

Électronique

Préparation à l’Agrégation de Physique

Jérémy Neveu – jeremy.neveu@universite-paris-saclay.fr

Montrouge 2021 – 2022

Table des matières

1 L’électromagnétisme en régime quasi-stationnaire	5
1.1 Les équations de Maxwell	5
1.2 Les potentiels électromagnétiques	7
1.2.1 Définition	7
1.2.2 Transformations de jauge	7
1.2.3 Équations de propagation	11
1.3 L’approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)	12
1.3.1 Solution des potentiels retardés	12
1.3.2 Différences entre l’ARQS et le régime statique	14
1.4 Les deux limites de l’électromagnétisme en ARQS	15
1.4.1 Existence de deux limites	15
1.4.2 Régime quasi-stationnaire électrique	16
1.4.3 Régime quasi-stationnaire magnétique	16
1.4.4 Tableau bilan	17
2 Électrocinétique	19
2.1 De l’électromagnétisme à l’électrocinétique	19
2.2 Propriétés générales des dipôles électrocinétiques	22
2.2.1 Tension et courant	22
2.2.2 Notion d’impédance	23
2.2.3 Notion de puissance	24
2.3 Masse et terre	27
2.4 Théorèmes généraux	29
2.4.1 Loi des nœuds	29
2.4.2 Loi des mailles	30
2.4.3 Théorème de Millman	33
2.4.4 Théorèmes de Thévenin et de Norton	34
2.5 Les dipôles électrocinétiques de base	35
2.5.1 La résistance	35
2.5.2 Le condensateur	37
2.5.3 La bobine	40
2.5.4 Le circuit <i>RLC</i> série	42
2.6 Autres composants	43
2.7 Exercices (quelques solutions en annexe)	44

3 Filtres électroniques	46
3.1 Notion de filtre linéaire	46
3.1.1 Système linéaire et permanent	46
3.1.2 Régime harmonique	47
3.1.3 Généralités sur les fonctions de transfert	49
3.2 Étude et représentation des fonctions de transfert fondamentales	53
3.2.1 Opérateurs élémentaires	53
3.2.2 Fonction de transfert d'ordre 1	53
3.2.3 Fonction de transfert d'ordre 2	54
3.2.4 Application à une fonction de transfert passe-bande	56
3.2.5 Retour sur la réponse temporelle	56
3.3 Exemples de filtres passifs et leurs réalisations électroniques	58
3.3.1 Amplification par une constante	58
3.3.2 Filtre du premier ordre	59
3.3.3 Filtres du second ordre	59
3.4 Exercices (quelques solutions en annexe)	60
4 L'amplificateur opérationnel	62
4.1 L'amplificateur opérationnel idéal	63
4.2 Montages de base	64
4.2.1 Montage amplificateur inverseur	64
4.2.2 Montage amplificateur non inverseur	65
4.2.3 Montage suiveur	65
4.2.4 Montage soustracteur	66
4.2.5 Réalisation d'un dipôle à résistance négative	66
4.2.6 Comparateur de tension	67
4.3 Application aux filtres actifs	68
4.3.1 Montages de base	68
4.3.2 Étude d'un filtre passe-bande actif : Sallen et Key	69
4.4 Limitations	70
4.4.1 Limitation en tension de sortie	70
4.4.2 Limitation en courant de sortie	70
4.4.3 Résistances d'entrée et de sortie	72
4.4.4 Vitesse de balayage	72
4.5 Comportement fréquentiel	72
4.5.1 Modèle d'ordre 1	72
4.5.2 Conservation du produit gain-bande	73
4.6 Exercices (quelques solutions en annexe)	74
5 Systèmes bouclés et asservissements	76
5.1 Notion de rétroaction, commande d'un système	77
5.1.1 Schéma fonctionnel unifilaire général d'un système bouclé	77
5.1.2 Application au montage amplificateur non inverseur	78
5.1.3 Nécessité d'un comparateur	79
5.1.4 Utilité des transformées de Laplace	79
5.2 Caractérisation d'un système asservi	83
5.2.1 Stabilité	83
5.2.2 Précision	83
5.2.3 Rapidité	84
5.3 Application à l'asservissement d'un moteur à courant continu	85

5.3.1	Modélisation du système	85
5.3.2	Système non asservi	85
5.3.3	Système asservi	87
5.4	Intérêt d'un élément correcteur	88
5.4.1	Correction proportionnelle	89
5.4.2	Correction dérivative	90
5.4.3	Correction intégrale	91
5.4.4	Correction PID	92
5.5	Exercices (quelques solutions en annexe)	92
6	Oscillateurs	93
6.1	Stabilité d'un système linéaire permanent	93
6.1.1	Étude théorique de la stabilité	93
6.1.2	Application aux systèmes bouclés	96
6.1.3	Étude expérimentale de la stabilité d'un système bouclé	97
6.1.4	Généralités sur les systèmes auto-oscillants	102
6.2	Oscillateurs quasi-sinusoidaux	103
6.2.1	Structure d'un oscillateur quasi-sinusoidal	103
6.2.2	Étude de l'oscillateur à pont de Wien	105
6.2.3	Oscillateur à quartz	107
6.3	Oscillateurs à relaxation	109
6.3.1	Définition	109
6.3.2	Exemple du multivibrateur astable	109
6.4	Exercices (quelques solutions en annexe)	112
7	Télécommunications	113
7.1	Introduction	113
7.2	Modulation et démodulation d'amplitude	115
7.2.1	Le multiplicateur analogique	115
7.2.2	Modulation	116
7.2.3	Démodulation	119
7.3	Modulation et démodulation de fréquence	121
7.3.1	La boucle à verrouillage de phase	121
7.3.2	Modulation de fréquence	125
7.3.3	Démodulation de fréquence	127
7.4	Suppléments sur les télécommunications modernes	127
7.4.1	Antennes radio	127
7.4.2	Multiplexage	129
7.4.3	Récepteur superhétérodyne	129
8	Electronique numérique	131
8.1	Signaux numériques	131
8.2	Acquisition et numérisation de signaux électriques	134
8.2.1	Diviseur de fréquence par 2^N	134
8.2.2	Compteur numérique	135
8.2.3	Application au fréquencemètre numérique	136
8.2.4	Convertisseur numérique-analogique (CNA)	136
8.2.5	Convertisseur analogique-numérique (CAN)	138
8.3	Analyse spectrale d'un signal numérique	141
8.3.1	Notion de spectre	141

8.3.2	Transformée de Fourier d'un signal échantillonné	141
8.3.3	Cas de la FFT sur un oscilloscope	143
8.3.4	Problème du fenêtrage	146
8.4	Filtrage numérique	151
8.4.1	Équation des différences	152
8.4.2	Transformation en z	153
8.4.3	Réalisation des filtres numériques	154
8.4.4	Fonction de transfert d'un filtre numérique	154
8.4.5	Application au filtre passe-bas	156
8.5	Exercices (quelques solutions en annexe)	158
9	Composants semi-conducteurs	159
9.1	Caractéristiques et modèle d'une diode	159
9.1.1	Jonction pn à l'équilibre thermodynamique	159
9.1.2	Jonction pn polarisée	160
9.1.3	Les diodes	161
9.2	Caractéristiques et modèle du transistor bipolaire	163
9.2.1	Présentation du composant npn	163
9.2.2	L'effet transistor	166
9.2.3	Réseau de caractéristiques	168
9.2.4	Régimes de fonctionnement d'un transistor bipolaire	170
9.3	Applications de puissance	171
9.3.1	Notion d'amplification	171
9.3.2	Montages amplificateurs avec transistor bipolaire	173
9.3.3	Principe d'un suiveur de puissance	173
9.3.4	Application à l'étage de puissance d'une alimentation stabilisée	174
9.3.5	Amplificateur Push-Pull	175
9.4	Le transistor en commutation	177
A	Annexe 1 : Bibliographie indicative	178
Références		178
B	Annexe 2 : Quelques solutions d'exercices	179
B.1	Chapitre 2	179
B.2	Chapitre 4	180
B.3	Chapitre 5	180
B.4	Chapitre 6	180
C	Annexe 3 : Programme d'électronique en PSI	181

Copyright (C) 2019 Jérémie Neveu.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

L'OBJECTIF de ce cours est d'aborder l'ensemble des connaissances utiles au passage de l'agrégation de physique dans le domaine de l'électronique. C'est donc un cours d'électronique pour physiciens donné par un physicien, qui passe certainement sous silence volontairement ou par ignorance de nombreuses notions d'électronique essentielles aux yeux d'un véritable électronicien. Néanmoins ce cours s'appuie sur des notions de base de l'électrocinétique, voir de l'électromagnétisme, pour progressivement étudier des systèmes électroniques plus complexes tels que les oscillateurs, les télécommunications, l'électronique numérique, tout en s'efforçant de faire le lien entre théorie et expérience, formules et paillasse de TP, grands principes et technologies passées ou actuelles.

Pour l'agrégation de physique, ce cours est transverse à un grand nombre de montages et leçons, des circuits électroniques étant présents dans beaucoup de dispositifs expérimentaux. Nous aborderons aussi les notions plus générales de système physique linéaire, de fonction de transfert et de filtrage, qui peuvent être transposées et utilisées en dehors du domaine de l'électronique.

Quelques annexes avec de la bibliographie sont présentes en fin de cours. Cependant les annexes principales à ce cours sont surtout les polycopiés de TP, qui peuvent être lus à la lumière de ce cours et *vice versa*, et plongent de manière plus concrète dans les problèmes pratiques liés à l'électronique.

1 L'électromagnétisme en régime quasi-stationnaire

Ce chapitre a pour objectif de bien établir les équations de l'électromagnétisme dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS), qui ont des conséquences sur les aspects pratiques liés à l'électrocinétique, la conduction électrique et l'induction.

1.1 Les équations de Maxwell

Théorème 1.1. *La force \vec{F} exercée par une distribution volumique de charges et de courants décrite par les densités $\{\rho(\vec{r}, t), \vec{j}(\vec{r}, t)\}$ sur une charge ponctuelle q située en un point M à l'instant t et possédant un vecteur vitesse $\vec{v}(M, t)$ dans un référentiel \mathcal{R} est donnée par la formule de Lorentz :*

$$\vec{F} = q [\vec{E}(M, t) + \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)] \quad (1.1)$$

où $\{\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t)\}$ est le champ électromagnétique créé au point M par la distribution $\{\rho(\vec{r}, t), \vec{j}(\vec{r}, t)\}$. Ce champ électromagnétique est solution des équations locales de Maxwell :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & (\text{Maxwell-Gauss}) & \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (\text{Maxwell-Faraday}) \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & (\text{Maxwell-flux}) & \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (\text{Maxwell-Ampère}) \end{aligned}$$

Les constantes ϵ_0 et μ_0 sont appelées respectivement permittivité diélectrique du vide et perméabilité magnétique du vide, et sont liées par la relation $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ avec c la célérité de la lumière dans le vide.

La contribution de Maxwell à la théorie de l'électromagnétisme a été de rassembler et mettre en forme les résultats de ses prédecesseurs et de rajouter le second terme dit de *courant de déplacement* à l'équation de Maxwell-Ampère. Ce terme est nécessaire pour que les équations contiennent la conservation de la charge électrique. En effet, avec cette formulation, lorsqu'on applique l'opérateur div à l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient l'équation locale de conservation de la charge électrique :

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

Les opérateurs de l'analyse vectoriel présents dans les équations de Maxwell peuvent s'écrire à l'aide du vecteur opérateur *nabla*¹ noté ∇ ou $\vec{\nabla}$ qui désigne le gradient d'une fonction :

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \vec{\nabla} \quad \text{div} = \vec{\nabla} \cdot \quad \overrightarrow{\text{rot}} = \vec{\nabla} \wedge \quad \Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \quad (1.3)$$

Bref historique de l'électromagnétisme

La théorie électromagnétique est une lente construction scientifique qui a duré quasiment un siècle. Des premières expériences de Faraday, Coulomb ou encore Ampère, des lois empiriques ont été tirées. James Clerk Maxwell parvient à réunir tous ces phénomènes en 4 équations par analogie mécanique et hydrodynamique vers 1865. Pour parfaire sa théorie et obtenir la conservation de la charge électrique, comme en hydrodynamique on conserve la matière, Maxwell rajoute le terme de "courant de déplacement" à l'équation d'Ampère. Ce terme impose la propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide, qui seront découvertes par Hertz en 1887. Ce dernier mesure que ces ondes se propagent à la vitesse de la lumière : la lumière devient une onde électromagnétique. Ceci assoit définitivement la théorie électromagnétique de Maxwell face à ses concurrentes.

Cependant Maxwell reste attaché à la notion d'éther absolu et les "fluides" électriques restent liés à celui-ci. Les ondes électromagnétiques ne peuvent qu'être la vibration (transversale) de ce support mécanique.

Or dès 1822 Augustin Fresnel avait proposé une théorie de l'éther partiellement entraîné par les corps transparents en mouvement par rapport à l'éther absolu [3]. Cette notion a été vérifiée expérimentalement par les expériences de Fizeau (1851 : propagation de la lumière entraînée par de l'eau en mouvement), Hoeck (1868 : idem en considérant le mouvement de la Terre autour du Soleil) et Airy (1871 : sur l'aberration des étoiles, avec une lunette remplie d'eau). La notion d'éther absolu lié aux équations de Maxwell ne convient pas pour interpréter les expériences ayant vérifié la théorie d'entrainement partiel de Fresnel.

Vers 1892-1895, Hendrik Lorentz parvient à reformuler les équations de Maxwell sous la forme que l'on connaît aujourd'hui (avec les champs \vec{E} et \vec{B}) et y ajoute la théorie atomiste : le fluide électrique est constitué de particules de matière chargées qui par nature sont détachées de l'éther. Aux quatre équations de Maxwell est aussi rajoutée la force de Lorentz, agissant sur les particules chargées. Avec ce jeu complet d'équations, on parvient à expliquer tous les phénomènes magnéto-électrodynamiques connus. La découverte de l'effet Zeeman classique due à l'action de la force de Lorentz magnétique sur les électrons élastiquement liés ainsi que la découverte de l'électron vont asseoir la théorie de l'électromagnétisme de Lorentz

1. Son appellation est due à sa forme triangulaire analogue à celle d'une lyre assyrienne - *nebel* en hébreu - ancêtre de la harpe.

et la théorie atomiste.

Mais rapidement la seconde expérience de Michelson-Morley en 1887 met les physiciens au défi. Lorentz introduit la notion de temps local et de contraction des longueurs pour expliquer ces résultats expérimentaux (que même la théorie de Fresnel ne peut expliquer) mais ne parvient pas à se défaire de la notion d'éther, ni Poincaré. C'est en 1905 que Einstein franchit le pas avec la théorie de la relativité restreinte, et en 1908 la transformation relativiste des champs est formulée par Einstein et Laub.

1.2 Les potentiels électromagnétiques

1.2.1 Définition

De l'équation de Maxwell-flux, on en déduit qu'il existe un vecteur \vec{A} qui vérifie $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ puisque $\text{div} \vec{\text{rot}} = 0$. Ensuite, à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{\text{rot}} \vec{A}}{\partial t} \Leftrightarrow \vec{\text{rot}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Donc, puisque $\vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} = \vec{0}$, il existe une fonction scalaire V telle que :

$$\Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} V = \vec{0}$$

Définition 1.2. *Les deux fonctions \vec{A} et V sont deux quantités appelées respectivement potentiel vecteur et potentiel électrique. Les champs électromagnétiques \vec{E} et \vec{B} se déduisent de ces deux fonctions par :*

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.4)$$

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \quad (1.5)$$

1.2.2 Transformations de jauge

Étant donné un système physique, les *transformations de jauge* sont des transformations que l'on peut appliquer à un couple de solutions des potentiels (V, \vec{A}) sans que cela modifie le couple de solutions (\vec{E}, \vec{B}) correspondant. Cherchons la forme que doit prendre cette transformation². Posons $\vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\alpha}(\vec{r}, t)$ et $V'(\vec{r}, t) = V(\vec{r}, t) + \beta(\vec{r}, t)$ où $\vec{\alpha}$ et β sont des fonctions dont nous allons déterminer les propriétés pour qu'elle respecte une transformation de jauge. On doit avoir d'une part :

$$\vec{B}'(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}, t) \Leftrightarrow \vec{\text{rot}} \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{\text{rot}} \vec{A}(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{\alpha}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (1.6)$$

donc $\vec{\alpha}$ peut s'écrire sous la forme $\vec{\alpha}(\vec{r}, t) = \vec{\text{grad}} \phi(\vec{r}, t)$ puisque $\vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} = \vec{0}$. Et d'autre part :

$$\vec{E}'(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\text{grad}} V'(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}'(\vec{r}, t)}{\partial t} \Rightarrow \vec{\text{grad}} \beta(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{\alpha}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{0}$$

2. Évidemment n'importe quelle transformation mathématique des potentiels ne fonctionne pas.

On en déduit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left[\beta(\vec{r}, t) + \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] = \vec{0} \quad (1.7)$$

en tout point de l'espace. Une solution possible est donc :

$$\beta(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1.8)$$

Propriété 1.3. *Toute transformation des potentiels par une fonction $\phi(\vec{r}, t)$ telle que :*

$$\begin{aligned} \vec{A}'(\vec{r}, t) &= \vec{A}(\vec{r}, t) + \overrightarrow{\text{grad}} \phi(\vec{r}, t) \\ V'(\vec{r}, t) &= V(\vec{r}, t) - \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

conduit à la même solution pour les champs (\vec{E}, \vec{B}) : c'est une transformation de jauge.

Analogie mécanique pour comprendre les transformations de jauge

Il existe beaucoup de symétries qui laissent invariantes les équations de la physique. La notion de symétrie en physique est très importante car toute symétrie continue peut être associée à une quantité conservée : c'est le *théorème de Noether*. Lorsque des équations sont invariantes par une symétrie locale, on peut exploiter cette symétrie pour aller plus loin et on parle alors de théorie de jauge.

Prenons l'exemple du principe fondamental de la dynamique exprimé dans un référentiel galiléen \mathcal{R} :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \vec{F}(x, t) \cdot \vec{u}_x$$

pour une particule de masse m soumise à une force \vec{F} , projeté sur une dimension d'une base cartésienne. Si l'on croit que les prédictions physiques de cette loi ne doivent pas changer selon le choix du système de coordonnées, quels sont les référentiels $\tilde{\mathcal{R}}$ dans lesquels les observateurs de la trajectoire de la masse m puissent être d'accord avec les observateurs fixes dans \mathcal{R} ? Quelles sont les conditions pour que la loi de Newton, vérifiée dans le référentiel \mathcal{R} , puisse être valide dans un autre référentiel $\tilde{\mathcal{R}}$?

Pour trouver ces conditions, il faut rechercher les transformations de coordonnées $x \rightarrow \tilde{x} = \phi(x, t)$ laissant cette équation invariante. Les calculs suivants s'inspirent de l'appendice 1 de la référence [11]. La vitesse s'écrit :

$$\tilde{v} = \frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

et l'accélération :

$$\tilde{a} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

et la force, en tant que vecteur représenté dans la base du référentiel \mathcal{R}' , donne :

$$\vec{F}(\tilde{x}, t) \cdot \vec{u}_{\tilde{x}} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{F}(x, t) \cdot \vec{u}_x$$

avec $\partial\phi/\partial x$ le Jacobien de la transformation de coordonnées, localement autour du point x d'application du principe fondamental de la dynamique. La loi de Newton est invariante par changement de référentiel si elle s'écrit dans $\tilde{\mathcal{R}}$:

$$m \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = \vec{F}(\tilde{x}, t) \cdot \vec{u}_{\tilde{x}}$$

$$\Leftrightarrow m \left[\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial t} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] = \frac{\partial\phi}{\partial x} \vec{F}(x, t) \cdot \vec{u}_x$$

Cette seconde écriture de la loi de Newton est équivalente à sa première écriture si on impose trois conditions sur les nouvelles coordonnées :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \phi(x, t) = \alpha(x) + \beta(x)t$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\beta}{\partial x} = 0 \Rightarrow \beta(x) = V$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x} = J \Rightarrow \alpha(x) = Jx + x_0$$

avec J , V et x_0 des constantes. Donc la transformation locale la plus générale des coordonnées d'espace qui laisse la loi de Newton invariante est :

$$\phi : x \mapsto \tilde{x} = x_0 + Jx + Vt$$

Autrement dit, les translations, les dilatations et une translation galiléenne sont les transformations de coordonnées autorisées pour laisser la loi de Newton invariante par changement de référentiel. La classe des référentiels liés ensemble par ces trois transformations est la classe des référentiels galiléens. Fixer la jauge en mécanique classique revient à fixer les valeurs de x_0 , J et V , donc la fonction $\phi(x, t)$. Choisir un référentiel galiléen s'identifie à un choix de jauge.

Si on sort du cadre unidimensionnel, alors on montre que J représente les matrices de rotation de l'espace. Si on propose aussi une transformation du temps, alors on montre que les seules transformations du temps sont de la forme $t \rightarrow \tilde{t} = \pm t + \tau$ avec τ une constante (la condition obtenue étant $(dt/d\tilde{t})^2 = 1$). En passant aux référentiels en rotation (non galiléens), alors la loi de Newton s'écrit de manière covariante si des forces inertielles sont rajoutées, et si on considère les référentiels en accélération avec n'importe quelle métrique d'espace-temps, alors on peut construire la Relativité Générale comme une théorie de jauge.

Les potentiels électromagnétiques sont donc définis à une jauge près. Cette liberté dans la théorie électromagnétique peut être utilisée à notre avantage pour simplifier les équations en choisissant une jauge (une fonction ϕ) astucieuse. Notamment, pour simplifier les équations de propagation des potentiels électromagnétiques, on a le droit de faire un choix de condition de jauge qui fixe $\text{div } \vec{A}$, ce qui revient à choisir une forme de la fonction $\phi(\vec{r}, t)$. Autrement dit, on restreint l'ensemble des choix de jauge $\phi(\vec{r}, t)$ possibles par une condition de jauge.

Le statut du couple (V, \vec{A}) est ambigu dans la communauté des physiciens. Il est commun de considérer que ces quantités ne sont que des intermédiaires de calculs et n'ont

aucun sens physique. Pourtant le potentiel vecteur est considéré comme une quantité fondamentale de l'électromagnétisme par Maxwell lui-même au moment de formaliser ses équations [4] et qui écrit à son propos :

Sans l'aide de l'appareil mathématique [Faraday] a été conduit à reconnaître l'existence de quelque chose [\vec{A}] que nous savons maintenant être une quantité mathématique et qui peut même être tenue pour la quantité fondamentale de la théorie de l'électromagnétisme.

James Clerk Maxwell

De plus, les expressions des potentiels électromagnétiques sont à la base de la définition du régime de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS – voir section 1.3). Aussi, les différences de potentiels sont a priori données par les voltmètres (voir l'encadré plus loin) et sont liées au travail de la force électrique sur une particule chargée. Le potentiel vecteur \vec{A} apparaît dans les formulations des mécaniques lagrangienne et quantique, et intervient dans l'interprétation des expériences quantiques sur l'effet Aharonov-Bohm (voir encadré). Le potentiel vecteur conduirait donc à une description plus complète de l'état magnétique de l'espace que le champ \vec{B} . Les potentiels électromagnétiques ont donc une incidence sur la physique qui n'est pas négligeable. Le procès fait à ces quantités repose essentiellement sur le fait qu'un couple (V, \vec{A}) n'est pas défini de façon unique mais contient une liberté de jauge [5].

L'effet Aharonov-Bohm et l'existence de \vec{A}

L'effet Aharonov-Bohm est une conséquence de l'équation de Schrödinger. Soit une particule de charge q dont la phase de la fonction d'onde en absence de champ magnétique à l'issue d'un trajet Γ est ϕ_0 . La phase φ de cette même particule sur le même trajet en présence d'un champ potentiel vecteur a pour expression [5] :

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{\hbar} \int_{\Gamma} q \vec{A}(M) \cdot d\vec{O}M$$

Dans une expérience de fentes d'Young avec des électrons, la présence d'un champ \vec{A} pour l'une des fentes doit introduire un déphasage et donc un décalage de la figure d'interférence en un point M de l'écran, qui se calcule par :

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \frac{q}{\hbar} \oint_{\Gamma} \vec{A}(M) \cdot d\vec{O}M$$

avec $\Delta\varphi_0$ le déphasage induit par les fentes de façon standard et Γ le chemin fermé allant de la source à l'écran en passant par les deux fentes.

En 1986, le physicien japonais Akira Tonomura et son équipe réalisent un aimant torique, confinant le champ magnétique dans le matériau mais créant un champ \vec{A} au centre du tore, et observent de façon indéniable le décalage des franges d'interférence dû aux électrons passant au centre du tore.

Notons que le déphasage théorique de l'électron est invariant par le changement de jauge $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ puisque l'intégrale sur un contour fermé d'un gradient est nul. Dans cette expérience $\vec{B} = 0$ pour les électrons et pourtant un effet physique apparaît. Le champ \vec{A} , bien que défini à une transformation de jauge près, semble donc ici plus fondamental que le champ \vec{B} .

1.2.3 Équations de propagation

À partir de l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient une première équation de propagation pour le potentiel vecteur \vec{A} :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) &= \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \vec{\text{grad}} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{\text{grad}} (\text{div } \vec{A}) - \vec{\Delta} \vec{A} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\Delta} \right) \vec{A} &= \mu_0 \vec{j} - \vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \text{div } \vec{E} = -\Delta V - \text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow -\Delta V - \frac{\partial \text{div } \vec{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.10)$$

Les champs \vec{A} et V sont a priori couplés par cette équation différentielle. Mais on peut utiliser le fait qu'ils sont définis à une jauge près pour simplifier ces équations. On utilise couramment deux choix de condition de jauge [2, 7] :

- la *condition de jauge de Lorenz* est définie par :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0 \Rightarrow \square \phi = 0 \quad (1.11)$$

et permet d'obtenir des équations de d'Alembert pour le potentiel vecteur et le potentiel scalaire (en faisant intervenir l'équation de Maxwell-Gauss) :

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\Delta} \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j}, \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.12)$$

- la *condition de jauge de Coulomb* est définie par :

$$\text{div } \vec{A} = 0 \Rightarrow \Delta \phi = 0 \quad (1.13)$$

ce qui permet d'aboutir à l'équation de Poisson, valable en régime statique et variable :

$$\Delta V(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (1.14)$$

Pour travailler sur la propagation des champs, la condition de jauge de Lorenz ($c^2 \text{div } \vec{A} = -\partial V / \partial t$) est un choix judicieux car alors les deux potentiels obéissent à des équations de d'Alembert *découplées* avec des termes sources ρ et \vec{j} . Ce choix de jauge correspond à se restreindre aux fonctions ϕ vérifiant $\square \phi = 0$ (avec \square l'opérateur d'Alembertien). Ce choix (et c'est le seul) mène alors aux solutions en potentiels retardés. De plus cette jauge est plus naturelle dans le formalisme relativiste où son caractère covariant est explicite.

Le choix de condition de jauge de Coulomb ($\text{div } \vec{A} = 0$) est judicieux pour l'électrostatique car on retrouve l'équation de Poisson $\Delta V = -\rho / \epsilon_0$, mais au prix de l'équation différentielle pour \vec{A} qui se complexifie et reste couplée à V . Dans ce cas on a implicitement imposé $\Delta \phi = 0$. Ce choix de condition de jauge correspond à une simplification de la jauge de Lorenz pour les phénomènes statiques, et est parfois par extension (et pas toujours à bon escient comme nous allons le voir) utilisée dans la limite de l'ARQS, ce qui n'est pas sans soulever certains problèmes de causalité, le potentiel scalaire se propageant instantanément [7].

Retour sur le caractère physique ou non du potentiel vecteur \vec{A}

Souvent les potentiels électromagnétiques sont décrits comme non physiques car définis à une jauge près. Cette multiplicité possible des solutions (V, \vec{A}) pour décrire un système physique implique qu'ils seraient impossibles à mesurer. En réalité nous pouvons les mesurer mais les observables physiques correspondantes sont nécessairement indépendantes du choix de jauge (différence de potentiel électrique, circulation de \vec{A}). Lier les potentiels électromagnétiques via la jauge de Lorenz est un des moyens permettant d'assurer l'unicité du couple (V, \vec{A}) [5, p. 96]. Rappelons cette condition :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.15)$$

Cette équation semble parfois être un artifice mathématique pour fixer la valeur des potentiels. Pourtant cette équation, covariante en relativité restreinte, est formellement analogue à une relation de continuité traduisant la conservation locale d'une grandeur extensive qui pour un volume \mathcal{V} d'espace serait ici $X(t) = \int_{\mathcal{V}} V(\vec{r}, t) d^3\vec{r}/c^2$ (telle l'équation locale de conservation de la charge électrique $\operatorname{div} \vec{j} + \partial\rho/\partial t = 0$). Autrement dit, *toute variation temporelle de l'intégrale volumique du potentiel électrique sur un volume d'espace se traduit par un flux de potentiel vecteur magnétique entrant dans ce volume et réciprocement*. En ce sens, il semble que cette condition de jauge doit jouer un rôle plus consistant que celui de simple outil de calcul.

