AULA P1
PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMOS

Conceitos preliminares: Indução matemática

Karina Valdivia Delgado

Roteiro

Princípio da indução finita
Exemplos

Motivação

A prova por indução é uma técnica comumente utilizada para fazer demonstrações na área de computação.

A indução é um conceito muito relacionado com recursão.

Princípio da indução finita

Deseja-se provar que uma propriedade é verdadeira para todo número natural

Princípio da indução finita

Exemplo 1: Seja $S(n)$ a soma dos n primeiros números naturais, isto é, $S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$.
Deseja-se provar que $S(n)= n*(n+1)/2$

Princípio da indução finita

Exemplo 1: Seja $S(n)$ a soma dos n primeiros números naturais, isto é, $S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$.

Deseja-se provar que $S(n) = n*(n+1)/2$

n	S(n)
1	1
2	3
3	6
4	10
...	...

Princípio de indução finita

Exemplo 1: Seja $S(n)$ a soma dos n primeiros números naturais, isto é, $S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$.

Deseja-se provar que $S(n)= n*(n+1)/2$

n	S(n)
1	1
2	3
3	6
4	10
...	...

Isso pode ser provado usando o princípio da indução finita

Exemplo que ilustra o princípio de indução finita

Se é verdade que:

i) O primeiro dominó tomba;
ii) Se um dominó tomba então o seguinte tomba;

então pode-se afirmar que todos os dominós caem.

Princípio de indução finita

Seja $P(n)$ uma propriedade sobre o número natural $n \geq n_0$, sendo n_0 um número natural fixado. Para provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$ basta provar que:

i) **Passo base**: A propriedade é válida para $n = n_0$.

ii) **Passo indutivo**: Para $k \geq n_0$, se a propriedade é válida para $n = k$, então é válida para $n = k+1$.

Princípio de indução finita

Seja $P(n)$ uma propriedade sobre o número natural $n \geq n_0$, sendo n_0 um número natural fixado. Para provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$ basta provar que:

i) **Passo base**: A propriedade é válida para $n = n_0$.

ii) **Passo indutivo**: Para $k > n_0$, se a propriedade é válida para $n = k-1$, então é válida para $n = k$.

Exemplo 1

Seja S(n) a soma dos n primeiros números naturais, isto é, $S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$.

Deseja-se provar que S(n)= n*(n+1)/2

Exemplo 1

Seja S(n) a soma dos n primeiros números naturais, isto é, $S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$.
Deseja-se provar que $S(n)= n*(n+1)/2$

i) Passo base: A propriedade é válida para n=1.
ii) Passo indutivo: Para k>1, se S(n) é válida para n=k-1, então é válida para n=k.

Exemplo 1

Seja S(n) a soma dos n primeiros números naturais, isto é, $S(n) = 1 + 2 + \cdot\cdot\cdot + n$.

Deseja-se provar que $S(n)= n*(n+1)/2$

Exemplo 1

Seja S(n) a soma dos n primeiros números naturais, isto é, $S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$.

Deseja-se provar que $S(n)= n*(n+1)/2$

i) **Passo base**: Para $n=1$, $S(n)=1=1*2/2$. OK

Exemplo 1

Seja S(n) a soma dos n primeiros números naturais, isto é, $S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$.

Deseja-se provar que $S(n)= n*(n+1)/2$

i) **Passo base**: Para n=1, $S(n)=1=1*2/2$. OK

ii) **Passo indutivo**: Para k>1, pode-se **assumir** que para n=k-1: $S(k-1)=(k-1)*(k-1+1)/2=(k-1)*k/2$ é válida.

.... $S(k)=k*(k+1)/2$

Exemplo 1

Seja S(n) a soma dos n primeiros números naturais, isto é, $S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$.

Deseja-se provar que $S(n)= n*(n+1)/2$

i) **Passo base**: Para n=1, $S(n)=1=1*2/2$. OK

ii) **Passo indutivo**: Para $k>1$, pode-se **assumir** que para $n=k-1$: $S(k-1)=(k-1)*(k-1+1)/2=(k-1)*k/2$ é válida.

Além disso, sabe-se que:

$S(k)=S(k-1)+k = (k-1)*k/2+k = k*(k+1)/2$.

Assim, provamos que S(n) é válida para n=k.

Portanto $S(n)=n*(n+1)/2$ para $n \geq 1$.

Exemplo 2

Provar que $2^n \geq 2*n$ para $n \geq 1$

Exemplo 2

Provar que $2^n \geq 2*n$ para $n \geq 1$

i) **Passo base**: A propriedade é válida para $n=1$.
ii) **Passo indutivo**: Para $k>1$, se a propriedade é válida para $n=k-1$, então é verdadeira para $n=k$.

Exemplo 2

Provar que $2^n \geq 2*n$ para $n \geq 1$

i) **Passo base**: Para $n=1$, $2^1 \geq 2*1$.

Exemplo 2

Provar que $2^n \geq 2*n$ para $n \geq 1$

i) **Passo base**: Para $n=1$, $2^1 \geq 2*1$. OK

ii) **Passo indutivo**: Para $k \geq 2$, pode-se assumir que para $n=k-1$, $2^{k-1} \geq 2*(k-1)$ é verdadeiro.

.... $2^k \geq 2*k$.

Exemplo 2

Provar que $2^n \geq 2*n$ para $n \geq 1$

i) **Passo base**: Para $n=1$, $2^1 \geq 2*1$.

ii) **Passo indutivo**: Para $k \geq 2$, pode-se assumir que para $n=k-1$, $2^{k-1} \geq 2*(k-1)$ é verdadeiro.

Multiplicando os dois lados da inequação por 2, temos: $2*2^{k-1} \geq 4*(k-1)$, isto é, $2^k \geq 4*k-4=2*k+2*k-4$. Além disso, sabe-se que $2*k \geq 4$, i.e. $2*k-4 \geq 0$. Assim, $2^k \geq 2*k+2*k-4 \geq 2*k$.

Portanto $2^n \geq 2*n$ para $n \geq 1$

Princípio de indução finita

Seja $P(n)$ uma propriedade sobre o número natural $n \geq n_0$, sendo n_0 um número natural fixado. Para provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$ basta provar que:

i) **Passo base**: A propriedade é válida para $n=n_0$, $n=n_1$, $n=n_2$

ii) **Passo indutivo**: Para $k \geq n_2$, se a propriedade é válida para $n=k$, então é válida para $n=k+1$.

Indução forte

Seja $P(n)$ uma propriedade sobre o número natural $n \geq n_0$, sendo n_0 um número natural fixado. Para provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$ basta provar que:

i) **Passo base**: A propriedade é válida para $n = n_0$.

ii) **Passo indutivo**: se a propriedade é válida para todo $n_0 \leqslant n \leqslant k$, então é válida para $n = k+1$.

AULA P1
PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMOS

Conceitos preliminares: Indução matemática

Karina Valdivia Delgado