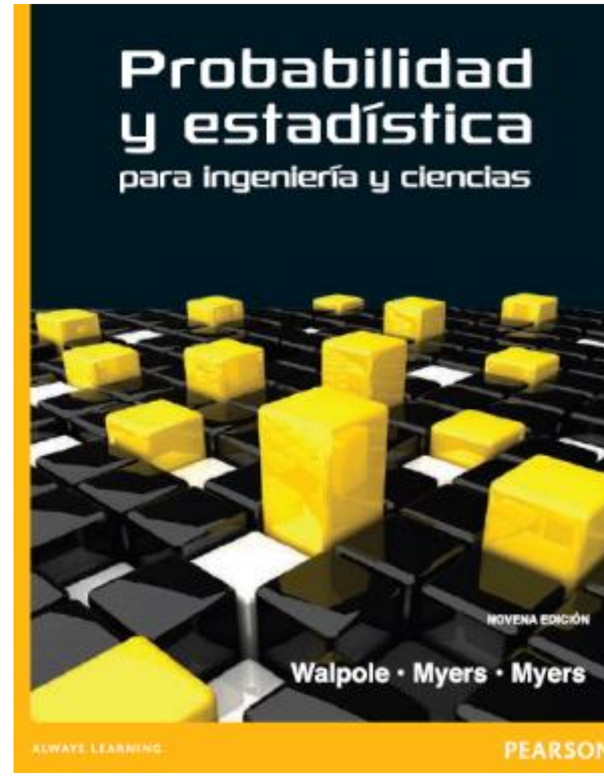
II Semestre de 2024

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Unidad 6

Probabilidad y estadística para ingenieros y ciencias.

Walpole, Myers, & Myers.
Editorial Pearson.



Prueba de bondad de ajuste Chi cuadrado

Prueba de bondad de ajuste

Usos

Una prueba de bondad de ajuste se emplea para decidir cuando un conjunto de datos se ajusta a una distribución de probabilidad específica.

1. Continuas: Normal, Exponencial, Uniforme, etc.
2. Discretas: Binomial, Poisson, hipergeométrica, etc.

H_o : Los datos se ajustan a la distribución $f(x)$ con parametros θ_i, $i = 1, ..., m$
H_1 : Los datos No se ajustan a la distribución $f(x)$ con parametros θ_i, $i = 1, ..., m$

Prueba de bondad de ajuste

Prueba chi cuadrado

La prueba chi cuadrado está basada en la estadística de prueba:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

que tiene una distribución chi cuadrado con $k - 1$ grados de libertad, donde:
k : número de clases o valores a considerar, o_i : frecuencias observadas, e_i : frecuencias esperadas.
Para utilizar esta estadística es necesario que $e_i \geq 5$, en algunos casos es necesario combinar celdas adyacentes para superar este inconveniente o formar las clases de tal manera que se satisfaga esta condición. [Para mayor información sobre esta prueba leer Probabilidad y Estadística, Aplicaciones y Métodos, Autor: George Canavos, Cap. 10]

Prueba de bondad de ajuste

Prueba chi cuadrado

Valores grandes de la estadística χ^2 indican que H_o debe rechazarse.
La región crítica o de rechazo está dada por los valores χ^2 tal que:

$$\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,k-1}$$

En el caso de estimar los parámetros los grados de libertad son $k-p-1$ donde p es el número de parámetros que se estiman. También es posible calcular el valor P como:

$$Valor\ P = P(\chi^2_{k-1} > \text{valor de la estadística})$$

Prueba de bondad de ajuste

Ejemplo: caso continuo

Determine si la duración de cierto tipo de batería (En miles de horas) se ajusta a una distribución normal de media $\mu = 1{,}8$ y desviación estándar $\sigma = 0{,}4$. si una muestra aleatoria arrojó los siguientes valores:

0,7	1,4	1,6	1,7	1,8	1,9	2,1	2,3
0,9	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,1	2,3
1,1	1,5	1,7	1,7	1,8	1,9	2,1	2,4
1,2	1,6	1,7	1,8	1,9	1,9	2,1	2,5
1,4	1,6	1,7	1,8	1,9	1,9	2,2	2,6

Prueba de bondad de ajuste

H_o : La duración de las baterías se ajusta a una distribución normal con $\mu = 1{,}8$ y $\sigma = 0{,}4$

H_1 : La duración de las baterías no se ajusta a una distribución normal con $\mu = 1{,}8$ y $\sigma = 0{,}4$

Tabla de frecuencia agrupada

1. Se determina el número de clases C a utilizar.

Utilizar la **Ley de Sturges**: $C = (3{,}3 * \log n) + 1$ y aproximar al entero más cercano. n es el número de datos a agrupar.

Para $n = 50$, se obtiene $C = 6{,}606 \approx 7$.

