

## Relativité restreinte

Pierre Salati<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique LAPTh,  
9 Chemin de Bellevue, B.P. 110, 74941 Annecy-le-Vieux Cedex

<sup>2</sup> Université Savoie Mont Blanc, B.P. 1104, 73011 Chambéry Cedex  
[salati@lapth.cnrs.fr](mailto:salati@lapth.cnrs.fr) & [pierre.salati@univ-smb.fr](mailto:pierre.salati@univ-smb.fr)  
téléphone 04.50.09.16.69  
site web <http://lapth.cnrs.fr/pg-nomin/salati/>



### Plan succinct du cours

Le cours est une introduction à la relativité restreinte. Cette théorie, formulée par **Albert Einstein** en 1905, a bouleversé notre conception du temps et de l'espace. Même si ses conséquences ne sont pas perceptibles dans la vie quotidienne, la relativité restreinte doit être prise en compte dans le fonctionnement du GPS (Global Positioning System) et elle constitue le cadre habituel de la physique des particules et du rayonnement cosmique. Avec la relativité restreinte, espace et de temps absous sont définitivement abandonnés. L'idée que différents observateurs puissent avoir des points de vue différents d'un même phénomène est confortée, avec la conclusion troublante à priori que le temps ne s'écoule pas de manière identique suivant les observateurs. Les conséquences de la relativité restreinte ont été vérifiées par des expériences que nous analyserons.

- Chapitre I – Nous entrerons immédiatement dans le vif du sujet avec le principe de relativité proposé par **Galilée** qui remet en cause le dogme de l'espace absolu d'**Aristote**. Nous verrons qu'avec le principe de relativité, la perspective ou théorie du point de vue entre vers 1632 dans le champ des sciences physiques pratiquement en même temps qu'elle est élaborée en peinture\*. La transformation de **Galilée** sera rappelée ainsi que la notion

\*. A cet égard on pourra lire les analyses du tableau *Les Ménines* que **Diego Velasquez** a peint en

de temps absolu. L'électromagnétisme pose toutefois un problème avec en particulier le résultat négatif de l'expérience de **Michelson** et **Morley**. **Albert Einstein** propose de modifier le principe de relativité de **Galilée** en exigeant que la lumière ait la même vitesse dans tous les référentiels galiléens. Il aboutit alors à la transformation de **Lorentz** et doit abandonner la notion de temps absolu.

- Chapitre II – Les conséquences immédiates de la transformation de Lorentz seront présentées dans ce chapitre avec l'addition des vitesses, la dilatation du temps, le paradoxe des jumeaux et la contraction des longueurs. L'expérience de **Fizeau** sera présentée et son résultat expliqué. Nous terminerons avec l'aberration de la lumière et l'effet **Doppler**.
- Chapitre III – Cette partie est plus formelle. La relativité restreinte a comme cadre l'espace-temps de **Minkowski**. Nous verrons que les transformations de **Lorentz** constituent un groupe et introduirons la notion de quadri-vecteur. Nous en donnerons comme exemple la quadri-vitesse  $U^\mu$  et le quadri-vecteur d'onde  $k^\mu$ .
- Chapitre IV – Si nous avons le temps, nous terminerons par un peu de dynamique relativiste en introduisant tout d'abord le quadri-vecteur impulsion-énergie  $p^\mu$  bâti à partir de la quadri-vitesse  $U^\mu$  et de la masse  $m$ . Nous justifierons la définition relativiste de l'impulsion  $\mathbf{p}$  grâce à la construction de **Lewis** et **Tolman** et établirons la relation qui lie l'énergie  $E$  à la masse  $m$  et à la vitesse  $\mathbf{v}$ . Nous montrerons que la seconde loi de Newton s'écrit toujours  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  et établirons la manière dont les forces se transforment lors d'un changement de référentiel galiléen. Nous conclurons par l'étude de la cinématique relativiste des chocs entre particules élémentaires.

---

## Les prérequis pour suivre le cours

- Bien connaître les fondements de la dynamique newtonienne avec ses trois principes ainsi que la notion de référentiel galiléen.
- Connaître les équations de **Maxwell** et savoir établir l'équation de d'**Alembert** que vérifient les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  dans le vide.
- Avoir des rudiments d'algèbre linéaire et connaître en particulier le maniement des matrices. Savoir ce qu'est un groupe en mathématique.

## Chapitre I

### Principe de relativité et transformation de Lorentz

#### 1) Le principe de relativité ou l'irruption du point de vue en physique.

- Selon **Aristote**, la Terre est immobile au centre de l'univers. Elle ne saurait se déplacer. Si elle se mouvait, une pierre lancée en l'air serait irrémédiablement entraînée vers l'ouest. Il en irait de même des oiseaux volant dans le ciel. Pour Aristote, il existe donc un espace ou repère absolu dans lequel le mouvement de toute chose se déroule naturellement.
- Dans son *Dialogue sur les deux plus grands systèmes du monde* publié en 1632, **Galileo Galilei** remet en cause le dogme aristotélicien. Galilée imagine qu'un boulet tombe du mât d'un bateau se déplaçant par rapport à la Terre ferme à vitesse constante. Selon Galilée, un marin situé sur le pont verra le boulet tomber à la verticale de la même manière que si le bateau avait été à quai. Par contre, un pêcheur situé sur la berge verra le boulet décrire un parabole si le bateau avance suffisamment vite. Même remarque pour le vol de papillons qu'on libère dans la cale du bateau. Il est impossible de savoir si celui-ci est en mouvement ou à quai<sup>†</sup>. Seul le mouvement *relatif* des papillons par rapport à la cale importe.
- Dans cette illustration simple, Galilée réfute la notion d'espace ou repère absolu d'Aristote. Le savant italien réussit le tour de force d'introduire (i) le concept d'inertie selon lequel un corps mis en mouvement le conserve ainsi que (ii) le principe de relativité qui stipule que les lois de la mécanique sont les mêmes quel que soit l'état de mouvement

†. “Enfermez-vous avec un ami dans la cabine principale à l'intérieur d'un grand bateau et prenez avec vous des mouches, des papillons, et d'autres petits animaux volants. Prenez une grande cuve d'eau avec un poisson dedans, suspendez une bouteille qui se vide goutte à goutte dans un grand récipient en dessous d'elle. Avec le bateau à l'arrêt, observez soigneusement comment les petits animaux volent à des vitesses égales vers tous les côtés de la cabine. Le poisson nage indifféremment dans toutes les directions, les gouttes tombent dans le récipient en dessous, et si vous lancez quelque chose à votre ami, vous n'avez pas besoin de le lancer plus fort dans une direction que dans une autre, les distances étant égales, et si vous sautez à pieds joints, vous franchissez des distances égales dans toutes les directions. Lorsque vous aurez observé toutes ces choses soigneusement (bien qu'il n'y ait aucun doute que lorsque le bateau est à l'arrêt, les choses doivent se passer ainsi), faites avancer le bateau à l'allure qui vous plaira, pour autant que la vitesse soit uniforme (constante) et ne fluctue pas de part et d'autre. Vous ne verrez pas le moindre changement dans aucun des effets mentionnés et même aucun d'eux ne vous permettra de dire si le bateau est en mouvement ou à l'arrêt.”

de l'observateur. Galilée introduit finalement (iii) la notion de point de vue en reliant les observations du marin et du pêcheur. Bien que différentes, elles décrivent pourtant le même phénomène puisqu'une trajectoire verticale vue du bateau devient parabolique pour un observateur en mouvement par rapport à celui-ci. La relativité est née.

- La notion d'inertie est précisée par **Isaac Newton** en 1687 dans ses *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* et, en particulier, dans le premier principe de la dynamique selon lequel “*tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état.*” La seconde loi de Newton stipule que “*les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice, et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.*” Il s'agit là du **principe fondamental de la dynamique ou PFD** qui relie la dérivée temporelle de l'impulsion  $\mathbf{p}$  d'un objet à la résultante  $\mathbf{R}$  des forces  $\mathbf{F}_i$  qui s'exercent sur lui

$$\sum_i \mathbf{F}_i \equiv \mathbf{R} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} . \quad (\text{I.1})$$

- Un observateur (le marin ou le pêcheur de Galilée) décrit les événements auxquels il assiste (chute du boulet) grâce aux coordonnées d'espace  $(x, y, z)$  et de temps  $t$  dont il dispose par l'intermédiaire d'une règle et d'une horloge. Son état de mouvement est appelé **référentiel** et les événements y sont repérés grâce aux coordonnées  $(x, y, z, t)$  d'origine spatiale  $O$ . Il existe une classe particulière de référentiels dits **galiléens**<sup>‡</sup> dans lesquels le premier principe de Newton est vérifié. Un point matériel qui n'est soumis à aucune force a un mouvement rectiligne uniforme à vitesse constante. Par contre, dans un référentiel en mouvement accéléré par rapport à un référentiel galiléen, il faut introduire les forces d'inertie d'entraînement et de **Coriolis** pour pouvoir appliquer le PFD.

- **Pour Newton, le temps s'écoule de manière identique dans tous les référentiels, même non galiléens. Le temps est absolu.**

- Considérons les deux référentiels galiléens  $\mathcal{R} \equiv (0, x, y, z, t)$  et  $\mathcal{R}' \equiv (O', x', y', z', t')$  en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre. Les axes  $O'x'$  et  $Ox$  sont parallèles. Il en va de même pour  $O'y'$  vis-à-vis de  $Oy$  et pour  $O'z'$  vis-à-vis de  $Oz$ . Le point  $O'$  coïncide avec  $O$  à l'instant  $t = t' = 0$  et s'éloigne le long de  $Ox$  avec la vitesse  $v_e$ . Relier les points de vue des observateurs de  $\mathcal{R}$  et de  $\mathcal{R}'$  consiste à exprimer les coordonnées d'un même événement vu de  $\mathcal{R}$  à celles enregistrées à partir de  $\mathcal{R}'$ . Cette opération s'appelle un **changement de référentiel ou de coordonnées** qui, dans le cas présent, est la

---

<sup>‡</sup>. On dit également référentiels inertiels ou d'inertie.

transformation de Galilée

$$\begin{aligned}x' &= x - v_e t, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t.\end{aligned}\tag{I.2}$$

- **Principe de relativité de Galilée : les lois de la nature sont identiques dans tous les référentiels galiléens.** Pour Galilée et Newton, il s'agit des lois de la mécanique. La relation fondamentale de la dynamique s'exprime de manière identique dans chaque référentiel en utilisant les coordonnées  $(x, y, z, t)$  correspondantes. L'accélération  $\mathbf{a}$  est la même dans tous les référentiels galiléens de sorte que, si dans  $\mathcal{R}$  le PFD se met sous la forme  $\mathbf{R} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}}$ , il s'écrit dans  $\mathcal{R}'$  comme  $\mathbf{R} = m\mathbf{a} \equiv m\mathbf{a}' = m\ddot{\mathbf{r}'}$ .

## 2) Propagation de la lumière dans le vide.

### 2.1) Les équations de Maxwell.

Deux équations décrivent la structure du champ électromagnétique

$$\operatorname{div} \mathbf{B} \equiv \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} \equiv \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{I.3}$$

Deux autres équations relient le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le champ magnétique  $\mathbf{B}$  aux sources, c'est-à-dire aux distributions de charge  $\rho$  et de courant  $\mathbf{j}$  électriques

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} \equiv \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{I.4}$$

Le terme en rouge dans l'expression précédente est le courant de déplacement que **Maxwell** a introduit de manière géniale et qui permet de calculer le champ magnétique en appliquant le théorème d'**Ampère** en toute généralité, même en présence d'un condensateur. Nous montrerons d'ailleurs qu'en prenant la divergence de la dernière équation, dite de Maxwell-Ampère, nous retrouvons une expression de la conservation de la charge électrique sous la forme

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{I.5}$$

### 2.2) Propagation du champ électromagnétique dans le vide.

Dans le vide, donc en l'absence de charge et de courant, les équations de Maxwell se simplifient et prennent la forme d'une équation de d'Alembert pour les champs électriques  $\mathbf{E}$  et magnétiques  $\mathbf{B}$

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{I.6}$$

Les ondes électromagnétiques se propagent ainsi dans le vide avec une vitesse constante indépendante de la fréquence et reliée à la permittivité diélectrique  $\epsilon_0$  et perméabilité magnétique  $\mu_0$  du vide

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s} . \quad (\text{I.7})$$

### 2.3) Polarisations transverses du champ électromagnétique.

Une onde plane est caractérisée par sa pulsation  $\omega = 2\pi\nu$ , sa fréquence  $\nu$ , sa direction repérée par le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  et son vecteur d'onde  $k = 2\pi/\lambda$ . Les deux derniers éléments permettent de construire le véritable vecteur d'onde  $\mathbf{k} \equiv k\mathbf{u}$  et d'exprimer le champ électromagnétique sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} . \quad (\text{I.8})$$

Faire agir le vecteur **nabla**  $\nabla$  revient alors à introduire le vecteur  $-i\mathbf{k}$  et dériver par rapport au temps se résume à multiplier par  $i\omega$ . La structure d'une onde plane polarisée de manière transverse se traduit par la relation

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{E} = c\mathbf{B} \quad \text{et} \quad c\mathbf{B} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{E} . \quad (\text{I.9})$$

Les vecteurs  $c\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{E}$  forment un trièdre trirectangle. Si  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{e}_z$  est aligné sur l'axe des  $z$ , le champ électrique est le vecteur  $\mathbf{E}_0 = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y$  et possède donc deux états de polarisation transverse caractérisés par  $E_x$  et  $E_y$ .

## 3) Des observations embarrassantes.

### 3.1) L'expérience de Michelson et Morley.

Les équations de propagation (I.6) impliquent que le champ électromagnétique se propage dans le vide à la vitesse  $c$ . Mais dans quel référentiel ? Si ces équations sont valables dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  et que la lumière s'y propage avec la vitesse  $\mathbf{c}$ , elles ne le sont plus dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$  où elle se propage désormais avec la vitesse

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} - \mathbf{v}_e . \quad (\text{I.10})$$

Le principe de relativité ne s'applique pas à l'électromagnétisme si l'on suppose que la transformation de Galilée est la bonne.

Bien avant la découverte par Maxwell des lois de l'électromagnétisme, **Christian Huygens** et **Augustin Fresnel** proposent que la lumière se propage dans un milieu mécanique solide et élastique appelé **étherluminifère**, i.e., transmetteur de la lumière. Les lois de l'électromagnétisme s'appliquent dans le référentiel dans lequel l'éther est au repos. Mais quel est donc ce référentiel ? Pour répondre à cette question, **Albert Abraham Michelson** seul en 1881, puis avec l'aide de **Edward Morley** en 1887, essaie de mesurer la

vitesse de la Terre par rapport à l'éther grâce à un interféromètre dont les deux bras sont perpendiculaires l'un à l'autre.

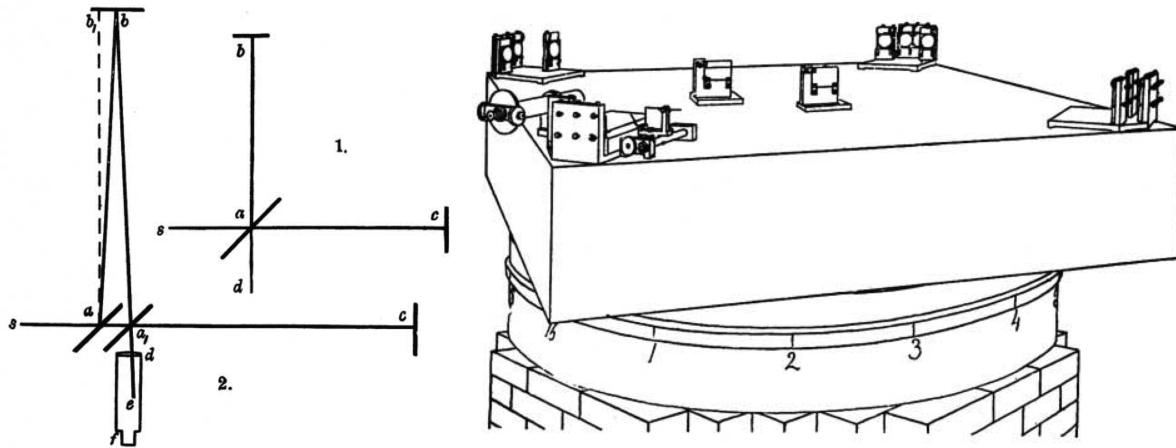


FIGURE I.1 – Schéma de principe de l'expérience de Michelson et Morley (gauche) et table expérimentale incluant des miroirs multiples permettant d'augmenter la longueur effective de chaque bras (droite). Ces figures sont extraites de l'article original publié en novembre 1887 dans l'*American Journal of Science* 34, No. 203, p.333-345.

La Terre décrit une trajectoire quasi circulaire autour du Soleil avec une vitesse d'environ 30 km/s. Si le référentiel absolu de l'éther existe, il est impensable qu'il soit lié à la Terre, sauf de manière accidentelle et temporaire, puisque celle-ci se déplace sans cesse. Dans le référentiel de l'éther, un rayon lumineux se propageant dans la direction  $\mathbf{n}$  a la vitesse  $\mathbf{c} \equiv c\mathbf{n}$ . Soit  $\mathbf{v}_e$  la vitesse de la Terre par rapport à l'éther et  $\mathbf{c}'$  la vitesse du rayon lumineux dans le référentiel lié à la Terre. La loi classique d'addition des vitesses conduit à

$$\mathbf{c}' = c\mathbf{n} - \mathbf{v}_e . \quad (\text{I.11})$$

La vitesse  $c'$  de la lumière dans le référentiel terrestre dépend donc de  $\mathbf{v}_e$  et de la direction relative de  $\mathbf{n}$  et de  $\mathbf{v}_e$ . L'interféromètre de Michelson permet de faire interférer des rayons lumineux ayant parcouru des chemins perpendiculaires le long desquels ils se sont propagés avec des vitesses différentes en vertu de la relation (I.11). En tournant l'interféromètre, on peut permute la position des bras par rapport à  $\mathbf{v}_e$  et mesurer ainsi une variation de la différence  $\Delta T = T_1 - T_2$  des temps de trajet dans les deux bras. Or Michelson et Morley ne notent aucune variation de  $\Delta T$  et concluent que **la Terre ne se déplace pas par rapport à l'éther**.

### 3.2) L'expérience d'Alväger.

En 1964, Alväger et ses collaborateurs ont mené au CERN une expérience à partir d'un faisceau de pions neutres  $\pi^0$  produits par collision de protons de haute énergie sur une

cible en beryllium. Les pions sont produits avec une énergie de l'ordre de 6 GeV et ont une vitesse voisine de  $0.99975 c$ . Ils se désintègrent essentiellement en photons via la réaction

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma , \quad (\text{I.12})$$

avec une durée de vie de  $8.4 \times 10^{-17}$  s. Les pions neutres constituent ainsi une source de lumière se propageant à une vitesse proche de celle de la lumière par rapport au laboratoire. Les photons  $\gamma$  émis par les pions se propagent à la vitesse de la lumière par rapport à ceux-ci. Les expérimentateurs ont alors mesuré le temps mis par ces photons pour parcourir les  $31.450 \pm 0.0015$  m séparant deux détecteurs. Ils ont trouvé une durée d'environ 104.9 ns indiquant une vitesse des photons par rapport au laboratoire égale à  $c$  avec une précision de  $10^{-4}$ . **Ce résultat est en complète contradiction avec la prédition de la mécanique classique  $c' \simeq 2c$ .**

### 3.3) L'expérience de Bertozzi.

William Bertozzi publie en 1964 dans l'*American Journal of Physics* **32**, 551, les résultats<sup>§</sup> d'une expérience pédagogique destinée à mesurer la vitesse d'électrons préalablement accélérés par une différence de potentiel  $U$ .

