Leçon 25 :Oscillateurs ; portraits de phase et non linéarités

Niveau :

- Deuxième année CPGE

Pré-requis :

- Oscillateurs harmoniques
- mécanique
- Pendule simple
- régime sinusoïdale forcé

Références :

- Poly de Philippe sur les mécanique
- Le Diffon Formule de Bordas
- BFR Mécanique 1
- Faroux, Renault, Matray Rosso, mécanique 1 Dunod Chap 15
- Elippe PSI Pascal Olive p204

Introduction

On commence par définir ce qu'est un oscillateur. Système physique qui réalise de petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable (horloge, coeur qui bat, bille dans une gouttière). Un système non-linéaire est un système pour lequel lequel le principe de superposition ne s'applique pas. Une des propriétés est que la fréquence de sortie est différente de celle de l'entrée.

1. Oscillateurs non amortis

On présente le système déjà connu rapidement. On peut prendre l'exemple du pendule simple non amorti. On fait rapidement le bilan des forces, application de la deuxième loi de Newton sur transparents. On peut tracer en python le portrait de phase qui va bien.

1.1. Comportement aux petits angles

Exemple de la physique : pendule simple à petites oscillations. On applique le théorème du moment cinétique appliqué à la masse m dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen :

$$ma = P \tag{1}$$

On en déduit l'équation d'un oscillateur de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \tag{2}$$

Pour des petites oscillations ($\theta << 1 = 60°$), on a :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \tag{3}$$

On trouve l'équation d'un oscillateur harmonique. Tout oscillateur harmonique est régi par la même équation. **Analogies :** masse accrochée à un ressort sans frottements, l'évolution temporelle de la charge d'un condensateur d'un circuit LC.

Voir BUP. Définition : pour un système dont l'évolution au cours du temps t est décrit par la fonction à valeurs réelles x(t), on appelle trajectoire de phase une représentation géométrique cartésienne dans laquelle on reporte les positions au cours du temps t d'un point représentatif M d'abscisse x et d'ordonnée $\frac{dx}{dt}$.
Portrait de phase pour l'oscillateur harmonique :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \tag{4}$$

$$\dot{\theta}(t) = -\theta_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \tag{5}$$

$$\left(\frac{\dot{\theta}(t)}{\omega_0}\right)^2 + \theta(t)^2 = \theta_0^2 \tag{6}$$

Toutes les trajectoires dans le portait de phase $((\frac{\dot{\theta}(t)}{\omega_0}, \theta(t)))$ du pendule pesant (et en général d'un oscillateur harmonique dont la variable est x(t)) sont des cercles concentriques de rayon θ_0 qui dépendent des donc conditions initiales. A une CI correspond une trajectoire de phase.

1.2. Comportements aux grands angles

On fait le calcul. On montre le portrait de phase avec le programme python pour un angle initial plus grand que ceux pour lesquels on respecte les angles petits. Aspect énergétique. Utiliser le programme python et montrer la différence sur le portrait de phase

On reprend le calcul toujours dans le Faroux Renault. On parvient à la formule de Borda. Voir Pérez p170 pour un calcul simple. Montrer que la période dépend de l'amplitude des oscillations.

Manipulation : Pendule pesant (on l'assimile à un pendule simple en prenant une masse suffisamment grande) On réalise l'acquisition pour de grands angles initiaux. On utilise ensuite le programme python pour obtenir le lien entre la période et l'angle de l'oscillation.

1.3. Aspect énergétique

Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique, toutes les trajectoires fermées ou cycliques dans un portait de phase expriment la conservation de l'énergie mécanique du système !

2. Oscillateur amorti, oscillateur entretenu

2.1. Cas général

On reprend le pendule simple en lui ajoutant un coefficient de frottement fluie, puis on généralise pour obtenir une équation avec le terme d'amortissement en $A(x)$. Si A est négatif l'oscillateur est amorti. Si A est positif il est entretenu voir amplifié.

2.2. Cas de l'oscillateur amorti

On reprend le code python et on ajoute le terme de l'oscillateur amorti. Montrer sur Python la simulation puis sur slide si on trace pleins de portait de phase. En vérifiant sur un document graphique le caractère cyclique d'une trajectoire de phase, on dispose d'un test du caractère périodique de l'évolution beaucoup plus précis que l'observation de l'allure de la représentation x(t). On peut discuter du facteur de qualité.

2.3. . Aspect énergétique

Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique, toutes les trajectoires fermées ou cycliques dans un portait de phase expriment la conservation de l'énergie mécanique du système !

3. Oscillateur entretenu : Pont de Wien Voir poly de Philippe

Voir Pascal Olive p204.

Conclusion

Ouvrir sur les oscillateurs paramétriques ? Van der Pol, résistance négative, transition vers le chaos ?