2. Se calcula el **rango** R.

R = Dato mayor – Dato menor = $38{,}6 - 20{,}5 = 18{,}1$.

3. Se determina la **precisión** P, $P = 0{,}1$.

Nota: la precisión la determina el instrumento de medición dependiendo del número de cifras decimales que maneje, así:

# de cifras	0	1	2	3	4	...
P	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	...

4. Se calcula la amplitud A.

Siempre vamos a aproximar por arriba, teniendo en cuenta la precisión.

$$A = \frac{R}{C} = \frac{18{,}1}{7} = 2{,}5857$$

En este caso $P = 0{,}1$; entonces $A = 2{,}6$.

Prueba de bondad de ajuste

4. Se calcula la amplitud *A*.

Siempre vamos a aproximar por arriba, teniendo en cuenta la precisión.

$$A = \frac{R}{C} = \frac{18,1}{7} = 2,5857$$

En este caso *P = 0,1*; entonces *A = 2,6*.

5. Se calculan límites teóricos *(Límites de clase)* y límites prácticos *(Fronteras de clase)* para las clases.

- Límites para la primera clase serán:

Límite inferior: $LI_1 =$ Dato menor

Límite superior: $LS_1 = LI_1 + A - P$

Frontera inferior: $FI_1 = LI_1 - P/2$

Frontera superior: $FS_1 = LS_1 + P/2$

- Límites para las siguientes clases serán:

$LI_i = LI_{i-1} + A$ $\qquad$ $LS_i = LS_{i-1} + A$

$FI_i = FI_{i-1} + A$ $\qquad$ $FS_i = FS_{i-1} + A$

Prueba de bondad de ajuste

H_o : La duración de las baterías se ajusta a una distribución normal con $\mu = 1{,}8$ y $\sigma = 0{,}4$

H_1 : La duración de las baterías no se ajusta a una distribución normal con $\mu = 1{,}8$ y $\sigma = 0{,}4$

Número de clases: $C = 3{,}3 * \log(n) + 1 = 6$

Precisión: $P = 0{,}1$

Amplitud:$A = \frac{Rango}{C} = \frac{2{,}6-0{,}7}{6} = 0{,}32 \approx 0{,}40$

Prueba de bondad de ajuste

5. Se calculan límites teóricos *(Límites de clase)* y límites prácticos *(Fronteras de clase)* para las clases.

- Límites para la primera clase serán:

Límite inferior: $LI_1 =$ Dato menor

Límite superior: $LS_1 = LI_1 + A - P$

Frontera inferior: $FI_1 = LI_1 - P/2$

Frontera superior: $FS_1 = LS_1 + P/2$

- Límites para las siguientes clases serán:

$$LI_i = LI_{i-1} + A \qquad LS_i = LS_{i-1} + A$$

$$FI_i = FI_{i-1} + A \qquad FS_i = FS_{i-1} + A$$

Prueba de bondad de ajuste

Ejemplo: caso continuo

H_o : La duración de las baterías se ajusta a una distribución normal con $\mu = 1{,}8$ y $\sigma = 0{,}4$

H_1 : La duración de las baterías no se ajusta a una distribución normal con $\mu = 1{,}8$ y $\sigma = 0{,}4$

Número de clases: $C = 3{,}3 * \log(n) + 1 = 6$

Precisión: $P = 0{,}1$

Amplitud: $A = \frac{Rango}{C} = \frac{2{,}6-0{,}7}{6} = 0{,}32 \approx 0{,}40$

L.I	L.S	Clase		f
0,7	1,0	0,65	1,05	2
1,1	1,4	1,05	1,45	4
1,5	1,8	1,45	1,85	17
1,9	2,2	1,85	2,25	12
2,3	2,6	2,25	2,65	5

Prueba de bondad de ajuste

Ejemplo: caso continuo

Las frecuencias de clase corresponden a las frecuencias observadas o_i, las frecuencias esperadas se calculan como:

$$e = \text{probabilidad*número de datos}$$

Las probabilidades se calculan teniendo en cuenta la hipótesis nula, de la siguiente manera:
Para la primera clase:

$$P(X < 1{,}05) = P\left(Z < \frac{1{,}05 - 1{,}8}{0{,}4}\right) = P(Z < -1{,}875) = 0{,}030$$

Prueba de bondad de ajuste

Ejemplo: caso continuo

Para la segunda clase:

$$P(1{,}05 < X < 1{,}45) = P\left(\frac{1{,}05 - 1{,}8}{0{,}4} < Z < \frac{1{,}45 - 1{,}8}{0{,}4}\right)$$
$$= P(-1{,}875 < Z < -0{,}875) = 0{,}16.$$

De igual forma para las siguientes dos clases

Para la última clase:

$$P(X > 2{,}25) = P\left(Z > \frac{2{,}25 - 1{,}8}{0{,}4}\right) = P(Z > 1{,}125) = 0{,}13$$

Prueba de bondad de ajuste

Ejemplo: caso continuo

Nos resulta la siguiente tabla:

Clase		o_i	probabilidad	$e_i = prob * 40$
0,65	1,05	2	0,03	1,2
1,05	1,45	4	0,16	6,4
1,45	1,85	17	0,36	14,4
1,85	2,25	12	0,32	12,8
2,25	2,65	5	0,13	5,2

Como la primera clase no cumple con la condición que $e_i \geq 5$ se agrupa con la segunda clase.