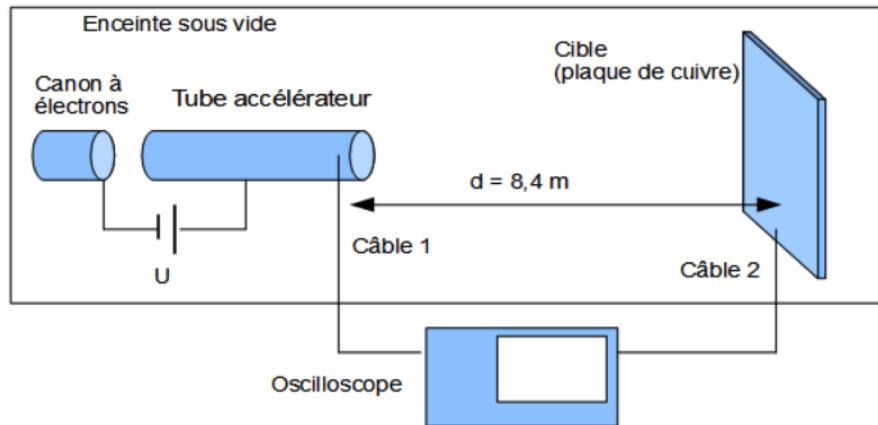


FIGURE I.2 – Schéma de principe de l'expérience de Bertozzi. Les électrons émis par le canon sont accélérés par la différence de potentiel  $U$ . Leur vitesse est mesurée entre les deux câbles de la figure. La charge collectée par la cible et son échauffement permettent de déterminer le nombre d'électrons de chaque paquet ainsi que leur énergie cinétique (remerciements à Sébastien Gruat).

§. “Using a Van de Graaff electrostatic generator and a linear accelerator, the speeds of electrons with kinetic energies in the range 0.5–15 MeV are determined by measuring the time required for the electrons to traverse a given distance. The measurements show the existence of a limiting speed in accord with the results of special relativity. The kinetic energy, determined by calorimetry, verifies that an electric field exerts a force on a moving electron in its direction of motion that is independent of its speed.”

Les électrons sont émis par paquets par le canon et sont accélérés par la différence de potentiel  $U$ , leur énergie cinétique atteignant la valeur  $T$ . Ils sont collectés sur une plaque faisant partie d'un condensateur qui permet de mesurer la charge totale, et donc le nombre d'électrons, de chaque paquet. L'élévation de température de la plaque permet également de connaître l'énergie cinétique des électrons, entièrement convertie en chaleur dans la cible.

Bertozzi constate que l'énergie cinétique des électrons est bien conforme à la relation attendue  $T = eU$  dans le cadre de l'électrostatique. Par contre, la mécanique classique prévoit une vitesse  $v$  des électrons donnée par

$$T \equiv \frac{1}{2}mv^2 = eU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \quad (\text{I.13})$$

On s'attend donc à ce que  $v$  soit proportionnelle à  $\sqrt{U}$ . **Or la vitesse plafonne à une valeur proche de  $c$  lorsque  $U$  dépasse  $10^6$  V.**

#### 4) Les postulats de la relativité restreinte.

Les expériences relatées ci-dessus montrent qu'il est impossible de détecter le mouvement de la Terre par rapport à l'hypothétique référentiel absolu de l'éther et que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels galiléens. Ces résultats s'interprètent immédiatement et simplement en admettant que les équations de Maxwell sont valables dans tous les référentiels galiléens. Elles satisfont au principe de relativité. Mais l'incompatibilité de l'invariance de  $c$  et de la cinématique classique nous oblige à abandonner le cadre spatio-temporel de la transformation de Galilée. Il convient de chercher une nouvelle transformation des coordonnées ainsi qu'une nouvelle formulation des lois de la mécanique.

##### 4.1) Les postulats d'Albert Einstein.

Dans son article intitulé *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*<sup>¶</sup>, *Annalen der Physik*, **17**, p.891-921 publié le 30 juin 1905, **Albert Einstein présente une nouvelle vision de l'espace et du temps.**

- L'éther est une notion arbitraire que l'on peut abandonner puisqu'elle est inutile.
- **Le principe de relativité de Galilée est conservé.** Il est même central ! Les lois de la physique sont invariantes vis-à-vis d'un changement de référentiel galiléen. Les mêmes lois se traduisent par des relations ayant même structure dans les différents référentiels galiléens.
- **La vitesse de la lumière dans le vide est égale à  $c$  dans tous les référentiels galiléens. Elle ne dépend ni du mouvement de la source ni de celui de l'observateur.** Les équations de Maxwell satisfont ainsi au principe de relativité. Elles sont

---

<sup>¶</sup>. De l'électrodynamique des corps en mouvement.

valables dans tous les référentiels inertiels et conduisent donc à une vitesse de la lumière  $c$  constante et égale à  $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ .

- Pour des vitesses  $v \ll c$ , la relativité restreinte doit redonner les lois de la mécanique classique dont le succès en astronomie est éclatant. La mécanique de Newton et la transformation de Galilée constituent donc la limite de la relativité restreinte pour des vitesses faibles devant celle de la lumière.

#### 4.2) Abandon de l'hypothèse du temps absolu.

L'invariance de  $c$  nous oblige à abandonner l'hypothèse du temps absolu. Nous discuterons un exemple simple où deux événements  $A'$  et  $B'$  sont simultanés dans  $\mathcal{R}'$  mais cessent de l'être dans  $\mathcal{R}$ . On ne peut plus maintenir que  $t' = t$  quel que soit l'événement.

#### 4.3) Synchronisation des horloges dans un référentiel.

L'abandon de la notion de temps absolu ne nous empêche pas cependant de définir le temps  $t$  au sein d'un référentiel  $\mathcal{R}$  donné. Cette question n'est pas anodine. Il est en effet essentiel qu'un observateur de  $\mathcal{R}$  puisse attribuer à chaque événement sa position repérée par les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  et l'instant  $t$  où il a eu lieu.

Deux horloges sont placées en  $A$  et  $B$ , deux points immobiles dans  $\mathcal{R}$ . A l'instant  $t_A$ , lu sur l'horloge placée en  $A$ , un signal lumineux est émis à partir de  $A$  en direction de  $B$  où se trouve un miroir qui renvoie le signal en  $A$ . Soit  $t_{A'}$  l'instant du retour de ce signal en  $A$  tel qu'il est lu sur l'horloge placée en  $A$ . Le signal est reçu en  $B$  à l'instant  $t_B$  lu sur l'horloge placée en  $B$ . Les horloges  $A$  et  $B$  sont synchronisées si

$$t_B = \frac{t_A + t_{A'}}{2} \quad \text{ou encore si} \quad t_B = t_A + \frac{AB}{c}. \quad (\text{I.14})$$

Cette définition est transitive. Si d'une part  $B$  et  $A$  sont synchronisées, et si d'autre part  $C$  et  $A$  sont synchronisées, alors  $C$  et  $B$  sont synchronisées. On peut donc synchroniser de part en part les horloges du référentiel  $\mathcal{R}$ . Synchroniser toutes les horloges d'un référentiel est crucial pour déterminer le temps d'un événement. Albert Einstein écrit dans son article fondateur de 1905 : “*The time of an event is that which is given simultaneously with the event by a stationary clock located at the place of the event, this clock being synchronous, and indeed synchronous for all time determinations, with a specified stationary clock.*”

### 5) La transformation de Lorentz.

Nous reprenons le problème du passage entre les référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  que Galilée avait résolu avec la transformation (I.2). Nous ferons l'hypothèse que l'espace-temps est homogène et donc invariant par translation. Nous supposerons également que l'espace physique est isotrope et euclidien. Quel que soit le référentiel inertiel dans lequel on se

trouve, il est possible de définir des axes se coupant à angle droit. Pour aboutir à la transformation de Lorentz, plusieurs étapes sont nécessaires. Nous cherchons ici à exprimer les coordonnées  $(x', y', z', t')$  d'un événement observé dans  $\mathcal{R}'$  à partir du quadruplet correspondant  $(x, y, z, t)$  mesuré dans  $\mathcal{R}$ .

D'une manière très générale, chacune des coordonnées  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  et  $t'$  repérant un événement dans  $\mathcal{R}'$  est une fonction des coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$  le repérant dans  $\mathcal{R}$ . Par exemple

$$x' = F(x, y, z, t) . \quad (\text{I.15})$$

Si deux événements sont séparés par l'intervalle  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  et  $dt$  observé dans  $\mathcal{R}$ , ils sont séparés dans  $\mathcal{R}'$  par l'intervalle  $dx'$ ,  $dy'$ ,  $dz'$  et  $dt'$  avec, pour la première coordonnée, la relation

$$dx' = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial t} dt . \quad (\text{I.16})$$

En toute généralité, les dérivées partielles  $\partial F/\partial x$ ,  $\partial F/\partial y$ ,  $\partial F/\partial z$  et  $\partial F/\partial t$  sont des fonctions des coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$ .

**(i)** L'espace et le temps sont homogènes. Ils sont invariants par translation et donc un changement de l'origine  $O$  des coordonnées spatiales ou de l'origine de la variable temporelle  $t$  ne doit pas affecter  $dx'$  qui, dès lors, ne dépend que des intervalles  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  et  $dt$ , et certainement pas des coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$ . Les dérivées partielles qui interviennent dans l'expression (I.16) sont des constantes. Il en va de même pour les autres coordonnées  $y'$ ,  $z'$  et  $t'$  de sorte que

$$\begin{aligned} x' &= a_{10} + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t , \\ y' &= a_{20} + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t , \\ z' &= a_{30} + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t , \\ t' &= a_{40} + a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t , \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

où les coefficients  $a_{ij}$  sont des constantes que nous allons déterminer.

**(ii)** Les coefficients  $a_{i0}$  peuvent être absorbés par une redéfinition de l'origine des coordonnées spatio-temporelles dans  $\mathcal{R}'$ . Ils disparaissent. L'événement se déroulant dans  $\mathcal{R}$  en  $O$  à  $t = 0$  prend place dans  $\mathcal{R}'$  au point  $O'$  à  $t' = 0$ .

**(iii)** Dans la transformation dite **spéciale**, les axes  $Ox$  et  $O'x'$  coïncident l'un avec l'autre. Dans  $\mathcal{R}$ , le point  $O'$  s'éloigne de  $O$  le long de la droite  $Ox$  avec la vitesse  $\mathbf{v}_e \equiv v_e \mathbf{e}_x$ . Réciproquement, dans  $\mathcal{R}'$ , le point  $O$  s'éloigne de  $O'$  le long de la droite  $O'x'$  avec la vitesse  $-\mathbf{v}_e \equiv -v_e \mathbf{e}'_x$  puisque l'espace est isotrope. Cela implique que  $a_{21} = a_{24} = a_{31} = a_{34} = 0$ .

**(iv)** L'axe  $O'y'$  est toujours contenu dans le plan  $Oxy$  et ne tourne pas autour de  $Ox$  dans un sens ou l'autre. Il en va de même pour  $O'z'$  qui reste contenu dans le plan  $Oxz$ . Un

événement se déroulant dans le plan  $Oxy$  est alors vu dans  $\mathcal{R}'$  comme ayant lieu également dans le plan  $O'x'y'$ . Le fait que  $z = 0$  dans  $\mathcal{R}$  conduit alors à  $z' = 0$  dans  $\mathcal{R}'$  quelle que soit la coordonnée  $y$ . Nous en déduisons que  $a_{32} = 0$ . De même, nous pouvons démontrer que  $a_{23} = 0$ .

(v) L'espace étant isotrope, il est invariant par rotation autour de l'axe  $Ox$ . Par conséquent, les coordonnées  $x'$  et  $t'$  doivent être invariantes par rotation de  $y$  et de  $z$  autour de  $Ox$ . Nous en déduisons que  $a_{12} = a_{13} = a_{42} = a_{43} = 0$ . A ce stade, nous avons réduit le problème au système

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{14}t, \\ y' &= a_{22}y, \\ z' &= a_{33}z, \\ t' &= a_{41}x + a_{44}t. \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

Remarquons également que  $a_{14} = -v_e a_{11}$ .

(vi) Définissons maintenant les coordonnées  $X = -x$  et  $X' = -x'$ . L'espace étant isotrope, les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  jouent des rôles symétriques. En utilisant les coordonnées  $(X, y, z, t)$  et  $(X', y', z', t')$ , on échange le rôle des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  de sorte que

$$\begin{aligned} X &= a_{11}X' + a_{14}t', \\ y &= a_{22}y', \\ z &= a_{33}z', \\ t &= a_{41}X' + a_{44}t'. \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

Après quelques calculs plutôt simples, on arrive au système d'équations

$$x' = a_{11}(x - v_e t), \quad y' = y, \quad z' = z \quad \text{alors que} \quad t' = a_{11} \left\{ t + \left( \frac{1 - a_{11}^2}{v_e a_{11}^2} \right) x \right\}. \quad (\text{I.20})$$

### • Transformation de Galilée

Si l'on impose que le temps est absolu et que  $t' = t$  quelle que soit la position  $x$ , alors  $a_{11} = 1$  et l'on retrouve la transformation (I.2).

### • Transformation de Lorentz

Pour Einstein, la vitesse de la lumière est un invariant. Dans  $\mathcal{R}$ , un rayon de lumière se propageant le long de  $Ox$  a pour vitesse  $dx/dt = c$ . Dans  $\mathcal{R}'$ , le rayon se propage le long de  $O'x'$  avec la vitesse  $dx'/dt' = c$ , donc avec la même vitesse. Nous en déduisons alors que

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} \quad \text{où} \quad \beta_e = \frac{v_e}{c}. \quad (\text{I.21})$$

La transformation de Lorentz se met alors sous la forme

$$x' = \frac{x - v_e t}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}, \quad t' = \frac{t - v_e x/c^2}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}, \quad y' = y \text{ et } z' = z \text{ avec } \beta_e = \frac{v_e}{c}. \quad (\text{I.22})$$

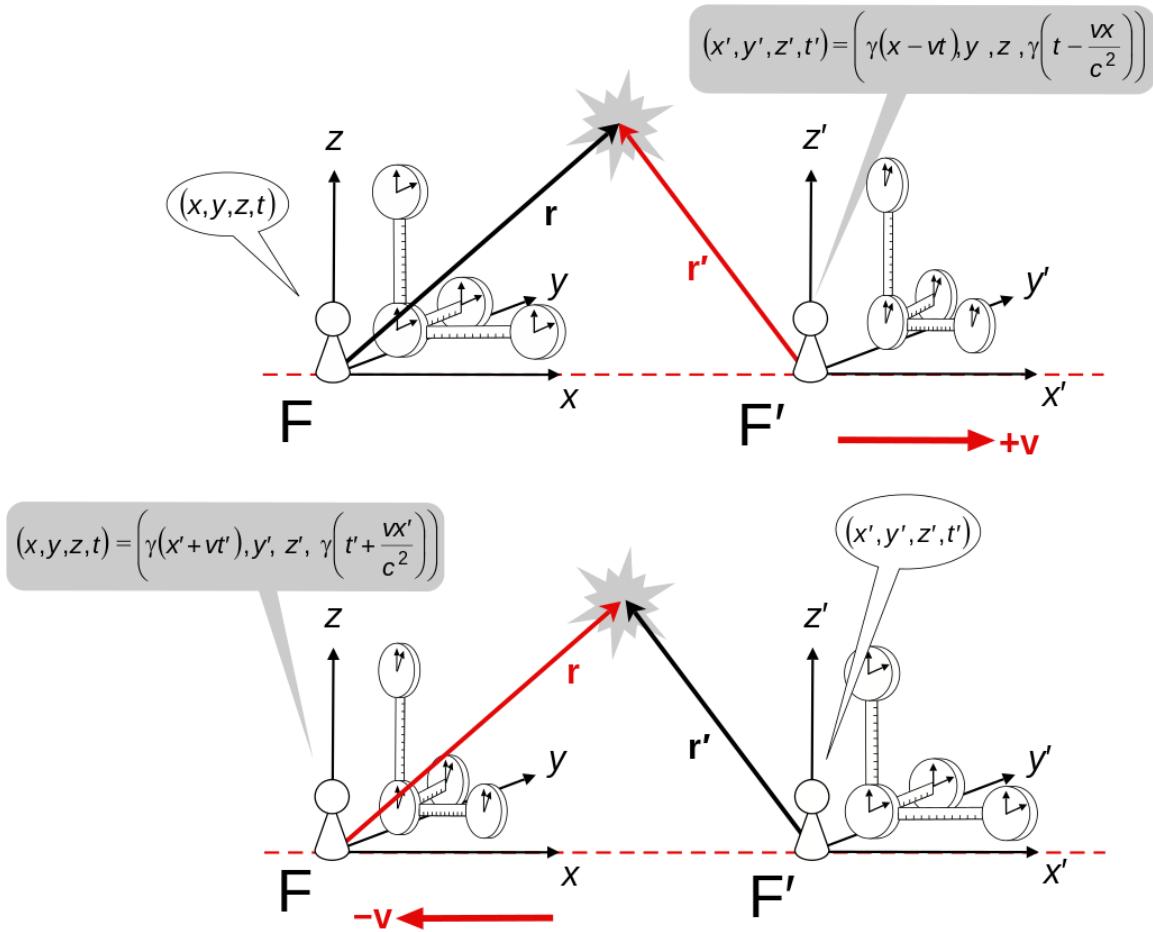


FIGURE I.3 – Représentation imagée de la transformation de Lorentz. Le passage de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  correspond au panneau supérieur. Dans celui du bas, on a schématisé le passage inverse de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$  (remerciements à Wikimedia Commons).

## 6) Cône de lumière.

A partir de la transformation de Lorentz (I.22), nous établirons que la quantité

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 \equiv c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (\text{I.23})$$

est un invariant relativiste. Cet invariant nous permet de définir le cône de lumière associé à un événement  $O$  quelconque et de classer les différents événements  $E$  qui interviennent par rapport à celui-ci.

L'intervalle entre les deux événements  $O$  et  $E$  est du genre espace si  $\Delta s^2 < 0$ . En ce cas, on peut trouver un référentiel galiléen dans lequel  $O$  et  $E$  se déroulent au même instant mais en des endroits séparés.

L'intervalle est du genre temps si  $\Delta s^2 > 0$ . Il existe alors un référentiel galiléen dans lequel  $O$  et  $E$  ont lieu au même endroit mais à des temps différents. On peut montrer que si  $E$  a lieu après  $O$  dans un référentiel, il en va de même dans tous les référentiels.

Finalement, l'intervalle est du genre lumière si  $\Delta s^2 = 0$ .

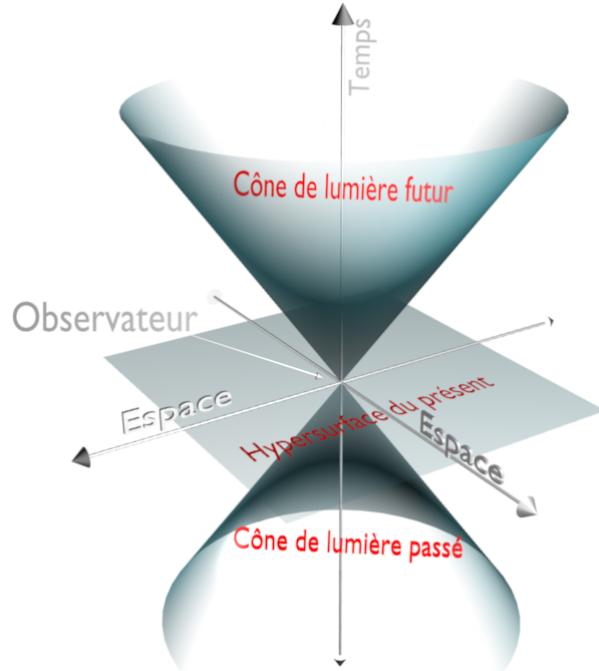


FIGURE I.4 – Cône de lumière autour de l'événement  $O$  (remerciements à Wikimedia Commons).

## TD I

### La transformation de Lorentz

#### 1) Expérience de Michelson et Morley.

Un interféromètre de Michelson est schématisé sur la figure I.5. Cet interféromètre est fixe dans le référentiel du laboratoire, et l'on suppose que, par construction, les deux bras ont même longueur avec  $l_1 = l_2 = D$ .

