Leçon 27 : Effet tunnel, application à la réactivité alpha

Niveau :

- Deuxième année CPGE

Pré-requis :

- Physique ondulatoire
- Notion de mécanique quantique (eq de Schrödinger stationnaire, puits de potentiels)
- radioactivité

Références :

- Dunoc PC
- Berkley quantique
- 51 leçons pour l'agreg
- sujet des mines

Introduction

Avec le puit de potentiel et la barrière de potentiel, on a vu que la fonction d'onde pouvait déborder sur des zones ou le potentiel est plus grand que son énergie. On peut le montrer via un programme python, par exemple avec la marche que l'on peut trouver en exercice (exo 34.6 Dunod PC 2019 par exemple). Ou comme dans le dunod avec un puit de potentiel carré.

On a vu dans le cours précédent qu'une particule quantique dans un puit de potentiel fini présente des niveaux d'énergie qui sont quantifiés :

$$E_n = n^2 \frac{k^2\hbar^2}{2m} \tag{1}$$

où n est le $n-ème$ état quantique de la particule tel que $n = 1$ est le fondamental. a est la largeur du puit de potentiel. $\hbar$ la constante de Planck et m la masse de la particule. La recherche des fonctions d'ondes propres vérifiant Schrödinger stationnaire conduit à la recherche de mode propres de vibration (un peu comme la corde de Melde).Utiliser l'analogie de la corde de Melde que les étudiants connaissent. Dans les deux cas l'écriture des conditions aux limites impose une quantification des vecteurs d'ondes et revient à écrire $a = n\lambda_n/2$. On présente alors le programme python Du puit carré. On peut présenter les trois premiers états par exemple.

On pourrait sortir une corde de Melde pour le montrer qualitativement mais ce n'est pas l'objet de la leçon et pas le temps. Noeuds = densité de probabilité nulle, ventres = densité de proba maximale.

Pour une particule classique, les zones pour $|x|> a/2$ sont interdites. En revanche on remarque que pour une particule quantique, la probabilité d'obtenir une particule au-delà de la barrière est non nulle ! L'expression de la fonction d'onde dans les zones I et III (zone interdite) sont de la forme :

$$\psi(x) = A\mathrm{e}^{\pm qx} \tag{2}$$

C'est l'expression d'une onde évanescente, dont on peut définir une profondeur de pénétration de la particule quantique d'énergie $E < V_0$ dans les régions interdites par la mécanique classique :

$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}} \tag{3}$$

Comment peut-on utiliser cette propriété ?

1. Barrière de potentiel

1.1. Fonction d'onde prore

On suit le Dunod PC p 1261, on résoud Schrödinger stationnaire dans les trois domaines donnés.

Probabilité : $|\psi(x,t)|^2 dx$ = probabilité de trouver la particule entre x et x+dx. Interprétation possible que si $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$.

Equation de Schrodinger : $i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t)$

Equation linéaire, on peut choisir $\psi = \chi(x)\exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right)$ avec le signe - dans l'exponentiel pour faire correspondre l'énergie de la particule.

Energie = valeur propre de H, c'est ce qu'on cherche à résoudre tout le temps en mécanique quantique.

- Si V confinement $V \sim x^2$, alors E est quantifié. on a des **états liés**
- Si V non confinement, E est continue et on a des **états de diffusion (ou libres)**

Etats de diffusion : ce sont les états qui vont nous intéresser pour l'effet tunnel. Comment les interpréter ?

1.2. Probabilité de réflexion et de transmission. Effet tunnel

Toujours Dunod PC. On donne les fonctions d'ondes incidentes et réfléchies ainsi que les vecteurs densités de proba. Pour arriver a définir les coefficients de réflexion et transmission.

$$R = \frac{||\overrightarrow{j}_r||}{||\overrightarrow{j}_i||} \quad \text{et} \quad T = \frac{||\overrightarrow{j}_t||}{||\overrightarrow{j}_i||} \tag{4}$$

On écrit les conditions aux limites pour déterminer les coefficients. On en déduit R et T.