1.3 L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

1.3.1 Solution des potentiels retardés

Propriété 1.4. *Dans la jauge de Lorenz, et uniquement celle-ci, les potentiels électromagnétiques s'écrivent [6] :*

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3\vec{u} \frac{\rho(\vec{u}, t - \|\vec{r} - \vec{u}\|/c)}{\|\vec{r} - \vec{u}\|} \quad (1.16)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d^3\vec{u} \frac{\vec{j}(\vec{u}, t - \|\vec{r} - \vec{u}\|/c)}{\|\vec{r} - \vec{u}\|} \quad (1.17)$$

L'obtention de cette solution à partir des équations de propagation des potentiels électromagnétiques en jauge de Lorenz (équations 1.12) est un calcul complexe à base de fonctions de Green. Derrière cette écriture, il y a implicitement le choix d'avoir des potentiels électromagnétiques nuls à distance infinie de la distribution de charge et de courant (supposée de taille finie). La liberté de pouvoir choisir les potentiels à une constante près est acquise grâce à l'invariance de jauge de l'électromagnétisme. Dans la jauge de Lorenz, on rappelle qu'on a le droit de choisir une jauge $\phi(\vec{r}, t)$ tant que $\square\phi(\vec{r}, t) = 0$. Choisir $\phi(\vec{r}, t) = 0$ est donc légitime dans la jauge de Lorenz et permet d'assurer la nullité des potentiels à l'infini. En particulier on peut donc toujours choisir de travailler dans une jauge $\phi(\vec{r}, t)$ tel que le potentiel électrique V soit nul à la masse d'un circuit électrique ou pour la Terre. En bref, on a donc toute liberté pour choisir où est situé le potentiel électrique nul³.

3. Mais ce n'est alors pas toujours sans incidence sur le potentiel vecteur \vec{A} à cause du terme $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi$.

Définition 1.5. *L'approximation des régimes quasi-stationnaires revient à négliger le temps de propagation des quantités électromagnétiques, c'est-à-dire à évaluer les sources au temps instantané t au lieu du temps retardé $t - \|\vec{r} - \vec{u}\|/c$. Soit T le temps typique de variation de \vec{j} et ρ , et ℓ la longueur typique caractérisant $\|\vec{r} - \vec{u}\|$ i.e. la distance typique entre les sources et le champ électromagnétique observé. L'ARQS est valable si \vec{j} et ρ varient peu pendant $\|\vec{r} - \vec{u}\|/c$ donc si $T \gg \ell/c$.*

Autrement dit, le temps typique de variations des charges est lent devant le temps de propagation des champs électromagnétiques, ou la distance d'observation des champs est petite devant leur longueur d'onde.

Dans l'ARQS, on a les relations approximatives :

$$V(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3 \vec{u} \frac{\rho(\vec{u}, t)}{\|\vec{r} - \vec{u}\|}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d^3 \vec{u} \frac{\vec{j}(\vec{u}, t)}{\|\vec{r} - \vec{u}\|} \quad (1.18)$$

que l'on peut obtenir de manière équivalente comme solution de

$$\Delta V(\vec{r}, t) \approx -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}, \quad \vec{\Delta A}(\vec{r}, t) \approx -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (1.19)$$

Ces potentiels varient dans le temps mais sont à chaque instant liés à leurs sources comme le seraient des potentiels en électrostatique ou en magnétostatique.

On utilise alors la formule suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}} \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{u}\|} \right) = -\frac{\vec{r} - \vec{u}}{\|\vec{r} - \vec{u}\|^3} \quad (1.20)$$

pour calculer les champs \vec{E} et \vec{B} . Pour le champ magnétique, on utilise en plus $\vec{\text{rot}}(f\vec{a}) = \vec{\text{frot}} \vec{a} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{a}$ et on obtient :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\text{rot}}_{\vec{r}} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d^3 \vec{u} \frac{\vec{j}(\vec{u}, t) \wedge (\vec{r} - \vec{u})}{\|\vec{r} - \vec{u}\|^3}. \quad (1.21)$$

Concernant le champ électrique :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}} V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3 \vec{u} \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}} \left(\frac{\rho(\vec{u}, t)}{\|\vec{r} - \vec{u}\|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3 \vec{u} \frac{\rho(\vec{u}, t)}{\|\vec{r} - \vec{u}\|^2} \frac{\vec{r} - \vec{u}}{\|\vec{r} - \vec{u}\|}. \quad (1.22)$$

donc dans le cas où les sources sont non statiques :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3 \vec{u} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{u}\|} \left[\rho(\vec{u}, t) \frac{\vec{r} - \vec{u}}{\|\vec{r} - \vec{u}\|^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}(\vec{u}, t)}{\partial t} \right] \quad (1.23)$$

On s'aperçoit donc qu'un courant électrique variable peut générer un champ électrique. Ce phénomène est bien connu car on sait qu'une particule chargée accélérée émet un rayonnement synchrotron, or une variation de courant correspond justement à l'accélération de charges électriques. Ce second terme reste cependant négligeable la plupart du temps face au premier en régime quasi-stationnaire $\ell/cT \ll 1$.

Hors ARQS, les équations ci-dessus pour \vec{E} et \vec{B} contiennent les mêmes termes mais avec un temps t corrigé d'un terme de retard $\|\vec{r} - \vec{u}\|/c$, et chacune possède un terme supplémentaire lié à la dérivée de ce terme de retard. Ce sont les équations de Jefimenko [2, section 6.5].

1.3.2 Différences entre l'ARQS et le régime statique

Si les sources ne dépendent pas du temps, alors on a les expressions suivantes pour \vec{E} et \vec{B} :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}} V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3 \vec{u} \rho(\vec{u}) \frac{\vec{r} - \vec{u}}{\|\vec{r} - \vec{u}\|^3} \quad (1.24)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{rot}}_{\vec{r}} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d^3 \vec{u} \frac{\vec{j}(\vec{u}) \wedge (\vec{r} - \vec{u})}{\|\vec{r} - \vec{u}\|^3} \quad (1.25)$$

Ce sont les solutions des équations de l'électrostatique et de la magnétostatique :

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (1.26)$$

D'après les expressions ci-dessus, \vec{E} est proportionnel à ρ dans le cas statique. Donc en électrostatique toute symétrie de ρ est une symétrie de \vec{E} . \vec{B} dépend de \vec{j} via un terme de la forme $\vec{j} \wedge \vec{u}$. Le produit vectoriel dépendant de l'orientation de l'espace, une symétrie négative⁴ de \vec{j} est une antisymétrie de \vec{B} . Une symétrie positive de \vec{j} est en revanche une symétrie de \vec{B} .

Cependant, se placer dans l'ARQS ne signifie pas pour autant négliger toutes les dérivées temporelles des équations de Maxwell [6] et donc utiliser les équations de l'électromagnétisme statique. En particulier, il est souvent affirmé que le courant de déplacement est négligeable dans l'ARQS en comparant les différents termes des équations de Maxwell de la manière suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\tilde{E}}{\ell} \approx \frac{\tilde{B}}{T} \Rightarrow \frac{\tilde{E}}{\tilde{B}} \approx \frac{\ell}{T} \quad (1.27)$$

$$\frac{\|\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}\|} \approx \frac{\tilde{E}/T}{c^2 \tilde{B}/\ell} \approx \left(\frac{\ell}{cT} \right)^2 \ll 1 \quad (1.28)$$

en notant \tilde{E} et \tilde{B} les ordres de grandeurs des champs \vec{E} et \vec{B} . Sauf que dans le cas d'un condensateur en régime lentement variable, on vérifie qu'il existe bel et bien un champ magnétique entre les armatures, créé par le terme de courant de déplacement alors que $\vec{j} = 0$ entre les armatures. On est donc face à un cas de régime lentement variable pour \vec{B} non descriptible par l'équation de la magnétostatique [6]. Le loup réside dans l'ordre de grandeur abusif de $\|\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}\| \approx \tilde{B}/\ell$ puisqu'un rotationnel est une différence de dérivées partielles du type $\partial_x \vec{B}_y - \partial_y \vec{B}_x$ et donc peut être d'ordre beaucoup plus petit qu'au premier abord voire identiquement nul⁵ [6]. Les ordres de grandeur ci-dessus ne peuvent donc être valables.

Cette constatation expérimentale nous pousse à revenir aux hypothèses de départ. L'ARQS est définie dans la jauge de Lorenz⁶. Les équations que nous utilisons pour raisonner sur le cas du condensateur en ARQS proviennent des solutions des potentiels retardés, écrites dans la jauge de Lorenz. Or, fondamentalement, même avec une hypothèse

4. Une isométrie négative transforme une base directe de l'espace en une base indirecte : symétrie par rapport à un plan par exemple ; une rotation est une isométrie positive.

5. Par exemple, dans le cadre de l'électrostatique on a $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ ce qui n'empêche pourtant pas d'avoir des rapports \tilde{E}/ℓ très intenses à proximité d'une charge ponctuelle par exemple. Donc assimiler $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}$ à \tilde{E}/ℓ peut être faux.

6. Elle ne peut être définie dans la jauge de Coulomb car dans cette jauge le potentiel électrique ne se propage pas.

de régime lentement variable, dans cette jauge on retrouve l'équation de Maxwell-Ampère complète :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\text{grad}} \text{ div } \vec{A} - \vec{\Delta} \vec{A} \approx \vec{\text{grad}} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \mu_0 \vec{j} \approx \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq \mu_0 \vec{j} \quad (1.29)$$

à l'aide des équations 1.11 (jauge de Lorenz) et 1.19 ($\vec{\Delta} \vec{A}$ en ARQS). Dans cette expression le courant de déplacement est a priori non négligeable sans connaître le vrai rapport entre \tilde{E} et \tilde{B} puisqu'il est directement issu de la condition de jauge de Lorenz.

En résumé, supposer que l'équation de la magnétostatique est valable en ARQS en toute situation est faux à cause du choix de jauge initial dont sont issus les équations [6], et négliger brutalement les dérivées temporelles peut être trompeur. La différence entre l'ARQS et le régime statique est donc subtile mais bien réelle, et nous pousse à établir une description plus fine de l'électromagnétisme en ARQS.

1.4 Les deux limites de l'électromagnétisme en ARQS

1.4.1 Existence de deux limites

Pour analyser précisément les propriétés des champs quasi-stationnaires et donner des variantes simplifiées des équations de Maxwell en ARQS, il est nécessaire d'introduire des approximations supplémentaires en comparant des grandeurs de même dimension, comme réalisé exhaustivement dans la référence [6] reprise ici. On peut en former quatre paires : cT et ℓ , $c\tilde{B}$ et \tilde{E} , $\tilde{\rho}c$ et \tilde{j} , $c\tilde{A}$ et \tilde{V} . Les grandeurs tildées font référence à l'ordre de grandeur de la quantité physique considérée.

Dans le cadre de l'ARQS, on suppose pour le premier couple $\ell/cT \ll 1$, ce qui permet de simplifier le calcul des potentiels. Pour obtenir des propriétés approximatives sur les champs et les relier à celles des champs statiques il faut imposer une seconde inégalité forte sur l'un ou l'autre des couples. Il est plus commode de s'intéresser au couple $(\tilde{\rho}c, \tilde{j})$ car les sources sont en général une donnée du problème. On introduit les paramètres sans dimension :

$$\epsilon = \frac{\ell}{cT} \ll 1, \quad \xi = \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho}c} \quad (1.30)$$

Dans le cas quasi-stationnaire, on peut utiliser les expressions 1.18 de V et \vec{A} pour obtenir les ordres de grandeurs suivants :

$$\tilde{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\tilde{j}\mathcal{V}}{\ell}, \quad \tilde{V} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tilde{\rho}\mathcal{V}}{\ell} \quad (1.31)$$

avec \mathcal{V} le volume occupé par les sources. On en déduit :

$$\frac{c\tilde{A}}{\tilde{V}} \approx \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho}c} = \xi \quad (1.32)$$

Puis avec les expressions de \tilde{E} 1.23 et \tilde{B} 1.21 on obtient en ARQS :

$$\frac{\tilde{E}}{c\tilde{B}} \approx \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\tilde{\rho}}{\ell^2} - \frac{\tilde{j}}{c^2 T \ell} \right)}{\frac{c\mu_0}{4\pi} \frac{\tilde{j}}{\ell^2}} = \frac{\frac{c\tilde{\rho}}{\ell^2} - \epsilon \frac{\tilde{j}}{\ell^2}}{\frac{\tilde{j}}{\ell^2}} = \frac{c\tilde{\rho}}{\tilde{j}} - \epsilon \approx \frac{1}{\xi} \quad (1.33)$$

Nous allons voir dans les paragraphes suivants que le paramètre ξ est lié à l'existence de deux limites possibles aux équations de l'électromagnétisme en ARQS, suivant que $\xi \ll 1$ ou $\xi \gg 1$, tout en ayant $\epsilon \ll 1$.

1.4.2 Régime quasi-stationnaire électrique

Soit une situation quasi-stationnaire ($\epsilon \ll 1$) où les charges dominent sur les courants ($\xi \ll 1$). C'est typiquement le cas dans un condensateur chargé. Dans une telle situation le champ électrique est prépondérant sur le champ magnétique. Comparons les deux termes de la définition de \vec{E} par les potentiels (équation 1.4) :

$$\frac{\left\| \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\|}{\|\vec{\text{grad}} V\|} \approx \frac{\tilde{A}/T}{\tilde{V}/\ell} = \frac{c\tilde{A}}{\tilde{V}} \frac{\ell}{cT} \ll \xi \epsilon \ll 1 \quad (1.34)$$

Donc dans cette situation physique le champ électrique peut s'écrire :

$$\vec{E} \approx -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E} \approx \vec{0} \quad (1.35)$$

On retrouve donc les lois de l'électrostatique. Ces conditions définissent le domaine d'applicabilité de l'électrostatique. Par contre l'équation de Maxwell-Ampère reste inchangée, on ne retrouve pas les lois de la magnétostatique car le courant de déplacement n'est pas négligeable dans cette limite :

$$\frac{\left\| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\|\mu_0 \vec{j}\|} \approx \epsilon_0 \frac{\left\| \vec{\text{grad}} \frac{\partial V}{\partial t} \right\|}{\|\vec{j}\|} \approx \frac{\epsilon_0 \tilde{V}/(\lambda T)}{\tilde{j}} \approx \frac{\epsilon \mathcal{V}}{\xi 4\pi\ell^3} \lesssim \frac{\epsilon}{\xi} \approx 1 \quad (1.36)$$

avec usuellement $\mathcal{V} \lesssim \ell^3$ si on regarde le champ en dehors de la région occupée par les sources.

1.4.3 Régime quasi-stationnaire magnétique

Soit une situation quasi-stationnaire ($\epsilon \ll 1$) où les courants dominent sur les charges ($\xi \gg 1$). C'est typiquement le cas dans un fil électrique. Dans une telle situation le champ magnétique est prépondérant sur le champ électrique. Dans ce cas le courant de déplacement est bien négligeable dans l'équation de Maxwell-Ampère. En effet on peut au préalable montrer que :

$$\frac{\left\| \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\|}{\|\vec{\text{grad}} V\|} \approx \frac{c\tilde{A}}{\tilde{V}} \frac{\ell}{cT} \approx \xi \frac{\ell}{cT} \gtrsim \xi \epsilon \approx 1 \quad (1.37)$$

donc :

$$\frac{\left\| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\|\mu_0 \vec{j}\|} \approx \epsilon_0 \frac{\left\| \vec{\text{grad}} \frac{\partial V}{\partial t} \right\|}{\|\vec{j}\|} \approx \frac{\epsilon_0 \tilde{V}/(\ell T)}{\tilde{j}} \approx \frac{\epsilon \mathcal{V}}{\xi 4\pi\ell^3} \lesssim \frac{\epsilon}{\xi} \ll 1 \quad (1.38)$$

On retrouve donc les lois de la magnétostatique : l'équation de Maxwell-Faraday reste inchangée et le courant de déplacement peut être négligé. C'est dans cette limite qu'on étudie en général les systèmes électrotechniques avec induction, et c'est donc cette limite qui est en général enseignée car source de multiples applications. Ceci s'explique par le fait qu'il est bien plus aisé de faire circuler des courants forts que de stocker des charges fortes : on a donc une prépondérance technologique de la limite magnétique qui ne doit pas faire oublier la limite électrique.

1.4.4 Tableau bilan

Sans démonstration, dans ce tableau nous allons résumer les équations de l'électromagnétisme dans les différentes limites de l'ARQS, en anticipant sur le chapitre à propos de la conduction électrique. En effet, les métaux dans l'ARQS constituent un cas particulier de la limite magnétique de l'ARQS qu'il est intéressant de faire figurer ici dès maintenant.

On retrouve dans le tableau que l'ARQS ne revient pas à négliger *toutes* les dérivées temporelles des équations de Maxwell sous prétexte que le régime est lentement variable, car sinon on ne décrit pas l'induction dans la limite magnétique, ou la propagation du champ électrique dans un condensateur dans la limite électrique. Il y a donc une différence véritable entre le régime statique et le régime de l'ARQS (voir aussi section 1.3.2).

De plus, l'origine des deux limites de l'ARQS est en réalité étroitement liée à la nature profondément relativiste de l'électromagnétisme. En effet, discuter des limites des transformations relativistes des champs mène aussi à deux cas qui correspondent aux transformations galiléennes des champs valables dans les limites magnétique et électrique [6, 7]. C'est pourquoi les transformations des champs et sources d'un référentiel \mathcal{R} à un référentiel \mathcal{R}' dans la limite non relativiste sont aussi précisées dans ce tableau (avec les notations ').

Il est à noter que les transformations galiléennes des champs \vec{E} et \vec{B} dans la limite magnétique peuvent se retrouver à partir de l'écriture de la conservation de la force de Lorentz par changement de référentiel dans le contexte non relativiste. S'il existait des monopôles magnétiques dans la nature, alors l'étude de la force duale s'appliquant aux charges magnétiques permettrait de retrouver les transformations galiléennes des champs \vec{E} et \vec{B} dans la limite électrique. Mais la nature introduit ici une dissymétrie entre les champs \vec{E} et \vec{B} qui fait que l'étude non relativiste sur la force de Lorentz ne mène qu'à une des deux limites.

	Cas $\tilde{\rho}c \gg \tilde{j}$	Cas $\tilde{\rho}c \ll \tilde{j}$	Métaux
Équations	$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{rot } \vec{E} \approx \vec{0}$ $\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ + force de Lorentz	$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}$ + force de Lorentz	$\text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}$ + force de Lorentz
ARQS	limite électrique $c\tilde{B} \ll \tilde{E}$	limite magnétique $c\tilde{B} \gg \tilde{E}$	limite magnétique et métallique si $T \gg \tau \gg 1/\omega_p$
Transformations galiléennes	$\vec{E}' = \vec{E}, \quad \vec{B}' = \vec{B} - \vec{u} \wedge \vec{E}/c^2$ $\vec{A}' = \vec{A} - V \vec{u}/c^2, \quad V' = V$ $\rho' = \rho, \quad \vec{j}' = \vec{j} - \rho \vec{u}$	$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}, \quad \vec{B}' = \vec{B}$ $\vec{A}' = \vec{A}, \quad V' = V - \vec{u} \cdot \vec{A}$ $\rho' = \rho - \vec{u} \cdot \vec{j}/c^2, \quad \vec{j}' = \vec{j}$	idem
Choix de jauge	jauge de Lorenz $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$	jauge de Coulomb $\text{div } \vec{A} \approx 0$	idem
Conséquences physiques	Électrostatique $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow i = \frac{dq}{dt}$ $\vec{E} \approx -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow U = \frac{q}{C}$	Magnétostatique $\text{div } \vec{j} = 0 \Rightarrow \text{loi des noeuds}$ $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \text{induction}$	Loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E} \Rightarrow u = Ri$ Loi d'Ohm généralisée $u = Ri - e$

TABLE 1 – Bilan de l'électromagnétisme dans l'ARQS. Les transformations galiléennes sont étudiées entre deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme de vitesse \vec{u} dans \mathcal{R} . Dans le cas des métaux, on introduit τ le temps caractéristique d'interaction entre les électrons et les ions métalliques du modèle de Drude, σ_0 la conductivité statique et ω_p la pulsation plasma. Au passage on introduit aussi rapidement u la tension électrique, i le courant électrique, R la résistance électrique, q et C la charge électrique et la capacité d'un condensateur. Le terme e désigne la tension émotrice d'induction.

2 Électrocinétique

Les notions fondamentales de l'électrocinétique à l'agrégation : des notions particulières abordées dans ce chapitre peuvent apparaître dans les épreuves suivantes :

- LP10 : Induction électromagnétique. (éventuellement pour la loi d'Ohm généralisée ou les bobines)
- MP19 : Effets capacitifs.
- MP20 : Induction, auto-induction.
- MP33 : Régimes transitoires.

2.1 De l'électromagnétisme à l'électrocinétique

L'électrocinétique est l'émanation directe des lois de l'électromagnétisme et de la conduction électrique dans les métaux, dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS). Elle étudie le comportement des circuits électriques et le déplacement de l'électricité dans ces circuits. C'est donc aussi la base de l'électronique, qui elle se définit plutôt comme la science du traitement des signaux électriques et du transport de l'information via l'électricité et grâce à des assemblages astucieux de fonctions électrocinétiques.

Définition 2.1. *Les grandeurs fondamentales de l'électrocinétique sont :*

- *la tension électrique u , exprimée en Volts, définie par la circulation du champ électrique \vec{E} sur un chemin Γ :*

$$u = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.1)$$

- *l'intensité électrique i , exprimée en Ampère, définie par le flux de densité volumique de courants \vec{j} traversant une surface \mathcal{S} :*

$$i = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (2.2)$$

- *la charge électrique q , exprimée en Coulomb, définie par l'intégrale sur un volume \mathcal{V} de la densité volumique de charges ρ :*

$$q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau \quad (2.3)$$

- *le flux magnétique Φ , exprimé en Weber, défini par le flux de \vec{B} à travers une surface \mathcal{S} ou la circulation de \vec{A} le long du chemin fermé Γ défini par \mathcal{S} :*

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (2.4)$$

Ces quatre grandeurs sont les images intégrales des champs locaux électromagnétiques fondamentaux \vec{E} et \vec{B} (ou des potentiels V et \vec{A}), et de leurs sources ρ (la densité volumique de charges) et \vec{j} (la densité volumique de courants).

	charge q	current i	voltage v	magnetic flux φ
charge q		$q = \int i dt$	capacitance $q = Cv$ + -	memristance $q = \frac{\varphi}{M}$ -
current i	$i = \frac{dq}{dt}$		resistance $i = \frac{v}{R}$ -VVV-	inductance $i = \frac{\varphi}{L}$ -~~~~-
voltage v	capacitance $v = \frac{q}{C}$ + -	resistance $v = Ri$ -VVV-		$v = \frac{d\varphi}{dt}$
magnetic flux φ	memristance $\varphi = Mq$ -	inductance $\varphi = Li$ -~~~~-	$\varphi = \int v dt$	

FIGURE 1 – Relations entre les quantités fondamentales de l'électrocinétique et composants de base (*Source : <https://www.nextbigfuture.com/>*).

Mathématiquement, il existe six façons indépendantes de relier ces grandeurs deux à deux. Cinq des relations exploitent les lois fondamentales de l'électromagnétisme et de la conduction électrique. Dans l'ordre on retrouve :

- la loi de Faraday $e = -d\Phi/dt$
- la conservation de la charge électrique :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow 0 = \iiint_V d\tau \operatorname{div} \vec{j} + \frac{d}{dt} \iiint_V \rho d\tau = \iint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{dq}{dt}, \quad (2.5)$$

- la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$
- l'électrostatique appliquée à deux plans chargés
- la magnétostatique appliquée à un bobinage

Ces lois originelles ne sont pour la plupart valides que dans le cadre de l'ARQS. Par conséquent toute l'électronique usuelle n'est valable que dans le cadre de l'ARQS aussi, *i.e.* pour des signaux dans un circuit électrique de taille ℓ petite devant les longueurs d'onde λ en jeu⁷ taille ($\ell \ll \lambda = c/f$ avec c la vitesse de la lumière), et de fréquences f petites devant le temps de relaxation caractéristique de la conduction électrique dans les métaux $1/\tau \approx 10^{14}$ Hz, .

On en déduit cinq relations linéaires simples entre les quatre quantités fondamentales. Deux des grandeurs sont les variations temporelles de grandeurs associées :

- la tension est liée à une variation temporelle de flux magnétique : $d\Phi = -udt$
- l'intensité est une variation temporelle de charge : $dq = idt$.

Les trois autres relations sont des rapports de ces grandeurs et les composants fondamentaux de l'électronique vérifient, chacun, une de ces relations :

- la résistance : $u = R \times i$, avec R la résistance exprimée en Ohm ;

7. Pour un circuit de $\ell \approx 1$ m, on doit avoir $f \ll 300$ MHz.

- le condensateur : $q = C \times u$, avec C la capacité exprimée en Farad ;
- la bobine : $\Phi = L \times i$, avec L l'inductance exprimée en Henry ;

et la sixième relation doit être réalisée par :

- le memristor : $\Phi = M \times q$, avec M la memristance exprimée en Ohm.

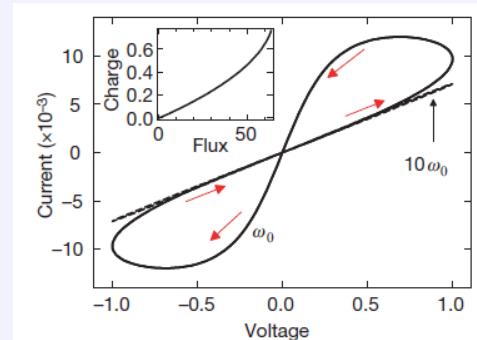
Le fonctionnement des trois premiers composants est détaillé section 2.5. On voit que ce sont bien les composants fondamentaux de l'électronique puisqu'ils relient deux à deux de façon simple (linéaire) les quatre grandeurs fondamentales de l'électronique. Ils réalisent donc les fonctions de base qui permettent les conversions fondamentales d'une grandeur à l'autre pour aboutir *in fine* à la création de fonctions électroniques complexes.

Le cas du memristor

Le memristor est un des quatre composants fondamentaux de l'électronique. Il a été théorisé en 1971 seulement par Leon Chua et finalement créé en 2008 par les laboratoires HP. Le memristor, comme son nom l'indique, est une sorte de résistance variable dont la valeur faible ou forte peut représenter des bits 0 ou 1 et donc former une mémoire informatique. Les prototypes actuels promettent des densités de mémoire bien plus importantes qu'avec les technologies de mémoire flash à base de transistors au silicium. Son caractère passant ou bloquant permet aussi de l'assimiler à un transistor et de l'utiliser pour du calcul.

Plus précisément, un courant de contrôle peut permettre d'imprimer une valeur de résistance au memristor et de l'y figer. A chaque instant le memristor se comporte comme une résistance (loi d'Ohm), mais sa résistivité dépend de son histoire comme on peut le voir sur la caractéristique tension-courant ci-dessous (phénomène d'hystérésis).

Ce comportement n'est pas sans rappelé celui des synapses du cerveaux, qui sont d'autant plus passantes entre deux neurones qu'elles sont utilisées. C'est pourquoi ces composants trouvent des applications dans la création de réseau de neurones artificiels [16] mais aussi dans la conception de nouvelles puces où transistors et mémoires ne font plus qu'un.



Gauche : première puce à memristors programmable conçue par l'université du Michigan en juillet 2019 (*Source* : <https://news.umich.edu/>). Droite : caractéristique d'un memristor (*Source* : *Nature Letters*, May 2008, Vol 453).

Un circuit électrique est la combinaison des composants de base dans le but de réaliser une fonction précise. On appelle *nœud* une borne commune à plus de deux dipôles (exemple du point N_1 figure 2). Une *branche* du circuit est une portion du circuit comprise entre deux nœuds consécutifs (par exemple $N_1 N_3$). Enfin une *maille* est l'ensemble

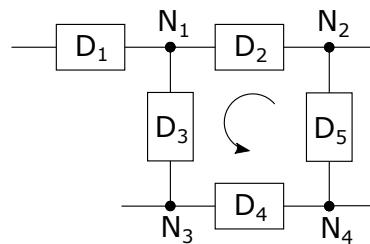


FIGURE 2 – Schéma de principe d'un circuit électrique constitué de dipôles.

des branches successives définissant un circuit fermé qui ne passe qu'une seule fois par les nœuds rencontrés ($N_1 N_3 N_4 N_2$ par exemple).

Les circuits électriques peuvent être étudiés dans différents régimes. Dans le *régime continu* (DC) toutes les grandeurs électriques sont constantes. Le régime variable est un cas général où les grandeurs peuvent varier dans le temps, mais un régime plus intéressant à étudier est le *régime sinusoïdal ou alternatif* (AC). Dans ce cas les grandeurs électriques peuvent être décrites par des fonctions sinusoïdales du temps, ou des sommes de fonctions sinusoïdales.

Définition 2.2. On définit la valeur efficace (ou RMS en anglais) d'une grandeur électrique $g(t)$ périodique de période T par :

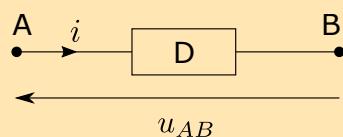
$$G_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T g^2(t) dt}. \quad (2.6)$$

Pour une grandeur purement sinusoïdale d'amplitude G_{max} , on a $G_{\text{eff}} = G_{\text{max}}/\sqrt{2}$.

2.2 Propriétés générales des dipôles électrocinétiques

2.2.1 Tension et courant

Définition 2.3. On appelle dipôle électrocinétique un composant électrique comportant deux bornes, A et B, l'une d'entrée et l'autre de sortie, comme sur la figure ci-dessous :



Le dipôle peut être parcouru par un courant électrique i . On note u_{AB} la tension électrique entre les bornes A et B du dipôle D :

$$u_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.7)$$

Cette définition du courant aux bornes d'un dipôle est subtilement différente de la différence de potentiels aux bornes de ce dipôle comme nous allons le voir section 2.4.2.