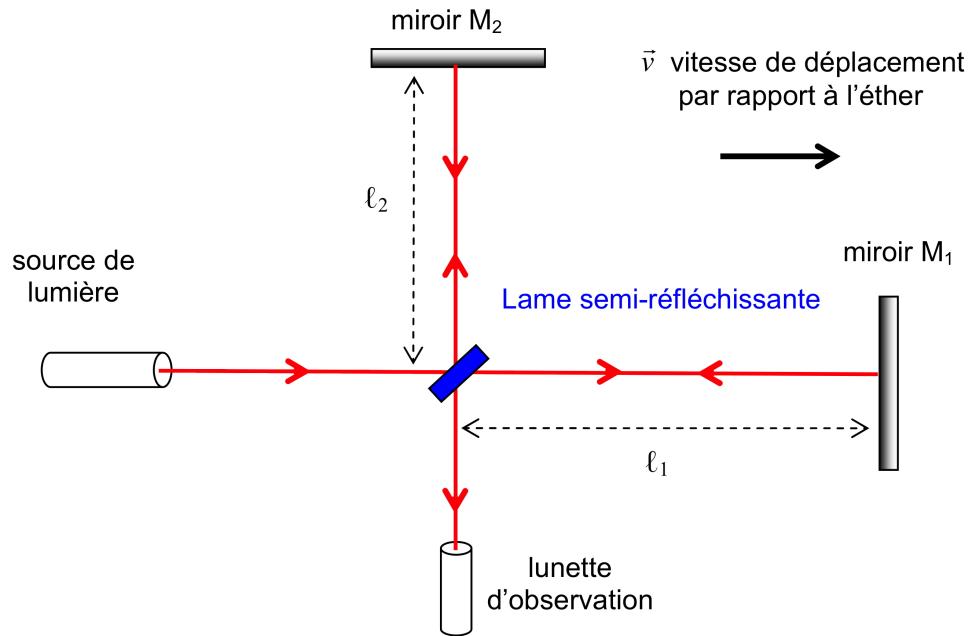


FIGURE I.5 – Principe de l'interféromètre de Michelson. Un rayon lumineux issu d'une source de lumière est séparé en deux par la lame semi-réfléchissante bleue. Il parcourt ainsi deux trajets optiques différents avant d'être recombiné et observé par la lunette (remerciements à Christian Bracco de l'Université de Nice).

On se place, dans cet exercice, dans le cadre de la cinématique classique. On suppose l'existence d'un référentiel privilégié dans lequel la vitesse de la lumière est  $c$  quelle que soit sa direction. La vitesse du référentiel du laboratoire par rapport à ce référentiel absolu

est  $\mathbf{v}$ . L'interféromètre est orienté comme indiqué sur la figure, la vitesse  $\mathbf{v}$  étant parallèle à la droite horizontale joignant la lame semi-réfléchissante au miroir  $M_1$ .

**1.1)** Calculer le temps  $T_1$  que met la lumière, dans le référentiel du laboratoire, pour effectuer l'aller-retour entre la lame semi-réfléchissante et le miroir  $M_1$ . On montrera que

$$T_1 = \frac{2Dc}{c^2 - v^2}. \quad (\text{TD I.1})$$

On développera cette expression en remarquant que  $v \ll c$ .

**1.2)** La durée  $T_2$  correspond cette fois au temps mis par la lumière, dans le référentiel du laboratoire, pour effectuer l'aller-retour entre la lame semi-réfléchissante et le miroir  $M_2$ . Montrer que

$$T_2 = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad (\text{TD I.2})$$

et donner également une expression approchée.

**1.3)** Exprimer la différence de marche  $\delta$  entre ces trajets en fonction de  $c$ ,  $T_1$  et  $T_2$ . Dans cette question, on prendra une vitesse de la lumière égale à  $c$ . L'erreur que l'on introduit ainsi est-elle importante ?

**1.4)** La lunette permet d'observer un système de franges d'interférence en forme d'anneaux concentriques. On tourne l'interféromètre de  $90^\circ$  afin d'avoir, cette fois, la vitesse  $\mathbf{v}$  parallèle au trajet 2. Le système de franges se modifie. Montrer que le nombre de franges qui défilent entre les deux positions de l'interféromètre est donné par

$$p = \frac{2D}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}. \quad (\text{TD I.3})$$

On calculera  $p$  avec  $D = 1.2$  m et une longueur d'onde  $\lambda = 0.6$   $\mu\text{m}$ . Dans leur article, Michelson et Morley ont pris pour  $v$  la vitesse de la Terre autour du Soleil, soit 30 km/s. Le résultat vous semble-t-il observable ? En fait, Michelson et Morley ont démultiplié les distances  $l_1$  et  $l_2$  à l'aide de miroirs de sorte que  $D = 12$  m cette fois. Conclusions ?

## 2) Relativité de la simultanéité.

On considère deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  dans les conditions de la transformation spéciale de Lorentz. Deux personnes  $A'$  et  $B'$  sont immobiles sur l'axe  $O'x'$  aux points d'abscisses respectives  $x'_{A'} = L_0/2$  et  $x'_{B'} = -L_0/2$ , et sont munies de lampes de poche. Deux observateurs appartenant l'un à  $\mathcal{R}$  et l'autre à  $\mathcal{R}'$  sont placés respectivement en  $O$  et en  $O'$ . A l'instant  $t = t' = 0$ , ces deux observateurs voient les lampes s'allumer en même temps.

**2.1)** Qui a allumé sa lampe en premier ? Montrer *sans calcul* que  $O$  et  $O'$  ne répondent pas de la même façon à cette question.

**2.2)** En appliquant la transformation de Lorentz, répondre quantitativement à la question précédente.

### 3) Invariance de l'intervalle $\Delta s^2$ .

Une particule instable parcourt, dans le laboratoire, la distance  $l = 5.19$  m avant de se désintégrer. La durée de son trajet, dans le référentiel du laboratoire, est  $\tau = 20$  ns. Quelle est sa durée de vie  $\tau_0$  dans le référentiel qui lui est lié ?

### 4) Cône de lumière.

On considère les deux événements  $O$  et  $E$  du paragraphe 6) que l'on observe dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . L'événement  $O$  est situé à l'origine des coordonnées de  $\mathcal{R}$  et l'événement  $E$  est associé au quadruplet  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$ . A l'intervalle spatio-temporel  $OE$  est associé l'invariant relativiste

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 \equiv c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \quad (\text{TD I.4})$$

4.1) Supposons tout d'abord que l'intervalle soit du genre espace avec  $\Delta s^2 < 0$ . Montrer qu'il existe un référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$  dans lequel  $O$  et  $E$  se déroulent au même instant. On construira explicitement la transformation de Lorentz correspondante.

**Remarque :** l'espace étant isotrope, on peut toujours effectuer une rotation dans  $\mathcal{R}$  de manière à ce que  $\Delta y = \Delta z = 0$  et raisonner à partir de ce référentiel.

4.2) L'intervalle est pris désormais du genre temps avec  $\Delta s^2 > 0$ . Montrer, par construction explicite là encore, qu'il existe un référentiel inertiel  $\mathcal{R}'$  dans lequel les deux événements se déroulent au même endroit  $O'$ , mais à des instants différents. Montrer également que si  $\Delta t > 0$ , il en va de même pour  $\Delta t'$  dans  $\mathcal{R}'$ .

4.3) Montrer que la dernière propriété est vraie **dans tous les référentiels inertiels** <sup>||</sup>. Est-ce vraiment étonnant ?

---

<sup>||</sup>. Dans le cas d'un intervalle du genre temps.



## Chapitre II

### De nouvelles relations entre le temps et l'espace

La transformation de Lorentz n'est pas un artifice destiné à ce que la vitesse de la lumière soit constante dans tous les référentiels galiléens. Elle exprime une relation profonde entre l'espace et le temps, essentiellement différente de celle à laquelle la mécanique traditionnelle de Galilée et Newton nous a habitués. C'est bien parce que temps et espace sont désormais intriqués si différemment que la vitesse de la lumière se retrouve constante, et non l'inverse.

#### 1) Addition des vitesses.

Considérons deux référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  dans les conditions de la transformation spéciale de Lorentz – voir la figure I.3 et l'équation (I.22). Les coordonnées du même événement E vues dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont reliées par

$$x' = \frac{x - v_e t}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}, \quad t' = \frac{t - v_e x/c^2}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}, \quad y' = y \quad \text{et} \quad z' = z \quad \text{avec} \quad \beta_e = \frac{v_e}{c}. \quad (\text{II.1})$$

Dans chaque référentiel, la vitesse est définie par la dérivée temporelle de la position. Mais attention, il faut dériver par rapport au **temps en vigueur dans le référentiel considéré**. Dans  $\mathcal{R}$ , nous avons ainsi

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{et} \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (\text{II.2})$$

alors que dans  $\mathcal{R}'$ , il vient

$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_{y'} = \frac{dy'}{dt'} \quad \text{et} \quad v'_{z'} = \frac{dz'}{dt'}. \quad (\text{II.3})$$

Pour alléger un peu les notations, on écrit les coordonnées de la vitesse dans  $\mathcal{R}'$  sous la forme  $v'_x \equiv v'_{x'}$ ,  $v'_y \equiv v'_{y'}$  et  $v'_z \equiv v'_{z'}$ , en oubliant le prime sur  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

La vitesse dirigée suivant la direction du mouvement relatif de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , donc suivant les axes  $Ox$  et  $O'x'$  et le vecteur unitaire  $\mathbf{e}_x$  qu'ils portent, est la composante parallèle notée  $\mathbf{v}_{\parallel} = v_{\parallel} \mathbf{e}_x$  dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathbf{v}'_{\parallel} = v'_{\parallel} \mathbf{e}_x$  dans  $\mathcal{R}'$ . Les composantes perpendiculaires à  $\mathbf{e}_x$  sont respectivement  $\mathbf{v}_{\perp} = v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z$  de module  $v_{\perp}$  dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathbf{v}'_{\perp} = v'_y \mathbf{e}_y + v'_z \mathbf{e}_z$  de module  $v'_{\perp}$  dans  $\mathcal{R}'$ . Il vient alors

$$v'_{\parallel} = \frac{v_{\parallel} - v_e}{1 - (v_e v_{\parallel}/c^2)} \quad \text{et} \quad v'_{\perp} = \frac{v_{\perp} \sqrt{1 - \beta_e^2}}{1 - (v_e v_{\parallel}/c^2)}. \quad (\text{II.4})$$

Pour passer de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$ , il suffit de changer le signe de la vitesse  $v_e$  et  $\beta_e \equiv v_e/c$  dans les expressions précédentes pour obtenir

$$v_{\parallel} = \frac{v'_{\parallel} + v_e}{1 + (v_e v'_{\parallel}/c^2)} \quad \text{et} \quad v_{\perp} = \frac{v'_{\perp} \sqrt{1 - \beta_e^2}}{1 + (v_e v'_{\parallel}/c^2)}. \quad (\text{II.5})$$

**Remarque :** On peut aussi inverser directement les expressions (II.4). Pour la vitesse parallèle, la première relation se met sous la forme

$$v'_{\parallel} - \frac{v'_{\parallel} v_e v_{\parallel}}{c^2} = v_{\parallel} - v_e \Rightarrow v'_{\parallel} + v_e = v_{\parallel} + \frac{v'_{\parallel} v_e v_{\parallel}}{c^2} = v_{\parallel} \left\{ 1 + \frac{v_e v'_{\parallel}}{c^2} \right\}, \quad (\text{II.6})$$

d'où la première partie de (II.5). Pour la seconde relation, le calcul est moins évident car nous aimerais prouver que

$$v_{\perp} = v'_{\perp} \left\{ \frac{1 - (v_e v_{\parallel}/c^2)}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} \right\} \stackrel{?}{=} v'_{\perp} \left\{ \frac{\sqrt{1 - \beta_e^2}}{1 + (v_e v'_{\parallel}/c^2)} \right\}. \quad (\text{II.7})$$

Il convient donc de démontrer que

$$\mathcal{G} \equiv \{1 - (v_e v_{\parallel}/c^2)\} \{1 + (v_e v'_{\parallel}/c^2)\} = 1 - \beta_e^2 \equiv \mathcal{D}. \quad (\text{II.8})$$

Le terme de gauche de l'expression précédente conduit à

$$\mathcal{G} = \{1 - (v_e v_{\parallel}/c^2)\} \left\{ \frac{v'_{\parallel} + v_e}{v_{\parallel}} \right\}, \quad (\text{II.9})$$

en vertu de l'égalité (II.6). Il vient alors

$$\mathcal{G} = \{1 - (v_e v_{\parallel}/c^2)\} \left\{ \frac{v_e}{v_{\parallel}} + \frac{v'_{\parallel}}{v_{\parallel}} \right\} = \frac{v_e}{v_{\parallel}} - \frac{v_e^2}{c^2} + \left( \frac{v_{\parallel} - v_e}{v_{\parallel}} \right), \quad (\text{II.10})$$

car  $\{1 - (v_e v_{\parallel}/c^2)\} v'_{\parallel} \equiv \{v_{\parallel} - v_e\}$  selon (II.4). Nous obtenons ainsi

$$\mathcal{G} = \frac{v_e}{v_{\parallel}} - \frac{v_e^2}{c^2} + 1 - \frac{v_e}{v_{\parallel}} = 1 - \beta_e^2 \equiv \mathcal{D}. \quad (\text{II.11})$$

L'égalité (II.7) étant démontrée, la seconde expression dans (II.5) est bien établie.

Un photon se propageant à la vitesse de la lumière dans  $\mathcal{R}'$  le long de l'axe  $O'x'$  est caractérisé par les composantes  $v'_{\parallel} = c$  et  $v'_{\perp} = 0$ . Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , sa vitesse perpendiculaire  $v_{\perp}$  est encore nulle. sa vitesse le long de l'axe  $Ox$  est donnée par

$$v_{\parallel} = \frac{c + v_e}{1 + (v_e c/c^2)} = c \left\{ \frac{c + v_e}{c + v_e} \right\} \equiv c. \quad (\text{II.12})$$

Sa vitesse est encore  $c$  comme attendu. Si maintenant le photon se propage dans  $\mathcal{R}'$  le long de l'axe  $O'y'$ , les composantes de sa vitesse sont

$$v'_\parallel = 0 \quad \text{et} \quad v'_\perp = c . \quad (\text{II.13})$$

L'application des relations (II.5) conduit à

$$v_\parallel = v_e \quad \text{et} \quad v_\perp = c \sqrt{1 - \beta_e^2} \equiv \sqrt{c^2 - v_e^2} . \quad (\text{II.14})$$

Le photon se dirige dans  $\mathcal{R}$  avec un angle par rapport à la verticale  $Oy$  mais le module de sa vitesse est toujours égal à  $c$  puisque

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_\parallel^2 + v_\perp^2} = \sqrt{v_e^2 + c^2 - v_e^2} = \sqrt{c^2} = c . \quad (\text{II.15})$$

## 2) Contraction des longueurs.

Considérons deux référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  dans les conditions de la transformation spéciale de Lorentz. Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est celui d'un train se déplaçant par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  du quai d'une gare avec la vitesse  $v_e$ . Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , la longueur du train est  $L_0$ . Nous aimeraisons connaître la longueur  $L$  du train vue du quai de la gare. Pour se faire, il faut déterminer les abscisses de l'avant  $A'$  et de l'arrière  $O'$  du train mesurées **dans  $\mathcal{R}$  au même instant  $t$** .

Dans  $\mathcal{R}'$ , ces abscisses sont simplement  $x'_{O'} = 0$  et  $x'_{A'} = L_0$ . Prenons comme instant de référence  $t' = 0$ . Nous avons deux événements spatio-temporels décrits par les coordonnées

$$O' \equiv \{x'_{O'} = 0, t'_{O'} = 0\} \quad \text{et} \quad A' \equiv \{x'_{A'} = L_0, t'_{A'} = 0\} . \quad (\text{II.16})$$

L'événement  $O'$  coïncide avec l'événement  $O$  qui, dans  $\mathcal{R}$ , correspond à l'abscisse  $x_O = 0$  à l'instant  $t_O = 0$ . Le chef de gare situé en  $O$  voit à l'instant  $t = 0$  passer l'arrière du train  $O'$  à son niveau.

L'événement  $A'$  est vu dans  $\mathcal{R}$  avec les coordonnées

$$x_{A'} = \gamma_e (x'_{A'} + v_e t'_{A'}) = \gamma_e L_0 \quad \text{et} \quad t_{A'} = \gamma_e (t'_{A'} + (v_e x'_{A'}/c^2)) = \frac{\gamma_e v_e}{c^2} L_0 \neq 0 . \quad (\text{II.17})$$

Pour mesurer la longueur du train à partir du quai de la gare, il faut connaître l'abscisse  $x_A$  de l'avant du train au même instant  $t_A = t_O = 0$  où l'arrière du train passe au niveau du chef de gare en  $O$ . Sachant que **dans  $\mathcal{R}$  (i)** l'avant du train se trouve en  $x_{A'}$  à l'instant  $t_{A'}$  et que **(ii)** le train se déplace à la vitesse  $v_e$ , il suffit d'interpoler la position de l'événement  $A$  par rapport à celle de l'événement  $A'$  pour obtenir l'abscisse recherchée

$$x_A = x_{A'} - v_e t_{A'} = \gamma_e L_0 - \frac{\gamma_e v_e^2}{c^2} L_0 = \gamma_e (1 - \beta_e^2) L_0 = \sqrt{1 - \beta_e^2} L_0 . \quad (\text{II.18})$$

**Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de la gare, la longueur du train en mouvement à la vitesse  $v_e$  est  $L = \sqrt{1 - \beta_e^2} L_0$  et est inférieure à la longueur propre  $L_0$  du train.** Un objet en mouvement raccourcit dans la direction de son mouvement.

Par contre, le chef de gare situé en  $O$  voit le contrôleur  $O'$  situé à l'arrière du train passer à son niveau à l'instant  $t = t' = 0$  et constate qu'il a la même taille verticale que s'il était immobile sur le quai avec lui. La hauteur propre du contrôleur vaut  $h_0 = \Delta y'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  du train. Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du quai, elle devient

$$h = \Delta y = \Delta y' = h_0 , \quad (\text{II.19})$$

en vertu de (I.22).

### 3) Dilatation du temps.

#### 3.1) Période propre d'une horloge et dilatation du temps.

Reprendons les deux référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  précédents et entreposons dans le train une horloge. Celle-ci est par définition un dispositif périodique donnant des signaux réguliers séparés par des laps de temps égaux valant  $\Delta t'$ . La période d'une horloge dans le référentiel où elle est au repos est qualifiée de **propre**. La période propre  $\tau_0$  de l'horloge est donc égale au laps de temps  $\Delta t'$  perçu par un passager, le train constituant le **référentiel propre** de l'horloge. Notons que l'horloge étant immobile dans  $\mathcal{R}'$ , son abscisse ne varie pas, de sorte que l'intervalle spatio-temporel associé aux événements que sont deux battements consécutifs a pour coordonnées

$$\Delta t' = \tau_0 \quad \text{et} \quad \Delta x' = 0 . \quad (\text{II.20})$$

Pour le chef de gare immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , les battements de l'horloge sont séparés par le laps de temps

$$\Delta t = \gamma_e \left\{ \Delta t' + \frac{v_e}{c^2} \Delta x' \right\} = \gamma_e \Delta t' = \gamma_e \tau_0 . \quad (\text{II.21})$$

Pour lui, l'horloge bat la mesure avec une période  $\tau \equiv \Delta t = \gamma_e \tau_0$  **plus grande** que la période propre  $\tau_0$ . L'horloge semble se comporter plus lentement que si elle était au repos sur le quai. La durée des battements vue de la gare est donc dilatée par le mouvement du train. C'est la célèbre **dilatation des durées** caractéristique de la relativité restreinte.

Ce phénomène est difficile à admettre tant nous sommes habitués à la notion de temps absolu. Il faut se garder de vouloir comparer à tout prix le temps propre  $\tau_0$  et la durée  $\Delta t$  perçue dans un référentiel où l'horloge est en mouvement et qui n'est pas son référentiel propre. Le fait que  $\tau_0$  et  $\Delta t$  sont différents peut se comprendre comme un effet de perspective. Prenons un exemple similaire : au fur et à mesure qu'on s'éloigne d'une personne,

on la voit plus petite. La perception de la hauteur ne doit pas être confondue avec la véritable hauteur elle-même. Ici, la perception  $\Delta t$  dans  $\mathcal{R}$  ne doit pas être confondue avec le temps propre  $\tau_0$  dans  $\mathcal{R}'$ .