Prueba de bondad de ajuste

Ejemplo: caso continuo

Clase	o_i	e_i
1 y 2	6	7,6
3	17	14,4
4	12	12,8
5	5	5,2

El valor de la estadística será:

$$\chi^2 = \frac{(6-7{,}6)^2}{7{,}6} + \frac{(17-14{,}4)^2}{14{,}4} + \frac{(12-12{,}8)^2}{12{,}8} + \frac{(5-5{,}2)^2}{5{,}2} = 0{,}86$$

Prueba de bondad de ajuste

Ejemplo: caso continuo

El punto crítico es $\chi^2_{3,0,05} = 7{,}81$. El valor P está dado por:

$$Valor\ P = P(\chi^2_3 > 0{,}86) = 0{,}8$$

Como el valor de la estadística es menor que el punto crítico o como valor P es muy grande no se rechaza H_o, es decir , se puede afirmar con un nivel de significancia de $0{,}05$ que el contenido de nicotina se distribuye de forma normal con los parámetros establecidos.

Prueba de bondad de ajuste

Ejemplo: caso discreto

Se seleccionan 3 artículos (sin reemplazo) de un lote que contiene 5 artículos defectuosos y 3 artículos no defectuosos, después de registrar el número X de artículos defectuosos, los artículos se reemplazan al lote y el experimento se repite 112 veces. Los resultados obtenidos son los siguientes:

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	31	55	25

Con un nivel de significancia de $0{,}05$ pruebe la hipótesis que los datos registrados se pueden ajustar mediante una distribución hipergeométrica con $N = 8, n = 3$ y $k = 5$, $x = 0, 1, 2, 3$.

Prueba de bondad de ajuste

Ejemplo: caso discreto

Bajo las condiciones en que se lleva a cabo el experimento las hipótesis nula y alternativa se plantean como:
H_o : El número de artículos defectuosos seleccionados se ajustan a una distribución hipergeométrica con $N = 8, n = 3$ y $k = 5$, con $x = 0, 1, 2, 3$.
Las frecuencias dadas en la tabla anterior son las observadas, las esperadas se calculan teniendo en cuenta la distribución dada con los parámetros establecidos, es decir,

$$p(x) = \frac{\begin{pmatrix} k \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-k \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}}, \quad x = 0, 1, 2, 3$$

Prueba de bondad de ajuste

Ejemplo: caso discreto

Reemplazando los valores de x se obtienen las siguientes probabilidades:

x	0	1	2	3
$p(x)$	$1/56$	$15/56$	$30/56$	$10/56$

Las frecuencias esperadas se calculan como:

$$e = \text{probabilidad} * \# \text{ veces que se repite el experimento}$$

Prueba de bondad de ajuste

Ejemplo: caso discreto

Se obtiene entonces:

x	$p(x)$	$e_i = p(x) * 112$	o_i
0	$1/56$	2	1
1	$15/56$	30	31
2	$30/56$	60	55
3	$10/56$	20	25
		112	112

Observación: Para que se cumpliera con la condición que $e_i \geq 5$ el experimento se debió realizar como mínimo 280 veces.

Prueba de bondad de ajuste

Ejemplo: caso discreto

Al juntar celdas adyacentes se tiene:

x	e_i	o	$(o_i - e_i)^2/e_i$
≤ 1	32	32	0
2	60	55	0, 42
3	20	25	1,25
	112	112	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3}(o_i - e_i)^2/e_i = 1{,}67$

Prueba de bondad de ajuste

Ejemplo: caso discreto

Decisión:

Región crítica: Punto crítico: $\chi^2_{2,0,05} = 5{,}99$ (Al final se consideraron 3 celdas, los grados de libertad son $k - 1 = 3 - 1 = 2$) como valor de la estadística ($\chi^2 = 1{,}67$) es menor que el punto crítico, la decisión es no rechazar H_o,

Valor P: Valor P= $P(\chi^2_2 > 1{,}67\ ) = 0,\ 4$ valor P muy grande indica que no se debe rechazar H_o.

Es decir se puede considerar que el número de artículos defectuosos seleccionados se ajustan a una distribución hipergeométrica con los parámetros establecidos.