Propriété 2.4. *Le courant électrique i à l'entrée du dipôle est identique à celui en sortie.*

En effet dans l'ARQS en limite magnétique, on a $\operatorname{div} \vec{j} = 0$. Considérons le tube de lignes de courant allant de A à B de volume \mathcal{V} . On note \mathcal{S}_A et \mathcal{S}_B les surfaces orthogonales au tube en A et B , et Σ la surface extérieure délimitée par les lignes de courant. Alors :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{j} = \iint_{\mathcal{S}_A \cap \Sigma \cap \mathcal{S}_B} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}_A} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_{\mathcal{S}_B} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.8)$$

Le flux de courant à travers Σ est nul par définition du tube de lignes de courant. Si on oriente dans le même sens les deux surfaces \mathcal{S}_A et \mathcal{S}_B , alors avec l'égalité précédente on obtient l'égalité des courants électriques en A et B :

$$i_A = \iint_{\mathcal{S}_A} \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\mathcal{S}_B} \vec{j} \cdot d\vec{S} = i_B \equiv i \quad (2.9)$$

Dans le cadre de l'ARQS électrique, la situation se complique. Néanmoins ce cas limite ne s'applique essentiellement qu'aux condensateurs. Soit \mathcal{V} un volume englobant la totalité d'un composant du type condensateur. Ces composants sont construits neutres électriquement et le restent globalement. Donc si on note ρ_+ (ρ_-) la densité volumique de charges portée par l'armature chargée positivement (négativement), alors globalement on a :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{j} = \iint_{\mathcal{S}_A} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_{\mathcal{S}_B} \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho_+ + \rho_-)}{\partial t} = - \frac{d(Q_+ + Q_-)}{dt} = 0 \quad (2.10)$$

à cause de la neutralité globale du dipôle (égalité des charges électriques totales $Q_+ = -Q_-$). Donc de même $i_A = i_B = i$ dans l'ARQS en limite électrique pour un dipôle demeurant globalement neutre. Ceci est faux si on ne considère qu'une seule des armatures dans \mathcal{V} , car alors il y a un courant d'entrée mais aucun courant de sortie, et l'armature se charge.

La *caractéristique tension-courant* d'un dipôle est la fonction ou le graphique liant les variations de i en fonction de u_{AB} . C'est véritablement ce qui caractérise le comportement du dipôle dans le circuit électrique : à chaque dipôle sa caractéristique.

2.2.2 Notion d'impédance

Définition 2.5. *Un dipôle est dit linéaire lorsqu'il existe une relation affine entre i et u_{AB} ou une équation différentielle linéaire à coefficients constants reliant i et u_{AB} .*

Cette notion sera plus largement abordée au chapitre 3.

Définition 2.6. *L'impédance complexe \underline{Z} d'un dipôle électrocinétique linéaire parcouru par un courant \underline{i} sous une tension \underline{u}_{AB} est définie par une généralisation de la loi d'Ohm :*

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{u}_{AB}}{\underline{i}}} \quad (2.11)$$

L'impédance s'exprime en Ohms. La quantité $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ est appelée admittance.

L'*impédance électrique* mesure l'opposition d'un circuit électrique au passage d'un courant alternatif sinusoïdal. Pour étudier le régime sinusoïdal, il est pratique d'utiliser les notations complexes pour les grandeurs électriques, généralement en les soulignant.

Posons la tension $\underline{u}_{AB}(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u)$ et le courant $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i)$ de pulsation $\omega = 2\pi f$ et de phases respectives φ_u et φ_i . Alors le module de l'impédance donne le rapport des amplitudes de la tension et du courant tandis que l'argument donne le déphasage de l'un par rapport à l'autre :

$$|\underline{Z}| = \frac{U}{I}, \quad \text{Arg}(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i. \quad (2.12)$$

Une impédance peut aussi être représentée comme la somme d'une partie réelle et d'une partie imaginaire :

$$\underline{Z} = R + jX \quad (2.13)$$

avec la *résistance* R et la *réactance* X . Une réactance positive sera qualifiée d'*inductive* tandis qu'une réactance négative sera qualifiée de *capacitive*. En électronique on note souvent les courants par la lettre i pour intensité, et par conséquent on préfère noter le nombre imaginaire avec la lettre j tel que $j^2 = -1$.

2.2.3 Notion de puissance

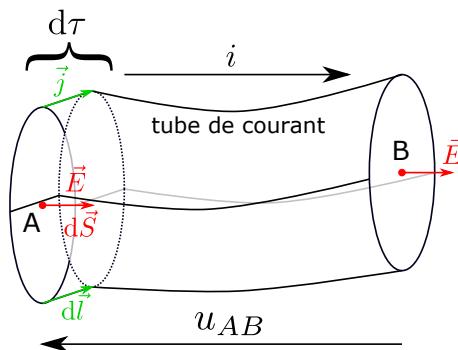


FIGURE 3 – Schéma de calcul pour la puissance algébrique instantanée avec la convention d'un dipôle récepteur.

En electrocinétique on utilise la convention algébrique thermodynamique [12]. En thermodynamique, il est d'usage de compter positivement l'énergie reçue par le système d'étude, négativement l'énergie cédée par le système au milieu extérieur. Une convention algébrique d'orientation des tensions et courants permet d'être en accord avec la convention thermodynamique. En effet, à l'aide des lois de l'électromagnétisme, le travail exercé par le champ électrique sur les charges en circulation dans le dipôle permet de définir la *puissance algébrique instantanée* reçue par le dipôle D par :

$$\mathcal{P} = u_{AB} i \quad (2.14)$$

Or cette formule a une origine vectorielle, quelque soit le dipôle considéré. Pour s'en convaincre, démontrons-la pour un conducteur ohmique. Soit un élément infinitésimal $d\tau$ du volume \mathcal{V} du dipôle avec des faces élémentaires $d\vec{S} = dS\vec{n}_S$ alignées selon des lignes de champs \vec{E} et une troisième dimension $d\vec{l} = dl\vec{n}_l$ alignée selon les lignes de courant (donc $d\tau = d\vec{l} \cdot d\vec{S}$) (voir figure 3). La puissance volumique fournie par un champ électromagnétique à des porteurs de charge s'écrit :

$$d\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau \quad (2.15)$$

En permutant les facteurs scalaires, on obtient :

$$d\mathcal{P} = (j\vec{n}_l \cdot E\vec{n}_S) (dl\vec{n}_l \cdot dS\vec{n}_S) = (j\vec{n}_l \cdot dS\vec{n}_S) (dl\vec{n}_l \cdot E\vec{n}_S) = (\vec{j} \cdot d\vec{S}) (\vec{E} \cdot dl) \quad (2.16)$$

Avant de passer à l'intégrale le long d'une ligne de champ d'un point A à un point B , notons que \vec{j} est de divergence nulle dans l'ARQS (au moins à l'échelle globale du dipôle) donc i ne dépend pas de la position dl le long d'une ligne de champ. Ainsi, l'intégrale se factorise :

$$\mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{V}} d\mathcal{P} = \left(\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \right) \times \left(\int_A^B \vec{E} \cdot dl \right) = i \times u_{AB} \quad (2.17)$$

Comme il n'est pas commode de schématiser des grandeurs négatives par des flèches, on définit deux conventions pratiques pour schématiser les dipôles. La convention récepteur est celle représentée avec des flèches de sens contraires et donnant une puissance algébrique reçue positive via le travail des porteurs de charge. Au contraire, dans la convention générateur, les flèches de tension et de courant (définies positivement) sont de même sens ($\mathcal{P} = u_{AB}i_{A \rightarrow B} = -u_{AB}i_{B \rightarrow A} < 0$) et le dipôle cède de l'énergie à l'extérieur.

Définition 2.7. Pour un dipôle D quelconque connecté à un circuit extérieur, courant d'intensité i et tension u_{AB} sont dits orientés positivement en sens inverse si les flèches qui les représentent sont tête-bêche. Dans cette représentation, nous pouvons distinguer alors deux types de dipôles électrocinétiques :

- **dipôle récepteur** : le dipôle reçoit de l'énergie électrique et la convertit en une autre forme d'énergie (chaleur, énergie magnétique, énergie mécanique...)

$$\mathcal{P} > 0 \text{ si } u_{AB} > 0, i > 0 \text{ ou } u_{AB} < 0, i < 0 \quad (2.18)$$

- **dipôle générateur** : le dipôle cède de l'énergie électrique au circuit en convertissant une autre forme d'énergie (énergie chimique, énergie mécanique...)

$$\mathcal{P} < 0 \text{ si } u_{AB} > 0, i < 0 \text{ ou } u_{AB} < 0, i > 0 \quad (2.19)$$

Pour ce dernier, il est alors plus commode d'utiliser une représentation générateur afin que les quantités portées par les flèches soient considérées positives.

Expressions de la puissance : la puissance instantanée reçue par un dipôle est :

$$\boxed{\mathcal{P}(t) = u_{AB}(t)i(t)} \quad (2.20)$$

Considérons maintenant des signaux périodiques. Aux bornes d'une impédance linéaire \underline{Z} , on peut simplifier l'étude à l'une des composantes de Fourier de ces signaux, de pulsation ω . La puissance moyenne reçue par le dipôle est alors :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}(t) \rangle &= \langle U \cos(\omega t + \varphi_u) \times I \cos(\omega t + \varphi_i) \rangle \\ &= \frac{1}{2} UI \langle \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i) \rangle \\ &= \frac{1}{2} UI \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{1}{2} UI \cos \varphi = \frac{1}{2} UI \cos(\text{Arg}(\underline{Z})) = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\text{Arg}(\underline{Z})) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le terme $\cos \varphi$ est appelé *facteur de puissance*. Si on écrit l'impédance comme $\underline{Z} = R + jX$, alors on a :

$$\cos \varphi = \frac{R}{|\underline{Z}|} \quad (2.22)$$

D'où la puissance moyenne :

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle = \frac{1}{2} UI \cos \varphi = \frac{1}{2} |\underline{Z}| I \times I \cos \varphi = RI_{\text{eff}}^2 \quad (2.23)$$

C'est la partie réelle de l'impédance qui intervient dans la puissance reçue par le dipôle⁸.

Dipôles actifs ou passifs : un dipôle passif, toujours récepteur, est incapable de provoquer lui-même le passage d'un courant. Plus mathématiquement, un dipôle passif présente une caractéristique tension-courant passant par l'origine ($i = 0$ pour $u_{AB} = 0$), un dipôle actif non. Un dipôle actif, capable d'imposer le sens du courant, se comporte comme un générateur. Ainsi si la caractéristique tension-courant présente un point $u_{AB}(i = 0) \neq 0$, cela signifie que le dipôle est capable d'imposer une tension électrique à ses bornes sans qu'il soit traversé par un courant⁹. Inversement, s'il la caractéristique tension-courant présente un point $i(u_{AB} = 0) \neq 0$, cela signifie que le dipôle est capable d'imposer un courant électrique sans qu'il soit alimenté par une tension électrique.

Définition 2.8. *Un dipôle actif linéaire possède une caractéristique tension-courant affine ne passant pas par l'origine. On peut donc distinguer trois cas pour décrire les dipôles actifs linéaires :*

- $\forall i, u_{AB} = \text{constante}$: le dipôle est une source de tension idéale
- $\forall u_{AB}, i = \text{constante}$: le dipôle est une source de courant idéale
- les cas intermédiaires : ce sont des sources de courant/tension réelles

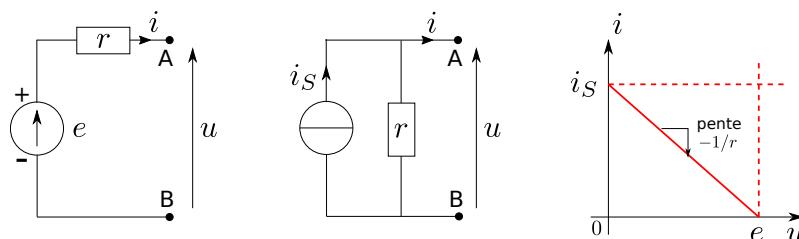


FIGURE 4 – Schémas électriques d'une source de tension réelle (gauche) et d'une source de courant réelle (milieu). Les caractéristiques des sources de tension et de courant idéales (en trait pointillés) et réelles (en trait plein) sont représentées à droite.

Pour qu'un circuit électronique fonctionne, il faut en général disposer d'une source de tension ou de courant (figure 4). Une source de tension idéale désigne un dispositif capable de générer une force électromotrice e , indépendante du courant électrique i débité.

8. Comme on le verra par la suite, les impédances des condensateurs et les inductances sont des imaginaires purs : par conséquent ils ne consomment pas d'énergie en moyenne mais stockent et échangent sans cesse de l'énergie avec le circuit.

9. Par exemple une pile électrique chimique en dehors d'un circuit électrique présente une tension à ses bornes sans toutefois délivrer un courant.

Elle peut être une pile, un générateur électromécanique, une alimentation stabilisée ou ajustable... Une source de courant idéale peut produire un courant électrique constant i_S pour une plage de tension donnée (par exemple le transistor). Les sources idéales sont représentées symboliquement dans un circuit électrique comme dans la figure 4, et les sources réelles peuvent être modélisées par l'adjonction d'une résistance¹⁰ r en série (faible pour une source de tension) ou en parallèle (forte pour une source de courant).

Propriété 2.9. *D'après la figure 4, les caractéristiques tension-courant des sources de tension ou de courant réelles sont alors :*

$$u = e - ri \text{ (modèle de Thévenin),} \quad i = i_S - \frac{u}{r} \text{ (modèle de Norton).} \quad (2.24)$$

Ces caractéristiques représentent le même dipôle si $i_S = e/r$. Dans ce cas l'une ou l'autre représentation peut être choisie pour modéliser le dipôle en fonction du circuit extérieur qui lui est connecté.

2.3 Masse et terre

Définition 2.10. *La masse désigne la partie conductrice d'un circuit électrique dont le potentiel servira de référence pour toutes les mesures de tensions électriques. Par commodité on lui attribue souvent le potentiel 0 V.*

Il s'agit donc *a priori* d'un choix arbitraire réalisé par un individu lorsqu'il souhaite chiffrer les tensions dans un schéma électrique. Par exemple, sur un vélo dont les phares sont alimentés par une dynamo, pour économiser un fil de retour de courant c'est le cadre métallique qui est choisi pour jouer le rôle de masse. Le rôle de la dynamo est alors de générer une différence de potentiel entre le cadre et un fil électrique. Dans les voitures, c'est aussi la carrosserie métallique qui sert de masse au circuit électrique, et donc de référence pour toutes les tensions électriques nécessaires au fonctionnement de la voiture. Pour les trains à traction électrique, c'est le rail, relié à la Terre, qui sert de masse et de retour de courant alors que la caténaire est à un potentiel électrique plus élevé (en tension continue).



FIGURE 5 – Symboles électriques de la masse (gauche) et de la terre (droite).

Pour des raisons de solidité ou d'isolation électromagnétique, beaucoup d'appareils électriques possèdent une carcasse métallique. Dans le cadre de la protection des personnes et des équipements (risque d'électrocution et d'incendie), ceci présente un danger si chacun définit sa référence de potentiel sans se préoccuper du contexte dans lequel l'appareil est utilisé : l'arbitraire de ce choix est normé pour des raisons de sécurité. En terme légal, selon le décret 88-1056 du 14 novembre 1988, la définition de la masse est :

10. Ici on anticipe un tout petit peu sur les propriétés des résistances et les théorèmes généraux de l'électronique...



FIGURE 6 – *Gauche* : pour relier des carcasses et des circuits à la masse, la connexion doit être la plus courte possible, et avoir une surface de contact maximale, donc par sa forme en nappe, la tresse de masse est le conducteur le plus adapté à cette utilisation. *Droite* : piquet de terre en acier galvanisé (environ 60 cm de long) planté dans le sol au pied d'une maison (on remarque le fil normalisé rayé vert et jaune de mise à la terre).

"Masse : partie conductrice d'un matériel électrique susceptible d'être touchée par une personne, qui n'est pas normalement sous tension mais peut le devenir en cas de défaut d'isolation des parties actives de ce matériel."

Si nous touchons une partie métallique dont le potentiel électrique est différent de celui de la Terre, un courant traverse notre corps, qui est conducteur, vers la Terre, via nos pieds¹¹. Si la différence de potentiel est forte, ce courant peut causer des dommages importants (un courant de 30 mA à travers le corps peut être mortel¹²). Pour tout appareil électrique, il n'est pas impossible que sa carcasse métallique soit accidentellement en contact avec une partie du circuit électrique interne et se trouve à un potentiel très différent de celui de la Terre, d'où un danger d'électrocution lié à l'utilisation d'appareils électriques reliés au secteur. La définition légale de la masse impose donc que le fonctionnement normal de l'appareil fasse en sorte que la masse soit au même potentiel que la Terre. La liberté de pouvoir choisir un potentiel électrique de référence est acquise grâce à l'invariance de jauge de l'électromagnétisme. Les députés peuvent en profiter et définir la *terre* en terme électrique ainsi :

"Terre : masse conductrice de la terre, dont le potentiel électrique en chaque point est considéré comme égal à zéro."

toujours selon le décret 88-1056 du 14 novembre 1988. Il découle de cette définition que le potentiel 0 V est celui de la Terre et que la terre est un conducteur parfait de résistance nulle. Les symboles représentant la masse et la terre dans un circuit électrique sont représentés figure 5. *Stricto sensus* ce sont donc deux choses différentes, mais en pratique la masse d'un appareil peut être au potentiel de la terre pour des raisons de sécurité.

Pour protéger une installation électrique et ses usagers, toutes les parties métalliques externes doivent être reliées entre elles, l'ensemble formant la "carcasse", elle-même reliée à la Terre par l'intermédiaire de la prise de terre (les tuyauteries, radiateurs et baignoires

11. C'est la décharge électrique que l'on se prend en sortant d'une voiture si celle-ci s'est chargée électrostatiquement par les frottements de l'air (les pneus isolant la carrosserie du sol).

12. La résistance électrique du corps humain dépend de multiples facteurs, par exemple l'état de la surface de contact, l'humidité, la propreté, l'épaisseur de la peau, l'alcool dans le sang, la pression de contact, etc. La résistance du corps humain diminue aussi quand la tension augmente ou si la fréquence du courant alternatif est élevée. L'article 322-2 de la norme NFC 15-100 fixe la valeur de la résistance électrique du corps humain à 2500Ω en moyenne.

sont aussi reliés à la terre). Concrètement, le fil de terre de toutes les prises électriques se termine au pied de l'immeuble par un long pieu métallique planté dans le sol. Si par accident cette carcasse est mise à un potentiel différent de celui de la terre, alors le courant fuit par le piquet de terre. Le disjoncteur différentiel est là pour détecter la fuite et ainsi couper l'alimentation électrique.

Cas pratique des TP : Les oscilloscopes et générateurs basse fréquence (GBF) sont des appareils de précision qu'il faut isoler des bruits électromagnétiques extérieurs. C'est pourquoi ils disposent d'une carcasse métallique (qui absorbe les signaux extérieurs par effet de peau), qu'il est alors obligatoire de relier à la prise de terre par sécurité. De même l'extérieur des câbles coaxiaux est blindé par de la tresse métallique pour éviter de capter le bruit extérieur, mais ce blindage n'est efficace que s'il est au même potentiel que l'appareil auquel le câble est branché. Sur un oscilloscope les bornes extérieures des prises BNC sont donc reliées entre elles via la carcasse de l'appareil, donc à la terre.

En pratique, une fois ces appareils branchés au secteur en TP, cela implique que leurs masses et les gaines des câbles coaxiaux sont toutes reliées entre elles par l'intermédiaire de la terre, avant même d'avoir commencé à manipuler : le choix d'un autre potentiel de référence n'est pas possible, une masse commune est imposée. Si jamais il est nécessaire de s'affranchir de cela, il faut utiliser un transformateur d'isolement ou des appareils à masse flottante, avec énormément de précautions.

2.4 Théorèmes généraux

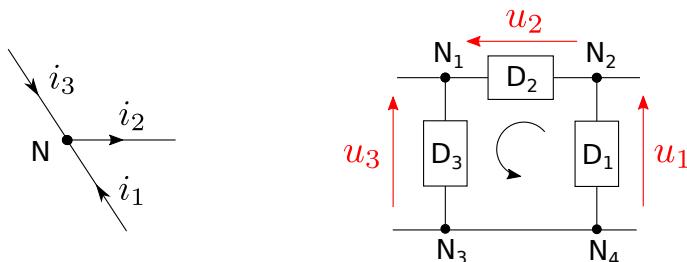


FIGURE 7 – Gauche : la loi des nœuds appliquée au nœud N donne $i_1 + i_3 - i_2 = 0$. Droite : la loi des mailles appliquée à la maille orientée $N_1N_3N_4N_3$ donne $u_1 + u_2 - u_3 = 0$.

2.4.1 Loi des nœuds

Théorème 2.11 (Loi des nœuds). Soient n conducteurs reliés à un nœud commun N , chacun parcouru par un courant $i_k(t)$. La loi de Kirchhoff relative au nœud N donne :

$$\sum_{k=1}^n \epsilon_k i_k(t) = 0, \text{ avec } \begin{cases} \epsilon_k = +1 & \text{pour un courant arrivant en } N \\ \epsilon_k = -1 & \text{pour un courant partant de } N \end{cases} \quad (2.25)$$

La loi des nœuds s'applique à un nœud du circuit et concerne les courants. On rappelle que dans un métal conducteur on applique l'ARQS en limite magnétique ou métallique donc on a $\operatorname{div} \vec{j} = 0$. La loi des nœuds découle de cette vision locale venant de l'électromagnétisme pour un système de conducteurs filaires liés en un point, et ceci fixe les conditions de validité de cette loi (ARQS).

2.4.2 Loi des mailles

Théorème 2.12 (Loi des mailles). *Soient n conducteurs formant une maille orientée arbitrairement dont chaque branche est soumise à une tension $u_k(t)$. La loi de Kirchhoff relative à cette maille donne :*

$$\sum_{k=1}^n \epsilon_k u_k(t) = 0, \text{ avec } \begin{cases} \epsilon_k = +1 & \text{pour } u_k \text{ orienté dans le sens de la maille} \\ \epsilon_k = -1 & \text{pour } u_k \text{ orienté en sens inverse} \end{cases} \quad (2.26)$$

Quelles sont les conditions de validité de cette loi ? Une petite subtilité électromagnétique s'invite ici. Dans le cas statique, la loi des mailles se retrouve en calculant la circulation de \vec{E} sur un circuit fermé Γ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \oint_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.27)$$

Seulement, en régime variable le champ électrique s'écrit de façon générale :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.28)$$

donc la loi des mailles telle que présentée ci-dessus ne serait pas valide dans le cas non stationnaire, ni même dans l'ARQS en limite magnétique. En effet, si on calcule la circulation dans une maille on obtient une loi légèrement différente.

Théorème 2.13 (Loi des mailles et flux). *Soient n conducteurs formant une maille orientée arbitrairement dont chaque branche est soumise à une tension $u_k(t)$. La loi de Kirchhoff relative à cette maille donne :*

$$\sum_{k=1}^n \epsilon_k u_k(t) = \frac{d\Phi}{dt}, \text{ avec } \begin{cases} \epsilon_k = +1 & \text{pour } u_k \text{ orienté dans le sens de la maille} \\ \epsilon_k = -1 & \text{pour } u_k \text{ orienté en sens inverse} \end{cases} \quad (2.29)$$

et Φ le flux à travers la maille orientée.

Bien entendu, dans la quasi-totalité des circuits électriques réalisés, le terme de flux est nul. Mais en toute rigueur il est présent et peut conduire à des situations perturbantes si on le cherche (voir encadré).

On rappelle que le terme $\partial \vec{A} / \partial t$ est à l'origine du phénomène d'induction, qui dans le cadre de l'ARQS magnétique permet d'aboutir à la loi d'Ohm généralisée :

$$V_A - V_B = R_{AB} i_{A \rightarrow B} - e_{AB} \quad (2.30)$$

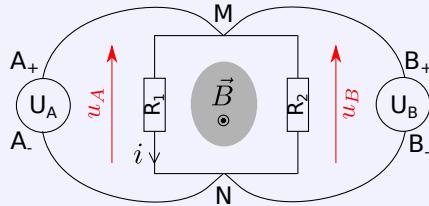
pour une branche AB de résistance R_{AB} parcourue par un courant $i_{A \rightarrow B}$. Le phénomène d'induction est synthétisé dans la tension e_{AB} appelée force électromotrice ¹³ (f.e.m) :

$$e_{AB} = - \int_{AB} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} \quad (2.31)$$

13. On rappelle que dans ce calcul implicitement le sens de e_{AB} est celui de $i_{A \rightarrow B}$.

Une expérience troublante... mais que mesure un voltmètre ?

Une expérience proposée dans les références [8, 9] est la suivante (réalisable en TP) : un circuit avec deux résistances entoure une zone où le champ magnétique est non nul et dépend du temps. En-dehors de la zone grisée, le champ magnétique est quasi nul. Qu'indiquent les deux voltmètres supposés parfaits ?



Tout d'abord les lois de l'induction donnent :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = (R_2 + R_1)i$$

Un voltmètre mesure la tension entre ses bornes donc la circulation du champ \vec{E} entre les points de mesure [9]. La tension mesurée sur la voie A est :

$$u_A = \int_{MA+-A_-N} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{MA+A_-NR_1M} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{NR_1M} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 + R_1 i = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \dot{\Phi}$$

car $\dot{\phi} = 0$ sur $MA_+A_-NR_1M$. Utiliser le chemin passant par R_2 donne le même résultat. La tension mesurée sur la voie B est :

$$u_B = \int_{MB_+B_-N} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{MB_+B_-NR_1M} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{NR_1M} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -e - R_1 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \dot{\Phi}$$

Utiliser le chemin passant par R_2 donne le même résultat. On a donc $u_A \neq u_B$ et même $u_A = -u_B$ si $R_2 = R_1$, alors que les deux voltmètres sont branchés aux mêmes points ! On voit ici que la circulation du champ \vec{E} dans les fils de mesure compte. Cette interprétation de *la tension mesurée aux bornes d'un voltmètre revient à dire qu'un voltmètre mesure la différence de potentiel à ses bornes et non aux points de mesures du circuit* [8] :

$$u_A = V_{A_+} - V_{A_-}, \quad u_B = V_{B_+} - V_{B_-}$$

En effet d'après la loi d'Ohm généralisée :

$$V_{A_+} - V_{A_-} = R_1 i - e_{A_+MR_1NA_-} \approx R_1 i - e_{A_+MR_1NA_-A_+} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \dot{\Phi} = u_A \quad (2.32)$$

Autrement dit, l'identification de la tension électrique avec la différence de potentiel électrique n'est pas toujours exacte à cause du terme $\partial \vec{A} / \partial t$, mais en pratique cette définition fonctionne lors de la mesure par les voltmètres.

La référence [10] propose alors de distinguer tension et différence de potentiel en définissant la tension électrique par :

$$u_{AB} = V_A - V_B + e_{AB} = R_{AB} i_{A \rightarrow B} \quad (2.33)$$

Une version de la loi des mailles plus générale est donc la suivante.

Théorème 2.14 (Loi des mailles généralisée). Soient n dipôles d'impédance \underline{Z}_k parcourus par des courants $\underline{i}_k(t)$ et formant une maille orientée arbitrairement. Chaque branche est soumise éventuellement à une force électromotrice $e_k(t)$. Dans cette maille, on a :

$$\sum_{k=1}^n \epsilon_k (\underline{Z}_k \underline{i}_k(t) - \underline{e}_k(t)) = 0, \text{ avec } \begin{cases} \epsilon_k = -1 & \text{pour } \underline{i}_k \text{ orienté dans le sens de la maille} \\ \epsilon_k = +1 & \text{pour } \underline{i}_k \text{ orienté en sens inverse} \end{cases} \quad (2.34)$$

Bien entendu les trois énoncés ci-dessus sont justes si on comptabilise exhaustivement toutes les tensions dans la maille. Mais une démonstration rigoureuse de la loi des mailles par les lois de l'électromagnétisme mène d'abord à la loi des mailles généralisée et fait apparaître la nécessité de se placer dans l'ARQS. Cette loi peut être ensuite transformée en la première version en comptabilisant correctement les tensions, les dipôles et surtout les f.e.m. induites dans le schéma du circuit électrique étudié.

Si on fait abstraction de ces subtilités électromagnétiques, on obtient évidemment qu'une tension électrique s'écrit couramment comme une différence de potentiel :

$$u_{AB} = V_A - V_B \quad (2.35)$$

avec A à la pointe de la flèche représentant la tension, et B à l'opposé, et la loi de maille revient à sommer les différences de potentiel sur une maille.

De la loi des mailles et loi des noeuds, on en déduit que des impédances associées en série s'ajoutent, alors que pour des impédances associées en parallèle, ce sont les admittances qui s'ajoutent :

$$\underline{Z}_{\text{série}} = \sum_k \underline{Z}_k, \quad \frac{1}{\underline{Z}_{\text{parallèle}}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}. \quad (2.36)$$

Retour sur l'expérience troublante

Cette discussion met en lumière le fait qu'en ARQS dans la limite magnétique on n'a pas toujours une identification directe entre la tension électrique et la différence de potentiel. En particulier on remarquera que la différence de potentiel calculée par la loi d'Ohm généralisée n'est pas invariante de jauge lorsque la tension e_{AB} n'est pas considérée sur un contour fermé. Donc cette grandeur est à priori inaccessible à la mesure. Sauf que le voltmètre, lui, ferme le circuit au moment de la mesure.