Dans ces deux exemples, i.e., dilatation des durées et éloignement qui crée par effet de perspective une diminution des dimensions, l'effet de point de vue est symétrique. Pour le chef de gare, l'horloge embarquée dans le train ralentit. Mais un voyageur assis dans le train voit également la montre du chef de gare battre la mesure plus lentement que si elle était immobile dans le wagon.

### 3.2) Time dilation – an experiment with mu mesons.

En 1963, David H. Frisch et James H. Smith effectuent une expérience pédagogique pour montrer que le temps propre est bien dilaté par le mouvement. Ils relatent leur travail dans un film accessible sur <https://www.dailymotion.com/video/x6gitul>. L'idée est de mesurer la durée de vie des muons produits par l'impact des protons cosmiques sur l'atmosphère supérieure de la Terre. Ces particules sont de gros électrons de masse égale à 106 MeV\*\* et se désintègrent au repos avec une durée de vie propre égale à

$$\tau_0 = 2.197 \times 10^{-6} \text{ s}. \quad (\text{II.22})$$

Les muons auxquels Frisch et Smith s'intéressent sont issus de réactions énergétiques et ont des vitesses proches de  $c$ . Si la relativité galiléenne est correcte et que le temps est absolu, on s'attend à ce que les muons vivent également 2.2 microsecondes dans le référentiel de la Terre et parcourent en moyenne une distance de  $c\tau_0 = 660$  m avant de disparaître. Les particules détectées au sommet du mont Washington à 1907 m d'altitude ne parviennent jamais au niveau de la mer car elles se désintègrent avant. Frisch et Smith effectuent une mesure précise du flux des muons au sommet du mont Washington ainsi qu'au niveau de la mer afin de les comparer.

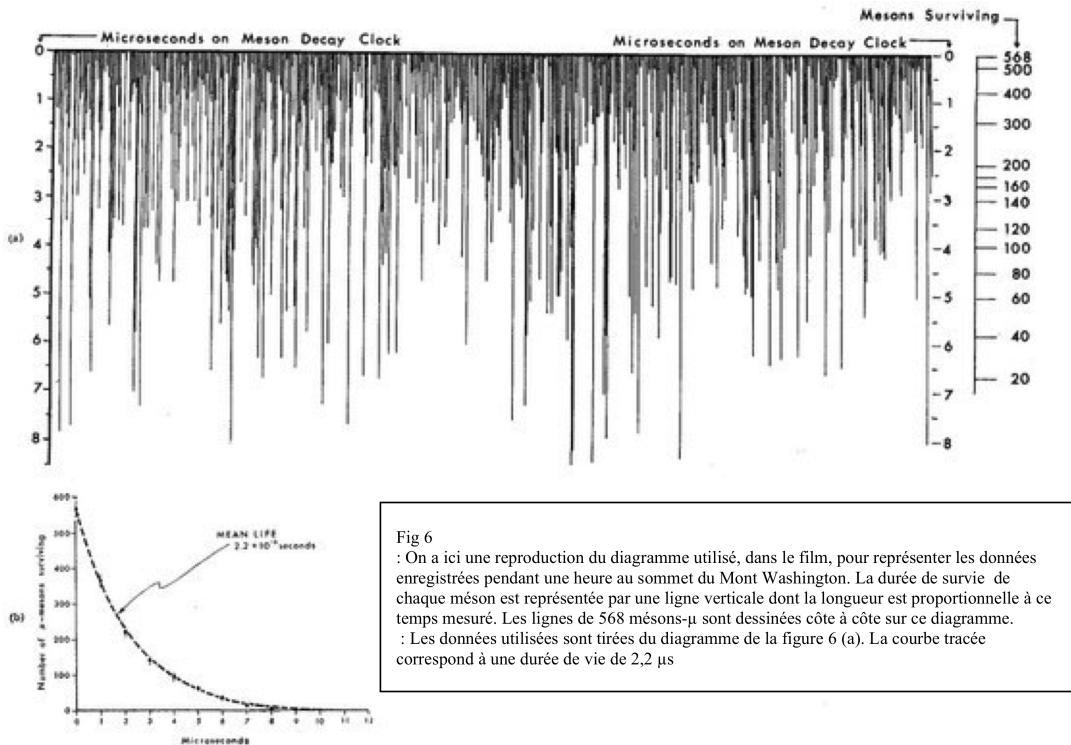
De manière plus précise, la loi de décroissance exponentielle du nombre de muons dans leur référentiel propre  $\mathcal{R}'$  suit la loi exponentielle

$$N(t') = N_0 \exp \left\{ -\frac{t'}{\tau_0} \right\}, \quad (\text{II.23})$$

où  $N_0 \equiv N(t' = 0)$  est le nombre de particules à l'instant  $t' = 0$ . Les particules sont immobiles en  $O'$  d'abscisse  $x' = 0$ . L'instant de référence  $t' = 0$  correspond au passage des muons par le sommet  $O$  de la montagne. On oriente les axes  $Ox$  et  $O'x'$  des référentiels inertiels  $\mathcal{R}$  de la Terre et  $\mathcal{R}'$  des muons vers le bas. On se place dans les conditions de la transformation spéciale de Lorentz si bien que le passage des muons en  $O$  a lieu à l'instant  $t = t' = 0$ .

---

\*\*. Il s'agit ici de l'énergie au repos du muon, donc de  $m_\mu c^2$ , exprimée en méga-électronvolts.



**FIGURE II.1** – Les muons sélectionnés par Frisch et Smith parviennent dans le scintillateur avec une énergie cinétique pratiquement nulle. Ils engendrent un premier flash lumineux puis se désintègrent en électrons ou positrons qui produisent à leur tour un second flash quelques microsecondes plus tard. Pour chacun des 568 muons collectés pendant une heure, le laps de temps entre les deux flashes est reporté à l'identique sur l'axe vertical sous forme d'un segment. La distribution statistique de ceux-ci reproduit bien la loi de décroissance exponentielle (II.23).

En relativité galiléenne, le temps est absolu et le point spatio-temporel de coordonnées  $\{x' = 0, t'\}$  est décrit dans  $\mathcal{R}$  par l'abscisse  $x = v_e t \equiv v_e t'$  puisque  $t = t'$ . La loi de décroissance exponentielle (II.23) se traduit dans le référentiel de la Terre par

$$N(x) = N_0 \exp \left\{ -\frac{t}{\tau_0} \right\} = N_0 \exp \left\{ -\frac{x}{v_e \tau_0} \right\}. \quad (\text{II.24})$$

Frisch et Smith utilisent un scintillateur qui émet de la lumière chaque fois qu'une particule chargée le traverse. Ils empilent des briques de fer au-dessus afin de sélectionner les muons incidents dont l'énergie est d'environ 1 GeV et dont la vitesse  $v_e$  est comprise entre 0.9950  $c$  et 0.9954  $c$ . Les muons moins énergétiques perdent toute leur énergie initiale dans le fer et s'y arrêtent. Les muons plus énergétiques traversent le fer et ont encore une énergie cinétique suffisante pour traverser le plastique du scintillateur et continuer leur voyage. Les muons sélectionnés par Frisch et Smith sont freinés par le fer de telle sorte qu'ils

parviennent au niveau du scintillateur avec une énergie cinétique nulle et s'y arrêtent. Ils engendrent un premier flash lumineux lorsqu'ils entrent dans le scintillateur et se désintègrent ensuite via la réaction faible

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad \text{et} \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu . \quad (\text{II.25})$$

Les électrons et positrons ainsi produits provoquent dans le scintillateur un second flash lumineux. Le laps de temps s'écoulant entre les deux flashes permet d'accéder à la durée de vie propre  $\tau_0$  des muons, comme la figure II.1 l'illustre.

Le dispositif de Frisch et Smith est particulièrement ingénieux car il permet de sélectionner des muons incidents dont la vitesse  $v_e$  vaut en moyenne  $0.9952 c$ , d'en faire le compte et de les arrêter pour mesurer leur durée de vie au repos. Sur six heures de prise de données, une moyenne de  $563 \pm 10$  muons est détectée par heure au sommet du mont Washington. En vertu de la loi de décroissance galiléenne (II.24), on s'attend à ce que le nombre moyen de muons détectés au niveau de la mer soit d'environ  $563 \times \exp(-1907/660) \simeq 31$ . Or Frisch et Smith collectent de retour au MIT à Cambridge une moyenne de  $408 \pm 9$  muons par heure. La différence est sans appel.

En appliquant la transformation de Lorentz entre les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , on change les relations entre les temps  $t$  et  $t'$  et la véritable loi de décroissance exponentielle prend alors la forme

$$N(x) = N_0 \exp \left\{ -\frac{x}{v_e \tau} \right\} \quad \text{où} \quad \tau = \gamma_e \tau_0 . \quad (\text{II.26})$$

La durée de vie  $\tau$  des muons mesurée dans  $\mathcal{R}$  est bien supérieure à la durée de vie propre  $\tau_0$  vue dans  $\mathcal{R}'$  où les muons sont au repos. L'exercice 3 du TD II vous permettra d'analyser plus finement les résultats de l'expérience de Frisch et Smith et de vérifier que la relativité restreinte permet de les comprendre complètement.

### 3.3) Le paradoxe des jumeaux.

Tant que les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, la dilatation du temps est un phénomène symétrique. Dans leur expérience, Frisch et Smith comparent la durée de vie propre  $\tau_0$  des muons avec une durée de vie impropre  $\tau$  mesurée dans un référentiel où les particules se déplacent. **Paul Langevin** propose en 1911 une expérience de pensée qui semble montrer que la relativité restreinte est contradictoire.

Considérons deux jumeaux  $A$  et  $B$  qui sont nés sur Terre. Le jumeau  $A$  fait un voyage aller-retour dans l'espace en fusée à une vitesse proche de celle de la lumière. Son frère jumeau  $B$  reste sur Terre. Celui-ci constate que le voyage de son frère commence à l'instant  $t_1$  et se termine à l'instant  $t_2$ . Il conclut que le voyage de  $A$  s'étale sur une durée  $T_B = t_2 - t_1$ .

Le voyage de  $A$  est une boucle qui part de  $B$  à l'instant  $t_1$  et revient à  $B$  à l'instant  $t_2$ . Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du jumeau sédentaire  $B$ , la position et la vitesse du voyageur  $A$  sont données à chaque instant par  $\mathbf{r}_A = \{x(t), y(t), z(t)\}$  et  $\mathbf{v}_A = \{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\}$ . **A tout instant  $t$ , on peut trouver un référentiel inertiel  $\mathcal{R}'$  dont l'origine  $O'$  coïncide avec la position de  $A$  et dont la vitesse  $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_A(t)$  est également celle de  $A$ .** Un observateur de  $\mathcal{R}'$  placé en  $O'$  voit alors le voyageur  $A$  s'approcher lentement de lui et rester immobile à l'instant  $t$  pour ensuite repartir. Ces deux personnes peuvent toutefois prendre le thé et bavarder un moment. Leurs horloges étant identiques, elles indiquent le même écoulement du temps. Le voyageur et l'observateur se quittent au bout d'une durée  $\Delta t' = \Delta t_A$ . Le jumeau  $B$  resté sur Terre mesure par contre une durée de l'entrevue égale à

$$\Delta t_B \equiv \Delta t = \gamma_e \Delta t' \equiv \gamma_e \Delta t_A . \quad (\text{II.27})$$

Nous pouvons aussi exprimer le temps vécu par le voyageur  $A$  en fonction de celui ressenti par son jumeau sédentaire  $B$  grâce à

$$\Delta t_A = \sqrt{1 - \beta_e^2} \Delta t_B = \left\{ 1 - \frac{v_A^2(t)}{c^2} \right\}^{1/2} \Delta t_B . \quad (\text{II.28})$$

Pour le jumeau  $A$ , le voyage a une durée totale de

$$T_A = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ 1 - \frac{v_A^2(t)}{c^2} \right\}^{1/2} dt \leq \int_{t_1}^{t_2} dt = (t_2 - t_1) = T_B . \quad (\text{II.29})$$

L'égalité n'a lieu que lorsque la vitesse  $\mathbf{v}_A$  est nulle à tout instant et donc lorsque  $A$  reste immobile avec  $B$  sans partir. Le voyageur qui part et revient constate immanquablement que son frère jumeau a vieilli plus que lui puisque  $T_A < T_B$ . La symétrie évoquée plus haut entre les référentiels inertiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  est brisée et Paul Langevin en est contrarié.

Le paradoxe de Langevin s'explique en comprenant que les expériences vécues par  $A$  et  $B$  sont bien différentes et n'ont rien de symétrique. Le jumeau sédentaire reste dans son référentiel galiléen. Tout se passe paisiblement. Par contre, son frère voyage dans un référentiel **non-inertiel**, siège d'une accélération lui permettant d'effectuer une boucle et de revenir à son point de départ. Le point de vue du voyageur  $A$  ne peut être analysé que dans le cadre de la **relativité générale**. Si par exemple  $A$  se déplace le long d'un grand cercle, son référentiel tourne et est le siège d'une accélération centripète qui agit comme un champ de gravitation et fait déraper le temps. Les horloges ralentissent en présence de pesanteur et le temps vécu par  $A$  est plus petit que pour son frère jumeau  $B$ .

#### 4) Expérience de Fizeau.

En 1851, **Armand Hippolyte Fizeau** mesure la vitesse  $v_{\parallel}$  de la lumière dans de l'eau en mouvement à la vitesse  $v_e \equiv u$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire. Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de l'eau, la lumière se déplace à la vitesse  $v'_{\parallel} = c/n$ , où  $n$  est l'indice optique du liquide.

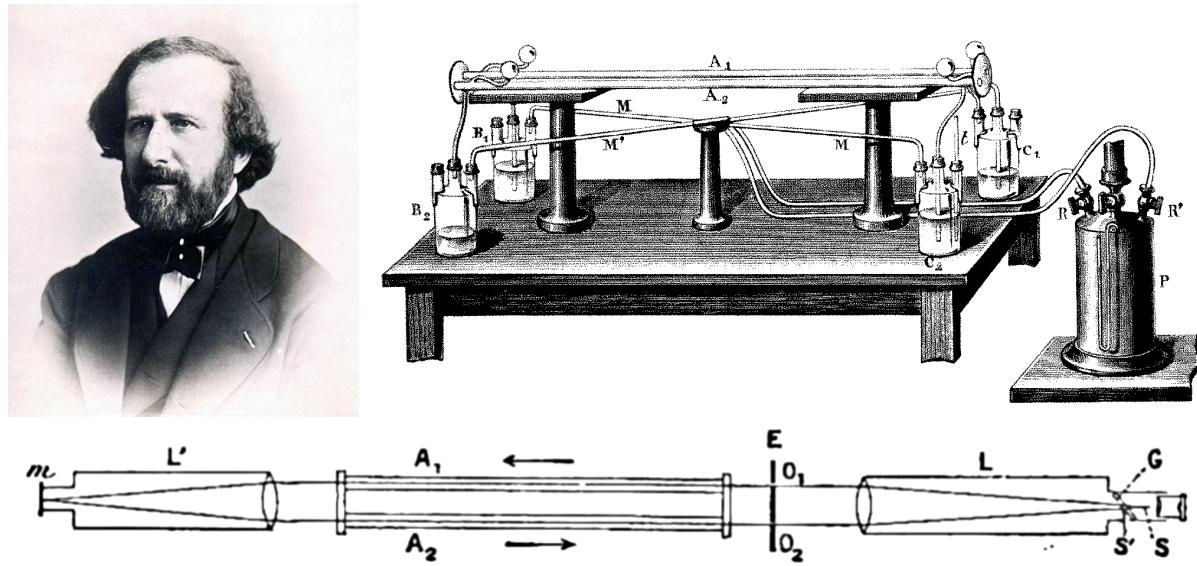


FIGURE II.2 – L'expérience imaginée par Hippolyte Fizeau pour mesurer la vitesse de la lumière dans de l'eau en mouvement consiste tout d'abord à observer les franges d'interférence engendrées par le passage de la lumière à travers deux tubes remplis d'eau immobile. La frange centrale est brillante car les chemins optiques parcourus par les deux rayons sont identiques. Dans un second temps, l'eau circule en sens inverse dans les tuyaux comme indiqué sur le schéma de principe. Les franges se sont déplacées car les chemins optiques des deux rayons sont désormais différents. Le dispositif ingénieux de Fizeau permet d'ajouter les variations de chemin optique et de remonter ainsi à vitesse  $v_{\parallel}$  de la lumière dans le laboratoire.

Si l'on admet que la relativité galiléenne est valide, nous aurons

$$v_{\parallel} = v'_{\parallel} + u = \frac{c}{n} + u . \quad (\text{II.30})$$

Or, en analysant ses résultats, Fizeau est obligé de conclure que le déplacement des franges d'interférence suit une loi différente avec

$$v_{\parallel} = \frac{c}{n} + u \left\{ 1 - \frac{1}{n^2} \right\} . \quad (\text{II.31})$$

La différence est très difficile à comprendre. **Augustin Fresnel** propose bien une explica-

tion plus que nébuleuse<sup>††</sup> où il est question que l'éther lumineux soit partiellement (mais pas complètement) entraîné par le mouvement de l'eau.

La relativité restreinte permet d'expliquer de manière lumineuse l'expérience de Fizeau réalisée plus de cinquante ans avant la publication du célèbre article d'Einstein. En effet, la première des relations (II.5) devient ici

$$v_{\parallel} = \frac{(c/n) + u}{1 + \frac{u(c/n)}{c^2}} = \frac{(c/n) + u}{1 + (u/cn)} \simeq \left\{ \frac{c}{n} + u \right\} \left\{ 1 - \frac{u}{cn} \right\}. \quad (\text{II.32})$$

Le rapport  $(u/cn)$  étant très petit devant 1, on peut développer l'expression précédente jusqu'à l'ordre  $\mathcal{O}(u)$  inclus et obtenir

$$v_{\parallel} = \frac{c}{n} + u - \frac{u}{n^2} + \mathcal{O}(u^2). \quad (\text{II.33})$$

Le troisième terme en  $u/n^2$  était inexplicable dans le cadre de la relativité galiléenne mais devient ici naturel. La prédiction de la relativité restreinte corrobore parfaitement le résultat de l'expérience de Fizeau.

## 5) Phénomènes optiques.

### 5.1) Aberration.

**James Bradley**, astronome britannique, est le premier à avoir confirmé expérimentalement en 1725 la révolution de la Terre autour du Soleil en montrant que les étoiles subissaient le phénomène d'**aberration de la lumière**. Une source lumineuse paraît toujours un peu plus proche de la direction vers laquelle l'observateur se déplace. L'effet est faible puisque la variation angulaire est au maximum égale à  $\delta \simeq v_{\oplus}/c$ , où  $v_{\oplus}$  est la vitesse de la Terre autour du Soleil et où  $c$  dénote la vitesse de la lumière. James Bradley trouve une valeur de  $\delta$  de l'ordre de 20,5 secondes d'arc.

Reprendons l'analyse de Bradley dans le cadre de la relativité restreinte. Dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  lié au Soleil, un rayon lumineux se propage dans le plan  $(O, x, y)$  en direction des  $x$  négatifs, en faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $Ox$ . La vitesse de la lumière est

$$\mathbf{v} = \{v_x = -c \cos \theta, v_y = -c \sin \theta, v_z = 0\}. \quad (\text{II.34})$$

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  se propageant par rapport à  $\mathcal{R}$  avec la vitesse  $v_e$  dans les conditions de la transformation spéciale de Lorentz, la vitesse devient

$$\mathbf{v}' = \left\{ v'_x = \frac{-c \cos \theta - v_e}{\mathcal{D}}, v'_y = \frac{-c \sin \theta \sqrt{1 - \beta_e^2}}{\mathcal{D}}, v'_z = 0 \right\}, \quad (\text{II.35})$$

---

<sup>††</sup>. Voir le site <https://archive.org/details/traitdoptique02mascgoog/page/n113>.

où le dénominateur  $\mathcal{D}$  est donné par

$$\mathcal{D} = 1 + \frac{v_e \cos \theta}{c}. \quad (\text{II.36})$$

L'angle que le rayon lumineux fait avec l'axe  $O'x'$  dans le référentiel en mouvement  $\mathcal{R}'$  est alors donné par

$$\tan \theta' = \left\{ \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \beta_e} \right\} \sqrt{1 - \beta_e^2}. \quad (\text{II.37})$$

Un rayon se propageant dans  $\mathcal{R}$  le long de l'axe  $Oy$  vers les  $y$  négatifs fera dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  un angle  $\alpha'$  non nul avec la verticale  $O'y'$ . En posant  $\theta = \pi/2$ , la relation précédente conduit à

$$\tan \alpha' = \frac{\beta_e}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}. \quad (\text{II.38})$$

Si  $\mathcal{R}'$  est le référentiel de la Terre se déplaçant par rapport à  $\mathcal{R}$  avec la vitesse  $v_e = v_{\oplus}$ , l'effet est faible et correspond à l'angle  $\delta \equiv \alpha'$  mesuré par Bradley avec

$$\delta \equiv \alpha' \simeq \tan \alpha' = \frac{v_{\oplus}}{c} \sim 10^{-4} = 20.5''. \quad (\text{II.39})$$

Si maintenant vous êtes à bord d'un vaisseau spatial cinglant à une vitesse proche de celle de la lumière, vous voyez la voûte céleste se rabattre vers l'avant, dans la direction vers laquelle vous vous dirigez. Vous avez l'impression d'être dans un tunnel, toutes les étoiles étant situées droit devant vous.