1.3. Approximation d'une barrière épaisse

On s'intéresse au cas d'une barrière épaisse, c'est à dire que sa largeur a est très grande devant la profondeur de pénétratin $a \ll \delta$. Cela correspond à a grand ou $V_0 \ll E$. (particules de faible énergie devant la hauteur de la barrière). On peut alors simplifier l'expression de T car $\sinh(qa) \sim \mathrm{e}^{2qa}/4 \ll 1$. Le coefficient de transmission devient :

$$T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2}\mathrm{e}^{-2qa} \tag{5}$$

On peut donner en transparents différents ordres de grandeurs pour différentes particules. On choisit d'étudier la radioactivité α.

2. Radioactivité α

2.1. Description et résultats expérimentaux

Phénomène naturel qui résulte de l 'instabilité d'un noyau atomique qui se désintègre (DUNOD PC 2019 p 1271). Rappeler que c'est l'emission d'une particule α par un noyau instable. Il s'agit d'un noyau d'Helium très stable (2 protons et 2 Neutrons). On peut donner en transparents des exemples de désintégration (Uranium ou radium par exemple).

On peut montrer les résultats expérimentaux `https://link.springer.com/article/10.1140/epja/i2019-12804-5`

On constate que le temps de demi-vie est d'autant plus court que l'éergie cinétique de la particule est grande on expliquera ce temps de demi-vie grâce à l'effet tunnel.

2.2. Théorie de la radioactivité α : Gamoz Gurney et Condon (BUP 734, MINES PC 2016)

La radioactivité α a été interprété en 1928 par Gamow grâce à l'effet tunnel. Il considère que le noyau X était constitué au préalable de la particule α et du noyau Y. L'énergie potentielle $V(x)$ (interaction forte de courte portée et de la répulsion électrostatique) entre les deux particules est une fonction de la distance qui les sépare. À l'extérieur c'est le potentiel de Coulomb qui s'applique à la particule. Dessiner le profil du potentiel.

On mène les calculs comme sur le corrigé des mines. On remarque que la particule α devrait rester piégée dans le puit. Elle s'explique par l'existence d'un effet tunnel : la particule doit travers la barrière par effet tunnel sur une distance. On calcule cette distance ppour l'énergie indiquée dans le tableau de l'article.

On arrive ensuite à l'expression de $\ln T$

2.3. Détermination du temps de vie

On connaît l'expression du coefficient de transmission T. On approxime la barrière variant continument par plusieurs barrières rectangulaires. Le coefficient de transmission global est le produit des coefficients de transmission.

$$\ln(T) = a - \frac{b}{\sqrt{E}} \tag{6}$$

On constate que T décroit lorsque E augmente ou lorsque la masse decroit. La particule fait des allers-retours dans le noyau et ne cesse de rebondir contre la barrière de potentiel. À chaque collision elle a une proba d'être transmise T.

Entre deux rebonds sur la barrière, la particule parcours la distance $4x_0$. Donc $t_m = 4x_0/v$. Le nombre moyen de rebonds par seconde :

$$N = 1/t_m$$

et la probabilité d'émission α s'écrit

$$dp = NTdt = \frac{T}{t_m}dt$$

Soit la variation du nombre de noyaux

$$dN = -Ndp = -N\frac{T}{t_m}dt$$

Soit

$$N(t) = N_0\mathrm{e}^{-Tt/tm}$$

La demi-vie est définie comme le temps après lequel la moitié des noyaux s'est désintégré :

$$N(\tau_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$$

Donc

$$\tau_{1/2} = t_m \ln 2/T$$

$$\ln \tau_{1/2} = \ln \ln 2 + \ln t_m - \ln T = \underbrace{\ln \ln 2 + \ln t_m - a}_{\text{constante}} + \frac{b}{\sqrt{E}}$$

On retrouve la loi expérimentale ! Peut-on tracer les données à partir du tableau ?

Conclusion

Effet tunnel bien utile pour comprendre des phénomènes naturel. On en a pas parlé mais il est également utilisé pour des application technologiques actuelles : microscope à effet tunnel `https://toutestquantique.fr/tunnel/`.