A ce moment là, pour que la tension électrique affichée au voltmètre représente bien la différence de potentiel électrique désirée $V_{A_+} - V_{A_-}$, il faut s'assurer qu'on a bien $e_{A_+ A_-} \approx 0$ (en reprenant l'expérience précédente équation 2.32). C'est bien le cas des voltmètres numériques ou des oscilloscopes par le principe même de leur fonctionnement. Par exemple la mesure par la déviation d'un faisceau d'électrons d'un oscilloscope analogique passant entre deux armatures chargées se décrit dans le cadre de l'ARQS en limite électrique dans laquelle on a $\vec{E} \approx -\vec{\text{grad}} V$. Pour plus de détails lire la référence [10, 8].

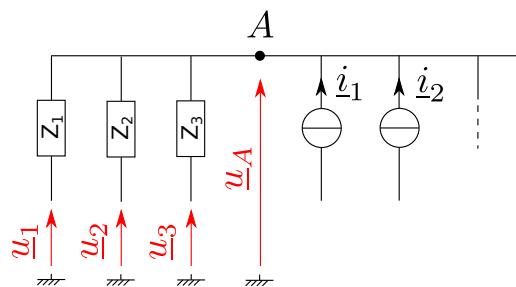


FIGURE 8 – Illustration du théorème de Millmann.

2.4.3 Théorème de Millman

Le théorème de Millmann est une variante de la loi des nœuds où l'on exprime le potentiel du nœud étudié. En utilisant les notations de la figure 8, exprimons la loi des nœuds au point A :

$$\sum_k \frac{V_k - V_A}{Z_k} + \sum_j \epsilon_j \underline{i}_j = 0 \quad (2.37)$$

Donc en utilisant la notion d'admittance on obtient :

$$\underline{V}_A = \frac{\sum_k \underline{Y}_k \underline{V}_k + \sum_j \epsilon_j \underline{i}_j}{\sum_k \underline{Y}_k} \quad (2.38)$$

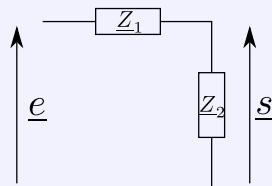
Théorème 2.15 (Théorème de Millmann). *Le potentiel électrique en un point A est le barycentre des potentiels des nœuds voisins pondérés par les admittances :*

$$\underline{V}_A = \frac{\sum_k \underline{Y}_k \underline{V}_k + \sum_j \epsilon_j \underline{i}_j}{\sum_k \underline{Y}_k}, \text{ avec } \begin{cases} \epsilon_j = +1 & \text{pour un courant arrivant en } A \\ \epsilon_j = -1 & \text{pour un courant partant de } A \end{cases} \quad (2.39)$$

Ce théorème peut servir à simplifier massivement le calcul du potentiel électrique à un nœud du circuit rejoint par plusieurs branches. En pratique, il est très utile lorsqu'il est appliqué aux bornes d'entrée d'un amplificateur opérationnel car on cherche souvent à y connaître la valeur des potentiels ¹⁴.

Le pont diviseur de tension

Le pont diviseur de tension est une configuration très classique dans les schémas électriques. Savoir la reconnaître et appliquer directement la formule associée raccourcit efficacement les calculs, surtout en sachant associer les impédances en série et en parallèle.



14. Comme on le verra le courant d'entrée dans un amplificateur opérationnel idéal est nul, mais ce n'est pas le cas à sa sortie ce qui empêche en général d'y appliquer ce théorème.

Soient deux impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 associées en série et soumises à une tension \underline{e} . La tension \underline{s} aux bornes de \underline{Z}_2 est alors :

$$\begin{cases} \text{Loi des mailles : } \underline{e} = \underline{Z}_1 i + \underline{s} \\ \text{Loi d'Ohm : } \underline{e} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) i \end{cases} \Rightarrow \underline{s} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{e} \quad (2.40)$$

Attention ! Le calcul n'est plus valable si un nœud entre les deux impédances capte une partie du courant de la maille, i.e. si une impédance de charge est branchée derrière le pont diviseur de tension.

2.4.4 Théorèmes de Thévenin et de Norton

Les théorèmes de Thévenin et de Norton sont issus du principe de superposition, valable pour des systèmes linéaires : dans un système linéaire la conséquence est la combinaison linéaire des causes. Autrement dit, dans un réseau dont tous les éléments sont linéaires, l'intensité qui circule dans un dipôle est la somme algébrique des intensités créées dans ce dipôle par chaque générateur du circuit pris séparément (les autres générateurs étant alors remplacés par leurs résistances internes).

Théorème 2.16 (Théorème de Thévenin). *Tout circuit linéaire vu de deux points est équivalent à un générateur de tension parfait, en série avec une résistance R_{Th} . La force électromotrice du générateur équivalent e_{Th} est égale à la différence de potentiels à vide entre ces deux points. La résistance équivalente R_{Th} est égale à celle que l'on mesure entre les deux points lorsque tous les générateurs indépendants sont rendus passifs.*

Théorème 2.17 (Théorème de Norton). *Tout circuit linéaire vu de deux points est équivalent à une source de courant idéale, en parallèle avec une résistance R_{Nor} .*

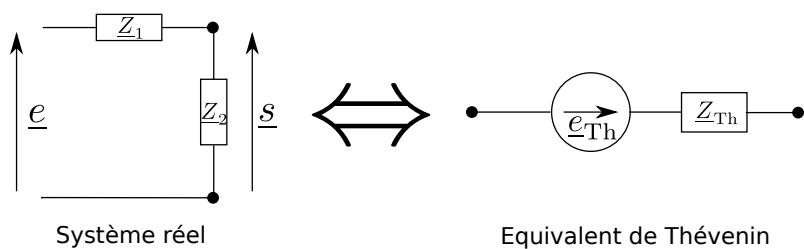


FIGURE 9 – Application du théorème de Thévenin à un pont diviseur de tension. Le générateur réel équivalent au pont diviseur de tension vu entre les deux points noirs est équivalent à un générateur de tension idéal de f.e.m. e_{Th} en série avec une impédance Z_{Th} .

Les théorèmes de Thévenin et de Norton s'appliquent à des systèmes linéaires (ou linéarisés), en régime continu ou sinusoïdal permanent (en utilisant alors les impédances). Prenons l'exemple du pont diviseur de tension (voir figure 9). La tension e_{Th} est la tension en circuit ouvert [28] donc :

$$e_{Th} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{e} \quad (2.41)$$

Pour déterminer l'impédance $\underline{Z}_{\text{Th}}$, il faut imaginer ce qui se passerait si on branchait le générateur équivalent à quelque chose, par exemple un simple fil entre les deux bornes noires (court-circuit). Le courant obtenu en court-circuitant les bornes étudiées est $i = e_{\text{Th}}/\underline{Z}_{\text{Th}}$, et dans le cas du pont diviseur de tension ce serait :

$$i = \frac{e}{Z_1} = \frac{e_{\text{Th}}}{\underline{Z}_{\text{Th}}} \Rightarrow \underline{Z}_{\text{Th}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (2.42)$$

Comme $\underline{Z}_{\text{Th}}$ est en général élevée dans un diviseur de tension, ce montage est une mauvaise source de tension, dans la mesure où sa tension de sortie $e_{\text{Th}} - \underline{Z}_{\text{Th}}i$ s'effondre rapidement si une charge est connectée au générateur de Thévenin équivalent.

Dans la figure 10 est présentée une autre façon d'appliquer concrètement ce théorème, en utilisant les équivalents générateurs tension/courant. L'objectif de cet exemple est d'étudier comment est vue la source de tension entre les deux points noirs par la résistance de charge de $4\text{k}\Omega$. On rappelle que la f.e.m. e d'un générateur de Thévenin est lié au courant i_S de son équivalent de Norton par $i_S = e/r$ où r est la résistance interne du générateur.

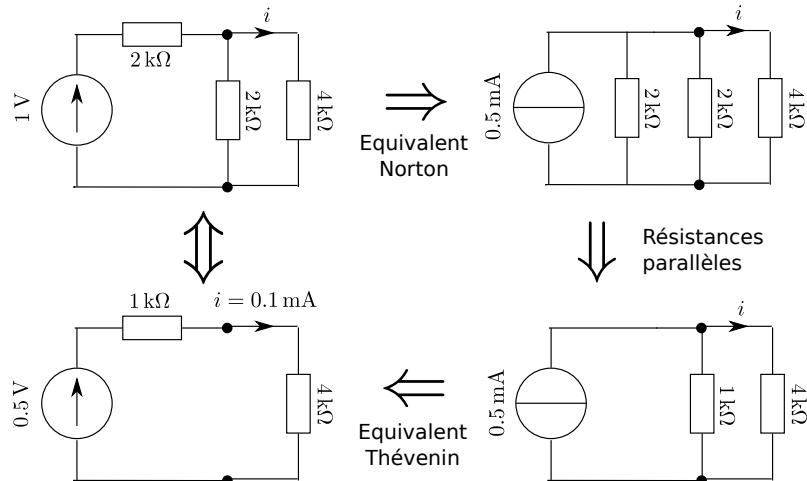


FIGURE 10 – Application du théorème de Thévenin à un pont diviseur de tension alimentant une résistance de charge de $4\text{k}\Omega$, en utilisant les équivalents générateurs tension-/courant [15]. On retrouve aussi le résultat par les formules 2.41 et 2.42.

2.5 Les dipôles électrocinétiques de base

Toute impédance linéaire et passive peut se décrire comme une combinaison linéaire des trois impédances élémentaires suivantes.

2.5.1 La résistance

Propriété 2.18. *La résistance (ou conducteur ohmique, ou résistor) est le plus simple des dipôles linéaires. Soumis à une tension $u(t)$ et parcouru par un courant $i(t)$, ce composant satisfait directement à la loi d'Ohm :*

$$u(t) = R i(t) \quad (2.43)$$

avec R la résistance du dipôle, exprimée en Ohms Ω .

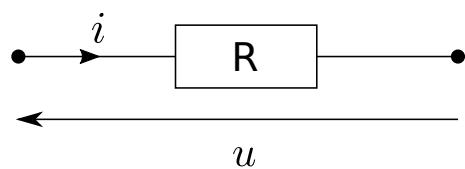


FIGURE 11 – *Gauche* : des résistances standard de valeurs diverses. *Droite* : le symbole de la résistance électrique.

Au niveau fondamental, la résistance se calcule à partir de la loi d'Ohm locale en ARQS :

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E} \Rightarrow \int_A^B \vec{j} \cdot d\vec{l} = \sigma_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow i = \frac{\mathcal{S}\sigma_0}{\ell} u \Rightarrow R = \frac{\ell}{\mathcal{S}\sigma_0} \quad (2.44)$$

pour un conducteur cylindrique de section \mathcal{S} et de longueur ℓ . De cette formule, on en déduit que des résistances en série s'ajoutent (addition des longueurs ℓ) alors que pour des résistances en parallèle les inverses s'ajoutent (addition des sections \mathcal{S}) :

$$R_{\text{série}} = R_1 + R_2 \dots, \quad \frac{1}{R_{\text{parallèle}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots \quad (2.45)$$

La puissance reçue par une résistance R est :

$$\boxed{\mathcal{P} = ui = Ri^2 = \frac{u^2}{R}} \quad (2.46)$$

Le passage d'un courant dans une résistance se manifeste par un échauffement du composant, c'est l'effet Joule.

En pratique, on trouve des résistances allant de 0.01Ω à $10^{12} \Omega$, avec des puissances admissibles standard allant de $1/8 \text{ W}$ à 250 W et une tolérance (écart maximale à la valeur nominale) de 0.005% à 20% [28, 14]. Les valeurs nominales et les tolérances sont indiquées sur les composants à l'aide d'un code couleur (figure 12). Les résistances sont omniprésentes dans les montages électroniques. Elles peuvent être faites d'un agglomérat de carbone (mince couche de carbone déposée sur un bâtonnet de céramique), de couches métalliques, de fil bobiné sur un mandrin¹⁵. Le modèle le plus répandu est de loin la résistance en carbone aggloméré de $1/4 \text{ W}$ ou $1/2 \text{ W}$, de 1Ω à $100 \text{ M}\Omega$ à 5% ou 10% .

Les résistances sont si souvent utilisées qu'elles sont considérées comme parfaites, mais elles ne le sont pas. Tout d'abord les composants standard ne sont pas stables en précision (variations de la résistance avec la température, l'humidité). Des phénomènes inductifs et capacitatifs peuvent apparaître à haute fréquence, surtout pour les résistances de valeur élevée (voir [14, p. 33] pour plus de détails). La modélisation d'une résistance réelle est le circuit représenté figure 13.

A noter aussi qu'il existe des résistances variables appelées potentiomètres qui sont en fait des sorte de ponts diviseurs de tension réglables intégrés.

15. Pour les résistances bobinées, on parle plutôt de résistances de puissance, et deux fils sont bobinés en sens inverse pour limiter les phénomènes inductifs [14].

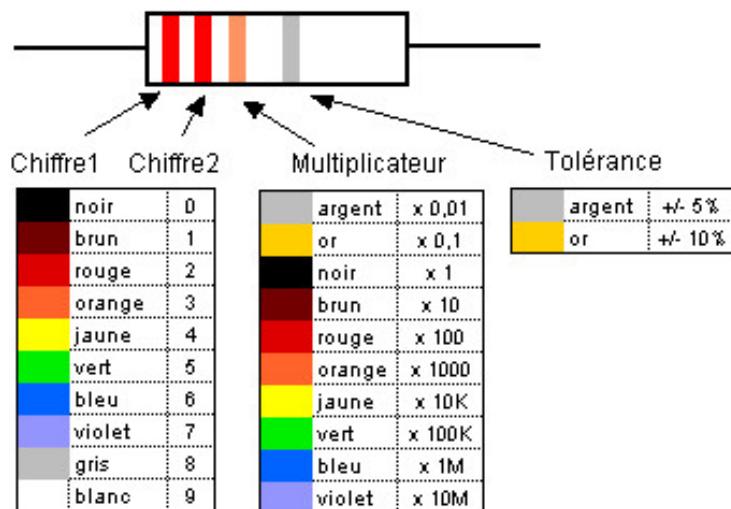


FIGURE 12 – La valeur de la résistance et sa tolérance sont inscrites sur le composant à l'aide d'un code couleur.

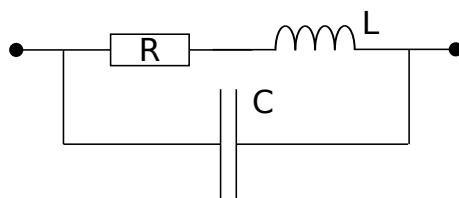


FIGURE 13 – Circuit électrique modélisant le comportement réel d'une résistance R . Le condensateur C modélise les effets capacitifs et l'inductance L les effets inductifs. Tout deux sont de faible valeur, et les résonances qu'elles provoquent se produisent pour des fréquences très élevées, hors du domaine d'utilisation de la résistance.

2.5.2 Le condensateur

Propriété 2.19. *Un condensateur est constitué de deux armatures qui se font face et qui portent des charges opposées $+q$ et $-q$. Pour un condensateur idéal, la charge $q(t)$ est proportionnelle à la tension $u_c(t)$ appliquée entre les armatures :*

$$q(t) = Cu_c(t) \quad (2.47)$$

avec C la capacité du condensateur exprimée en Farads F.

En ARQS en limite électrique, cette formule se démontre à l'aide de Maxwell-Gauss. En effet, entre deux armatures planes chargées le champ électrique vaut $\vec{E} = -q/(\epsilon_0 \epsilon_r S \vec{u}_{- \rightarrow +})$ avec S la section des armatures et $\vec{u}_{- \rightarrow +}$ le vecteur unitaire dirigée de l'armature chargée $-q$ à l'armature chargée $+q$. D'où la relation entre tension et charge avec la capacité :

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{\ell} \quad (2.48)$$

où ℓ est l'espacement entre les armatures et ϵ_r est la permittivité diélectrique relative du milieu séparant les armatures. Ainsi on voit que des condensateurs en parallèle s'addi-

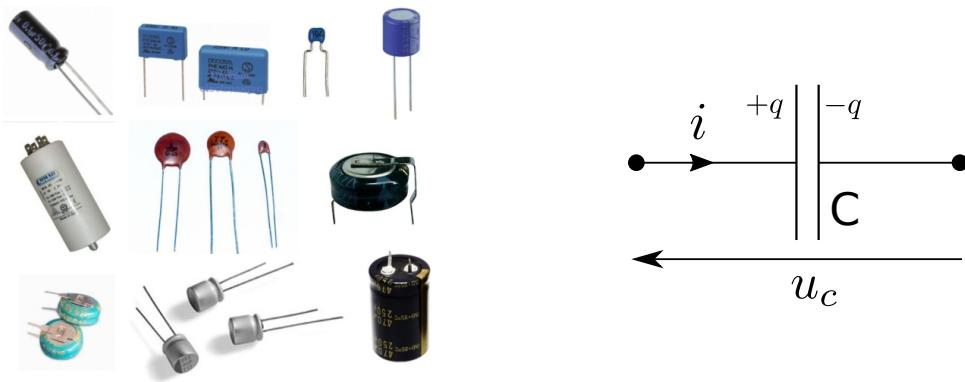


FIGURE 14 – *Gauche* : des condensateurs standard de valeurs diverses. *Droite* : le symbole du condensateur électrique.

tionnent (addition des sections \mathcal{S}) alors que pour des condensateurs en série ce sont les inverses qui s'ajoutent (addition des espacements e) :

$$C_{\text{parallèle}} = C_1 + C_2 \dots, \quad \frac{1}{C_{\text{série}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \quad (2.49)$$

Ces relations se retrouvent aussi en étudiant la relation courant-tension pour un condensateur :

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \quad (2.50)$$

avec $i = dq/dt$. En adoptant la convention $X(t) = \Re(X e^{j\omega t})$, alors l'impédance d'un condensateur se déduit de la dernière relation par¹⁶ :

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \Rightarrow i(\omega) = jC\omega u(\omega) \Rightarrow \boxed{Z_c = \frac{1}{jC\omega}} \quad (2.51)$$

Une capacité est donc aussi homogène à des $\Omega^{-1}\text{s}$.

La puissance instantanée reçue par un condensateur est :

$$\mathcal{P}_c = u_c i = C u_c \frac{du_c}{dt} \quad (2.52)$$

d'où l'énergie emmagasinée dans le composant :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} C u_c^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}} \quad (2.53)$$

Un condensateur idéal ne dissipe pas de puissance car le courant est déphasé de $\pi/2$ par rapport à la tension. De plus l'énergie est une grandeur continue en physique (car sinon la puissance lors d'une discontinuité est infinie), donc *la tension aux bornes d'un condensateur est une grandeur continue aussi*.

En série avec une résistance R et un générateur idéal de tension continu E , la tension $u_c(t)$ aux bornes d'un condensateur obéit à une équation différentielle du premier ordre, illustrant la charge ou la décharge du condensateur :

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = E \quad (2.54)$$

16. Le signe de la partie imaginaire dépend de la convention choisie pour l'exponentielle $e^{\pm j\omega t}$.

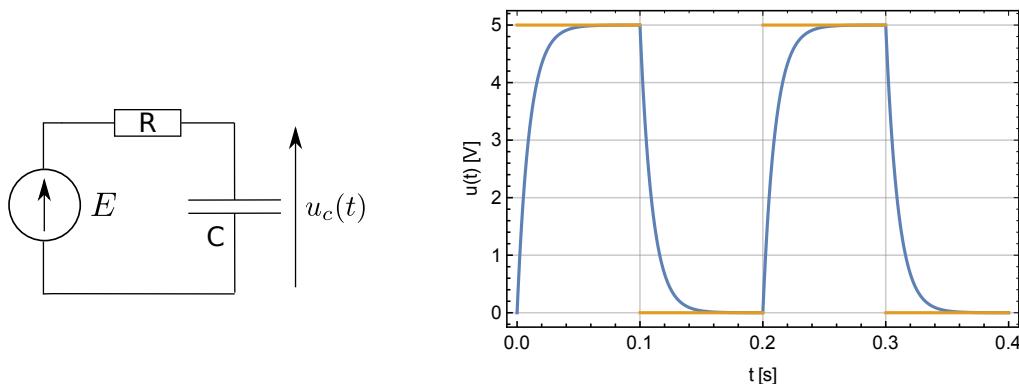


FIGURE 15 – *Gauche* : Circuit RC série alimenté par un générateur idéal de tension $E(t)$ continue. *Droite* : réponse $u_c(t)$ (bleu) du circuit pour un signal $E(t)$ (jaune) carré compris entre +5 V et 0 V avec $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \mu\text{F}$ (donc $\tau = 10 \text{ ms}$).

faisant apparaître une constante de temps caractéristique $\tau = RC$. La solution est de la forme :

$$u_c(t) = E + Ae^{-t/RC} \quad (2.55)$$

avec A dépendant des conditions initiales. La réponse à un signal carré $E(t)$ de période suffisamment longue devant τ est présentée figure 15. Supposons qu'à $t < 0$ on a $u_c(t) = 0$, alors comme un condensateur assure la continuité de la tension à ses bornes, on a $A = -E$ pour un condensateur en charge.

Les condensateurs peuvent servir à stabiliser une alimentation électrique (se décharge lors des chutes de tension, se charge lors des pics de tension), traiter des signaux périodiques (filtrage), séparer le courant alternatif du courant continu ou stocker de l'énergie. En pratique un condensateur est construit en plaquant un matériau conducteur sur un matériau isolant diélectrique (du papier, un film plastique...). Par exemple on peut enruler deux feuilles d'aluminium séparées par des films de polyester sur elles-mêmes afin de former un condensateur cylindrique. D'autres types répandus sont les disques en céramique (les feuilles métalliques alternent avec des feuilles d'oxydes isolants) ou électrolytiques¹⁷. Chacun de ces types a des propriétés particulières (précision, stabilité en température, courants de fuite, plages de fréquence, durée de vie) [28, 14].

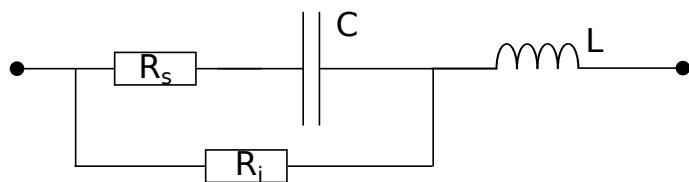


FIGURE 16 – Circuit électrique modélisant le comportement réel d'un condensateur C . La résistance R_i modélise les courants de fuite, la résistance R_s les pertes à haute fréquence dans le diélectrique, et l'inductance L les effets inductifs. R_s et L sont de faible valeur mais R_i est une résistance très élevée.

Le matériau diélectrique peut n'être pas parfaitement isolant et un faible courant (de fuite) peut s'y établir. On modélise ce courant de fuite par une résistance (élevée) en parallèle du condensateur. De plus à haute fréquence des pertes dans le diélectrique et des

17. Les condensateurs électrolytiques (ou chimiques) sont polarisés, branchés à l'envers ils explosent ! Évitez de les utiliser en général si vous ne savez pas ce que vous faites.

effets inductifs apparaissent, modélisées par une résistance et une impédance en série avec le condensateur. Dit autrement, la capacité d'un condensateur diminue à haute fréquence. Le circuit électrique modélisant un condensateur réel dans une large bande de fréquence est représenté figure 16.

2.5.3 La bobine

Propriété 2.20. *Une bobine (ou inductance) est constituée de spires obtenues par enroulement d'un fil métallique (cuivre). Au cœur de la bobine on peut avoir de l'air ou bien un matériau de perméabilité magnétique relative μ_r . La tension $u_L(t)$ aux bornes d'une bobine idéale est proportionnelle à la dérivée du courant $i(t)$ qui la traverse :*

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.56)$$

avec L l'inductance de la bobine, exprimée en Henry H.

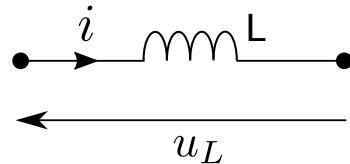


FIGURE 17 – Gauche : des bobines de conceptions diverses. Droite : le symbole de l'inductance électrique.

Le fonctionnement d'une bobine idéale se décrit dans l'ARQS en limite magnétique par un enroulement de longueur finie ℓ mais en négligeant les effets de bord. Le théorème d'Ampère appliqué à ce cylindrique de section \mathcal{S} parcouru par un courant i donne un champ magnétique interne $B = \mu_0 \mu_r N i / \ell$. D'où un flux total $\Phi = \mu_0 \mu_r N^2 i \mathcal{S} / \ell$ et la tension aux bornes de la bobine :

$$u_L(t) = -e(t) = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}, \quad L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 \mathcal{S}}{\ell} \quad (2.57)$$

en convention récepteur. De cette loi de comportement on en déduit la valeur de l'impédance associée :

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \Rightarrow u_L(\omega) = j L \omega i(\omega) \quad (2.58)$$

Une inductance est donc aussi homogène à des Ω/s .

De la formule 2.57, on en déduit que des inductances en série s'ajoutent (addition du flux) alors que pour des inductances en parallèle les inverses s'ajoutent (division du courant) :

$$L_{\text{série}} = L_1 + L_2 \dots, \quad \frac{1}{L_{\text{parallèle}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots \quad (2.59)$$

La puissance instantanée reçue par une inductance est :

$$\mathcal{P}_L = u_L i = L i \frac{di}{dt} \quad (2.60)$$

d'où l'énergie emmagasinée dans le composant :

$$\boxed{\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2} \quad (2.61)$$

Une bobine idéale ne dissipe pas de puissance car le courant est déphasé de $\pi/2$ par rapport à la tension. De plus l'énergie est une grandeur continue, donc *l'intensité traversant une inductance est une grandeur continue aussi.*

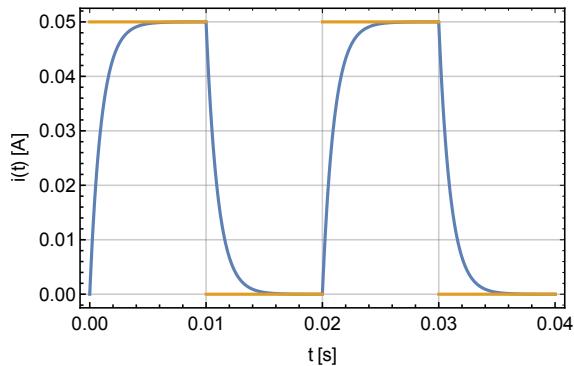
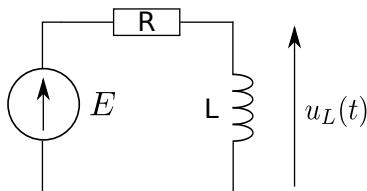


FIGURE 18 – *Gauche : Circuit RL série alimenté par un générateur idéal de tension $E(t)$ continu. Droite : réponse $u_L(t)$ (bleu) du circuit pour un signal $E(t)$ (jaune) carré compris entre $+5\text{ V}$ et 0 V avec $R = 100\Omega$ et $L = 0.1\text{ H}$ (donc $\tau = 1\text{ ms}$).*

En série avec une résistance R et un générateur idéal de tension continu E , l'intensité $i(t)$ traversant une inductance idéale obéit à une équation différentielle du premier ordre, illustrant le stockage et le déstockage d'énergie magnétique à l'intérieur de la bobine :

$$\frac{L}{R} \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{E}{R} \quad (2.62)$$

faisant apparaître une constante de temps caractéristique $\tau = L/R$. La solution est de la forme :

$$i(t) = \frac{E}{R} + A e^{-t/\tau} \quad (2.63)$$

avec A dépendant des conditions initiales. La réponse à un signal carré $E(t)$ de période suffisamment longue devant τ est présentée figure 18. Supposons qu'à $t < 0$ on a $i(t) = 0$, alors comme une inductance assure la continuité du courant la traversant, on a $A = -E/R$. La tension $u_L(t)$ s'en déduit par la dérivée de la solution $i(t)$.

Les bobines linéaires sont réalisées par enroulement de fil conducteur en cuivre sans support ou sur un support non magnétique (verre, bakélite moulé, polystyrène,...) mais sont de faible inductance (de l'ordre du mH). Les bobines non-linéaires utilisent des noyaux magnétiques généralement en ferrite (oxyde de fer). À géométrie identique, ces bobines ont des inductances multipliées par des facteurs de l'ordre de 10^4 par rapport à leurs homologues linéaires. La valeur de L n'est alors constante que pour des intensités faibles (i.e. loin de la saturation du noyau magnétique) [14]. Dans le modèle de l'inductance idéale on a négligé la résistance interne du fil conducteur. De plus, à haute fréquence, des effets capacitifs apparaissent entre les spires du bobinage, qui peuvent devenir dominants sur l'effet inducteur. Une inductance linéaire plus réaliste est représentée figure 19.

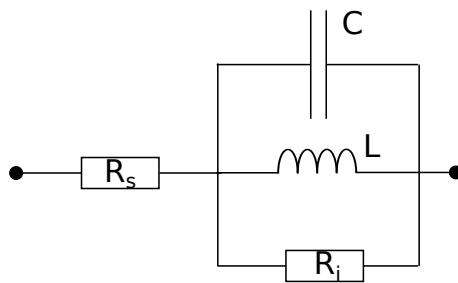


FIGURE 19 – Circuit électrique modélisant le comportement réel d'une inductance L . La résistance R_s modélise la résistance interne du fil de la bobine (correction la plus importante), la résistance R_i les pertes à haute fréquence dans le ferromagnétique, et le condensateur C les effets capacitifs apparaissant à haute fréquence. R_s et C sont de faible valeur mais R_i est une résistance très élevée.