## 5.2) Effet Doppler.

L'effet que nous allons étudier fut présenté par **Christian Doppler** en 1842 dans l'article *Sur la lumière colorée des étoiles doubles et de quelques autres astres du ciel*. Il fut confirmé sur les sons par le chercheur néerlandais **Buys Ballot** en utilisant des musiciens jouant une note calibrée sur un train de la ligne Utrecht-Amsterdam. Il fut également proposé par **Hippolyte Fizeau** pour les ondes électromagnétiques en 1848.

Raisonnons tout d'abord dans le cadre de la relativité galiléenne et plaçons nous dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de l'éther lumineux au sein duquel la lumière se propage à la vitesse  $c$ . Une source ponctuelle  $S$  émet des signaux périodiques et se déplace dans la direction  $Ox$  avec une vitesse  $v_e$ . A l'instant  $t$ , elle émet un premier signal lumineux qui atteint  $O$  à l'instant  $t_1$  tel que

$$t_1 = t + \frac{r(t)}{c} \quad \text{où} \quad r(t) = \{x(t)^2 + y^2 + z^2\}^{1/2}. \quad (\text{II.40})$$

La position de la source  $S$  est repérée par ses coordonnées  $\{x(t), y, z\}$ . La source émet à l'instant  $t + T_0$  un second signal lumineux qui est reçu en  $O$  à l'instant  $t_2$  donné par

$$t_2 = (t + T_0) + \frac{r(t + T_0)}{c} \quad \text{où} \quad r(t + T_0) = \{x(t + T_0)^2 + y^2 + z^2\}^{1/2}. \quad (\text{II.41})$$

Le laps de temps  $T$  qui sépare la **réception** en  $O$  des deux signaux est égal à

$$T = t_2 - t_1 = T_0 + \left\{ \frac{r(t+T_0) - r(t)}{c} \right\} \equiv T_0 + \left\{ \frac{T_0}{c} \right\} \left\{ \frac{r(t+T_0) - r(t)}{T_0} \right\} \quad (\text{II.42})$$

Si la distance  $r$  varie peu sur une période  $T_0$ , on peut remplacer la dernière accolade dans l'expression précédente par la dérivée de  $r$  par rapport au temps de sorte que

$$T = T_0 + \left\{ \frac{T_0}{c} \right\} \left\{ \frac{dr}{dt} = \frac{x}{r} \frac{dx}{dt} \equiv \cos \theta v_e = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_e \right\}. \quad (\text{II.43})$$

Le vecteur  $\mathbf{r}$  joint  $O$  à  $S$ . Il fait un angle  $\theta$  avec la direction  $Ox$  de la vitesse  $\mathbf{v}_e$ . Le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  pointe de  $O$  vers  $S$  et est lié à  $\mathbf{r}$  par  $\mathbf{r} = r \mathbf{u}$ . La période des signaux reçus en  $O$  est alors donnée par

$$T = T_0 \left\{ 1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_e}{c} \right\}. \quad (\text{II.44})$$

Inverser cette relation nous donne accès à la fréquence pour laquelle

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_e/c)}. \quad (\text{II.45})$$

Les signaux **émis** par une source  $S$  à la fréquence  $\nu_0$  sont **reçus** en  $O$  à une fréquence  $\nu$  différente. La fréquence  $\nu$  est plus faible que  $\nu_0$  si  $S$  s'éloigne de  $O$ . Elle est plus élevée si  $S$  s'en rapproche. Ce phénomène est bien connu et a de multiples applications. Notons que lorsque la source est située à la perpendiculaire de la vitesse  $\mathbf{v}_e$ , i.e., lorsque les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}_e$  font un angle droit, alors les fréquences  $\nu$  et  $\nu_0$  sont égales.

Examinons le problème dans le cadre de la relativité restreinte. Le raisonnement est quasiment identique. Il est inutile toutefois de préciser le référentiel galiléen dans lequel la vitesse de la lumière est  $c$ . La seconde différence est que  $T_0$  désigne désormais la **période propre** d'émission des signaux telle qu'un observateur lié à  $S$  et à son référentiel  $\mathcal{R}'$  la mesurerait. Pour l'observateur  $O$  du référentiel  $\mathcal{R}$ , la source émet des signaux espacés de  $\gamma_e T_0$  à cause du phénomène de dilatation du temps. Il suffit dès lors de remplacer  $T_0$  par  $\gamma_e T_0$  dans l'équation (II.44) pour obtenir les expressions relativistes

$$T = \gamma_e T_0 \left\{ 1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_e}{c} \right\} = T_0 \left\{ \frac{1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_e/c)}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} \right\} \quad (\text{II.46})$$

et

$$\nu = \nu_0 \left\{ \frac{\sqrt{1 - \beta_e^2}}{1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_e/c)} \right\}. \quad (\text{II.47})$$

Pour un observateur immobile par rapport à la source  $S$ , les signaux sont émis et reçus à la fréquence propre  $\nu_0$ . Lorsque la source se déplace, la période d'émission se dilate et les signaux ne sont pas émis au même endroit, d'où une variation de la fréquence.

## TD II

### Conséquences de la transformation de Lorentz

#### 1) Invariance de la vitesse de la lumière.

On considère deux référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  dans les conditions de la transformation spéciale de Lorentz. Les vitesses d'un point matériel dans  $\mathcal{R}$  sont reliées à celles dans  $\mathcal{R}'$  par les expressions (II.5)

$$v_{\parallel}' = \frac{v_{\parallel} + v_e}{1 + (v_e v_{\parallel}' / c^2)} \quad \text{et} \quad v_{\perp}' = \frac{v_{\perp} \sqrt{1 - \beta_e^2}}{1 + (v_e v_{\parallel}' / c^2)}. \quad (\text{TD II.1})$$

Montrer que si dans  $\mathcal{R}'$  les composantes vérifient  $v_{\parallel}'^2 + v_{\perp}'^2 = c^2$ , il en va de même dans  $\mathcal{R}$  où  $v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = c^2$ .

#### 2) Le tunnel et le train.

Cet exercice présente un paradoxe célèbre, que l'on rencontre sous plusieurs formes comme la barre dans la boîte, la perche dans la grange, ou le train dans le tunnel. Soit donc un train de longueur au repos  $L_0 = 100$  m qui avance à la vitesse constante  $v_e$  sur une voie rectiligne. Le long de cette voie se trouve un tunnel de longueur au repos  $l_0 = 90$  m. La sortie S du tunnel est munie d'un volet qui est fermé lorsque le train entre dans le tunnel et qui s'ouvre à l'instant précis où l'arrière  $O'$  du train passe au niveau de l'entrée  $O$  du tunnel. On prendra le passage de  $O'$  en  $O$  comme événement origine des référentiels  $\mathcal{R}$  du tunnel et  $\mathcal{R}'$  du train.

**2.1)** Que se passerait-t-il si la relativité de Galilée était valide ?

**2.2)** Heureusement pour les passagers du train, la relativité restreinte leur procure une échappatoire. Calculer la vitesse minimale  $v_e^0$  que doit avoir le train pour éviter la catastrophe. On exprimera  $v_e^0$  en fonction de  $L_0$  et de  $l_0$ .

**2.3)** Le train a une vitesse  $v_e$  de 0.5  $c$ . Vérifier qu'il traverse bien sans encombre le tunnel. Calculer la longueur  $l$  du tunnel vue par un passager du train. Comparer  $l$  et la longueur au repos  $L_0$  du train. Comment se fait-il dans ces conditions que le train puisse traverser le tunnel ?

**2.4)** Pour résoudre ce paradoxe, calculer les coordonnées  $x'_S$  et  $t'_S$  relatives à l'ouverture du volet à la sortie du tunnel telles que les perçoit un passager du train. On commencera par calculer ces coordonnées dans  $\mathcal{R}$  puis on effectuera une transformation spéciale de Lorentz. On exprimera  $x'_S$  et  $t'_S$  en fonction de  $\gamma_e$ ,  $v_e$ ,  $l_0$  et  $c$ . Commenter vos résultats.

**2.5)** Pour quelles valeurs de la vitesse  $v_e$  l'abscisse  $x'_S$  est-elle plus grande que  $L_0$ ? Comparer avec  $v_e^0$ .

**2.6)** Restons dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  du train. Où se situe la sortie du tunnel lorsque l'arrière du train passe au niveau de l'entrée  $O$ ? Comparer avec le résultat obtenu à la question **2.3** et commenter.

### 3) Expérience de Frisch et Smith.

**3.1)** Etablir la relation (II.26) à partir de la loi de décroissance exponentielle (II.23) et de la transformation de Lorentz permettant de passer du référentiel propre  $\mathcal{R}'$  des muons au référentiel  $\mathcal{R}$  de la Terre.

**3.2)** Calculer le facteur  $\gamma_e$  des muons sélectionnés par Frisch et Smith dans leur détecteur. En déduire le nombre de muons attendus au niveau de la mer sachant que la statistique collectée au sommet du mont Washington est de  $563 \pm 10$  muons par heure.

**3.3)** Frisch et Smith mesurent au niveau de la mer une moyenne de  $408 \pm 9$  muons par heure. Quel facteur  $\gamma_e$  convient-il d'utiliser pour expliquer complètement leur résultat?

**3.4)** Sachant que les muons perdent régulièrement de l'énergie en traversant la matière, expliquer pourquoi le facteur  $\gamma_e$  qui décrit le mieux les données est inférieur à celui mesuré au sommet du mont Washington.

### 4) Durée d'un voyage.

Un voyageur va d'un point  $A$  à un point  $B$ , où  $A$  et  $B$  sont deux points de l'axe  $Ox$  d'un référentiel  $\mathcal{R}$  distants de  $L_0$ . Dans  $\mathcal{R}$ , la vitesse du voyageur est constante et égale à  $v_e$ .

**4.1)** Quelle est la durée  $\Delta t$  du voyage pour un observateur lié à  $\mathcal{R}$ ? Quelle est la relation liant  $\Delta t$  à la durée  $\Delta t_0$  du voyage pour le voyageur?

**4.2)** Quelle est la longueur du trajet pour le voyageur? Montrer que l'on retrouve ainsi la contraction des longueurs.

### 5) Expérience de Fizeau.

La figure II.3 schématise l'expérience réalisée par Fizeau en 1851.  $S'$  est l'image de  $S$ , et les fentes  $F_1$  et  $F_2$  sont des fentes de **Young**. Soit  $l$  la longueur de chaque portion de tube traversée. Le tube coudé, fermé par des fenêtres transparentes, contient un liquide d'indice  $n$  qu'une pompe permet d'animer d'une vitesse  $u \ll c$  par rapport au laboratoire.

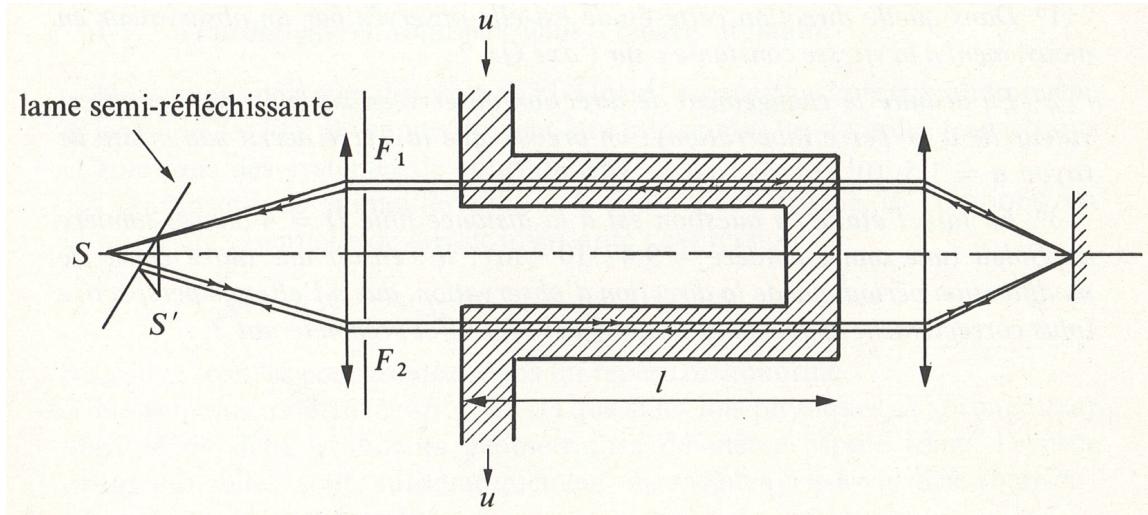


FIGURE II.3 – Schéma du dispositif de Fizeau.

On considérera que le référentiel du laboratoire est galiléen. Par rapport au liquide, la lumière se propage à la vitesse  $c/n$ . On remarquera, sur la figure, que le rayon marqué d'une seule flèche se propage, dans chaque portion du tube, dans le même sens que le liquide, alors que celui marqué de deux flèches se propage en sens inverse.

**5.1)** Calculer la différence  $\Delta t$  des temps de parcours de la lumière sur ces deux trajets entre  $S$  et  $S'$  en adoptant successivement

- (i) la loi classique d'addition des vitesses  $v_{\parallel} = v'_{\parallel} + v_e$ ,
- (ii) la loi relativiste donnée dans la première relation (II.5).

**5.2)** L'ordre d'interférence  $p$  est lié à la longueur d'onde  $\lambda$  de la radiation utilisée et à  $\Delta t$  par

$$p \lambda = c \Delta t . \quad (\text{TD II.2})$$

En déduire le rapport  $p_{\text{relat}}/p_{\text{class}}$ . On prendra pour indice  $n = 1,33$ .

**5.3)** Calculer les ordres d'interférences  $p_{\text{class}}$  et  $p_{\text{relat}}$  en prenant en compte les données de l'expérience de Fizeau, soit  $l = 1,5$  m,  $u = 7$  m/s et  $\lambda = 0,540$  μm. Commentaires ?

## 6) Transformation des accélérations.

A partir des relations (II.5) traduisant la composition des vitesses, établir la composition des accélérations

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{dv'_{\parallel}/dt'}{\gamma_e^3 \left\{ 1 + (v_e v'_{\parallel}/c^2) \right\}^3}, \quad (\text{TD II.3})$$

et

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = \frac{\left\{1 + (v_e v'_{\parallel}/c^2)\right\}(dv'_{\perp}/dt') - \{v_e v'_{\perp}/c^2\}(dv'_{\parallel}/dt')}{\gamma_e^2 \left\{1 + (v_e v'_{\parallel}/c^2)\right\}^3}. \quad (\text{TD II.4})$$

Bon courage !

---

## Chapitre III

### Une approche plus mathématique

Ce chapitre est consacré à certains aspects mathématiques de la relativité restreinte et de la transformation de Lorentz. Nous commencerons par introduire le diagramme de **Brehme** et **Lorentz**. Puis nous montrerons que les transformations spéciales de Lorentz constituent un groupe commutatif. Nous introduirons ensuite l'espace-temps de Minkowski à quatre dimensions et les quadrivecteurs qui le peuplent, associés à un formalisme élégant et efficace. Nous terminerons justement par l'étude des quadrivecteurs vitesse  $U^\mu$  et d'onde  $k^\mu$  qui nous permettront de retrouver instantanément certains résultats du chapitre précédent.

#### 1) Diagramme de Brehme-Lorentz.

##### 1.1) Rotation du plan.

Pour nous échauffer, nous allons décrire la manière dont les coordonnées du point  $M$  appartenant au plan  $(O, x, y)$  se modifient lors d'un changement de coordonnées. Nous pourrions effectuer une rotation **active** en faisant tourner le vecteur  $\mathbf{OM}$  d'un angle  $\theta \geq 0$  dans le sens trigonométrique. Nous effectuerons cependant une rotation **passive** consistant à faire tourner les axes  $Ox$  et  $Oy$  d'un angle  $\theta \geq 0$  dans le sens des aiguilles d'une montre, comme indiqué dans la figure III.1. En passant du système d'axes  $\mathcal{R} \equiv (O, x, y)$  à  $\mathcal{R}' \equiv (O, x', y')$ , nous changeons notre point de vue sur le point  $M$ .

Dans chaque repère, le vecteur  $\mathbf{OM}$  est relié à ses composantes via

$$\mathbf{OM} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y = x' \mathbf{e}'_x + y' \mathbf{e}'_y . \quad (\text{III.1})$$

Les vecteurs de l'ancienne base  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$  s'expriment par rapport aux vecteurs  $\mathbf{e}'_x$  et  $\mathbf{e}'_y$  de la nouvelle base sous la forme

$$\mathbf{e}_x = \cos \theta \mathbf{e}'_x + \sin \theta \mathbf{e}'_y \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_y = -\sin \theta \mathbf{e}'_x + \cos \theta \mathbf{e}'_y , \quad (\text{III.2})$$

si bien que les coordonnées  $x'$  et  $y'$  sont reliées aux coordonnées  $x$  et  $y$  via une égalité que nous mettrons sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbb{R}(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \quad (\text{III.3})$$

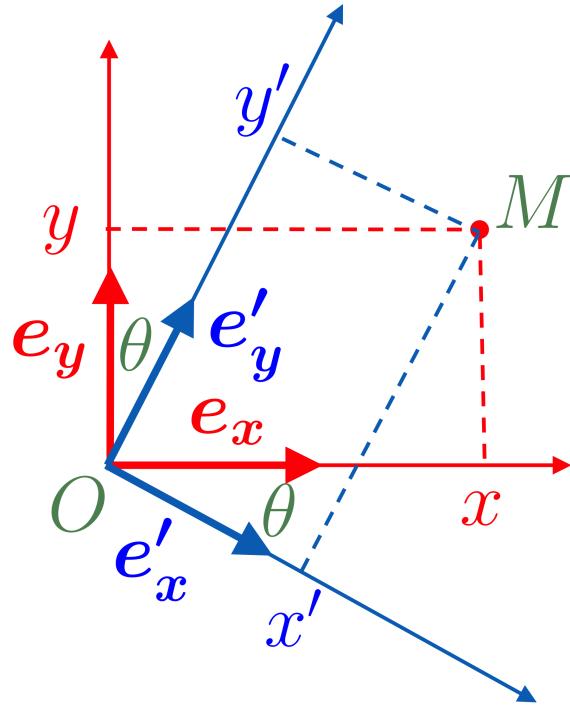


FIGURE III.1 – Rotation du repère  $\mathcal{R} \equiv (O, x, y)$  d'un angle  $\theta$  dans le sens des aiguilles d'une montre permettant de passer au repère  $\mathcal{R}' \equiv (O, x', y')$ . La base  $(e_x, e_y)$  est changée en base  $(e'_x, e'_y)$  et les coordonnées du point  $M$  passent de  $(x, y)$  à  $(x', y')$ .

Le passage des anciennes coordonnées  $x$  et  $y$  aux nouvelles coordonnées  $x'$  et  $y'$  est assuré par la matrice de rotation  $\mathbb{R}(\theta)$ . De même, les coordonnées  $(a_x, a_y)$  d'un vecteur  $\mathbf{a}$  dans le repère  $\mathcal{R}$  sont transformées par passage dans le repère  $\mathcal{R}'$  en doublet  $(a'_x, a'_y)$ . Il en va ainsi également pour le vecteur  $\mathbf{b}$  repéré par  $(b_x, b_y)$  dans  $\mathcal{R}$  et par  $(b'_x, b'_y)$  dans  $\mathcal{R}'$ . Le produit scalaire entre  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  est égal à

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y = \begin{pmatrix} b_x & b_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = [b]^T [a] . \quad (\text{III.4})$$

Il vient alors

$$[b']^T [a'] = [b]^T \mathbb{R}^T(\theta) \mathbb{R}(\theta) [a] . \quad (\text{III.5})$$

Or la matrice de rotation  $\mathbb{R}(\theta)$  vérifie la relation

$$\mathbb{R}^T(\theta) \mathbb{R}(\theta) = \begin{Bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} = \mathbb{I}_2 . \quad (\text{III.6})$$

Quel que soit le repère dans lequel on se place, le produit scalaire s'exprime de la même manière, sous la forme

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y = [b]^T [a] = [b']^T [a'] = a'_x b'_x + a'_y b'_y , \quad (\text{III.7})$$

et est invariant par rotation. Nous retrouverons une propriété analogue avec les transformations de Lorentz.

### 1.2) Représentation graphique de la transformation de Lorentz.

Le diagramme de Brehme-Lorentz permet de représenter les transformations de Lorentz de manière graphique, à l'instar des rotations du plan. Pour construire la figure III.2, il convient tout d'abord de prendre deux axes perpendiculaires ( $O, x', ct$ ) et de les faire tourner d'un angle  $\alpha/2$  dans le sens des aiguilles d'une montre. Puis de répéter l'opération avec les axes ( $O, x, ct'$ ) que l'on fera tourner du même angle  $\alpha/2$  dans le sens trigonométrique cette fois. Les axes  $Ox'$  et  $Ox$  font un angle  $\alpha$  entre eux, de même que les axes  $Oct$  et  $Oct'$ . Remarquons également que les axes  $Ox'$  et  $Oct$  font un angle droit entre eux. Il en va de même pour les axes  $Ox$  et  $Oct'$ . Les coordonnées d'un événement  $E$  sont obtenues par projection perpendiculaire sur chaque axe, comme indiqué dans la figure III.3.

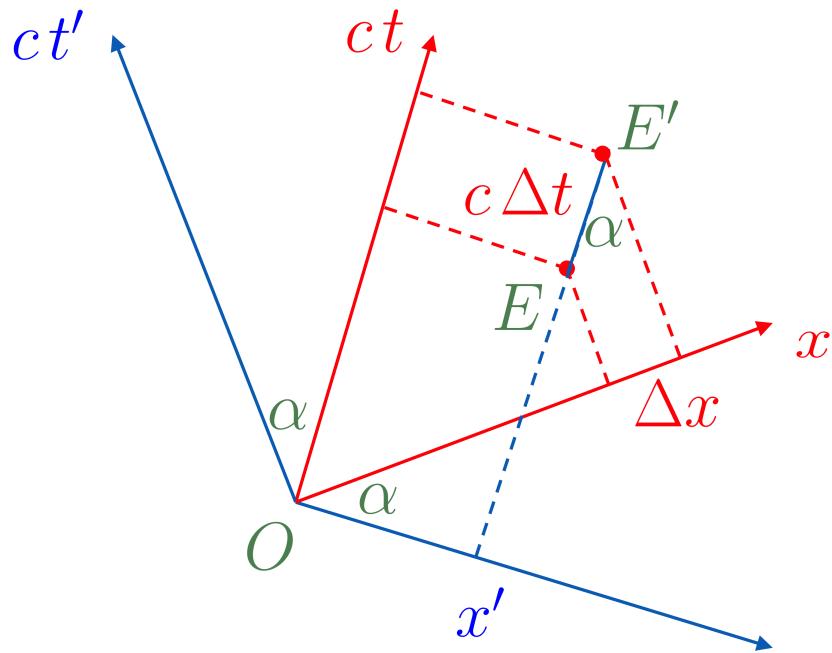


FIGURE III.2 – Diagramme de Brehme-Lorentz permettant de passer du référentiel  $\mathcal{R}$  au référentiel  $\mathcal{R}'$  dans les conditions de la transformation spéciale de Lorentz. La vitesse de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est  $v_e \geq 0$ . Le segment  $EE'$  est vu par un voyageur immobile dans  $\mathcal{R}'$  et situé en  $x'$  comme le passage du laps de temps  $\Delta t'$ . Dans  $\mathcal{R}$ , le même intervalle spatio-temporel  $EE'$  correspond au déplacement du voyageur précédent à la vitesse  $v_e$ .

(i) Commençons par relier l'angle  $\alpha$  à la vitesse  $v_e$  du référentiel  $\mathcal{R}'$ . Un voyageur immobile dans  $\mathcal{R}'$  est assis en  $x'$  et voit s'écouler le laps de temps  $\Delta t'$ . Cet intervalle spatio-temporel correspond au segment de droite  $EE'$  de la figure III.2. Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , les deux événements  $E$  et  $E'$  sont séparés par la distance  $\Delta x$  et par la durée  $\Delta t$ . Pour un observateur

de  $\mathcal{R}$ , le voyageur se déplace à la vitesse  $v_e$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  si bien que

$$v_e = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\text{III.8})$$

Par construction, la longueur du segment  $EE'$ , parallèle à l'axe  $Oct$ , vaut  $c\Delta t$ . Les projections de  $E$  et  $E'$  sur l'axe  $Ox$  sont distantes de  $\Delta x$  et le segment de droite qui les joint fait un angle  $\pi/2 - \alpha$  avec le segment  $EE'$ . Nous pouvons dès lors exprimer  $\alpha$  en fonction de  $v_e$

$$\sin \alpha = \frac{\Delta x}{c\Delta t} = \frac{v_e}{c} \equiv \beta_e. \quad (\text{III.9})$$

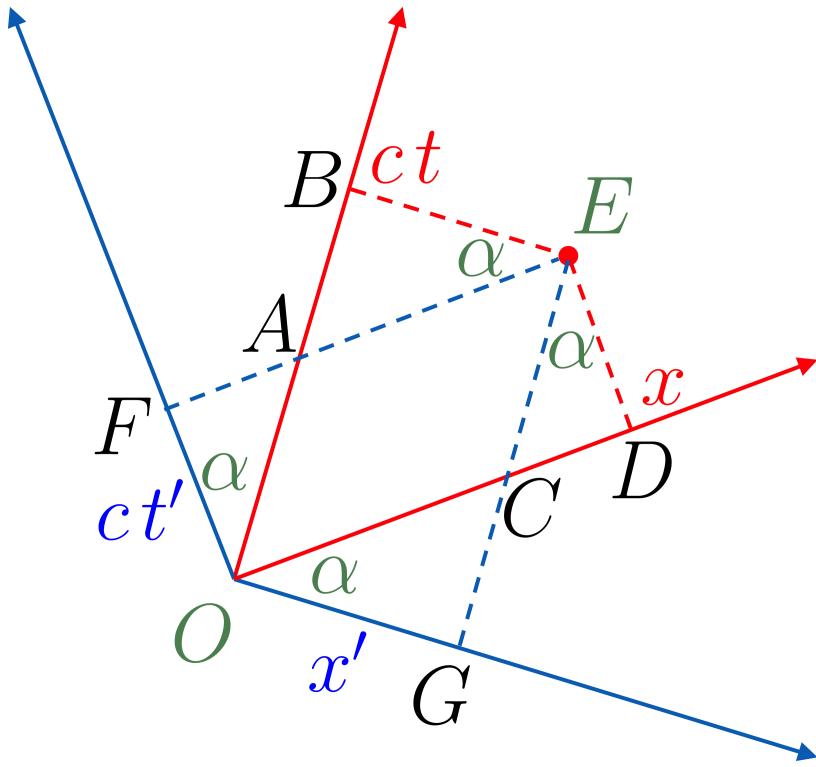


FIGURE III.3 – Diagramme de Brehme-Lorentz permettant de passer du référentiel  $\mathcal{R}$  au référentiel  $\mathcal{R}'$  dans les conditions de la transformation spéciale de Lorentz. La vitesse de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est  $v_e \geq 0$ . Les coordonnées  $x$  et  $ct$  de  $E$  dans  $\mathcal{R}$  s'expriment de manière géométrique simple par rapport aux coordonnées  $x'$  et  $ct'$  vues dans  $\mathcal{R}'$ . Le diagramme de Brehme-Lorentz est une traduction géométrique de la transformation de Lorentz comme discuté dans le texte.

- (ii) La figure III.3 illustre la manière purement géométrique d'exprimer les coordonnées  $x$  et  $ct$  de  $E$  dans  $\mathcal{R}$  par rapport aux coordonnées  $x'$  et  $ct'$  vues dans  $\mathcal{R}'$ . Remarquons tout d'abord que les longueurs  $OB$  et  $OD$  correspondent respectivement aux coordonnées  $ct$

et  $x$ . Elles se décomposent en

$$ct \equiv OB = OA + AB \quad \text{et} \quad x \equiv OD = OC + CD. \quad (\text{III.10})$$

Commençons par la longueur  $OB$ . Remarquons tout d'abord que les triangles  $AOF$  et  $AEB$  sont rectangles, avec  $\widehat{AOF} = \widehat{BEA} = \alpha$ , si bien que

$$\frac{ct'}{OA} = \frac{OF}{OA} = \cos \alpha \quad \text{et} \quad \frac{AB}{x'} = \frac{AB}{BE} = \tan \alpha. \quad (\text{III.11})$$

Il vient alors

$$ct \equiv OB = OA + AB = \frac{ct'}{\cos \alpha} + \tan \alpha \{BE \equiv x'\}. \quad (\text{III.12})$$

Passons ensuite au segment  $OD$  et remarquons de même que les triangles  $GOC$  et  $CED$  sont rectangles, avec  $\widehat{GOC} = \widehat{CED} = \alpha$ . La longueur  $OD$  s'exprime alors comme la somme

$$x \equiv OD = OC + CD = \left\{ \frac{OG}{\cos \alpha} \equiv \frac{x'}{\cos \alpha} \right\} + \tan \alpha \{DE \equiv ct'\}. \quad (\text{III.13})$$

Le passage du référentiel  $\mathcal{R}'$  au référentiel  $\mathcal{R}$  s'accompagne du changement de coordonnées

$$ct = \frac{1}{\cos \alpha} \{ct' + \sin \alpha x'\} \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{\cos \alpha} \{\sin \alpha ct' + x'\}. \quad (\text{III.14})$$

Nous avons montré que  $\sin \alpha = \beta_e \equiv v_e/c$ , où  $v_e$  désigne la vitesse de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$ , si bien que

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \beta_e^2} \equiv \frac{1}{\gamma_e}. \quad (\text{III.15})$$

La transformation des coordonnées devient alors

$$ct = \gamma_e \{ct' + \beta_e x'\} \quad \text{et} \quad x = \gamma_e \{\beta_e ct' + x'\}, \quad (\text{III.16})$$

qui se met également sous la forme

$$t = \frac{t' + v_e x'/c^2}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} \quad \text{et} \quad x = \frac{x' + v_e t'}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}. \quad (\text{III.17})$$

Nous venons de retrouver la transformation de Lorentz étudiée au chapitre I. Inverser les égalités précédentes conduit aux relations (I.22)

$$t' = \frac{t - v_e x/c^2}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} \quad \text{et} \quad x' = \frac{x - v_e t}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}. \quad (\text{III.18})$$

Le diagramme de Brehme-Lorentz est bien une traduction géométrique élégante et simple de la transformation de Lorentz.

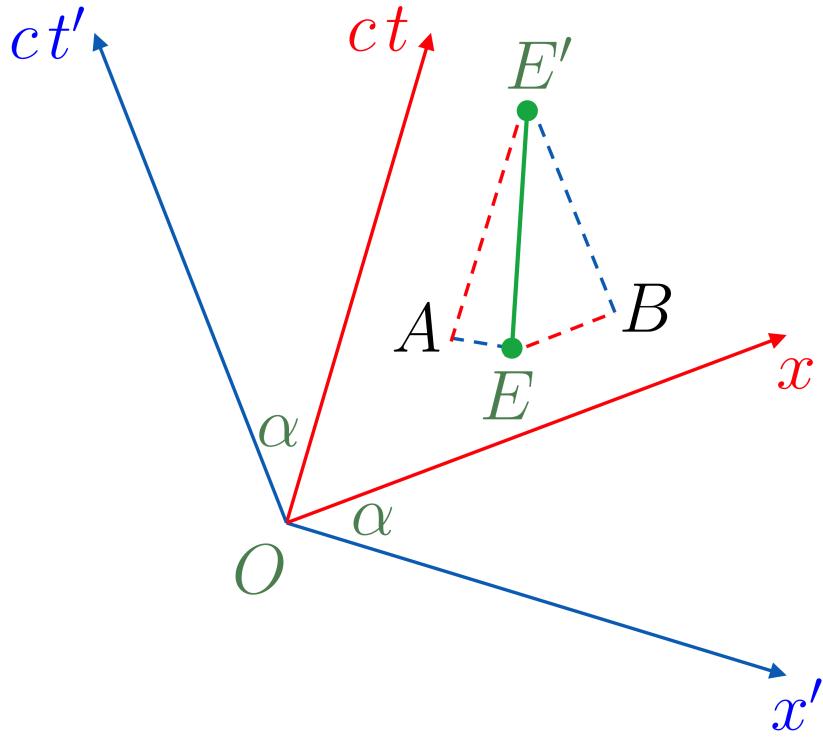


FIGURE III.4 – Diagramme de Brehme-Lorentz permettant de passer du référentiel  $\mathcal{R}$  au référentiel  $\mathcal{R}'$  dans les conditions de la transformation spéciale de Lorentz. La vitesse de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est  $v_e \geq 0$ . L'intervalle spatio temporel  $EE'$  étaie la construction des triangles rectangles  $EAE'$  et  $EBe'$ . Le théorème de Pythagore permet alors de démontrer que l'élément  $\Delta s^2 \equiv c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$  est un invariant relativiste.

(iii) Terminons notre analyse en démontrons de manière géométrique que l'élément  $\Delta s^2$ , que nous avons défini dans le chapitre I par l'expression

$$\Delta s^2 \equiv c^2\Delta t^2 - \Delta x^2, \quad (\text{III.19})$$

est un **invariant relativiste**. Un intervalle spatio-temporel noté  $EE'$  est représenté dans la figure III.4. Il a pour coordonnées  $\Delta x$  et  $c\Delta t$  dans  $\mathcal{R}$ , et  $\Delta x'$  et  $c\Delta t'$  dans  $\mathcal{R}'$ . Nous pouvons construire les deux triangles rectangles  $EAE'$  et  $EBe'$  à partir de ces coordonnées. Les distances  $EB$  et  $AE'$  sont respectivement égales aux valeurs absolues  $|\Delta x|$  et  $|c\Delta t|$ . De même, les distances  $EA$  et  $BE'$  sont égales à  $|\Delta x'|$  et  $|c\Delta t'|$ . Les triangles étant rectangles, il vient

$$EE'^2 = EA^2 + AE'^2 = EB^2 + BE'^2, \quad (\text{III.20})$$

soit encore

$$\Delta x'^2 + (c\Delta t)^2 = \Delta x^2 + (c\Delta t')^2. \quad (\text{III.21})$$

Nous obtenons alors l'identité

$$\{\Delta s^2 \equiv c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2\} = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2. \quad (\text{III.22})$$

Nous venons donc de démontrer que l'élément  $\Delta s^2$  est invariant par changement de référentiel galiléen. Il se comporte vis à vis des transformations de Lorentz comme le produit scalaire  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  vis à vis des rotations du plan.

## 2) Le groupe des transformations spéciales de Lorentz.

### 2.1) Forme matricielle de la transformation de Lorentz.

Considérons les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  dans les conditions de la transformation spéciale de Lorentz, avec  $v_e$  la vitesse de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . La transformation de Lorentz (I.22) peut se mettre sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_e & \beta_e \gamma_e \\ \beta_e \gamma_e & \gamma_e \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad \text{où } \beta_e = \frac{v_e}{c} \text{ et } \gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}. \quad (\text{III.23})$$

Les coordonnées  $y = y'$  et  $z = z'$  étant inchangées, nous ne nous en préoccupons plus et nous concentrerons sur les couples  $(ct, x)$  et  $(ct', x')$ . Remarquons alors que

$$\gamma_e^2 - \beta_e^2 \gamma_e^2 = \frac{1 - \beta_e^2}{1 + \beta_e^2} \equiv 1. \quad (\text{III.24})$$

Nous pouvons dès lors paramétriser la vitesse  $v_e$  au moyen de l'argument  $\varphi$  tel que

$$\gamma_e \equiv \cosh \varphi \text{ et } \beta_e \gamma_e = \sinh \varphi \text{ puisque } \cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi \equiv 1. \quad (\text{III.25})$$

La vitesse  $v_e$  et l'argument  $\varphi$  sont alors reliés par

$$\frac{v_e}{c} \equiv \beta_e = \tanh \varphi. \quad (\text{III.26})$$

La transformation de Lorentz se met désormais sous la forme

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \equiv \mathbb{M}(\varphi) \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}. \quad (\text{III.27})$$

Le passage de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$  s'effectue par l'intermédiaire de la matrice de Lorentz

$$\mathbb{M}(\varphi) = \begin{Bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \tanh \varphi = \beta_e. \quad (\text{III.28})$$

### 2.2) Structure de groupe.

Nous montrerons en TD que l'ensemble des transformations spéciales de Lorentz constitue un groupe abélien. Nous montrerons que le produit de deux transformations de Lorentz est

également une transformation de Lorentz. Ce produit muni l'ensemble des transformations de Lorentz d'une structure de groupe. Nous réobtiendrons finalement la loi d'addition des vitesses démontrée dans le chapitre **II**.

**(i)** Considérons tout d'abord les référentiels  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  dans les conditions de la transformation spéciale de Lorentz. Ces référentiels se déplacent les uns par rapport aux autres le long de l'axe  $Ox \equiv O'x' \equiv O''x''$ . Le passage de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$  s'effectue grâce à la matrice  $\mathbb{M}(\varphi)$  où  $\tanh \varphi = v_e/c$  et  $v_e$  est la vitesse de  $\mathcal{R}'$  vue de  $\mathcal{R}$ . De même, le passage de  $\mathcal{R}''$  à  $\mathcal{R}'$  s'effectue via la matrice  $\mathbb{M}(\varphi')$  avec  $\tanh \varphi' = v'_e/c$  et où  $v'_e$  est la vitesse de  $\mathcal{R}''$  vue de  $\mathcal{R}'$ . Le passage direct de  $\mathcal{R}''$  à  $\mathcal{R}$  est alors décrit par l'identité

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \mathbb{M}(\varphi) \left\{ \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \mathbb{M}(\varphi') \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} \right\} \equiv \mathbb{M}(\varphi'') \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}, \quad (\text{III.29})$$

si bien que la matrice correspondante est le produit matriciel  $\mathbb{M}(\varphi'') = \mathbb{M}(\varphi)\mathbb{M}(\varphi')$ . Vous démontrerez en TD que

$$\varphi'' = \varphi + \varphi', \quad (\text{III.30})$$

et que

$$\mathbb{M}(\varphi)\mathbb{M}(\varphi') = \mathbb{M}(\varphi + \varphi'). \quad (\text{III.31})$$

**(ii)** La combinaison de deux transformations spéciales de Lorentz s'effectue donc grâce au produit des matrices correspondantes. Vous montrerez en TD que ce produit est **associatif** et possède un **élément neutre**. Toute transformation de Lorentz est également associée à une transformation **symétrique** qui, combinée avec la transformation initiale, ramène au référentiel de départ. Finalement, le produit est commutatif. Ces propriétés confèrent à l'ensemble des transformations spéciales de Lorentz une structure de groupe commutatif.