2.5.4 Le circuit RLC série

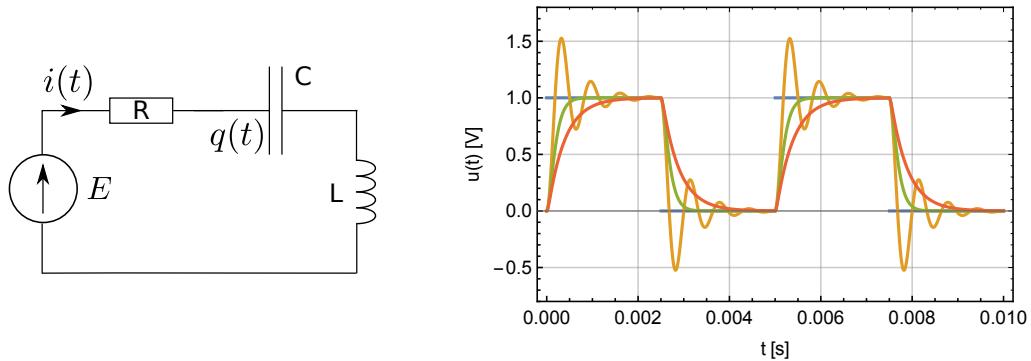


FIGURE 20 – *Gauche* : Circuit RLC série alimenté par un générateur idéal de tension $E(t)$ continue. *Droite* : tension aux bornes du condensateur $u_c(t)$ pour un signal $E(t)$ (bleu) carré compris entre $+5$ V et 0 V avec $\omega_0 = 10^4$ rad/s et $Q = 2.5$ (jaune), $Q = 0.5$ (vert) et $Q = 0.25$ (rouge).

Impossible de passer à côté de l'étude du RLC série, alimenté par une source de tension continue E . Ce système est régi par une équation différentielle du second ordre :

$$q(t) + RC \frac{dq(t)}{dt} + LC \frac{d^2q(t)}{dt^2} = CE \quad (2.64)$$

où $q(t)$ est la charge du condensateur.

Propriété 2.21. *Le circuit RLC série est caractérisé par deux grandeurs :*

- *sa pulsation propre* $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$
- *son facteur de qualité* $Q = L\omega_0/R = 1/RC\omega_0$
- *ou son facteur d'amortissement* $\xi = 1/2Q$.

L'équation différentielle régissant le comportement du système est alors :

$$\omega_0^2 q(t) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{d^2q(t)}{dt^2} = \frac{E}{L} \quad (2.65)$$

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \quad (2.66)$$

de discriminant :

$$\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right) \quad (2.67)$$

Trois cas peuvent alors se présenter :

1. $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$: régime apériodique. Les deux racines sont réelles et négatives et la solution est du type exponentielle amortie.
2. $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$: régime critique. La solution est encore du type exponentielle amortie avec le temps caractéristique $\tau = 1/\omega_0$ le plus court possible.
3. $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$: régime pseudo-périodique. Les deux racines sont complexes et conjuguées, de parties réelles négatives. Les solutions sont oscillantes à la pulsation¹⁸ $\sqrt{-\Delta}$ et exponentiellement amorties en un temps $\tau = 2Q/\omega_0$.

Les trois régimes sont représentés figure 20 lorsque $E(t)$ prend la forme d'un échelon de tension.

Remarquons que l'équation différentielle 2.64 multipliée par le courant $i(t)$ permet de faire le bilan énergétique du système :

$$\frac{q(t)i(t)}{C} + Ri(t)\frac{dq(t)}{dt} + Li(t)\frac{d^2q(t)}{dt^2} = Ei(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} + \frac{1}{2} Li^2(t) \right] = -Ri^2(t) + Ei(t) \quad (2.68)$$

avec $i = dq/dt$.

Analogie hydraulique

Toute l'électrocinétique peut se comprendre à l'aide d'une analogie avec les circuits hydrauliques. Le courant hydraulique joue le rôle du courant électrique, circulant dans des tuyaux analogues des fils électriques. La tension est représentée par les différences de pression, la masse par un immense réservoir de niveau constant à la pression atmosphérique, le générateur par une pompe.

La résistance peut être modélisée par un tuyau de section faible, ou bien "bouché" par du sable (la porosité du sable étant reliée à la conductivité). L'inductance est représentée par une roue à inertie mise en mouvement par un moulin. Enfin le condensateur est plus délicat : un piston à deux réservoirs avec ressorts. Mentionnons aussi la diode qui est peut être modélisée par un clapet anti-retour, et l'interrupteur par une vanne.

Si cela vous intéresse, jetez un œil à ce document qui propose de réaliser des analogies de circuits RC et RL en régime continu ou alternatif à l'aide de composants hydrauliques : <https://blogues.csdessommets.qc.ca/sciencesnicolas/files/2015/03/electricite-et-analogie-hydraulique.pdf> (mémoire de J.F. Pochon)

2.6 Autres composants

Il existe une quantité d'autres composants en électronique. Tout d'abord parmi les composants dipolaires on peut mentionner les diodes (de redressement, Zener, électrolu-

18. Attention ce n'est pas la pulsation propre !

minescente – voir chapitre 9), les ampoules, les moteurs (voir cours moteur), les interrupteurs, etc. Si on sort de la catégorie des dipôles, on a les transistors (voir chapitre 9), les amplificateurs opérationnels (voir chapitre 4), les puces électroniques, etc.

Un composant très commun que l'on oublie souvent : le câble coaxial. Lui aussi possède des propriétés particulières qu'il est bon de connaître. Tout d'abord il est constitué d'une âme centrale conductrice (souvent un simple fil métallique) enrobé par un matériau diélectrique isolant, le tout entouré d'une tresse conductrice et d'une gaine isolante. Sa forme permet de ne produire aucune onde électromagnétique vers l'extérieur (théorème d'Ampère), et son blindage de ne pas capter de parasite extérieur. Le blindage joue par ailleurs le rôle de masse¹⁹. Il est donc idéal pour la transmission de signaux numériques ou analogiques, avec une impédance en général de 50Ω . On le retrouve sur les paillasses de TP mais aussi pour la transmission de la télévision ou d'Internet.

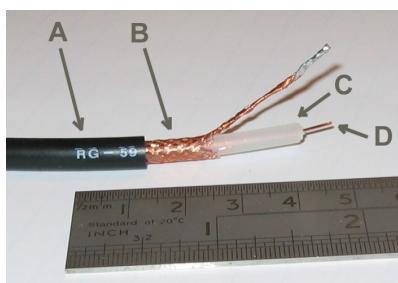


FIGURE 21 – Structure d'un câble coaxial : gaine extérieure en plastique (A), blindage en cuivre tressé (B), diélectrique (C) et conducteur central en cuivre (D) (*Source : Wikipedia*).

Banane ou BNC ?

On les oublie souvent, mais les câbles constituent des éléments très importants d'un circuit électrique. En TP, on en distingue couramment deux types : les câbles coaxiaux avec des connecteurs BNC (Bayonet Neill-Concelman) et les câbles à fiches bananes. Les câbles coaxiaux contiennent deux conducteurs, l'âme et la gaine, et sont plutôt adaptées aux signaux alternatifs de faible puissance, à la métrologie.

Les câbles électriques simples sont réalisés avec un seul conducteur, souvent du cuivre, parfois monobrins parfois multibrins. Leur section est normalisée de façon à respecter des normes d'ampérage lorsqu'ils sont soumis à 230 V : des sections inférieures à 1.5 mm^2 pour des courants inférieurs à 16 A, 6 mm^2 pour moins de 32 A, etc. La section est donc proportionnelle à la puissance qu'on veut y faire passer car inversement proportionnelle à la résistance du fil. Les fiches bananes permettent des branchements rapides (car sans vis), solides (à cause de la languette en métal qui agit comme un ressort dans la prise femelle), et sécurisées (bien branchée, aucune partie métallique ne dépasse).

2.7 Exercices (quelques solutions en annexe)

1. Refaire les circuits RC, RL et RLC. En particulier pour ce dernier étudier les résonances en tension et intensité.
2. Pont de Wheatstone : le dipôle D est un détecteur (galvanomètre, ampèremètre...) de résistance r_D inséré dans un montage à quatre impédances (figure 22). Calculer

19. Plus d'information à ce sujet sur ce lien : <http://www.maltep.com/fr/c9-la-masse-electrique>

le courant qui le traverse i_D en fonction des données du problème et déterminer la condition pour avoir $i_D = 0$. On dit alors que le pont est équilibré.

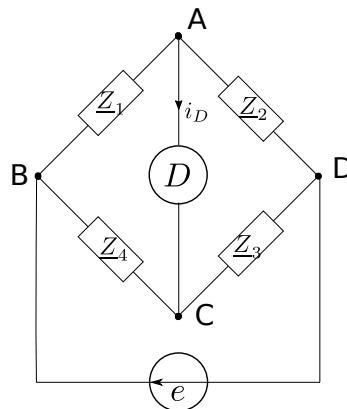


FIGURE 22 – Pont de Wheatstone.

3. Déterminer les caractéristiques des deux dipôles suivants (figure 24). Sont-ils actifs ou passifs ?

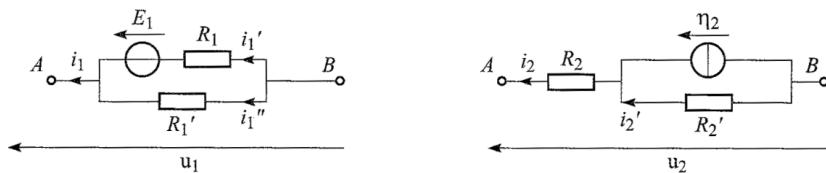


FIGURE 23 – Dipôles dont il faut déterminer la caractéristique tension-courant.

4. Déterminer les générateurs de Thévenin équivalents aux circuits ci-dessous entre les bornes A et B.



FIGURE 24 – Dipôles dont il faut déterminer le générateur de Thévenin équivalent entre A et B.

3 Filtres électroniques

L'OBJECTIF de ce chapitre est de présenter les notions fondamentales associées aux fonctions de transfert (hypothèses, définition, modes de représentation). Ces notions sont utiles dès qu'il s'agit d'étudier le comportement de n'importe quel système physique (mécanique, électronique,...), en particulier dans le régime harmonique. En fin de chapitre, l'accent sera toutefois mis sur les filtres électroniques tant ils apparaissent dans de nombreuses expériences de physique.

La notion de filtrage à l'agrégation : ce chapitre peut concerter les épreuves suivantes :

- LP12 : Traitement d'un signal. Étude spectrale.
- LP24 : Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique.
- MP19 : Effets capacitifs.
- MP24 : Signal et bruit.
- MP27 : Systèmes bouclés.

3.1 Notion de filtre linéaire

3.1.1 Système linéaire et permanent

Nous considérons ici un système physique comprenant des grandeurs d'*entrée* (ou de *commande*) et de *sortie*. Ces notions restent ici très générales, ainsi :

- dans un circuit électrique, les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent être des intensités de courant dans certaines branches ou des tensions ;
- dans un moteur électrique, la grandeur d'entrée peut être le courant circulant dans l'enroulement, celle de sortie sa vitesse ou son couple.

Le système physique étudié sera donc considéré comme un opérateur qui, à un signal d'entrée $e(t)$ associe un signal de sortie $s(t)$. Parmi les opérateurs rencontrés en pratique, on peut distinguer le sous-ensemble constitué des opérateurs linéaires.

Définition 3.1. Soit un système S donné, nous noterons $e_1(t)$ et $e_2(t)$ deux signaux d'entrée quelconques et $s_1(t)$ et $s_2(t)$ les signaux de sortie correspondants. Si la réponse de S à la sollicitation $e(t) = \lambda e_1(t) + \mu e_2(t)$ est $\lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$, quels que soient les coefficients λ et μ , alors le système est dit linéaire mathématiquement. Conséquence directe : avec un système linéaire on peut appliquer le principe de superposition.

Un système dont les caractéristiques ne varient pas au cours du temps est dit *permanent* ou *stationnaire* : une translation dans le temps (retard ou avance) sur la grandeur d'entrée se traduit par une translation identique de la grandeur de sortie.

Définition 3.2. Pour un système permanent, si $s_1(t)$ est la réponse à la sollicitation $e_1(t)$, alors quel que soit τ , $s_2(t) = s_1(t - \tau)$ est la réponse à $e_2(t) = e_1(t - \tau)$.

Cette stationnarité est caractéristique des systèmes physiques ayant atteint des conditions de fonctionnement stables. Elle assure la reproductibilité des expériences dans le temps.

De nombreux systèmes physiques (et électroniques) sont régis par des équations différentielles de la forme :

$$a_0 s(t) + \sum_{j=1}^n a_j \frac{d^j s}{dt^j} = b_0 e(t) + \sum_{i=1}^m b_i \frac{d^i e}{dt^i} \quad (3.1)$$

où les coefficients a_i et b_j sont constants. Un tel système est linéaire mathématiquement grâce à la linéarité de l'opérateur dérivation.

Définition 3.3. *Un opérateur régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants est un système linéaire permanent.*

Enfin, les systèmes physiques doivent respecter la notion de causalité. L'effet ne peut pas précéder la cause. Donc la sortie $s(t)$ à la date t ne peut dépendre que des valeurs de l'entrée $e(t')$ aux dates $t' \leq t$. Un système vérifiant cette propriété est dit causal.

Définition 3.4. *Le système linéaire d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ décrit par l'équation différentielle 3.1 est (strictement) causal si m est (strictement) inférieur à n .*

Les raisons profondes et mathématiques qui sous-tendent cette propriété sont abordées dans un encadré section 5.1.4.

Contre-exemples

1. Un opérateur non linéaire courant en électronique est réalisé par le multiplicateur, qui réalise le produit de deux signaux d'entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$:

$$s(t) = k e_1(t) e_2(t) \quad (3.2)$$

avec k une constante qui lui est propre.

2. Une variation avec la température des composants d'un montage électronique peut être responsable d'une non-stationnarité si, dans les conditions de fonctionnement, la température est amenée à varier.
3. L'opérateur "retard pur" associant $s(t) = e(t - \tau)$ est un opérateur linéaire et permanent si τ est une constante mais n'est pas régi par l'équation 3.1.

3.1.2 Régime harmonique

Il est clair qu'un système physique ne peut être soumis à un signal d'entrée quel qu'il soit qu'à partir d'une date initiale que l'on choisit en général comme origine des temps. Les signaux d'entrée sont dits causaux s'ils sont nuls pour $t < 0$. Posons la fonction échelon unité $u(t)$ définie par :

$$\begin{cases} t < 0 : & u(t) = 0 \\ t \geq 0 : & u(t) = 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

On peut seulement étudier la réponse d'un système à l'entrée $e(t) = u(t)E \cos \omega t$ et non à l'entrée $e(t) = E \cos \omega t$, car *stricto sensus* un signal sinusoïdal n'a ni début ni fin : il dure de $t \rightarrow -\infty$ à $t \rightarrow +\infty$.

Propriété 3.5. *Un signal sinusoïdal est non physique.*

Que signifie alors réponse harmonique, ou réponse en régime sinusoïdal d'un système linéaire ? Si l'équation différentielle régissant le système est linéaire, la solution exacte (obéissant aux conditions initiales vérifiées par le système) peut se décomposer en une somme de deux termes :

- un terme solution générale de l'équation sans second membre dite solution pour le système en régime libre (sans excitation à l'entrée),
- un terme solution particulière de l'équation complète.

Dans le cas des systèmes linéaires *stables* (voir chapitre 6), la solution en régime libre est nécessairement amortie (transitoire), c'est-à-dire qu'elle tend à s'annuler quand $t \rightarrow +\infty$.

Définition 3.6. *Par définition, la réponse en régime sinusoïdal (ou réponse harmonique) est la réponse à une fonction du type $e(t) = u(t)E \cos \omega t$ lorsque l'on suppose amortie la solution du régime libre. Cela n'a de sens que pour les systèmes stables.*

Dans le cadre de cette étude, il est clair que les conditions initiales du système, génératrices de réponses transitoires, ne sont alors plus pertinentes pour décrire sa réponse. On fait comme si elles étaient nulles (artifice de calcul) pour obtenir la réponse harmonique. Ainsi on considère que la solution générale de l'équation différentielle du système est nulle et il ne reste qu'à en trouver la solution particulière, en ne s'embarrassant pas de la fonction $u(t)$ responsable du régime transitoire.

Pour trouver la réponse en régime sinusoïdal (c'est-à-dire une solution particulière de l'équation différentielle), on utilise la propriété de linéarité de l'équation différentielle :

- si l'on note $s(t)$ la réponse à $E \cos \omega t$ (au sens expliqué ci-dessus),
- si l'on note $\underline{S}(t)$ la réponse à $\underline{E}(t) = Ee^{j\omega t} = E(\cos \omega t + j \sin \omega t)$ (toujours au sens expliqué ci-dessus),

la linéarité impose que la solution réelle $s(t)$ est égale à $\Re(\underline{S}(t))$. Pour trouver $s(t)$, il suffit donc de trouver $\underline{S}(t)$ ce qui est plus facile car on sait que $\underline{S}(t)$ est de la forme $\underline{S}(t) = \underline{S}_0 e^{j\omega t}$; on dit qu'on passe en complexe pour résoudre l'équation. L'excitation $Ee^{j\omega t}$ est appelée excitation *cissoïdale* et la réponse $\underline{S}(t)$ (toujours lorsque le régime libre s'est amorti) à $\underline{E}(t) = Ee^{j\omega t}$ est appelée réponse cissoïdale ou réponse harmonique. \underline{S}_0 s'appelle *l'amplitude complexe* de la réponse harmonique, de module $S_0 = |\underline{S}_0|$ et d'argument $\psi = \text{Arg}(\underline{S}_0)$:

$$\underline{S}(t) = \underline{S}_0 e^{j\omega t + \psi} \Rightarrow s(t) = S_0 \cos(\omega t + \psi) \quad (3.4)$$

En électronique, on utilise très souvent des signaux périodiques (sinusoïdaux, triangles,...). Dès lors, la décomposition en série de Fourier du signal d'entrée est permise. Pour un signal $v(t)$ périodique de période T (pulsation $\omega = 2\pi/T$), la série de Fourier s'écrit :

$$v(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \quad (3.5)$$

avec les coefficients donnés par les intégrales :

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{(T)} v(t) dt \quad (3.6)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} v(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} v(t) \sin(n\omega t) dt \quad (3.7)$$

Propriété 3.7. *La réponse d'un système linéaire et permanent à une entrée sinusoïdale de pulsation ω est un signal de même pulsation, quelle que soit l'amplitude du signal d'entrée. Inversement, tout système excité par un signal sinusoïdal dont la sortie n'est pas une fonction sinusoïdale du temps ou un signal sinusoïdal de pulsation différente est non-linéaire.*

On peut également mettre en évidence l'amplitude V_n et la phase φ_n de chaque terme de pulsation $n\omega$ en utilisant l'égalité :

$$A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) = V_n \cos(n\omega + \varphi_n) \quad (3.8)$$

avec :

$$V_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi_n = \frac{B_n}{A_n} \quad (\varphi_0 = 0). \quad (3.9)$$

L'ensemble des coefficients V_n permet de représenter le *spectre* du signal $v(t)$, celui affiché par la fonction *Fast Fourier Transform* (FFT) d'un oscilloscope (voir chapitre 8).

Taux de distorsion harmonique

La non-linéarité d'un système peut être décrite par l'analyse spectrale de sa réponse à une entrée sinusoïdale. Un exemple de la vie courante illustre ces aspects : on peut en effet apprécier la qualité d'une chaîne de reproduction du son en examinant sa distorsion. Pour ce faire, on applique à l'entrée un signal sinusoïdal (note pure) de fréquence et d'amplitude variables et on examine le signal de sortie. On appelle *taux de Distorsion Harmonique Total* (DHT), exprimé en décibel, le rapport entre la puissance des termes harmoniques et celle du signal total :

$$\text{DHT} = 10 \log \frac{\sum_{n=2}^{+\infty} V_n^2}{\sum_{n=1}^{+\infty} V_n^2} \quad (3.10)$$

Dans le cas d'un système parfaitement linéaire, le taux tend vers $-\infty$. Le taux DHT peut être mis en évidence de façon qualitative ou quantitative dans la réalisation du circuit push-pull : les non-linéarités des transistors déforment le signal d'entrée du signal que l'on désire amplifier.

3.1.3 Généralités sur les fonctions de transfert

On considère un système linéaire invariant ; à son entrée est appliqué un signal sinusoïdal de pulsation ω que l'on peut représenter en notation complexe :

$$e(t) = \Re(\underline{E}(t)) = \Re(\underline{E}_0(j\omega)e^{j\omega t}) \quad (3.11)$$

En général, \underline{E}_0 est choisi réel et constant. En reprenant les définitions données précédemment, on peut affirmer que la sortie est également sinusoïdale et de *même pulsation*, que l'on écrira :

$$s(t) = \Re(\underline{S}(t)) = \Re(\underline{S}_0(j\omega)e^{j\omega t}) \quad (3.12)$$

Définition 3.8. La fonction de transfert d'un système linéaire et permanent est définie par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)} = \frac{\underline{S}_0(j\omega)}{\underline{E}_0(j\omega)} = |\underline{H}(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.13)$$

Si le système est décrit par une équation différentielle à coefficients constants (équation 3.1), la fonction de transfert devient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i(j\omega)^i}{\sum_{k=0}^n a_k(j\omega)^k} = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)} \quad (3.14)$$

Un peu de vocabulaire :

- L'entier n degré du polynôme dénominateur $\underline{D}(j\omega)$ est l'*ordre* du système. On remarque que c'est aussi l'ordre de l'équation différentielle linéaire sans second membre, et on rappelle que pour un système physique réel $m \leq n$. Un système physique réel d'ordre 0 est donc un simple amplificateur.
- Les racines de $\underline{N}(j\omega)$ sont les *zéros* de la fonction de transfert.
- Les racines de $\underline{D}(j\omega)$ sont les *pôles* de la fonction de transfert.
- $\varphi = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega))$ représente l'avance (algébrique) de phase de la sortie par rapport à l'entrée et $|\underline{H}(j\omega)|$ le rapport de leurs amplitudes. Rappelons que $s(t) = \Re(\underline{S}(t)) = S_0 \cos(\omega t + \psi)$ avec $S_0 = |\underline{H}\underline{E}|$ et $\psi = \text{Arg}(\underline{S}_0) = \varphi = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega))$ si $E > 0$.

Contre-exemple

Dans le cas d'un retard pur τ , le système n'est pas régi par une équation différentielle à coefficients constants. La fonction de transfert prend la forme $\underline{H}(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$.

Avec la condition $m \leq n$, lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $|\underline{H}(j\omega)|$ ne peut pas tendre vers l'infini pour un système physiquement réalisable en régime linéaire. Si cette condition n'est pas réalisée, alors $|s|$ tendrait vers l'infini aussi et le système quitterait nécessairement le régime linéaire (phénomènes de saturation en électronique,...). Par exemple, un système parfaitement déivateur $\underline{H}(j\omega) = Kj\omega$ n'est pas physiquement réalisable pour ω variant de 0 à l'infini. En revanche, on peut modéliser un système déivateur sur une plage en fréquence restreinte. Un système dont la fonction de transfert vérifie $m > n$ est donc un système imparfaitement modélisé.

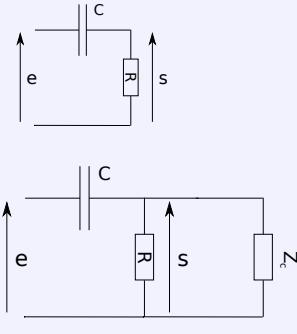
Dans l'équation 3.14, les polynômes aux dénominateur et numérateur sont à coefficients réels pour un système physique. Or tout polynôme à coefficients réels peut se factoriser en produit de polynôme de degré 1 ou 2 (polynômes irréductibles : théorème de d'Alembert-Gauss). Par une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle représentée

par $\underline{H}(j\omega)$, on voit donc que toute fonction de transfert d'un système physique peut se décomposer en une somme de fonctions de transfert d'ordre maximal 2. La connaissance des propriétés des fonctions de transfert d'ordre 1 et 2 est donc suffisante pour prédire le comportement de n'importe quelle système physique linéaire et permanent.

La donnée de la fonction de transfert est équivalente à la donnée de l'équation différentielle du système ; on peut passer de l'une à l'autre dans les deux sens en remplaçant une dérivation par une multiplication par $j\omega$ et vice versa. Parfois, en électronique il est plus simple de calculer d'abord $\underline{H}(j\omega)$ pour avoir l'équation différentielle que de chercher celle-ci directement.

Influence de la charge sur la fonction de transfert

La fonction de transfert d'un système linéaire est indépendante de l'amplitude des signaux. En revanche, elle dépend de sa charge, c'est-à-dire du système dont $s(t)$ est la grandeur d'entrée. Prenons un exemple simple : un filtre passe-haut auquel on branche une impédance de charge Z_c .



$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{jRCZ_c\omega}{R + Z_c + jRZ_cC\omega} \neq \underline{H}_1(j\omega)$$

Dans le 2e montage il y a une fuite de courant entre le premier condensateur et la première résistance, et cela change tout.

Plus généralement, cela signifie que la fonction de transfert totale de systèmes linéaires mis en série n'est pas le produit des fonctions de transfert (en général).

Transformée de Laplace

Dans ce cours, on traite les fonctions de transfert uniquement dans le régime harmonique. Les fonctions de transfert sont établies à l'aide des propriétés de la transformée de Fourier et codent la réponse d'un système dans le régime harmonique. La variable des fonctions de transfert est la pulsation (complexe) $j\omega$. Il est possible de définir une fonction de transfert plus générale qui code aussi la réponse transitoire du système (réponse à échelon, une impulsion...). Pour cela il faut utiliser la transformée de Laplace, qui est une sorte de généralisation de la transformée de Fourier. La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ dite causale (nulle à $t < 0$ i.e. produit d'une fonction échelon) est définie par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (3.15)$$

Ici la variable p est un nombre complexe quelconque, qui remplace $j\omega$. La transformée de Laplace inclut donc la réponse harmonique du système (p imaginaire pur) mais aussi les phénomènes d'amortissement et d'amplification (en $e^{\Re(p)}$). De même, la donnée de la fonction de transfert et l'étude de sa réponse dans le formalisme de Laplace permet de déduire la réponse temporelle et vice versa. La transformée de Laplace est abondamment utilisée en Sciences de l'Ingénieur par les élèves de classe PSI et son utilisation peut largement déborder sur le cours de physique.

Mode de représentation : Pour étudier et représenter le comportement du système en fonction de ω , on a l'habitude d'utiliser différents diagrammes :

- diagramme de Black : on trace la courbe paramétrée par ω de $|\underline{H}(j\omega)|$ en fonction de $\varphi = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega))$
- diagramme de Nyquist : \underline{H} est représenté par un point du plan complexe ($x = \Re(\underline{H})$, $y = \Im(\underline{H})$) et on trace le lieu des points lorsque ω varie
- diagramme de Bode

Dans la suite on se contentera d'étudier les diagrammes de Bode qui sont les seuls admis au programme de physique.

Définition 3.9. On définit le gain en décibel noté G ou G_{dB} :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log(|\underline{H}(j\omega)|) \quad (3.16)$$

et la phase (en degré ou radians) :

$$\varphi = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) \quad (3.17)$$

Le diagramme de Bode consiste à tracer simultanément, mais sur deux graphes séparés, G_{dB} et φ en fonction de ω (ou de la fréquence) en échelle logarithmique, c'est-à-dire en fonction de $\log(\omega)$.

On trace habituellement les deux graphes l'un en dessous de l'autre pour que les graduations horizontales correspondent ; l'ensemble de ces deux graphes constitue le diagramme de Bode. C'est la seule représentation où la pulsation ω peut être directement lue sur le diagramme contrairement aux autres représentations où ω est un paramètre de la courbe.

On appelle décade un intervalle de pulsation (ou de fréquence) séparant les deux pulsations (ou fréquences) extrêmes d'un rapport 10. On appelle octave un intervalle de pulsation (ou de fréquence) séparant les pulsations (ou fréquences) extrêmes d'un rapport 2. On définit les (ou la) pulsation(s) de coupure à 3 dB pour lesquelles (ou laquelle) :

$$G_{\text{dB}} = G_{\max} - 3 \text{ dB} \Leftrightarrow |\underline{H}| = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (3.18)$$

puisque $20 \log(\sqrt{2}) = 3 \text{ dB}$. Le domaine de pulsation pour lequel $G_{\text{dB}} \geq 20 \log(|\underline{H}|_{\max}/\sqrt{2})$ s'appelle la bande passante à 3 dB du système.

Comme le numérateur et le dénominateur d'une fonction de transfert quelconque peuvent toujours se décomposer en produit de fonctions de transfert du premier et du

second ordre, il est possible de construire le diagramme de Bode de n'importe quelle fonction de transfert en combinant les diagrammes de Bode élémentaires des fonctions de transfert du premier et du second ordre.

Propriété 3.10. *Le diagramme de Bode (gain et phase) d'un produit est égal à la somme des diagrammes de Bode de chacun des termes.*

On trace alors les diagrammes asymptotiques (constitués de droites ou de portions de droites pour $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$) de chacun des termes de base intervenant dans la fonction de transfert, et on les somme pour obtenir le diagramme asymptotique de H . Il est donc évident qu'il convient de s'intéresser aux diagrammes de Bode des termes élémentaires d'ordre inférieur ou égal à 2.

3.2 Étude et représentation des fonctions de transfert fondamentales

3.2.1 Opérateurs élémentaires

Les diagrammes de Bode des opérateurs les plus simples et leurs caractéristiques sont présentés dans la table 2. Il est à retenir qu'un opérateur de la forme $(j\omega)^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ donne lieu à une droite de pente de $20n$ dB/décade dans le graphe de G_{dB} . Ces éléments vont nous permettre d'établir aisément les diagrammes de Bode des systèmes du premier et du second ordre.

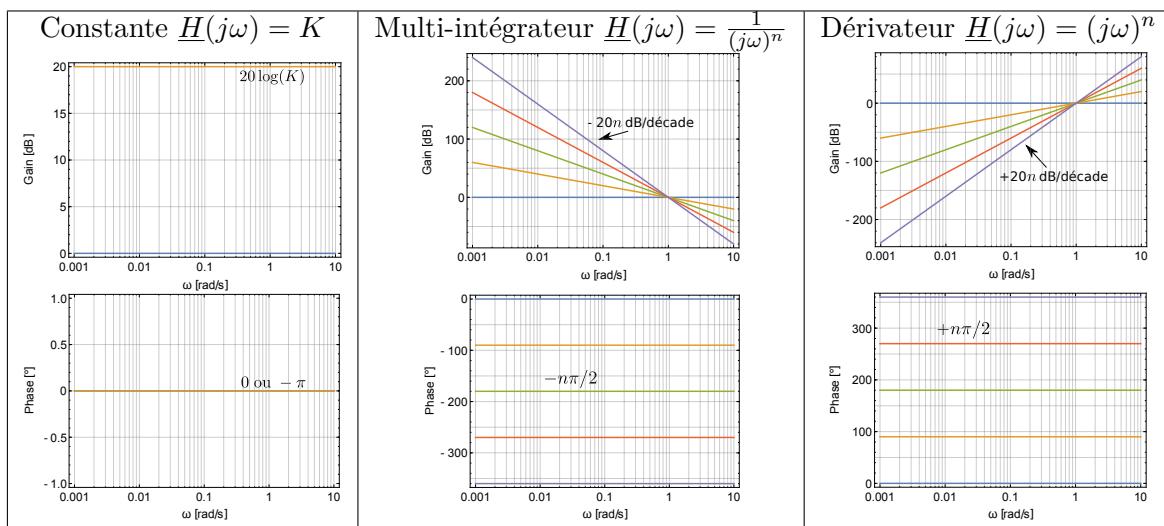


TABLE 2 – Diagrammes de Bode des opérateurs élémentaires.

3.2.2 Fonction de transfert d'ordre 1

Définition 3.11. *La fonction de transfert d'un système du premier ordre fondamental peut toujours se mettre sous la forme :*

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} \quad (3.19)$$

Étudions les cas limites :

- $\omega \rightarrow 0$:

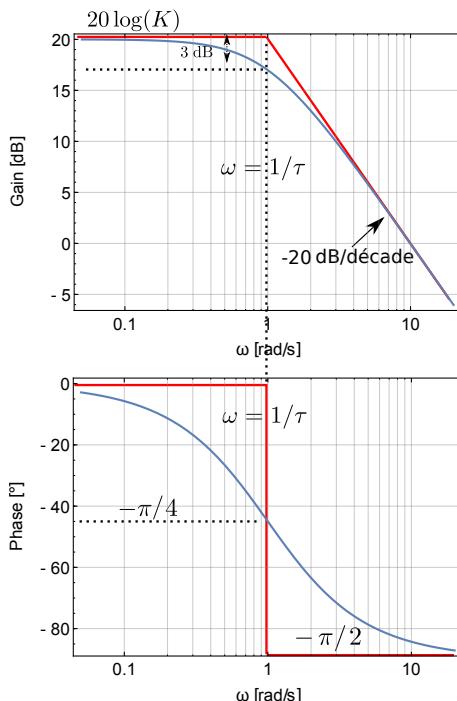
$$\underline{H}(j\omega) \rightarrow K \Rightarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} & \rightarrow 20 \log(K) \\ \varphi & \rightarrow 0 \end{cases}$$

- $\omega \rightarrow \infty$:

$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega\tau} \Rightarrow \begin{cases} G_{\text{dB}}^{\text{asympt}} = 20 \log(K) - 20 \log(\omega\tau) \\ \varphi \rightarrow -\pi/2 \end{cases}$$

Les deux asymptotes se croisent donc en $\omega = 1/\tau$. La pulsation de coupure est donc $\omega_c = 1/\tau$, et se trouve à l'intersection des deux asymptotes tracées sur le diagramme de Bode. Pour compléter avec le tracé réel sous les deux asymptotes, calculons un point particulier. Pour $\omega\tau = 1$, $|\underline{H}(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{\text{dB}} = -3 \text{ dB}$ et $\varphi = -\pi/4$.

Il est à retenir qu'une fonction de transfert d'ordre 1 présente une pente à -20 dB/décade au delà de sa fréquence de coupure et un déphasage compris entre 0 et $-\pi/2$.



3.2.3 Fonction de transfert d'ordre 2

Définition 3.12. La fonction de transfert d'un système du second ordre fondamental peut toujours se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (3.20)$$

avec le coefficient d'amortissement $\xi > 0$ (pour les systèmes stables). Le facteur de qualité du système est défini par $Q = 1/2\xi$.

Construisons le diagramme de Bode d'un système d'ordre 2. On commence par étudier le comportement asymptotique de la fonction de transfert :

- $\omega \rightarrow 0$: $\underline{H}(j\omega) \rightarrow K \Rightarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} & \rightarrow 20 \log(K) \\ \varphi & \rightarrow 0 \end{cases}$

- $\omega \rightarrow \infty$: $\underline{H}(j\omega) \approx -\frac{K\omega_0^2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} G_{\text{dB}}^{\text{asympt}} = 20 \log(K) - 40 \log(\omega/\omega_0) \\ \varphi \rightarrow -\pi \end{cases}$

Quant à elle, la phase suit la loi :

$$\tan \varphi = -\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (3.21)$$

une fonction monotone décroissante de ω . Pour $\omega = \omega_0$, on note que $\varphi = -\pi/2$.

Pour compléter la courbe entre les asymptotes, recherchons des points particuliers à tracer comme par exemple l'annulation du dénominateur²⁰ :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2} \quad (3.22)$$

Deux cas se présentent alors :

- $\xi \geq 1$: les deux racines sont réelles et négatives et la fonction de transfert se factorise sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{K}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{1}{\tau_1} = \omega_0 \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) > 0 \\ \frac{1}{\tau_2} = \omega_0 \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) > 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

et le diagramme de Bode est la somme de deux diagrammes d'ordre 1, avec deux fréquences de coupure $1/\tau_1$ et $1/\tau_2$;

- $0 < \xi < 1$: la fonction de transfert n'a pas de racines réelles, étudions les variations du diagramme d'amplitude :

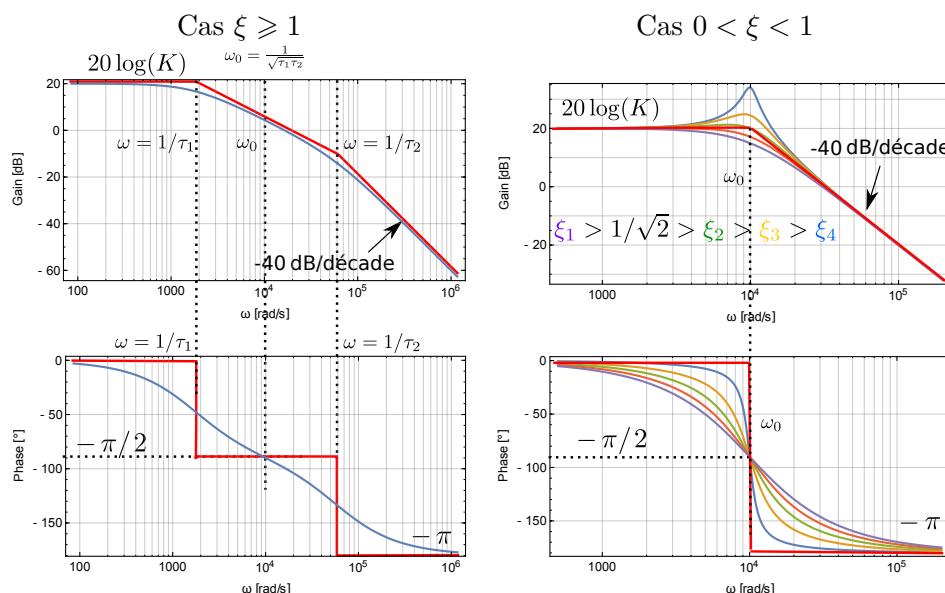
$$\frac{1}{|\underline{H}|^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 + (4\xi^2 - 2)X + X^2 \equiv f(X) \text{ avec } X = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} > 0 \quad (3.24)$$

La dérivée de cette fonction s'écrit $f'(X) = (4\xi^2 - 2) + 2X$.

- cas $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \xi < 1$: la fonction f n'admet pas d'extremum pour $X > 0$ et G_{dB} est monotone décroissante ; on dit qu'il n'y a pas de phénomène de résonance.
- cas $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$: G_{dB} admet un maximum pour $X = 1 - 2\xi^2$ donc pour $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$; on dit qu'il y a *résonance* en ω_r . Attention, il ne faut pas confondre la pulsation propre ω_0 avec la pulsation de résonance ω_r ! A la résonance, il y a surtension. On définit le coefficient de surtension par :

$$\frac{|\underline{H}(j\omega_r)|}{|\underline{H}(0)|} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.25)$$

Plus ξ (donc l'amortissement) tend vers 0, plus la résonance est aiguë et ω_r tend vers ω_0 .



20. Ce qui revient à rechercher les pôles de la fonction de transfert.

3.2.4 Application à une fonction de transfert passe-bande

On s'intéresse ici à la fonction de transfert dite *passe-bande d'ordre 2* :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{K}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (3.26)$$

C'est le résultat du produit de la fonction de transfert élémentaire déivateur $j\omega$ et d'une fonction de transfert du second ordre. Le diagramme de Bode en amplitude correspond donc à la somme d'une droite de pente $+20 \text{ dB/décade}$ et du diagramme de Bode d'une fonction de transfert du second ordre. Pour le diagramme de phase, il suffit d'ajouter $\text{Arg}(j\omega) = +\pi/2$ au diagramme de phase d'une fonction de transfert du second ordre.

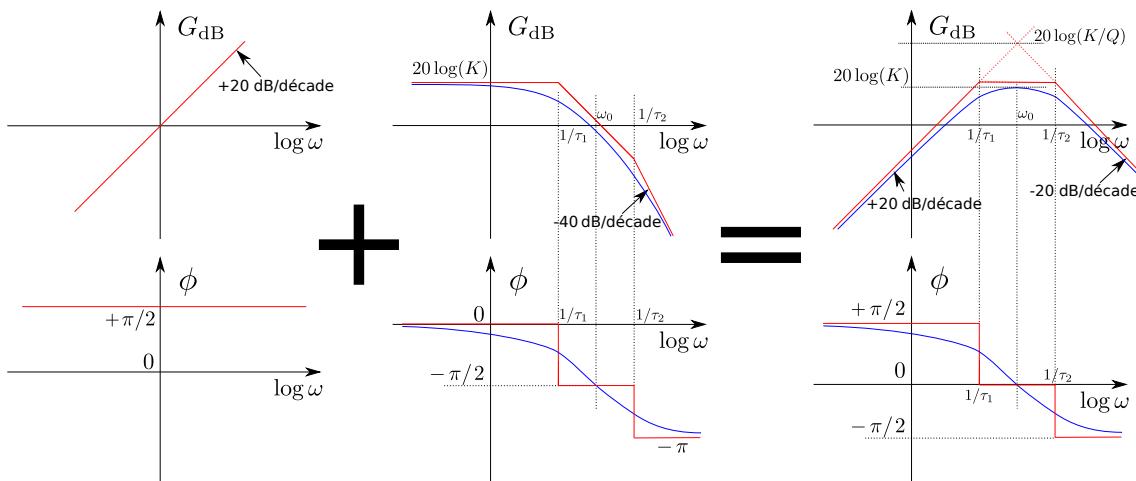


FIGURE 25 – Construction des diagrammes de Bode d'une fonction de transfert passe-bande du second ordre dans le cas $\xi \geq 1 \Leftrightarrow Q \leq 1/2$.

La bande passante à -3 dB pour un filtre passe-bande du second ordre résonant $\Delta\omega$ est donnée par $Q = \omega_0/\Delta\omega$. Plus le facteur de qualité Q est élevé, plus la fonction de transfert est sélective.

3.2.5 Retour sur la réponse temporelle

On a vu qu'un système est décrit par deux types de représentation, temporelle et fréquentielle, qui sont complémentaires mais évidemment pas indépendantes. Il est particulièrement intéressant de comprendre le rôle d'une dérivation ou d'une intégration sur un spectre de Fourier, et sa traduction dans le régime temporel :

- quand on coupe les hautes fréquences, on ralentit un système (il atteint moins vite son régime établi) ce qui peut être préférable pour certains systèmes (mécanique, thermique...) : c'est le cas d'un système intégrateur
- quand on amplifie des hautes fréquences, on rend le système plus rapide (il atteint plus vite le régime établi) : c'est le cas d'un déivateur
- quand on amplifie beaucoup une fréquence particulière, on augmente sa contribution dans la décomposition de Fourier jusqu'à la rendre dominante, et le signal de sortie présente des oscillations à cette fréquence.

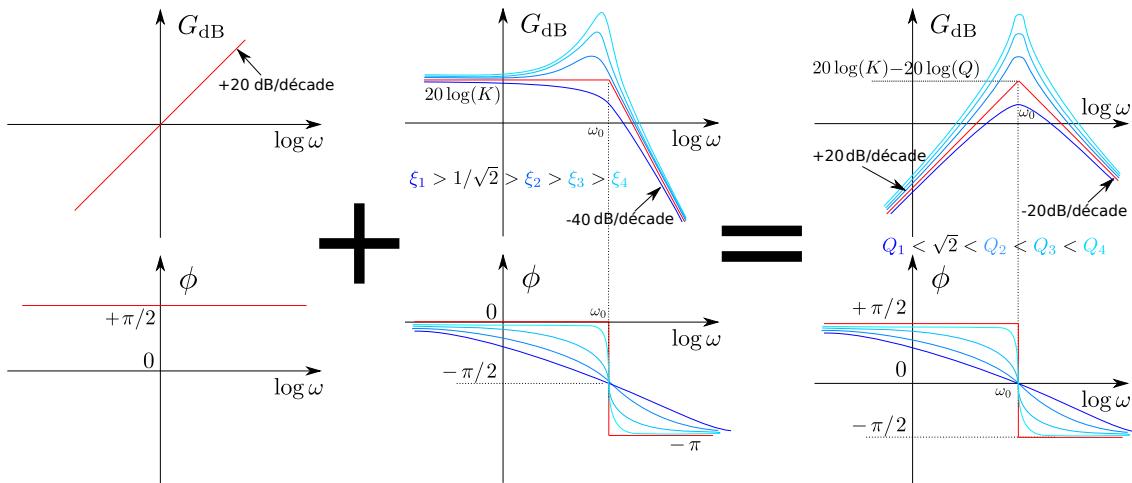


FIGURE 26 – Construction des diagrammes de Bode d'une fonction de transfert passe-bande du second ordre dans le cas $0 < \xi < 1 \Leftrightarrow Q > 1/2$. Pour les besoins du dessin, un seul diagramme asymptotique est représenté pour les différents Q_i , mais son maximum se situe à $20 \log(K/Q_i)$ et le maximum des diagrammes réels à $20 \log(K)$.

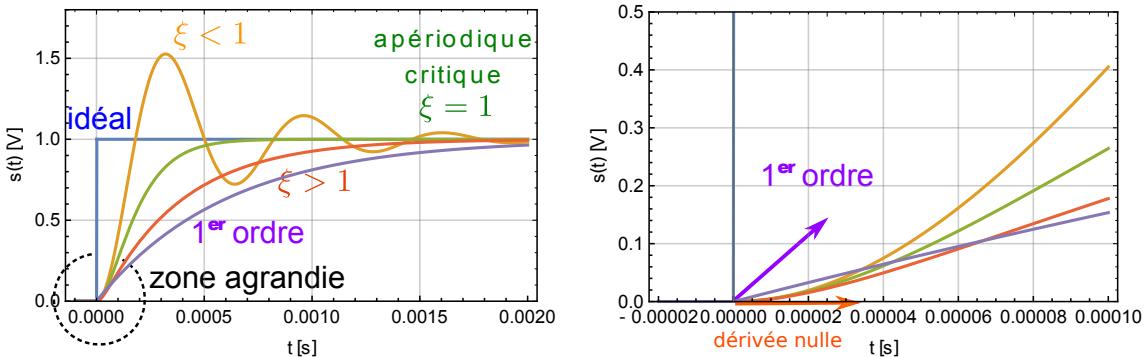


FIGURE 27 – Réponses temporelles des systèmes du premier et du second ordre.

Cette idée est le principe de base de l'asservissement et des correcteurs dans les systèmes asservis. De manière générale, on constate que

$$\omega_c \tau_{\text{réponse}} \approx 1 \quad (3.27)$$

Plus la bande passante d'un système est large plus il est rapide. L'étendue spectrale d'un signal est inversement proportionnelle à son étendue temporelle. Conclusion, modifier la réponse temporelle d'un système linéaire c'est jouer sur sa fonction de transfert. En réponse à un échelon, la réponse d'un système du second ordre est la plus rapide sans dépassement dans le régime apériodique critique $\xi = 1$. L'ordre d'une fonction de transfert a aussi un impact direct sur la forme de la réponse temporelle d'un système : un système du second ordre peut présenter des dépassements de la valeur finale attendue et des oscillations ce qui n'est pas le cas pour un système du premier ordre. De plus, la réponse d'un système du second ordre possède une dérivée temporelle nulle en $t = 0^+$ contrairement à un système du premier ordre, qui par conséquent réagit plus rapidement au départ.

3.3 Exemples de filtres passifs et leurs réalisations électroniques

On appelle *filtre linéaire* un système dont la fonction de transfert en régime harmonique dépend de la fréquence. Or on sait bien que tout système a un comportement qui dépend de la fréquence... On appelle donc filtre seulement les systèmes conçus uniquement pour transmettre sélectivement les diverses composantes d'un signal. Un filtre qui a pour effet de modifier les amplitudes (affaiblir ou accentuer) de certaines composantes est appelé *filtre d'amplitude*. On distingue (avec des dénominations évidentes) :

- les filtres passe-bas
- les filtres passe-haut
- les filtres passe-bande
- les filtres réjecteurs ou coupe-bande
- les filtres passe-tout déphaseurs

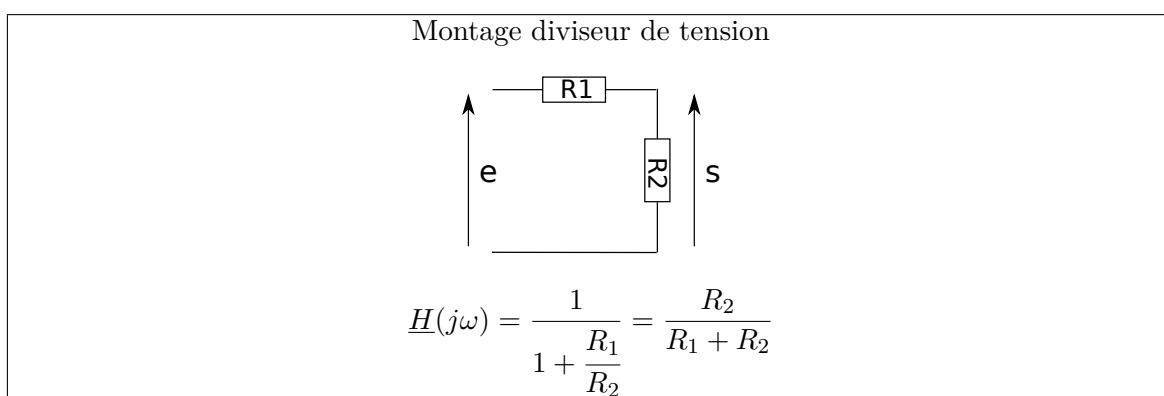
La modification de la phase constitue un filtrage de phase. Les deux effets (filtrage de phase et d'amplitude) vont en général de paire, mais si $|H(j\omega)| = 1$, on a un système purement déphaseur comme le passe-tout déphaseur $H(j\omega) = (1 - j\omega\tau)/(1 + j\omega\tau)$.

Voici tout d'abord quelques applications de ces filtres :

- passe-bas : lissage du bruit haute fréquence, amortisseur de voiture
- passe-haut : entrée AC de l'oscilloscope
- passe-bande : amplificateur sélectif dans une radio
- intégrateur : mesure du champ magnétique (fluxmètre)
- déivateur : correcteur pour améliorer la rapidité d'un système asservi

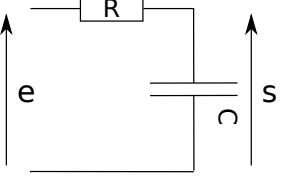
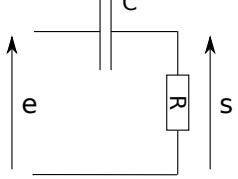
Un filtre est dit *passif* si le seul apport d'énergie au système est l'excitation d'entrée. Voici quelques réalisations électroniques possibles des différents filtres²¹. Les diagrammes de Bode associés se déduisent des fonctions de transfert en étudiant les cas limites $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$ que l'on associera aux diagrammes des opérateurs fondamentaux présentés section 3.2.1 et en étudiant $H(j\omega)$ pour des valeurs particulières évidentes (du type $\omega_c = 1/RC$).

3.3.1 Amplification par une constante



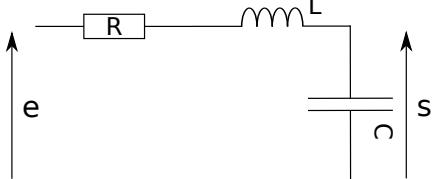
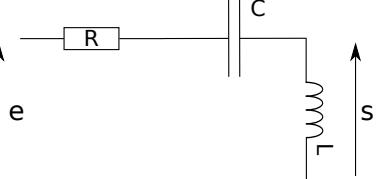
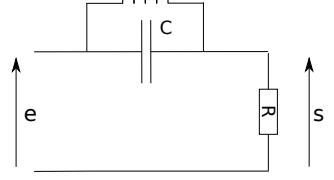
21. Astuce pour trivialiser le calcul des fonctions de transfert : connaître par cœur la formule et le schéma du diviseur de tension car la fonction de transfert se calcule alors rapidement avec $H = \frac{u_1}{u_{tot}} = \frac{\underline{Z}_{eq1}}{\underline{Z}_{tot}}$.

3.3.2 Filtre du premier ordre

Montage passe-bas (pseudo-intégrateur)  $H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$	Montage passe-haut (pseudo-dérivateur)  $H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$
--	--

3.3.3 Filtres du second ordre

Les filtres du second ordre passifs peuvent être élaborés avec une bobine ou sans. Ici les diagrammes de Bode de chacun des filtres ne sont pas reproduits, mais le lecteur est invité à vérifier le comportement de chacun de ces montages pour les cas limites $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$.

Montage RLC passe-bas d'ordre 2  $H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$	Montage RLC passe-haut d'ordre 2  $H(j\omega) = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$
Montage RLC passe-bande  $H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$	Montage RLC coupe-bande  $H(j\omega) = \frac{1 - LC\omega^2}{1 + j\frac{L}{R} - LC\omega^2}$

<p>Montage double passe-bas</p> $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$	<p>Montage double passe-haut</p> $\underline{H}(j\omega) = \frac{-(RC\omega)^2}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$
<p>Montage passe-bande (pont de Wien)</p> $\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$	<p>Montage coupe-bande</p> $\underline{H}(j\omega) = \frac{1 + 2jRC\omega - (RC\omega)^2}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$

L'utilisation des filtres passifs comportent un certain nombre d'inconvénients :

- limitation des bobines : ces composants sont encombrants, lourds (noyaux de fer), coûteux si précis, peu stables thermiquement, de résistance non négligeable, présentent un risque de couplage mutuel entre bobines, et il est difficile à haute fréquence d'avoir un facteur de qualité $Q = L\omega/R$ grand.
- impédances d'entrée et de sortie peu adaptées : le comportement du filtre dépend du courant débité et donc de la charge à la sortie du système qui appelle ce courant (voir encadré section 3.1.3)

Un filtre est dit *actif* s'il possède un apport d'énergie autre que celui venant de l'excitation d'entrée. Les filtres actifs possèdent l'inconvénient de devoir être alimentés par une source extérieure, de saturer à forte amplitude et d'amplifier le bruit à faible amplitude. Dans un montage en contre-réaction, il y a aussi des risques d'instabilité. Ces filtres seront étudiés au paragraphe 4.3.

3.4 Exercices (quelques solutions en annexe)

1. Retrouver toutes les fonctions de transfert et tracer les diagrammes de Bode des fonctions électroniques représentées section 3.3.

Systèmes couplés à plusieurs degrés de liberté

Les systèmes physiques avec plusieurs degrés de liberté peuvent parfois être décrits par un jeu d'équations différentielles couplées. Si celles-ci sont linéaires à coefficients constants, alors le formalisme des fonctions de transfert peut s'appliquer, au prix de devoir auparavant trouver les modes propres du système. Par définition, les modes propres du système sont des modes d'oscillations indépendants les uns des autres, autrement dit découplés (aucun transfert d'énergie de l'un vers l'autre). Il s'agit donc de trouver le changement de base à appliquer aux degrés de liberté initiaux pour obtenir des degrés de liberté découplés. Trouver ce changement, cela revient à trouver les vecteurs propres du système et opérer une rotation dans l'espace des degrés de liberté.

Prenons l'exemple de deux oscillateurs couplés, décrit par les équations différentielles linéaires à coefficients constants :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \tau(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_0^2 x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \tau(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \omega_0^2 x_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Fourier}} \begin{cases} -\omega^2 \underline{X}_1 + j\omega\tau^{-1}(\underline{X}_1 - \underline{X}_2) + \omega_0^2 \underline{X}_1 = 0 \\ -\omega^2 \underline{X}_2 + j\omega\tau^{-1}(\underline{X}_2 - \underline{X}_1) + \omega_0^2 \underline{X}_2 = 0 \end{cases} = 0$$

avec les degrés de liberté x_1 et x_2 . Ce système s'écrit sous forme matricielle :

$$\underline{M} \vec{\underline{X}} = \vec{0} \text{ avec } \underline{M} = \begin{pmatrix} -\omega^2 + j\omega\tau^{-1} + \omega_0^2 & -j\omega\tau^{-1} \\ -j\omega\tau^{-1} & -\omega^2 + j\omega\tau^{-1} + \omega_0^2 \end{pmatrix}$$

Rechercher la base où les degrés de liberté sont découplés revient à rechercher la base dans laquelle la matrice M est diagonale. Les modes propres, ou degrés de liberté découplés, sont alors les vecteurs propres de \underline{M} , de pulsation propre définie via la valeur propre associée. Le système ci-dessus possède deux modes propres de valeurs propres et vecteurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= -\omega^2 + \omega_0^2, & v_+ &\propto (1, 1) \\ \lambda_- &= -\omega^2 + 2j\omega\tau^{-1} + \omega_0^2, & v_- &\propto (1, -1) \end{aligned}$$

L'usage des matrices de passage permet d'opérer une rotation dans l'espace des degrés de liberté du système. On obtient que les deux modes propres sont un mode symétrique $D = \underline{X}_1 + \underline{X}_2$ associé à λ_+ et un mode anti-symétrique $S = \underline{X}_1 - \underline{X}_2$ associé à λ_- . Écrit dans la base des modes propres, chaque mode peut être traité indépendamment avec le formalisme des fonctions de transfert. Les valeurs propres donnent les équations caractéristiques de chaque mode propre, les résoudre permet de trouver les solutions temporelles associées :

$$\lambda_+ = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 \Rightarrow \text{oscillateur libre}$$

$$\lambda_- = 0 \Rightarrow \text{les 3 cas des oscillateurs du 2e ordre amortis}$$

Dans l'espace temporel ou celui de Fourier, toute solution générale du système d'équations différentielles linéaires sera une combinaison linéaire des modes propres $D(t)$ et $S(t)$ du système.

Pour un système à N degrés de liberté indépendants, le corollaire du raisonnement précédent est que le système possède N modes propres de valeurs propres distinctes, et toute solution générale est une combinaison linéaire des N modes propres.

4 L'amplificateur opérationnel

L'amplificateur opérationnel (AO) est un composant électronique de base extrêmement important. Il est utilisé dans de très nombreux circuits d'électronique analogique car il permet de réaliser de façon simple des fonctions linéaires et non-linéaires variées et performantes. C'est en amplificateur de différence de potentiel, réalisé à l'aide de quelques dizaines de transistors et d'éléments passifs reliés ensemble dans une configuration assez complexe. A titre d'exemple, la structure interne de l'AO μ A741 (un composant très répandu, notamment en TP) est reproduit en figure 28. Mais la recherche de l'amélioration des performances et une plus grande maîtrise de la technologie du silicium ont conduit à des circuits bien plus complexes que celui reproduit ci-dessous.