**(iii)** La relation (III.30) permet d'exprimer la vitesse  $v''_e$  de  $\mathcal{R}''$  vue de  $\mathcal{R}$  sous la forme

$$\frac{v''_e}{c} = \tanh \varphi'', \quad (\text{III.32})$$

qui conduit, comme il sera vu en TD, à la formule d'addition des vitesses

$$v''_e = \frac{v'_e + v_e}{1 + v_e v'_e / c^2} \iff v_{\parallel} = \frac{v'_{\parallel} + v_e}{1 + (v_e v'_{\parallel} / c^2)} \text{ où } v_{\parallel} \equiv v''_e \text{ et } v'_{\parallel} \equiv v'_e. \quad (\text{III.33})$$

### 3) L'espace-temps de Minkowski.

L'espace et le temps sont ici fusionnés pour constituer un espace vectoriel à quatre dimensions comprenant les trois dimensions usuelles dévolues à l'espace physique auxquelles se rajoute une dimension dédiée au temps.

### 3.1) Notion de quadrivecteur.

Dans l'espace-temps de Minkowski, chaque événement  $E$  est décrit par ses coordonnées de temps  $ct$  et d'espace  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$  dès lors qu'une origine  $O$  et une base sont choisies. Cette dernière est liée au choix du référentiel  $\mathcal{R}$  dans lequel les coordonnées sont exprimées. La base est formée des quatre vecteurs  $\tilde{e}_0$ ,  $\tilde{e}_1 \equiv \mathbf{e}_x$ ,  $\tilde{e}_2 \equiv \mathbf{e}_y$  et  $\tilde{e}_3 \equiv \mathbf{e}_z$  si bien que

$$\widetilde{OE} = ct \tilde{e}_0 + x \tilde{e}_1 + y \tilde{e}_2 + z \tilde{e}_3 = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \tilde{e}_\mu, \quad (\text{III.34})$$

où les coordonnées  $x^\mu$  sont identifiées à

$$x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad \text{et} \quad x^3 \equiv z. \quad (\text{III.35})$$

Ainsi l'intervalle spatio-temporel  $OE$  est décrit par les coordonnées  $x^\mu$  telles que

$$x^\mu = \{x^0 \equiv ct, \mathbf{r} \equiv x^i \equiv (x, y, z)\}. \quad (\text{III.36})$$

Les indices grecs vont de 0 à 3 alors que les indices latins sont réservés à l'espace physique et courant de 1 à 3. On pourra adopter la **notation d'Einstein** qui consiste à gommer le signe somme  $\Sigma$  dans la relation (III.34) et à considérer que deux indices répétés sont sommés. On peut alors écrire

$$\widetilde{OE} = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \tilde{e}_\mu \equiv x^\mu \tilde{e}_\mu. \quad (\text{III.37})$$

**Notion de quadrivecteur** – Les coordonnées  $x^\mu$  de  $E$  vues dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  se transforment lorsqu'un changement de référentiel a lieu. Dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$ , l'événement  $E$  est repéré par les coordonnées  $x'^\mu$ . La relation entre  $x'^\mu$  et  $x^\mu$  est donnée par la transformation de Lorentz. Nous ne nous préoccupons ici que des transformations spéciales de Lorentz si bien que lors du passage de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$ , il vient

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{M}(\varphi) \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } x^2 = x'^2 \text{ et } x^3 = x'^3. \quad (\text{III.38})$$

Le quadruplet de nombre  $(a^0, a^1, a^2, a^3)$ , que nous regrouperons sous la notation  $a^\mu$ , permet de définir le **quadrivecteur**  $\tilde{a} \equiv a^\mu \tilde{e}_\mu$  à condition que ses coordonnées  $a^\mu$  se transforment lors d'une transformation spéciale  $\ddagger$  de Lorentz comme les coordonnées  $x^\mu$  de l'événement  $E$ . Donc, si le quadrivecteur  $\tilde{a}$  est vu dans le référentiel  $\mathcal{R}$  avec les coordonnées  $a^\mu$ , et dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  avec les coordonnées  $a'^\mu$ , alors

$$\begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} a'^0 \\ a'^1 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{M}(\varphi) \begin{pmatrix} a'^0 \\ a'^1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a^2 = a'^2 \text{ et } a^3 = a'^3. \quad (\text{III.39})$$

---

$\ddagger$ . En fait, la transformation de Lorentz est quelconque, décrivant aussi bien une rotation d'espace qu'un changement de référentiel opéré dans n'importe quelle direction.

### 3.2) Produit scalaire de Minkowski.

L'espace-temps de Minkowski est muni d'un produit scalaire qui généralise le produit scalaire  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  de deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de l'espace physique. Une fois la base  $\tilde{e}_\mu$  choisie, le **produit scalaire de Minkowski** est défini par

$$\tilde{e}_\mu \cdot \tilde{e}_\nu = 0 \text{ sauf pour } \tilde{e}_0 \cdot \tilde{e}_0 = 1 \text{ et } \tilde{e}_1 \cdot \tilde{e}_1 = \tilde{e}_2 \cdot \tilde{e}_2 = \tilde{e}_3 \cdot \tilde{e}_3 = -1. \quad (\text{III.40})$$

Si l'on définit la matrice  $\eta$  comme

$$\eta \equiv \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.41})$$

nous pouvons identifier le produit de Minkowski  $\tilde{e}_\mu \cdot \tilde{e}_\nu$  avec l'élément  $\eta_{\mu\nu}$  de la matrice  $\eta$  de sorte que, pour deux quadrivecteurs quelconques  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$ , il vient \*

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = (a^\mu \tilde{e}_\mu) \cdot (b^\nu \tilde{e}_\nu) = a^\mu b^\nu \tilde{e}_\mu \cdot \tilde{e}_\nu = a^\mu b^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{III.42})$$

Le produit scalaire de Minkowski se met également sous la forme

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (\text{III.43})$$

Il généralise le produit scalaire usuel de l'espace physique à trois dimensions en l'étendant à l'espace-temps de Minkowski à quatre dimensions.

Considérons un intervalle spatio-temporel  $EE'$  décrit dans le référentiel  $\mathcal{R}$  par ses coordonnées  $\Delta x^\mu \equiv (\Delta x^0 = c\Delta t, \Delta x^1 = \Delta x, \Delta x^2 = \Delta y, \Delta x^3 = \Delta z)$ . La norme de Minkowski de l'intervalle  $EE'$  est égale à

$$\widetilde{EE'} \cdot \widetilde{EE'} = \Delta x^\mu \Delta x^\nu \eta_{\mu\nu} = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2, \quad (\text{III.44})$$

soit encore

$$\widetilde{EE'} \cdot \widetilde{EE'} = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 \equiv \Delta s^2. \quad (\text{III.45})$$

Nous venons de retrouver l'invariant  $\Delta s^2$  défini par la relation (I.23) du chapitre I, et de montrer que

$$\Delta s^2 = \Delta x^\mu \Delta x^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{III.46})$$

Lorsqu'il est positif, l'invariant  $\Delta s^2$  permet de définir l'intervalle de temps propre  $\Delta\tau$  via l'identité  $\Delta s^2 \equiv c^2 \Delta\tau^2$ . Par extension, nous noterons parfois  $\Delta s^2$  par  $c^2 \Delta\tau^2$  et interpréterons  $\Delta\tau$  comme l'intervalle de temps propre lorsque  $\Delta s^2 \geq 0$ .

---

\*. Nous utilisons désormais les notations d'Einstein, de sorte que dans les formules (III.42) et (III.44), les indices  $\mu$  et  $\nu$  sont sommés chacun de 0 à 3.

Finalement, le produit scalaire de Minkowski des quadrivecteurs  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$  se met encore sous la forme

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = a^\mu (\eta_{\mu\nu} b^\nu) \equiv a^\mu b_\mu \text{ à condition de poser } b_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} b^\nu. \quad (\text{III.47})$$

De même

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = b^\nu (\eta_{\mu\nu} a^\mu \equiv \eta_{\nu\mu} a^\mu) \equiv b^\nu a_\nu \text{ puisque } \eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}. \quad (\text{III.48})$$

Dans la dernière expression, on fait descendre l'indice  $\mu$  de  $a^\mu$  grâce à la matrice symétrique  $\eta_{\nu\mu}$  et l'on obtient les coordonnées  $a_\nu$ . Un quadrivecteur  $\tilde{a}$  est ainsi décrit par ses composantes **contravariantes  $a^\mu$**  auxquelles correspondent les coordonnées **covariantes  $a_\mu$** . Celles-ci sont explicitement données par

$$a_\nu \equiv \{a_0 = \eta_{00}a^0 = a^0, a_1 = \eta_{11}a^1 = -a^1, a_2 = \eta_{22}a^2 = -a^2, a_3 = \eta_{33}a^3 = -a^3\}. \quad (\text{III.49})$$

### 3.3) Invariance du produit scalaire de Minkowski.

Le produit scalaire de Minkowski des deux quadrivecteurs  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$  est égal à

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (\text{III.50})$$

Une rotation de l'espace physique à trois dimensions conserve le produit scalaire usuel  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ . Elle conserve aussi le produit scalaire de Minkowski. Mais qu'en est-il d'une transformation de Lorentz ?

Nous nous restreindrons ici aux transformations spéciales de Lorentz pour lesquelles les coordonnées des quadrivecteurs  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$  suivant les axes  $Oy \equiv O'y'$  et  $Oz \equiv O'z'$  sont inchangées. Lors du changement de référentiel de  $\mathcal{R}'$  vers  $\mathcal{R}$ , nous pouvons écrire

$$-a^2 b^2 - a^3 b^3 = -a'^2 b'^2 - a'^3 b'^3. \quad (\text{III.51})$$

Pour les autres coordonnées, un calcul direct est nécessaire. Afin de montrer l'invariance de Lorentz du produit  $\tilde{a} \cdot \tilde{b}$ , nous allons démontrer que

$$a^0 b^0 - a^1 b^1 = a'^0 b'^0 - a'^1 b'^1. \quad (\text{III.52})$$

Le premier terme de l'expression précédente se met sous la forme matricielle

$$b^0 a^0 - b^1 a^1 = \begin{pmatrix} b^0 & b^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ -a^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^0 & b^1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix} = [\mathbf{b}]^T \boldsymbol{\eta} [\mathbf{a}], \quad (\text{III.53})$$

où la matrice  $\boldsymbol{\eta}$  définie en (III.41) est réduite ici aux axes  $Oct \equiv O'ct'$  et  $Ox \equiv O'x'$  de sorte que

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Bmatrix}. \quad (\text{III.54})$$

Les matrices  $[a]$  et  $[b]$  sont définies de manière évidente par

$$[a] = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [b] = \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.55})$$

Le changement de référentiel de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$  se décrit par les relations matricielles

$$\begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} a'^0 \\ a'^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} b'^0 \\ b'^1 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.56})$$

soit encore, en utilisant la définition (III.28) de la matrice  $\mathbb{M}(\varphi)$

$$[a] = \mathbb{M}(\varphi) [a'] \quad \text{et} \quad [b] = \mathbb{M}(\varphi) [b']. \quad (\text{III.57})$$

Nous obtenons alors

$$a^0 b^0 - a^1 b^1 = [b]^T \eta [a] = [b']^T \{\mathbb{M}(\varphi)\}^T \eta \mathbb{M}(\varphi) [a'] = [b']^T \eta [a'] = a'^0 b'^0 - a'^1 b'^1, \quad (\text{III.58})$$

puisque

$$\{\mathbb{M}(\varphi)\}^T \eta \mathbb{M}(\varphi) = \begin{Bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & -\cosh \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Bmatrix} = \eta. \quad (\text{III.59})$$

### 3.4) Une nouvelle définition des transformations de Lorentz.

Fort des enseignements précédents, nous sommes prêts à redéfinir les transformations de Lorentz comme **les changements de coordonnées qui laissent invariant le produit scalaire de Minkowski**. Ceux-ci peuvent être des rotations d'axes ou bien permettre le passage d'un référentiel à un autre. Dans le premier cas, le produit scalaire usuel  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  est bien conservé et, à fortiori, le produit de Minkowski  $\tilde{a} \cdot \tilde{b}$  également.

Dans le second cas, concentrons-nous sur les transformations spéciales permettant le passage entre les référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  glissant l'un par rapport à l'autre le long de leur axe commun  $Ox \equiv O'x'$ . La vitesse de  $\mathcal{R}'$  vue de  $\mathcal{R}$  est notée  $v_e$ . Considérons les deux quadrivecteurs  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$  précédents et concentrons-nous sur leurs composantes  $(a^0, a^1)$  et  $(b^0, b^1)$  suivant les axes  $Ox$  et  $Ox$ . Nous supposerons que les autres composantes ne sont pas affectées par le changement de référentiel. La matrice la plus générale susceptible de décrire le passage de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$  se met sous la forme

$$\mathbb{X} = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix} \quad \text{si bien que} \quad [a] = \mathbb{X} [a'] \quad \text{et} \quad [b] = \mathbb{X} [b']. \quad (\text{III.60})$$

Notre nouvelle définition de la transformation de Lorentz stipule que le produit scalaire de Minkowski  $\tilde{a} \cdot \tilde{b}$  est invariant lors du passage de  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}$ . La matrice  $\mathbb{X}$  doit alors vérifier l'égalité

$$\mathbb{X}^T \eta \mathbb{X} = \eta. \quad (\text{III.61})$$

Nous démontrerons en TD que la relation précédente, complétée par l'exigence que le déterminant de  $\mathbb{X}$  soit égal à 1, conduit nécessairement à la matrice

$$\mathbb{X} = \begin{Bmatrix} a & b \\ b & a \end{Bmatrix} \quad \text{avec la condition } a^2 - b^2 = 1. \quad (\text{III.62})$$

Les paramètres  $a$  et  $b$  vérifient bien la relation habituelle qu'entretiennent entre eux les cosinus et sinus hyperboliques d'un argument  $\varphi$  quelconque. De surcroît, les rapports  $b/a$  et  $v_e/c$  sont égaux. La matrice de passage  $\mathbb{X}$  se met finalement sous la forme usuelle

$$\mathbb{X} = \begin{Bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{Bmatrix} \equiv \mathbb{M}(\varphi) \quad \text{où} \quad \tanh \varphi = \beta_e. \quad (\text{III.63})$$

L'exercice précédent se généralise aux changements quelconques entre référentiels galiléens. Le **groupe de Lorentz** est l'ensemble des matrices  $\mathbb{X}$  à quatre dimensions<sup>†</sup> définies par la relation (III.61).

## 4) Le quadrivecteur vitesse.

### 4.1) Définition.

En mécanique classique, le vecteur vitesse est la dérivée par rapport au temps  $t$  du vecteur position  $\mathbf{r}$  de sorte que

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \equiv (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3). \quad (\text{III.64})$$

Cette définition est toujours valide en relativité restreinte. Nous pouvons également définir de manière analogue un **quadrivecteur s'apparentant à la vitesse** à partir de la dérivée, par rapport à une quantité se comportant comme un temps, de la position  $x^\mu$  dans l'espace-temps d'un point matériel se déplaçant. Nous savons que, par définition,  $x^\mu$  et sa variation infinitésimale  $dx^\mu$  sont des quadrivecteurs. La quantité par rapport à laquelle les coordonnées  $x^\mu$  sont dérivées doit être un invariant de Lorentz. Le seul que nous connaissons est l'élément

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} = c^2 dt^2 - d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \equiv c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (\text{III.65})$$

Nous pouvons exprimer  $ds^2$  en fonction de la vitesse  $\mathbf{v}$  avec

$$ds^2 = dt^2 \{c^2 - \mathbf{v}^2\} \geq 0. \quad (\text{III.66})$$

La vitesse  $\mathbf{v}$  étant inférieure ou égale à  $c$ , l'élément  $ds^2$  est positif ou nul. Nous pouvons alors définir l'élément de temps propre associé  $d\tau$  par

$$d\tau^2 \equiv \frac{ds^2}{c^2} = dt^2 \left\{ 1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right\}, \quad (\text{III.67})$$

---

<sup>†</sup>. Une matrice  $4 \times 4$  possède quatre colonnes, quatre lignes et donc 16 éléments.

ou encore

$$dt = \gamma(\mathbf{v}) d\tau \quad \text{avec} \quad \gamma(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}. \quad (\text{III.68})$$

Le **quadrivecteur vitesse  $\mathbf{U}^\mu$**  est alors défini comme

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv \left\{ \frac{cdt}{d\tau}, \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right\} \equiv \frac{dt}{d\tau} \left\{ c, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\} \equiv \gamma(\mathbf{v}) \{c, \mathbf{v}\}. \quad (\text{III.69})$$

#### 4.2) Transformation des coordonnées du quadrivecteur vitesse.

Considérons les référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  dans les conditions de la transformation spéciale de Lorentz. Un point matériel se déplace. Son quadrivecteur vitesse est décrit par les composantes  $U^\mu$  (dans  $\mathcal{R}$ ) et  $U'^\mu$  (dans  $\mathcal{R}'$ ) que nous aimeraisons relier entre elles. Pour alléger les calculs et sans nuire à la généralité de nos conclusions, nous supposerons que les composantes  $U^3$  et  $U'^3$  suivant les axes  $Oz \parallel O'z'$  sont nulles si bien que

$$U^\mu \equiv \gamma(\mathbf{v}) \{c, v_x \equiv v_{||}, v_y \equiv v_\perp\} \quad \text{dans } \mathcal{R} \quad (\text{III.70})$$

et

$$U'^\mu \equiv \gamma(\mathbf{v}') \{c, v'_x \equiv v'_{||}, v'_y \equiv v'_\perp\} \quad \text{dans } \mathcal{R}'. \quad (\text{III.71})$$

Nous noterons  $\gamma \equiv \gamma(\mathbf{v})$  et  $\gamma' = \gamma(\mathbf{v}')$ . Par définition de la notion de quadrivecteur, les composantes  $U^\mu$  et  $U'^\mu$  sont reliées entre elles par la transformation spéciale de Lorentz

$$\begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U'^0 \\ U'^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U^2 = U'^2. \quad (\text{III.72})$$

La dernière égalité se met immédiatement sous la forme

$$\gamma v_\perp \equiv \gamma v_y = U^2 = U'^2 = \gamma' v'_y \equiv \gamma' v'_\perp, \quad (\text{III.73})$$

alors que la relation matricielle conduit à

$$\gamma = \gamma_e \gamma' \left\{ 1 + \frac{v_e v'_{||}}{c^2} \right\} \quad \text{et} \quad v_{||} = \frac{\gamma_e \gamma'}{\gamma} \{v_e + v'_{||}\}. \quad (\text{III.74})$$

La relation entre  $\gamma$ ,  $\gamma'$  et  $\gamma_e$  nous conduit immédiatement à exprimer les composantes  $v_{||}$  et  $v_\perp$  de  $\mathcal{R}$  par rapport aux coordonnées  $v'_{||}$  et  $v'_\perp$  de  $\mathcal{R}'$

$$v_{||} = \frac{v_e + v'_{||}}{1 + v_e v'_{||}/c^2} \quad \text{et} \quad v_\perp = \frac{v'_\perp \sqrt{1 - \beta_e^2}}{1 + (v_e v'_{||}/c^2)}. \quad (\text{III.75})$$

Nous venons de retrouver les relations (II.5).