La performance des amplificateurs opérationnels dépend principalement des transistors d'entrée (voir chapitre 9), qui sont bipolaires pour le μ A741 et à effet de champ pour le TL081, un autre modèle très répandu. Comme les qualités des transistors bipolaires sont moindres que celles des transistors à effet de champ, les défauts des amplificateurs opérationnels sont plus aisés à mettre en évidence sur un μ A741 que sur un TL081. C'est pourquoi pour les montages de base et ceux visant à mettre en évidence les défauts du composant on utilise plutôt le μ A741, et le TL081 est réservé pour les montages performants [14].

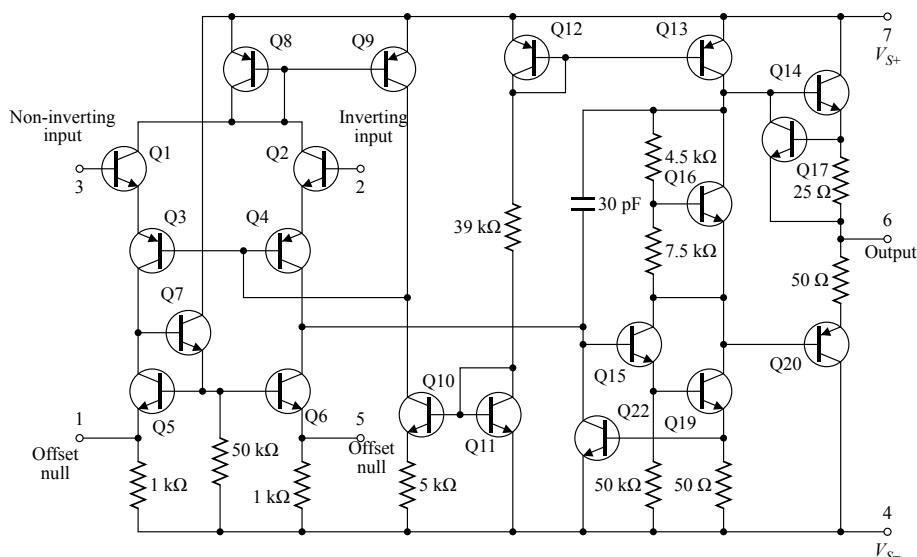


FIGURE 28 – Structure interne d'un amplificateur opérationnel 741 (source : adapté de Wikipedia).

Dans ce cours on ne s'intéresse pas à la structure interne de ce composant. Il sera traité comme une boîte noire dont on connaît les caractéristiques entrée-sortie. Cette boîte noire comporte néanmoins 8 broches, décrites figure 29. Les broches 2 et 3 sont appelées entrées *inverseuse* et *non-inverseuse* (aussi notées $-$ et $+$). La broche 6 fournit la tension de sortie du composant. L'AO est un composant actif, donc il est alimenté par une source de tension continue externe, en général par une tension $V_{cc} = +15$ V sur la broche 7 et $-V_{cc} = -15$ V sur la broche 4. Les broches 1 et 5 servent à corriger de façon externe les petites tensions de décalage inévitables dues à la fabrication du composant (offsets d'environ 10 mV) [28]. La dernière broche (8) n'est pas connectée. Remarquons qu'il n'y a aucune borne prévue pour une masse éventuelle sur ce boîtier, mais la masse dans le circuit est imposée par la source d'alimentation.

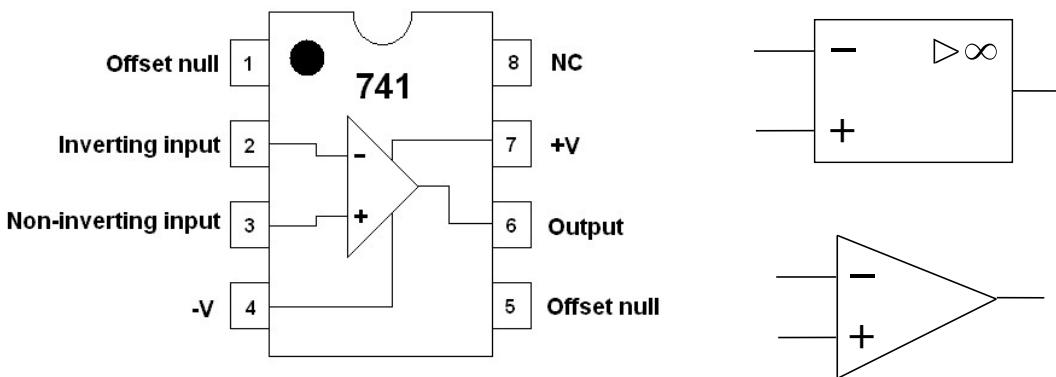


FIGURE 29 – *Gauche* : vue de dessus d'un AO μ A741 (le point noir désigne toujours la broche 1). *Droite* : représentation symbolique d'un AO, les bornes d'alimentation sont implicites.

L'amplificateur opérationnel à l'agrégation : les notions liées à ce composant électronique peuvent apparaître dans les épreuves suivantes :

- LP11 : Rétroaction et oscillations.
- MP22 : Amplification de signaux.
- MP27 : Systèmes bouclés.

4.1 L'amplificateur opérationnel idéal

Un AO idéal est représenté en général par trois bornes seulement : les entrées inverseuse V_- et non-inverseuse V_+ , et la sortie V_s . La source d'alimentation est donc implicite. Deux symboles coexistent pour représenter le modèle de l'AO idéal dans un circuit électrique (figure 29). Pour toute la suite du cours, on prendra les conventions de notation de la figure 30 pour décrire le fonctionnement de l'AO.

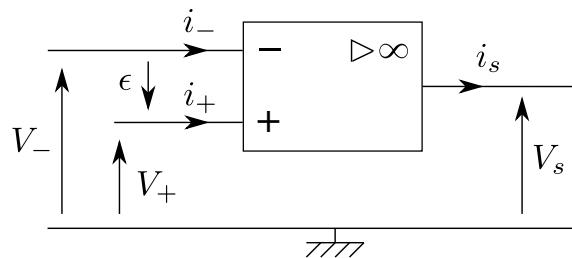


FIGURE 30 – Représentation symbolique d'un amplificateur opérationnel idéal et sa paramétrisation électrique.

Propriété 4.1. Fondamentalement, l'amplificateur opérationnel est un amplificateur de différence, dont la caractéristique entrée-sortie est :

$$V_s = \mu_0(V_+ - V_-) = \mu_0\epsilon \quad (4.1)$$

Dans le modèle idéal, μ_0 est infini donc $\epsilon = V_+ - V_- = 0$, et le système ne peut être stable que s'il existe une boucle de rétroaction entre la sortie et l'entrée inverseuse. De plus, on considère que $i_+ = i_- = 0$.

Le fait que le gain μ_0 de l'AO idéal soit infini impose que $\epsilon = V_+ - V_- = 0$ pour avoir $V_s \neq \infty$. De toute façon, la sortie sature forcément à une valeur $\pm V_{\text{sat}} = \pm V_{cc}$ par le fait que la source d'énergie électrique externe nécessaire au fonctionnement de l'AO ne peut fournir une puissance infinie. La condition de stabilité assurée par la rétroaction sur la borne inverseuse est admise dans ce chapitre, mais est détaillée au chapitre 6.

La tension de sortie V_s est donc comprise entre les valeurs V_{sat} et $-V_{\text{sat}}$. On distingue deux régimes :

- le *régime linéaire* pour lequel $\epsilon = 0$ et V_s est fixé par le reste du circuit dans la limite où $-V_{\text{sat}} < V_s < V_{\text{sat}}$
- un *régime non-linéaire* pour lequel la tension de sortie V_s prend une des valeurs limites, $+V_{\text{sat}}$ pour $\epsilon > 0$ ou $-V_{\text{sat}}$ pour $\epsilon < 0$.

La caractéristique entrée-sortie de l'AO idéal est représentée figure 31. Notons que le modèle de l'AO idéal ne dit rien sur le courant de sortie i_s .

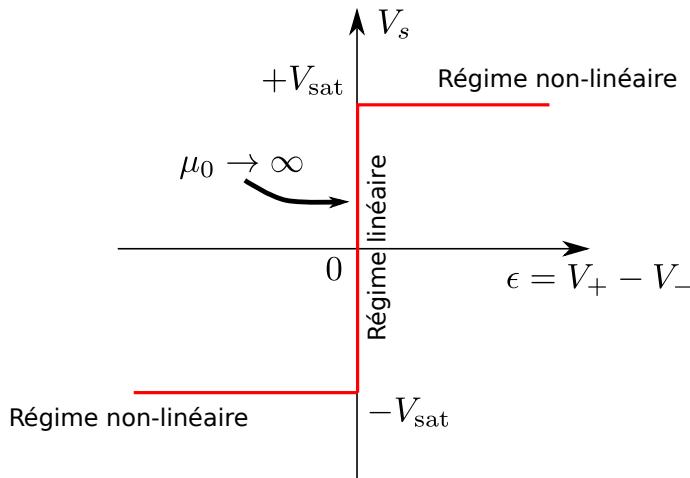


FIGURE 31 – Caractéristique entrée-sortie de l'AO idéal. Lorsque $\epsilon = 0$, V_s est imposé par le reste du circuit.

4.2 Montages de base

Dans cette section, l'amplificateur opérationnel idéal est inséré dans un circuit de façon à transformer la tension d'entrée d'un circuit e en une tension de sortie s .

4.2.1 Montage amplificateur inverseur

Dans le montage amplificateur inverseur (figure 32), en régime linéaire on a $V_- = V_+ = 0$. Comme $i_- = 0$, les résistances R_1 et R_2 sont parcourues par un même courant d'intensité i d'où :

$$i = \frac{e}{R_1} = -\frac{s}{R_2} \Rightarrow \frac{s}{e} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (4.2)$$

Ce montage réalise une amplification du signal d'entrée par un facteur négatif $G = -R_2/R_1$ si $R_2 > R_1$. En revanche la tension de sortie du montage sature à $s = \pm V_{\text{sat}}$ si $|G \times e| > V_{cc}$.

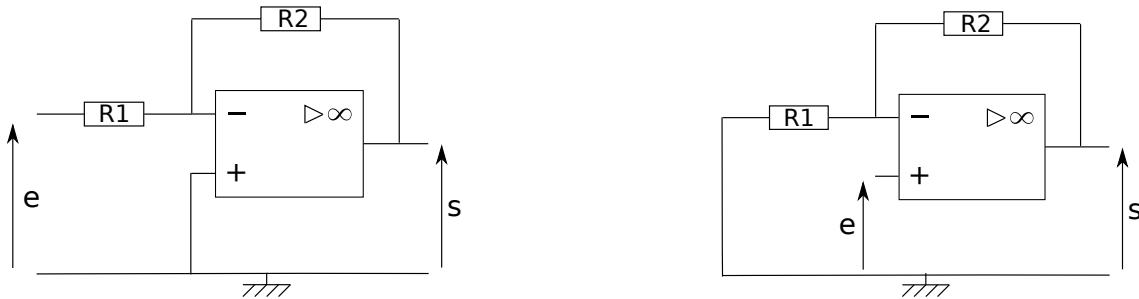


FIGURE 32 – *Gauche* : montage amplificateur inverseur. *Droite* : montage amplificateur non inverseur.

4.2.2 Montage amplificateur non inverseur

Le montage non inverseur est présenté figure 32. En régime linéaire, $V_+ = V_- = e$. De plus, en considérant le courant d'intensité i parcourant les résistances R_1 et R_2 , on a :

$$i = \frac{0 - e}{R_1} = \frac{e - s}{R_2} \Rightarrow \frac{s}{e} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (4.3)$$

Ce montage réalise une amplification du signal d'entrée par un facteur positif $G = 1 + R_2/R_1$ quelque soit le choix des résistances. La tension de sortie du montage sature à $s = \pm V_{\text{sat}}$ si $|Ge| > V_{cc}$.

Ce montage à l'avantage d'avoir une impédance d'entrée infinie vis à vis du signal d'entrée e , alors que l'impédance d'entrée du montage amplificateur inverseur est bien plus faible et vaut R_1 . Suivant les cas d'utilisation, l'un ou l'autre montage est donc à préférer.

4.2.3 Montage suiveur

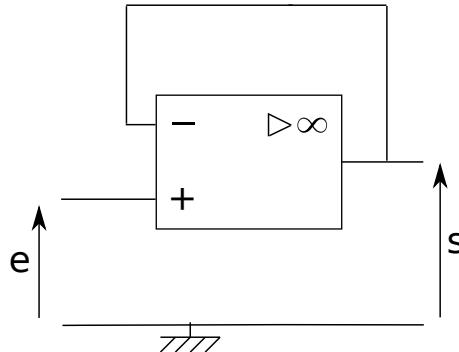


FIGURE 33 – Montage suiveur.

Le montage suiveur est un cas particulier de l'amplificateur sans inversion pour une résistance R_2 nulle et une résistance R_1 infinie (circuit ouvert). Ce montage n'amplifie pas en tension, $s = e$, mais possède une très grande résistance d'entrée et une très faible résistance de sortie : c'est un montage *adaptateur d'impédance*. Le montage suiveur est très largement utilisé car il permet de mesurer ou de prélever une tension sans modifier le fonctionnement du circuit étudié, car il préleve très peu de courant. Dans une certaine mesure c'est aussi un montage amplificateur de puissance, dans le sens où la puissance appelée en entrée est quasiment nulle ($i_+ \approx 0$) et la puissance en sortie est supérieure (mais rarement supérieure à environ 100 mW).

4.2.4 Montage soustracteur

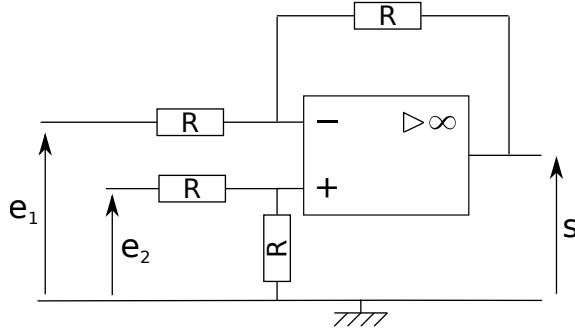


FIGURE 34 – Montage soustracteur.

Le montage soustracteur (figure 34) peut être employé dans les boucles d’asservissement pour comparer une valeur de commande à la valeur atteinte par le système (voir chapitre 5). Pour décrire son fonctionnement, on voit que le potentiel V_+ peut être obtenu par une formule de diviseur de tension car $i_+ = 0$:

$$V_+ = \frac{R}{2R}e_2 = \frac{e_2}{2} \quad (4.4)$$

Le potentiel V_- s’obtient aisément en reconnaissant aussi un diviseur de tension :

$$V_- - s = \frac{R}{2R}(e_1 - s) = \frac{e_1}{2} - \frac{s}{2} \quad (4.5)$$

Dans le modèle de l’AO idéal, $V_+ = V_-$ donc on obtient :

$$s = e_2 - e_1 \quad (4.6)$$

4.2.5 Réalisation d’un dipôle à résistance négative

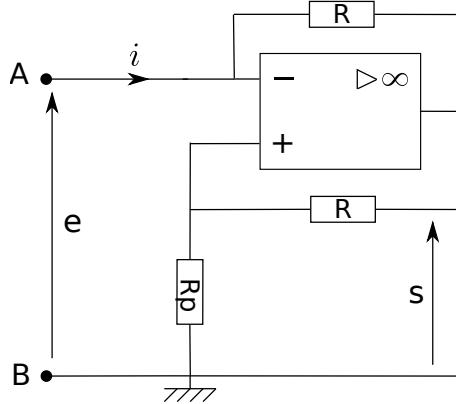


FIGURE 35 – Réalisation d’une résistance négative à l’aide d’un AO.

Étudions le circuit représenté figure 35. Nous supposons que l’amplificateur opérationnel est en régime linéaire. Ce n’est pas *a priori* évident du fait qu’il y a une rétroaction à la fois sur l’entrée inverseuse et l’entrée non-inverseuse, mais nous l’admettons et nous pouvons constater expérimentalement que c’est le cas. Comme $i_- = 0$, on a :

$$i = \frac{e - s}{R} \quad (4.7)$$

Sur la branche qui reboucle à l'entrée non-inverseuse, comme $i_+ = 0$ on reconnaît un diviseur de tension donc :

$$e = V_+ = \frac{R_p}{R + R_p} s \quad (4.8)$$

On en déduit :

$$Ri = e - s = e - \frac{R_p + R}{R_p} e = -\frac{R}{R_p} e \quad (4.9)$$

Le dipôle vu entre les bornes A et B a donc une caractéristique courant-tension :

$$e = -R_p i \quad (4.10)$$

C'est donc une façon de réaliser une résistance négative. En pratique, pour obtenir la stricte égalité entre les résistances R , l'une des deux résistances est variable.

4.2.6 Comparateur de tension

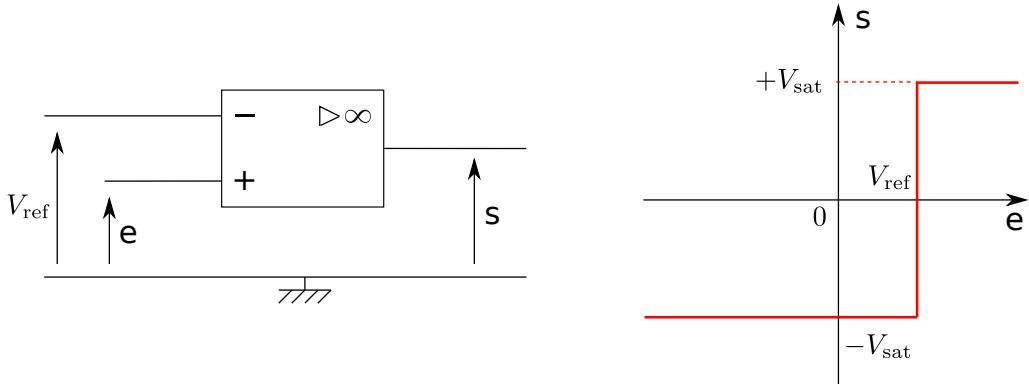


FIGURE 36 – *Gauche* : montage comparateur simple de tension non inverseur. *Droite* : caractéristique du comparateur simple non inverseur.

Le comparateur de tension est un exemple de montage simple fonctionnant en régime saturé, puisqu'aucune boucle de rétroaction n'est présente. Parce que la tension de sortie s ne dépend que du signe de la tension différentielle d'entrée ϵ , la relation entre s et ϵ est non-linéaire.

Un comparateur simple est réalisable à l'aide d'un amplificateur opérationnel en boucle ouverte. La tension de référence V_{ref} est appliquée sur l'une des entrées de l'AO et la tension d'entrée e sur l'autre. Nous disposons de deux types de comparateurs simples selon que le signal d'entrée est introduit sur l'entrée non inverseuse (comparateur simple non inverseur) ou sur l'entrée inverseuse (comparateur simple inverseur). Pour les deux types de comparateurs, les tensions de sortie sont les tensions de saturation $\pm V_{\text{sat}}$.

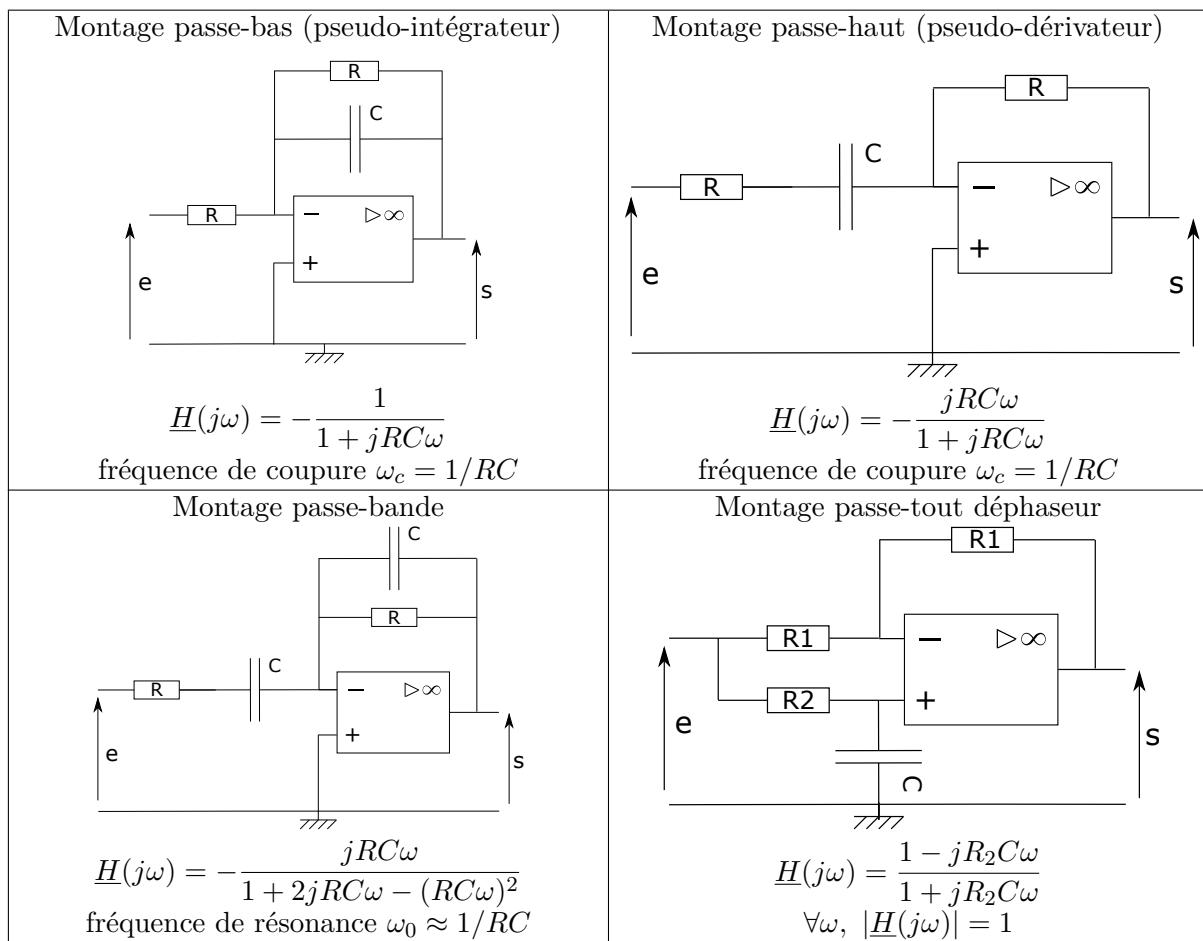
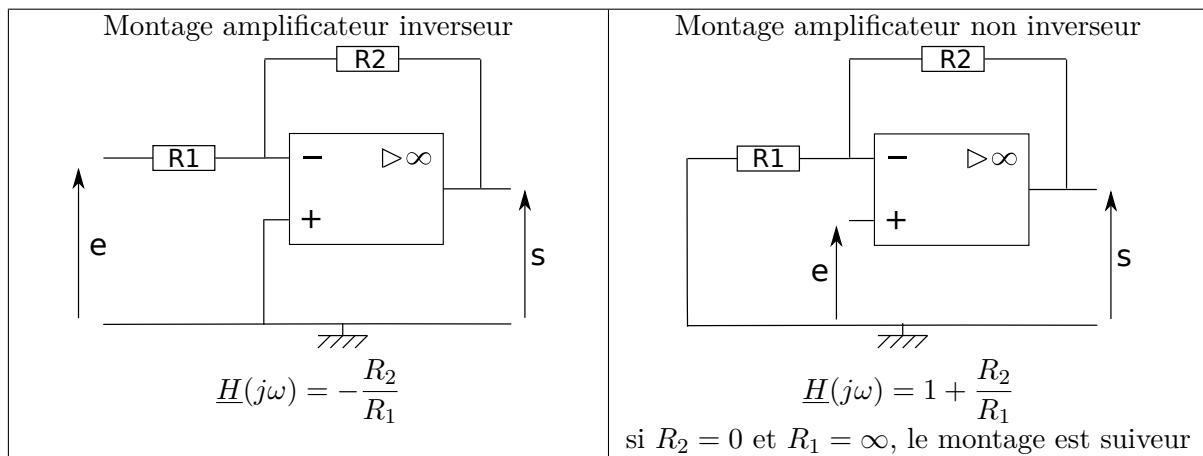
Parmi les applications possibles du comparateur simple, signalons la détection d'un niveau de tension de référence, et la transformation d'un signal analogique variable en un signal numérique à deux niveaux permettant son traitement logique. Mais les caractéristiques de commutation d'un comparateur à AO sont médiocres, à cause de la *vitesse de balayage* limitée du composant à haute fréquence. Les limitations des AO sont étudiées section 4.4.

4.3 Application aux filtres actifs

4.3.1 Montages de base

Une liste exhaustive et bien documentée de tous les filtres possibles peut être consultée dans la référence [20] et sur les deux sites web :

- http://www.gecif.net/articles/genie_electrique/filtre/
- http://electronique.aop.free.fr/liste_aop.html



4.3.2 Étude d'un filtre passe-bande actif : Sallen et Key

Nous venons de voir des montages à AO réalisant des filtres d'ordre 1 ou 2. De manière générale, on peut synthétiser des filtres de tous ordres avec un ou plusieurs AO. Nous allons étudier ici à titre d'exemple la *structure de Sallen et Key à gain variable* (figure 37), qui permet de fabriquer toute forme de fonction de transfert par un choix judicieux de composants autres que des inductances.

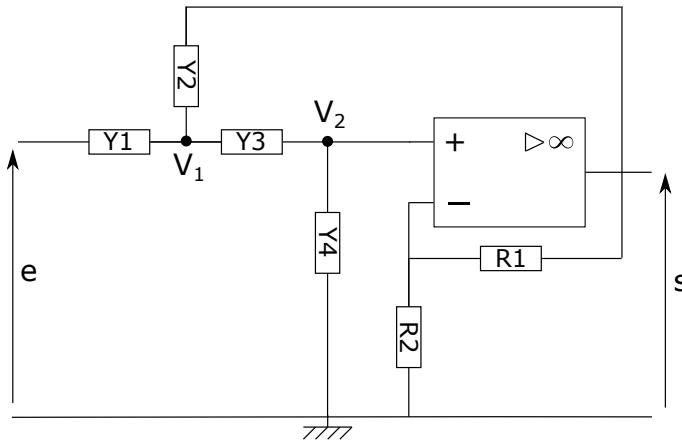


FIGURE 37 – Cellule de Sallen et Key à gain variable.

Exprimons tout d'abord la tension V_2 en fonction de s par le biais d'un pont diviseur de tension (rappel : $V_+ = V_-$) :

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} s = \frac{s}{K} \quad (4.11)$$

Ensuite, déterminons l'expression de la tension V_1 grâce au théorème de Millman en fonction des admittances (inverse des impédances) Y_i :

$$V_1 = \frac{eY_1 + sY_2 + V_2Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad (4.12)$$

Il est possible de connaître aussi l'expression de V_2 en appliquant la formule du pont diviseur de tension entre les admittances Y_3 et Y_4 :

$$V_2 = \frac{Y_3}{Y_3 + Y_4} V_1 \quad (4.13)$$

Il suffit ensuite de dérouler les calculs et on obtient la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{KY_3Y_1}{Y_3Y_2(1 - K) + Y_1(Y_4 + Y_3) + Y_4(Y_2 + Y_3)} \quad (4.14)$$

Un passe-bande peut être obtenu en prenant les admittances suivantes :

- $Y_1 = Y_2 = 1/R$
- $Y_3 = jC\omega$
- $Y_4 = R//C$

La fonction de transfert peut alors se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_0 &= K/(5 - K) \\ Q &= \sqrt{2}/(5 - K) \\ \omega_0 &= \sqrt{2}/RC \end{cases} \quad (4.15)$$

Dans le cas $Q > 1/\sqrt{2}$, il est possible d'obtenir une bande passante très étroite en choisissant $K \lesssim 5$, impossible à obtenir par l'association de filtres du premier ordre.

4.4 Limitations

L'AO réel est un composant dont les caractéristiques sont proches de celles d'un AO idéal. Néanmoins il est bon de connaître certaines de ses limitations. Notons aussi que les caractéristiques de l'AO réel dépendent du type d'AO utilisé.

De manière générale, on peut représenter un AO sous la forme d'un quadripôle qui réalise la transformation d'une tension d'entrée e en une tension de sortie s . En régime sinusoïdal, ce quadripôle peut être décrit tel que sur la figure 38.

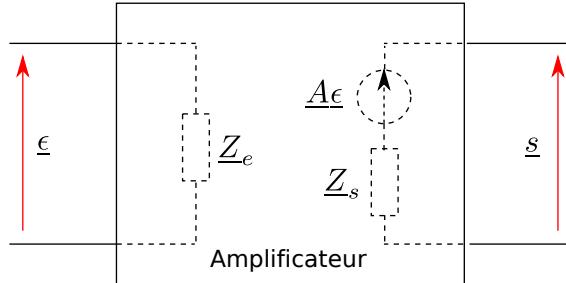


FIGURE 38 – Modèle général d'un quadripôle d'amplification.

Vu de la tension d'entrée $e \equiv \underline{e}$, l'AO est équivalent à une impédance d'entrée Z_e . Vu de la sortie, c'est un générateur de tension de f.e.m $A\underline{e}$ et d'impédance Z_s . A est la fonction de transfert intrinsèque du quadripôle. En première approximation, cette fonction de transfert peut être modélisée par un simple gain en tension μ_0 , infini dans le cadre du modèle idéal de l'AO.

Propriété 4.2. *Le modèle de l'amplificateur opérationnel idéal correspond à :*

- une fonction de transfert interne réelle indépendante de la fréquence $A = \mu_0 \rightarrow \infty$
- une impédance d'entrée $Z_e \rightarrow \infty$ (pour avoir $i_+ = i_- = 0$)
- une impédance de sortie nulle.