## 5) Le quadrivecteur d'onde.

### 5.1) Définition.

Dans le cours d'introduction aux ondes, nous nous sommes intéressés à la propagation de signaux de différentes natures<sup>‡</sup> le long d'un axe  $Ox$  à la vitesse  $V$ . Si la perturbation est sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , l'onde se propageant vers les  $x$  croissants se met sous la forme

$$s(t, x) = s_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) + \psi\right). \quad (\text{III.76})$$

Un redéfinition de l'origine du temps permet de se débarrasser de la phase  $\psi$ . En introduisant le vecteur d'onde  $k \equiv \omega/V$ , il vient alors

$$s(t, x) = s_0 \cos(\omega t - k x). \quad (\text{III.77})$$

Plus généralement, et quelle que soit la relation de dispersion  $k(\omega)$  liant le vecteur d'onde  $k$  à la pulsation  $\omega$ , une onde  $s$  se propageant dans la direction définie par le vecteur unitaire  $e$  se met sous la forme

$$s(t, x) = s_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{où} \quad \mathbf{k} = k e. \quad (\text{III.78})$$

La phase  $\varphi \equiv \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  contrôle l'état de l'onde. Celle-ci est à son maximum quand  $\varphi \equiv 0 [2\pi]$ , à son minimum pour  $\varphi \equiv \pi [2\pi]$  et nulle quand  $\varphi \equiv \pi/2 [\pi]$ . Or l'état d'une onde ne dépend pas du référentiel dans lequel elle est observée. Si, dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , un surfeur se tient sur la crête d'une vague en un endroit et à un instant donnés, il en va de même dans tous les autres référentiels galiléens  $\mathcal{R}'$ . Le surfeur est toujours vu au sommet de la même vague. L'événement n'a pas changé, même s'il est décrit différemment dans  $\mathcal{R}$  et dans  $\mathcal{R}'$ . La phase  $\varphi$  est donc un invariant relativiste. Cette phase se met sous la forme du produit scalaire de Minkowski entre le quadrivecteur position  $x^\mu$  et le **quadrivecteur d'onde  $k^\mu$**  défini par

$$\tilde{k} \equiv k^\mu \equiv \left\{ k^0 = \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) \right\}. \quad (\text{III.79})$$

Nous remarquons en effet que

$$\tilde{k} \cdot \tilde{x} = k^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu} = k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \equiv \varphi. \quad (\text{III.80})$$

La direction de propagation  $e$  et la pulsation  $\omega$  de l'onde dépendent du référentiel galiléen dans lequel elles sont mesurées.

<sup>‡</sup>. Ondes transverses le long d'une corde vibrante, ondes longitudinales dans le cas du son et ondes électromagnétiques.

## 5.2) Aberration et effet Doppler.

Considérons une onde lumineuse. Dans tous les référentiels galiléens, elle se propage à la vitesse de la lumière  $c$  de sorte que, dans  $\mathcal{R}$  par exemple, il vient

$$c \equiv V = \frac{\omega}{k} \quad \text{où} \quad k = \|\mathbf{k}\|. \quad (\text{III.81})$$

Supposons que l'onde se propage parallèlement au plan  $(O, x, y)$ . La composante  $k^3 \equiv k_z$  du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  suivant l'axe  $Oz$  est nulle. Le quadrivecteur d'onde  $\tilde{k}$  a alors pour coordonnées

$$k^\mu \equiv \left\{ k^0 = \frac{\omega}{c}, k^1 = k_x = k_{\parallel}, k^2 = k_y = k_{\perp} \right\} \text{ dans } \mathcal{R}. \quad (\text{III.82})$$

Dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$ , en translation uniforme à la vitesse  $v_e$  par rapport à  $\mathcal{R}$  le long de leur axe commun  $Ox \parallel O'x'$ , ces coordonnées deviennent

$$k'^\mu \equiv \left\{ k'^0 = \frac{\omega'}{c}, k'^1 = k'_x = k'_{\parallel}, k'^2 = k'_y = k'_{\perp} \right\}. \quad (\text{III.83})$$

Les coordonnées  $k^\mu$  et  $k'^\mu$  étant les composantes d'un quadrivecteur, elles sont reliées par la transformation spéciale de Lorentz

$$\begin{pmatrix} k'^0 \\ k'^1 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} k^0 \\ k^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k'^2 = k^2. \quad (\text{III.84})$$

Nous démontrerons alors en TD les propriétés suivantes.

**(i) Relation de dispersion** – Si dans  $\mathcal{R}$ , la pulsation  $\omega$  et le module  $k$  du vecteur d'onde sont reliés par l'équation de dispersion (III.81), il en va de même dans  $\mathcal{R}'$ , où  $\omega' = ck'$ .

**(ii) Aberration** – Dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , une onde plane lumineuse se propage dans la direction du vecteur unitaire  $\mathbf{e}$ , dont les composantes non-nulles sont  $e_x = -\cos \theta$  et  $e_y = -\sin \theta$ . L'onde provient d'une source lointaine dont la direction fait l'angle  $\theta$  avec l'axe  $Ox$ . Dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$ , la source est alors vue sous l'angle  $\theta'$  tel que

$$\tan \theta' = \left\{ \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \beta_e} \right\} \sqrt{1 - \beta_e^2}. \quad (\text{III.85})$$

**(iii) Effet Doppler** – En vertu de la transformation spéciale de Lorentz (III.84), les pulsations  $\omega$  et  $\omega'$  de l'onde plane précédente sont reliées par

$$\omega = \omega' \left\{ \frac{\sqrt{1 - \beta_e^2}}{1 + \beta_e \cos \theta} \right\}. \quad (\text{III.86})$$

Il en va de même pour les fréquences  $\nu = \omega/2\pi$  et  $\nu' = \omega'/2\pi$ . Si la source qui émet l'onde est immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , la fréquence  $\nu'$  peut être identifiée à la fréquence propre  $\nu_0$  et nous retrouvons<sup>§</sup> la relation (II.47) de l'effet Doppler relativiste.

---

§. Le vecteur unitaire  $\mathbf{e}$  qui porte le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est l'**opposé** du vecteur  $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$  du chapitre III.

## TD III

### Quelques aspects formels de la relativité restreinte

**1)** Le groupe des transformations spéciales de Lorentz.

Cet exercice vous propose de montrer que l'ensemble des **transformations spéciales de Lorentz** constitue un groupe abélien. Tous les référentiels galiléens considérés par la suite glissent les uns par rapport aux autres le long de l'axe  $Ox$ .

**1.1)** Commencez par démontrer les égalités

$$\cosh(a + b) = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b), \quad (\text{TD III.1})$$

$$\sinh(a + b) = \sinh(a) \cosh(b) + \cosh(a) \sinh(b), \quad (\text{TD III.2})$$

$$\tanh(a + b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a) \tanh(b)}. \quad (\text{TD III.3})$$

**1.2)** On considère trois référentiels galiléens  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  se déplaçant les uns par rapport aux autres le long de l'axe  $Ox \equiv O'x' \equiv O''x''$ . Le passage de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$  s'effectue grâce à la matrice  $\mathbb{M}(\varphi)$  où  $\tanh \varphi = v_e/c$  et  $v_e$  est la vitesse de  $\mathcal{R}'$  vue de  $\mathcal{R}$ . De même, le passage de  $\mathcal{R}''$  à  $\mathcal{R}'$  s'effectue via la matrice  $\mathbb{M}(\varphi')$  avec  $\tanh \varphi' = v'_e/c$ , où  $v'_e$  est la vitesse de  $\mathcal{R}''$  vue de  $\mathcal{R}'$ . Le passage direct de  $\mathcal{R}''$  à  $\mathcal{R}$  est alors décrit par l'identité

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \mathbb{M}(\varphi) \left\{ \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \mathbb{M}(\varphi') \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} \right\} \equiv \mathbb{M}(\varphi'') \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}, \quad (\text{TD III.4})$$

si bien que la matrice correspondante est le produit matriciel  $\mathbb{M}(\varphi'') = \mathbb{M}(\varphi)\mathbb{M}(\varphi')$ . En écrivant explicitement les matrices  $\mathbb{M}(\varphi)$  et  $\mathbb{M}(\varphi')$  en fonction de leurs arguments  $\varphi$  et  $\varphi'$  et en effectuant directement le produit de ces matrices, vous démontrez que la matrice résultante  $\mathbb{M}(\varphi'')$  est égale à

$$\mathbb{M}(\varphi'') \equiv \mathbb{M}(\varphi)\mathbb{M}(\varphi') = \mathbb{M}(\varphi + \varphi'), \quad (\text{TD III.5})$$

si bien que  $\varphi'' = \varphi + \varphi'$ . Vous pourrez utiliser avec profit les relations (TD III.1) et (TD III.2)

**1.3)** Nous nous intéressons ici à la structure de groupe commutatif que le produit matriciel (TD III.5) confère à l'ensemble des transformations spéciales de Lorentz. Vous montrerez que ce produit possède les quatre propriétés suivantes.

**(i) Le produit est associatif** – Quelles que soient les transformations de Lorentz  $\mathbb{M}(\varphi)$ ,  $\mathbb{M}(\varphi')$  et  $\mathbb{M}(\varphi'')$ , alors

$$\{\mathbb{M}(\varphi)\mathbb{M}(\varphi')\} \times \mathbb{M}(\varphi'') = \mathbb{M}(\varphi) \times \{\mathbb{M}(\varphi')\mathbb{M}(\varphi'')\}. \quad (\text{TD III.6})$$

**(ii) Le produit possède un élément neutre** – Il existe une transformation spéciale de Lorentz  $\mathbb{M}_0$ , élément neutre du produit de Lorentz, telle que

$$\forall \mathbb{M}(\varphi) \text{ alors } \mathbb{M}_0 \mathbb{M}(\varphi) = \mathbb{M}(\varphi) \mathbb{M}_0 = \mathbb{M}(\varphi). \quad (\text{TD III.7})$$

Vous expliciterez cette matrice  $\mathbb{M}_0$  en donnant son argument  $\varphi_0$  et en décrivant à quelle transformation de Lorentz elle correspond.

**(iii) Tout élément possède un symétrique** – Quelle que soit la transformation spéciale de Lorentz  $\mathbb{M}(\varphi)$ , il existe une transformation symétrique  $\mathbb{M}^{-1}$  telle que

$$\mathbb{M}(\varphi) \mathbb{M}^{-1} = \mathbb{M}^{-1} \mathbb{M}(\varphi) = \mathbb{M}_0. \quad (\text{TD III.8})$$

Vous exprimerez l'argument de la transformation symétrique  $\mathbb{M}^{-1}$  en fonction de l'argument  $\varphi$  de  $\mathbb{M}(\varphi)$ . A quelle transformation de Lorentz physique la matrice  $\mathbb{M}^{-1}$  correspond-elle ?

**(iv) Le produit est commutatif** – Quelles que soient les transformations spéciales de Lorentz  $\mathbb{M}(\varphi)$  et  $\mathbb{M}(\varphi')$ , alors

$$\mathbb{M}(\varphi) \mathbb{M}(\varphi') = \mathbb{M}(\varphi') \mathbb{M}(\varphi). \quad (\text{TD III.9})$$

**1.4)** On reprend les trois référentiels galiléens  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  de la question 1.2 et l'on cherche à exprimer la vitesse  $v_e''$  de  $\mathcal{R}''$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . En partant de la relation (III.30) et en utilisant l'identité (TD III.3), montrez que vous retrouvez la loi de composition des vitesses

$$v_e'' = \frac{v'_e + v_e}{1 + v_e v'_e / c^2}. \quad (\text{TD III.10})$$

Identifiez les différentes vitesses afin de vous ramener à l'expression (II.5) du chapitre II.

## 2) Une autre définition des transformations de Lorentz.

Nous avons redéfini en cours les transformations de Lorentz comme les changements de coordonnées qui laissent le produit scalaire de Minkowski invariant. Nous nous concentrerons ici sur les transformations spéciales permettant le passage entre les référentiels galiléens

$\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  glissant l'un par rapport à l'autre le long de leur axe commun  $Ox \equiv O'x'$ . La vitesse de  $\mathcal{R}'$  vue de  $\mathcal{R}$  est notée  $v_e$ .

Considérons deux quadrivecteurs  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$  et concentrons-nous sur leurs composantes  $(a^0, a^1)$  et  $(b^0, b^1)$  suivant les axes  $Oct$  et  $Ox$ . Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , les coordonnées de ces quadrivecteurs le long des axes  $O'ct'$  et  $O'x'$  deviennent  $(a'^0, a'^1)$  et  $(b'^0, b'^1)$ . Nous supposerons que les autres composantes ne sont pas affectées par le changement de référentiel de sorte que

$$a^2 = a'^2, a^3 = a'^3, b^2 = b'^2 \text{ et } b^3 = b'^3. \quad (\text{TD III.11})$$

Dans ces conditions, la matrice la plus générale susceptible de décrire le passage de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$  se met sous la forme

$$\mathbb{X} = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix} \quad \text{si bien que} \quad [a] = \mathbb{X}[a'] \quad \text{et} \quad [b] = \mathbb{X}[b']. \quad (\text{TD III.12})$$

Les matrices  $[a]$  et  $[b]$  de  $\mathcal{R}$ , ainsi que leurs homologues dans  $\mathcal{R}'$ , sont définies en (III.55).

**2.1)** Montrez que l'invariance du produit scalaire de Minkowski  $\tilde{a} \cdot \tilde{b}$  se traduit par l'égalité

$$\mathbb{X}^T \eta \mathbb{X} = \eta. \quad (\text{TD III.13})$$

**2.2)** En déduire que le déterminant de la matrice  $\mathbb{X}$  vérifie

$$\det \mathbb{X} = \pm 1. \quad (\text{TD III.14})$$

**2.3)** Les transformations de Lorentz que nous avons étudiées sont caractérisées par une valeur de  $+1$  pour  $\det \mathbb{X}$ . Justifiez ce choix.

**Indications** – Que vaut la matrice  $\mathbb{X}$  lorsque la vitesse  $v_e$  de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est nulle ? Une telle transformation appartient bien à l'ensemble des changements de coordonnées que nous étudions.

**2.4)** Etablir et justifier que

$$\mathbb{X}^T \eta = \eta \mathbb{X}^{-1}. \quad (\text{TD III.15})$$

On rappelle que

$$\text{si } \mathbb{X} = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix} \text{ et } \det \mathbb{X} \neq 0, \text{ alors } \mathbb{X}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{X}} \begin{Bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{Bmatrix}. \quad (\text{TD III.16})$$

En déduire que  $a = d$  et  $b = c$ .

**2.5)** En considérant le point  $O'$  origine du référentiel  $\mathcal{R}'$ , montrez que le rapport  $b/a$  est égal à  $\beta_e = v_e/c$ . Mettre finalement la matrice  $\mathbb{X}$  sous la forme explicitée dans la relation (III.63).

### 3) Transformation des coordonnées covariantes.

Une transformation spéciale de Lorentz permet le passage entre les deux référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  glissant l'un par rapport à l'autre le long de leur axe commun  $Ox \equiv O'x'$ . Nous reprenons le quadrivecteur  $\tilde{a}$  de l'exercice précédent. Ses composantes  $a^\mu$  sont qualifiées de **contravariantes** et se modifient lors du passage de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$  selon l'expression (III.56). Nous aimerais savoir comment se modifient les composantes **covariantes**  $a_\mu$  que nous avons définies dans la relation (III.49).

**3.1)** Montrez tout d'abord que selon les axes  $Oy \parallel O'y'$  et  $Oz \parallel O'z'$ , il vient

$$a_2 = a'_2 \quad \text{et} \quad a_3 = a'_3. \quad (\text{TD III.17})$$

**3.2)** On définit la matrice  $[\hat{a}]$  à partir des coordonnées covariantes  $a_0$  et  $a_1$  de sorte que

$$[\hat{a}] = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad \text{alors que} \quad [a] = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix}. \quad (\text{TD III.18})$$

Montrez que les matrices  $[\hat{a}]$  et  $[a]$  sont reliées par

$$[\hat{a}] = \eta [a] \quad \text{avec} \quad \eta \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{TD III.19})$$

**3.3)** Dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$ , les définitions des matrices  $[\hat{a}']$  et  $[a']$  sont analogues à celles données dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  par l'équation (TD III.18). Montrez que lors du passage de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$ , les coordonnées covariantes subissent la transformation

$$[\hat{a}] = \eta \mathbb{M}(\varphi) \eta^{-1} [\hat{a}']. \quad (\text{TD III.20})$$

**3.4)** Montrez par un calcul explicite que l'inverse de la matrice  $\eta$  est encore égale à  $\eta$  et que

$$\eta \mathbb{M}(\varphi) \eta^{-1} \equiv \mathbb{M}(-\varphi) \equiv \mathbb{M}^{-1}. \quad (\text{TD III.21})$$

**3.5)** On considère cette fois les quadrivecteurs  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$ . En supposant leurs composantes suivant les axes  $Oy \parallel O'y'$  et  $Oz \parallel O'z'$  nulles, établir que

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = [b]^T [\hat{a}]. \quad (\text{TD III.22})$$

Montrez alors que le produit scalaire de Minkowski est bien invariant lors du changement de référentiel de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$  en démontrant que

$$[b]^T [\hat{a}] = [b']^T [\hat{a}']. \quad (\text{TD III.23})$$

## 4) Quelques propriétés physiques du quadrivecteur d'onde.

Nous nous intéressons ici à une onde plane lumineuse dont la propagation est décrite par le quadrivecteur d'onde  $\tilde{k}$  du cours. L'onde se propage parallèlement au plan  $(O, x, y)$  de sorte que la composante  $k^3 \equiv k_z$  du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  suivant l'axe  $Oz$  est nulle. Dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , le quadrivecteur d'onde  $\tilde{k}$  a pour coordonnées

$$k^\mu \equiv \left\{ k^0 = \frac{\omega}{c}, k^1 = k_x = k_{||}, k^2 = k_y = k_\perp \right\}. \quad (\text{TD III.24})$$

Dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$ , en translation uniforme à la vitesse  $v_e$  par rapport à  $\mathcal{R}$  le long de leur axe commun  $Ox \parallel O'x'$ , les coordonnées deviennent

$$k'^\mu \equiv \left\{ k'^0 = \frac{\omega'}{c}, k'^1 = k'_x = k'_{||}, k'^2 = k'_y = k'_\perp \right\}. \quad (\text{TD III.25})$$

Etant les composantes d'un quadrivecteur, les coordonnées  $k^\mu$  et  $k'^\mu$  sont reliées entre elles par la transformation spéciale de Lorentz

$$\begin{pmatrix} k'^0 \\ k'^1 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} k^0 \\ k^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k'^2 = k^2. \quad (\text{TD III.26})$$

**4.1) La lumière se propageant à la vitesse  $c$ , la pulsation  $\omega$  et le module  $k$  du vecteur d'onde sont reliés par**

$$\frac{\omega}{c} = k \quad \text{où} \quad k = \|\mathbf{k}\|. \quad (\text{TD III.27})$$

Montrez qu'il en va de même dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$ .

**Indications** – Vous pouvez procéder de manière brutale en calculant le module  $k'$  du vecteur d'onde  $\mathbf{k}'$  à partir de ses composantes  $k'_x$  et  $k'_y$  et en vérifiant qu'il est bien égal au rapport  $\omega'/c$ . Ou alors vous pouvez utiliser l'invariance de Lorentz du produit scalaire de Minkowski. Et là, il vous faut juste écrire une ligne...

**4.2) Aberration** – Dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , une onde plane lumineuse se propage dans la direction du vecteur unitaire  $\mathbf{e}$ , dont les composantes non-nulles sont  $e_x = -\cos \theta$  et  $e_y = -\sin \theta$ . L'onde provient d'une source lointaine dont la direction fait l'angle  $\theta$  avec l'axe  $Ox$ . Montrez que, dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$ , la source est vue sous l'angle  $\theta'$  tel que

$$\tan \theta' = \left\{ \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \beta_e} \right\} \sqrt{1 - \beta_e^2}. \quad (\text{TD III.28})$$

**Indications** – La tangente de l'angle  $\theta'$  s'écrit simplement en fonction des composantes  $k'_x$  et  $k'_y$ , que vous exprimerez ensuite en fonction des coordonnées  $k_x$  et  $k_y$ . Le module  $k \equiv \|\mathbf{k}\|$  s'élimine alors, pour vous redonner l'expression (TD III.28).

**4.3) Effet Doppler** – Reprendre l'onde plane de la question précédente. Elle provient d'une source située dans la direction  $\mathbf{u} \equiv -\mathbf{e}$ . Montrez cette fois que les pulsations  $\omega$  et  $\omega'$  sont liées par

$$\omega = \omega' \left\{ \frac{\sqrt{1 - \beta_e^2}}{1 + \beta_e \cos \theta} \right\}. \quad (\text{TD III.29})$$

On suppose que la source est immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  où l'onde plane est émise à la fréquence propre  $\nu_0$ . Montrez que la fréquence  $\nu$  de réception des signaux dans  $\mathcal{R}$  est égale à

$$\nu = \nu_0 \left\{ \frac{\sqrt{1 - \beta_e^2}}{1 + \beta_e \cos \theta} \right\}, \quad (\text{TD III.30})$$

et retrouvez l'expression (II.47) donnée en cours pour l'effet Doppler

$$\nu = \nu_0 \left\{ \frac{\sqrt{1 - \beta_e^2}}{1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_e/c)} \right\}. \quad (\text{TD III.31})$$


---