Ce système ne consomme pas de puissance en entrée et fournit la puissance demandée en sortie.

Ces propriétés générales d'un amplificateur idéal ne sont évidemment pas vérifiées en réalité. Concernant les amplificateurs opérationnels, les principales limitations sont les suivantes.

4.4.1 Limitation en tension de sortie

La tension de sortie d'un AO réel ne peut être supérieure à sa tension d'alimentation externe :

$$|s| < V_{\text{sat}} = V_{cc} \quad (4.16)$$

De plus le gain μ_0 n'est pas infini bien que de valeur très élevée.

4.4.2 Limitation en courant de sortie

Le courant de sortie d'un AO réel est limité :

$$|i_s| < i_{\text{sat}} \quad (4.17)$$

Pour le μ A741, on a $i_{\text{sat}} \approx 10 \text{ mA}$. Ceci impose de bien choisir la valeur des impédances branchées en sortie de l'amplificateur pour éviter d'atteindre le courant de saturation. Étudions plus précisément le montage inverseur à la lumière des deux premières limitations mentionnées (figure 39).

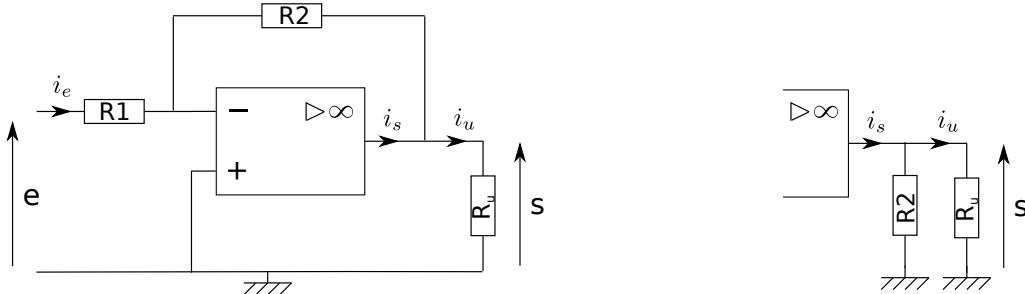


FIGURE 39 – Gauche : Étude du montage amplificateur inverseur en charge. Droite : détail de la sortie de l'AO.

On désire réaliser un amplificateur de gain $|G| = R_2/R_1 = 10$, à l'aide d'un amplificateur opérationnel alimenté en $\pm 15 \text{ V}$, alimentant une résistance de charge R_u . La tension s est limitée par la tension d'alimentation à $\pm 15 \text{ V}$, donc le circuit fonctionne dans le régime linéaire si $|e| < 1 \text{ V}$. La sortie de l'AO voit deux résistances en parallèles R_2 et R_u branchées au potentiel nul²². Le courant maximum en sortie de l'AO impose des contraintes sur le choix des valeurs des résistances R_2 et R_u de la façon suivante :

$$i_s^{\max} \approx \frac{15 \text{ V}}{R_2 \parallel R_u} < i_{\text{sat}} = 10 \text{ mA} \Rightarrow R_2 \parallel R_u > \frac{V_{\text{sat}}}{i_{\text{sat}}} = 1.5 \text{ k}\Omega \quad (4.18)$$

$$\Rightarrow R_2 > \frac{R_u \times V_{\text{sat}}/i_{\text{sat}}}{R_u - V_{\text{sat}}/i_{\text{sat}}} = \frac{1.5 \text{ k}\Omega \times R_u}{R_u - 1.5 \text{ k}\Omega} \quad (4.19)$$

En réalité, l'impédance de charge R_u est souvent imposée (système extérieur), mais on voit qu'un montage AO inverseur ne peut alimenter une charge $R_u < 1.5 \text{ k}\Omega$ sans atteindre la saturation du courant de sortie²³. Supposons que $R_u = 3 \text{ k}\Omega$, alors ceci impose une contrainte sur le choix de la résistance R_2 . Or comme on veut $R_2/R_1 = 10$, la saturation en courant de sortie de l'AO impose de choisir un couple (R_1, R_2) judicieux (voir tableau 3).

R_2	R_1	Commentaires
$3 \text{ k}\Omega$	300Ω	Cas limite, et résistance R_1 un peu faible.
$10 \text{ k}\Omega$	$1 \text{ k}\Omega$	Bon choix.
$100 \text{ k}\Omega$	$10 \text{ k}\Omega$	Bon choix.
$1 \text{ M}\Omega$	$100 \text{ k}\Omega$	Résistance R_2 trop élevée.

TABLE 3 – Choix commentés des couples (R_1, R_2) possibles pour le montage inverseur tel que $R_2/R_1 = 10$ et tel que le courant en sortie de l'AO ne sature pas, pour $R_u = 3 \text{ k}\Omega$. Les fortes résistances sont déconseillées car elles sont sensibles aux parasites extérieurs.

22. Attention d'ailleurs à bien distinguer le courant de sortie de l'AO i_s et le courant de sortie du montage i_u .

23. Dans le chapitre 9 nous allons voir qu'un montage inverseur n'est pas un amplificateur de puissance mais seulement un amplificateur de tension. L'amplification de puissance est mieux réalisée par des montages à transistors.

4.4.3 Résistances d'entrée et de sortie

Un amplificateur opérationnel réel possède une impédance d'entrée très élevée et une impédance de sortie très faible, toutes deux mesurables. La valeur de ces impédances dépend du choix du composant. Des valeurs usuelles sont présentées dans le tableau 4. Notons qu'une conséquence de la valeur finie de la résistance d'entrée est que les courants d'entrée i_+ et i_- ne sont pas nuls pour un composant réel, bien que très faibles (mais mesurables).

4.4.4 Vitesse de balayage

Jusqu'à présent nous n'avons pas parlé du comportement dynamique de l'amplificateur opérationnel. La modélisation fréquentielle de l'AO en régime linéaire est abordée section 4.5. Mentionnons toutefois déjà que la vitesse de balayage de la tension en sortie de l'AO est limitée, *i.e.* la dérivée temporelle de la tension de sortie ne peut être aussi rapide qu'on le souhaite. Ce phénomène, appelé *slew rate*, impose que :

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| < \sigma \approx 1 \text{ V}/\mu\text{s} \quad (4.20)$$

Cet effet non-linéaire se manifeste lorsqu'on travaille avec des tensions sinusoïdales de forte amplitude à haute fréquence, ou en utilisant l'AO en comparateur de tension simple à haute fréquence (ce qui demande d'effectuer des commutations rapides entre $+V_{\text{sat}}$ et $-V_{\text{sat}}$).

Caractéristique	Idéal	μA741	TL081
Paramètres linéaires			
Gain μ_0	∞	2×10^5	2×10^5
Résistance d'entrée R_e	∞	$2 \times 10^6 \Omega$	$10^{12} \Omega$
Résistance de sortie R_s	0Ω	100Ω	100Ω
Produit gain-bande	∞	1 MHz	4 MHz
Courant de polarisation d'entrée $I_p = (i_+ + i_-)/2$	0 A	80 nA	30 pA
Tension de décalage (offset) V_d	0 V	1 mV	3 mV
Paramètres non-linéaires			
Tension maximum de sortie	V_{cc}	15 V	15 V
Courant maximum de sortie	∞	10 mA	10 mA.
Vitesse de balayage σ	∞	$0.5 \text{ V}/\mu\text{s}$	$13 \text{ V}/\mu\text{s}$

TABLE 4 – Caractéristiques approximatives réelles des amplificateurs opérationnels courants. Ces valeurs peuvent varier d'un composant à l'autre dans une même série.

4.5 Comportement fréquentiel

4.5.1 Modèle d'ordre 1

Dans le cadre du modèle idéal de l'AO, la fonction de transfert du quadripôle modélisant un AO peut être assimilée à un gain réel en première approximation. En seconde approximation, on peut modéliser ce quadripôle par un filtre passe-bas du premier ordre :

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{s}{\underline{\epsilon}} = \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau} \quad (4.21)$$

avec $\mu_0 \approx 10^5$ et une fréquence de coupure à -3dB valant $f_0 \equiv 1/(2\pi\tau) \approx 10\text{Hz}$. En régime temporel, cette fonction de transfert conduit à une équation différentielle du premier ordre :

$$\boxed{\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \mu_0(V_+ - V_-) = \mu_0 e} \quad (4.22)$$

dans le régime de fonctionnement linéaire de l'AO (*i.e.* hors saturation en tension de sortie et à des fréquences suffisamment faibles pour éviter le slew rate).

Ce modèle se justifie très bien si on étudie la structure interne d'un AO réel (figure 28). En effet, on voit que ce composant contient essentiellement des résistances et des transistors, mais un seul condensateur. Donc une modélisation par un filtre du premier ordre est suffisante pour décrire ce composant dans le régime fréquentiel²⁴.

Ce modèle permet de mieux comprendre pourquoi un circuit est stable s'il existe une boucle de rétroaction liant la sortie à la borne inverseuse. L'étude de la stabilité des circuits n'est abordée qu'au chapitre 6, mais dans un premier temps on peut retenir qu'inverser les bornes d'entrée de l'AO revient formellement à inverser le signe²⁵ de μ_0 .

4.5.2 Conservation du produit gain-bande

La bande passante de l'AO définie par $f < f_0 \approx 10\text{Hz}$ n'est pas la bande passante du montage dans lequel il est inséré. Reprenons le montage de l'amplificateur non inverseur. On a montré que $\underline{s} = G\underline{e}$ avec $G = (R_2 + R_1)/R_1$. Posons $G = 1/\beta$. Alors :

$$V_- = \underline{e} - \underline{\epsilon} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{s} = \beta \underline{s} \quad (4.23)$$

puis en utilisant le modèle fréquentiel du premier ordre :

$$\underline{s}(1 + j\omega\tau) = \mu_0 \underline{\epsilon} \Leftrightarrow \underline{s}(1 + j\omega\tau) = \mu_0 (\underline{e} - \beta \underline{s}) \quad (4.24)$$

$$\Rightarrow H(j\omega) \equiv \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0\beta + j\omega\tau} = \left(\frac{\mu_0}{1 + \mu_0\beta} \right) \times \frac{1}{1 + \frac{j\omega\tau}{1 + \mu_0\beta}} \quad (4.25)$$

Le gain du montage amplificateur μ'_0 et sa fréquence de coupure f'_0 à -3dB sont donc :

$$\mu'_0 = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0\beta} \xrightarrow{\mu_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} = G \quad (4.26)$$

$$f'_0 = \frac{1}{2\pi\tau'} = \frac{1 + \mu_0\beta}{2\pi\tau} = (1 + \mu_0\beta)f_0 \xrightarrow{\mu_0 \rightarrow +\infty} \infty \quad (4.27)$$

Les caractéristiques du montage amplificateur étudié dans le cadre du modèle de l'AO idéal statique sont retrouvées par passage à la limite $\mu_0 \rightarrow \infty$. De plus, on remarque qu'on a *conservation du produit gain-bande* quelque soit le choix du facteur d'amplification $1/\beta$:

$$\mu'_0 f'_0 = \mu_0 f_0 \quad (4.28)$$

24. En réalité, un amplificateur opérationnel est un système d'ordre bien supérieur avec tous ses transistors. Le condensateur est rajouté dans sa structure pour opérer une *compensation en fréquence*, qui consiste à forcer le système à être d'ordre 1 sur une plage de fréquence assez large qui contient la fréquence critique où le gain $A(j\omega)$ devient inférieur à 0. Ceci garantit que le déphasage en boucle ouverte n'est pas inférieur à -180° à cette fréquence et donc la stabilité du système lorsqu'il est bouclé, en suiveur par exemple (voir chapitre 6). La compensation en fréquence dégrade donc la bande passante du composant.

25. Dans le cadre du modèle idéal, ceci n'avait pas d'importance car μ_0 est infini.

Autrement dit, plus le gain du montage est important, plus sa bande passante diminue (illustration figure 40). Dans le régime temporel cela veut dire que le système est *plus lent*. Cette propriété est générique aux systèmes bouclés du premier ordre avec une boucle de rétroaction négative de gain $G = 1/\beta$ (voir chapitre 5). Notons aussi que la bande passante f'_0 du montage en contre-réaction est bien supérieure à la bande passante f_0 du montage sans boucle de rétroaction, mais qu'à haute fréquence tous les diagrammes de Bode ont la même asymptote. Le constructeur ne donne d'ailleurs pas la fréquence f_0 mais plutôt la valeur du produit gain-bande, donc la fréquence de coupure pour un gain unitaire (voir tableau 4 et figure 40).

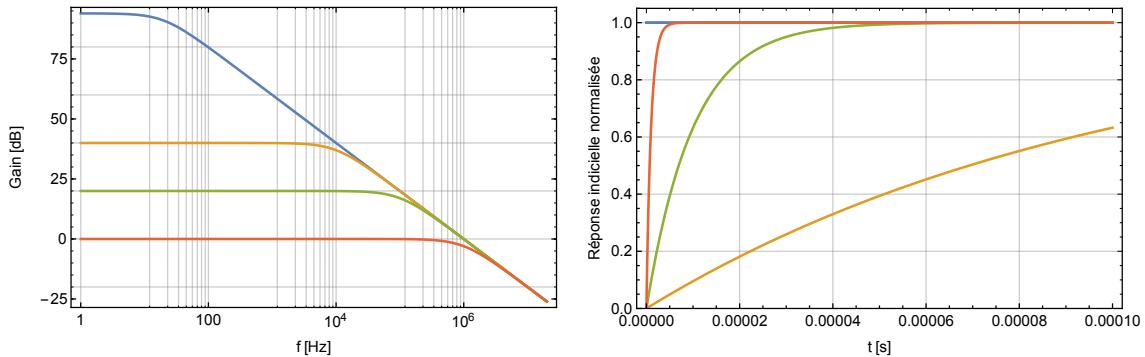
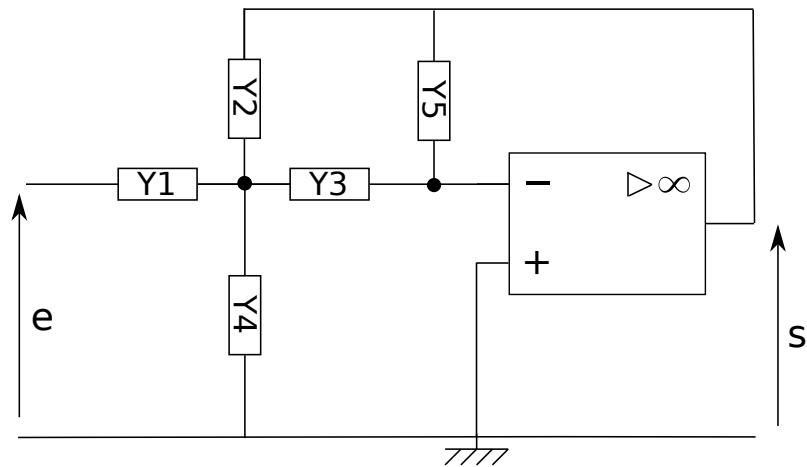


FIGURE 40 – Gauche : diagrammes de Bode en amplitude pour un montage amplificateur de gain $G = 100$ (orange), 10 (vert), 1 (rouge) et pour l'AO μ A741 sans boucle de rétroaction (bleu). Droite : réponses temporelles indicielles normalisées en gain statique pour un montage amplificateur de gain $G = 100$ (orange), 10 (vert), 1 (rouge), en bleu l'échelon de tension $e(t)$ normalisé.

4.6 Exercices (quelques solutions en annexe)

1. Retrouver toutes les fonctions de transfert et tracer les diagrammes de Bode des fonctions électroniques représentées section 4.3.
2. En reprenant la cellule de Sallen et Key, montrer que l'on obtient :
 - (a) un filtre passe-bas du second ordre avec $Y_1 = Y_3 = 1/R$ et $Y_2 = Y_4 = jC\omega$
 - (b) un filtre passe-haut du second ordre avec $Y_2 = Y_4 = 1/R$ et $Y_1 = Y_3 = jC\omega$
3. Cellule de Rauch : déterminer la fonction de transfert de la structure suivante et montrer que l'on obtient un filtre passe-bande pour les admittances $Y_1 = Y_4 = Y_5 = 1/R$ et $Y_2 = Y_3 = jC\omega$.



5 Systèmes bouclés et asservissements

CETTE CHAPITRE aborde des notions générales sur les systèmes bouclés, et plus spécifiquement sur l'asservissement des systèmes. Le cas particulier des systèmes bouclés instables est abordé au chapitre 6. Les montages à amplificateur opérationnel avec une boucle de rétroaction sont des exemples de systèmes bouclés (voir chapitre 4).

Asservir un système peut servir à satisfaire deux types d'objectifs :

1. astreindre la sortie $s(t)$ d'un système à suivre une loi prévue à l'avance appelée consigne $e(t)$; le but étant que la sortie recopie le plus fidèlement possible la consigne $e(t)$ (par exemple l'amplification haute fidélité d'un signal musical, guidage d'une antenne sur un satellite, etc...) : on parle alors de *suivi de consigne*
2. astreindre la sortie d'un système à être constante (par exemple maintenir la température d'une pièce constante, maintenir la vitesse de rotation d'une machine-outil, etc...) : on parle de *régulation* (c'est un cas particulier où la consigne est constante).

On ajoute en général des critères de qualité pour caractériser la façon dont le suivi doit être réalisé, par exemple :

- des critères temporels : par exemple la recherche du temps minimal pour atteindre la valeur finale attendue à un pourcentage près ;
- des critères de précision : écart à la consigne, capacité à suivre des modifications rapides ;
- des critères énergétiques : par exemple la dépense d'énergie nécessaire à la réalisation de l'objectif donné est minimale ;
- des critères économiques ;
- etc.

Exemples : la nature et les technologies qui nous entourent regorgent d'exemples de systèmes régulés ou asservis. Citons par exemple pour les systèmes stables :

- la régulation en vitesse d'un moteur (figure 41, escalator...),
- le montage suiveur ou les montages amplificateurs à AO,
- la régulation en température d'une pièce ou d'un four,
- la régulation de température du corps humain,
- la conduite automobile (suivre un chemin défini),
- les pilotes automatiques.

L'effet Larsen est un exemple de système bouclé instable.

Commentons la figure 41. On comprend bien que, sans système d'asservissement, lorsque le foret va entamer le mur, sa vitesse de rotation va décroître. Si le mur est dur et épais, il est possible de ne jamais arriver au bout du perçage. Par contre si le système est asservi en vitesse ou en couple, alors le système va contrecarrer le couple de frottement provoqué par le perçage du mur en injectant davantage d'énergie dans le moteur électrique de la perceuse. Cette rétroaction est possible si la baisse de la vitesse de rotation du moteur due à un couple de charge extérieur a d'abord été détectée, ici à l'aide d'une dynamo tachymétrique. Notons que l'énergie de l'outil provient de l'alimentation du secteur et non de la commande.

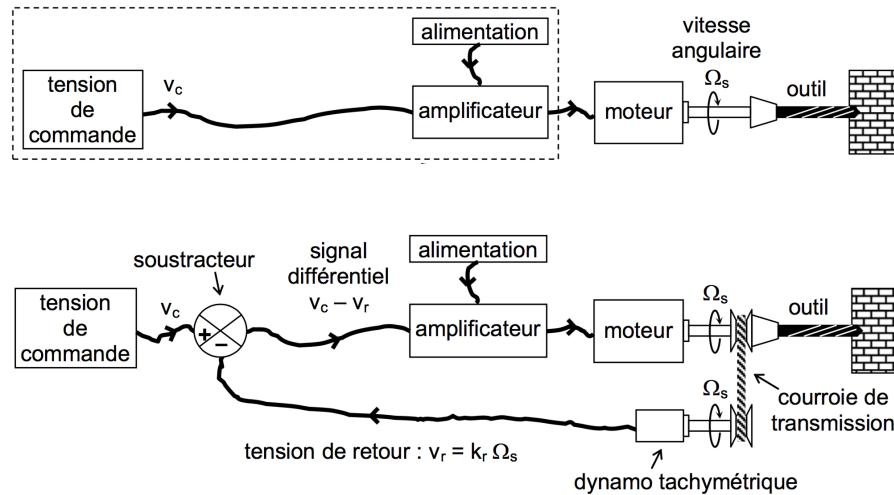


FIGURE 41 – Haut : perceuse non asservie en vitesse. Bas : perceuse asservie en vitesse.

Les systèmes bouclés à l'agrégation : les notions liées à ces systèmes et aux boucles de rétroaction peuvent apparaître dans les épreuves suivantes :

- LP11 : Rétroaction et oscillations.
- MP27 : Systèmes bouclés.
- MP28 : Instabilités et phénomènes non-linéaires.

5.1 Notion de rétroaction, commande d'un système

5.1.1 Schéma fonctionnel unifilaire général d'un système bouclé

Le schéma fonctionnel général d'un système bouclé est présenté figure 42. Trois organes composent la boucle :

- une *chaîne directe* de fonction de transfert \underline{A} contenant un *actionneur*,
- une *chaîne de retour* de fonction de transfert $\underline{\beta}$ qui peut contenir un *capteur* ou être directe ($\underline{\beta} = 1$),
- un *comparateur* (souvent un soustracteur) qui fournit le signal de commande de la chaîne directe en comparant le signal d'entrée au signal de retour.

Le signal de sortie n'étant pas forcément de même nature que le signal d'entrée (par exemple s une vitesse de rotation et e une tension), le signal de sortie est transformé par l'opérateur de la chaîne de retour (souvent un capteur, par exemple une dynamo) avant de le comparer au signal d'entrée. Les flèches représentent le sens des transferts d'énergie nécessaires à la commande (mais non de la principale source d'énergie du système qui peut ne pas être présentée sur le schéma, comme l'alimentation externe d'un AO). L'actionneur peut donc éventuellement convertir un signal de commande de faible puissance en un signal de puissance bien plus élevée grâce à un apport d'énergie externe, alors que le détecteur convertit ce signal de forte puissance en un signal de commande de puissance plus faible.

On définit $\underline{A}(j\omega)$ et $\underline{\beta}(j\omega)$ les fonctions de transfert respectivement de la chaîne directe et de la chaîne de retour. D'après la figure 42, on a :

$$\underline{s} = \underline{A}\epsilon = \underline{A}(e - \underline{\beta}s) \Rightarrow H_{FTBF} = \frac{\underline{s}}{e} = \frac{\underline{A}}{1 + \underline{A}\underline{\beta}} \quad (5.1)$$

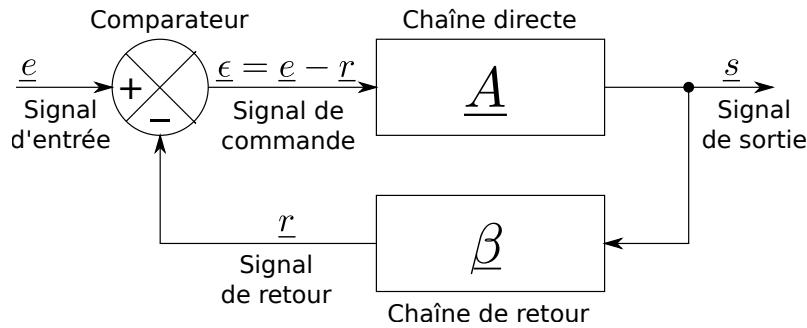


FIGURE 42 – Schéma fonctionnel unifilaire général d'un système bouclé.

Définition 5.1. Pour un système bouclé générique tel que représenté figure 42, on définit :

- la fonction de transfert en boucle fermée :

$$\underline{H}_{FTBF} = \frac{s}{e} = \frac{\underline{A}}{1 + \underline{A}\underline{\beta}} \quad (5.2)$$

- la fonction de transfert en boucle ouverte (appelée aussi gain de boucle) :

$$\underline{H}_{FTBO} = \frac{r}{e} = \underline{A}\underline{\beta} \quad (5.3)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est la fonction de transfert que l'on obtiendrait si l'on ouvrait la boucle à la sortie de l'opérateur $\underline{\beta}$. Notons que si l'on remplace le soustracteur par un additionneur, cela revient à changer le signe de $\underline{\beta}$ par rapport au cas où l'on a un soustracteur.

5.1.2 Application au montage amplificateur non inverseur

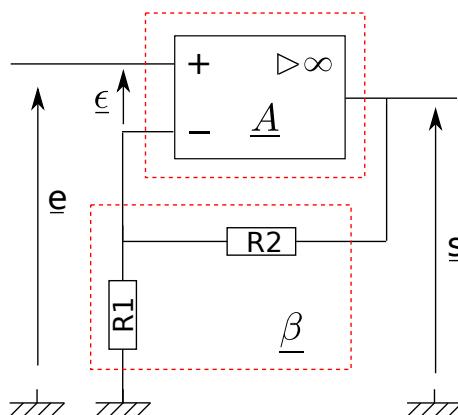


FIGURE 43 – Montage amplificateur non inverseur interprété comme système bouclé.

Revenons sur l'exemple du montage à amplificateur opérationnel non inverseur (section 4.2 et figure 43). Sans utiliser le formalisme des systèmes bouclés, nous sommes par-

venus à comprendre ce système parce qu'il est simple. Mais c'est aussi un premier exemple pour illustrer la notion de rétroaction et de système bouclé.

La grandeur de sortie de ce système est la tension \underline{s} , la grandeur d'entrée la tension \underline{e} et le signal de commande $\epsilon = \underline{V}_+ - \underline{V}_-$. La chaîne directe est modélisée par l'AO et sa fonction de transfert \underline{A} , qui peut être soit celle de l'AO idéal, soit celle de l'AO du premier ordre. La chaîne de retour est réalisée par la boucle de rétroaction de fonction de transfert $\underline{\beta} = \underline{V}_-/\underline{s} = 1/G$ avec $G = 1 + R_2/R_1$ le gain statique du montage. La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit :

$$\underline{H}_{\text{FTBO}}(j\omega) = \frac{\underline{V}_-(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} = \underline{A}(j\omega)\underline{\beta}(j\omega) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau} \quad (5.4)$$

dans le cadre du modèle de l'AO du premier ordre. La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\underline{H}_{\text{FTBF}}(j\omega) = \frac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} = \frac{\underline{A}(j\omega)}{1 + \underline{A}(j\omega)\underline{\beta}(j\omega)} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0\beta} \frac{1}{1 + \frac{j\omega\tau}{1 + \mu_0\beta}} \quad (5.5)$$

On retrouve la conservation du produit gain-bande telle que calculée sans l'aide du formalisme du système bouclé section 4.5.2. Dans le cadre du modèle de l'AO idéal d'ordre zéro, on a $\tau = 0$ donc :

$$\underline{H}_{\text{FTBF}}(j\omega) = \frac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0\beta} \approx \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (5.6)$$

avec $\mu_0 \rightarrow \infty$. On retrouve la loi d'amplification établie section 4.2, mais en regardant le montage comme un système bouclé avec rétroaction négative. Au passage, le comparateur suiveur peut se décrire de la même manière.

5.1.3 Nécessité d'un comparateur

Dans l'exemple précédent de la perceuse on a pu se convaincre de la nécessité d'un comparateur, c'est-à-dire d'un dispositif capable de comparer le signal d'entrée au signal de retour, pour constituer le signal de commande envoyé au système actionneur. Ce comparateur est en général un soustracteur, donc ses grandeurs d'entrées doivent être de même nature physique (signaux électriques par exemple). On peut aussi utiliser un sommateur, ou un soustracteur avec plus de deux entrées.

Si les grandeurs d'entrée sont des tensions électriques, alors le soustracteur peut être réalisé par un montage à AO (figure 34) ou directement par les bornes inverseuse et non inverseuse d'un AO.

5.1.4 Utilité des transformées de Laplace

Dans le programme de physique, les transformées de Laplace ne sont pas abordées. La notion de rétroaction peut simplement être abordée autour des montages à AO avec boucle de retour, tel que dans la section 5.1.2. Néanmoins, la description des systèmes bouclés touche à ses limites lorsqu'on se cantonne à la réponse harmonique de la boucle.

En effet, pour de nombreux systèmes asservis, et notamment ceux abordés en TP, on regarde la réponse d'un système à un échelon de commande, afin d'observer si le système bouclé est capable de suivre la commande qu'un utilisateur lui fournit (et avoir $\epsilon \rightarrow 0$). Or la réponse d'un système à un échelon de tension suppose d'étudier son régime transitoire et

de prendre en compte ses conditions initiales. Ceci n'est pas possible dans le formalisme de la transformée de Fourier et de l'étude du régime harmonique. La transformée de Laplace est adaptée à ce problème, et formellement revient à remplacer la variable $j\omega$ par un nombre complexe p quelconque²⁶ :

$$\text{Fourier : } F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt, \quad \text{Laplace : } F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (5.7)$$

et à changer le domaine d'intégration pour prendre en compte les conditions initiales²⁷.

$f(t)$	$F(p)$	Validité
$\delta(t)$	1	
$K \times u(t)$	$\frac{K}{p}$	$\Re(p) > 0$
$Kt \times u(t)$	$\frac{K}{p^2}$	$\Re(p) > 0$
$e^{-at} \times u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\Re(p) > -a$
$\sin(\omega_0 t) \times u(t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$\Re(p) > 0$
$\cos(\omega_0 t) \times u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$	$\Re(p) > 0$

TABLE 5 – Quelques transformées de Laplace usuelles. K , ω_0 et a sont des constantes réelles, avec $u(t)$ la fonction échelon définie par l'équation 3.3.

Pourquoi la transformée de Laplace est-elle ici plus adaptée que celle de Fourier ? Rappelons-nous que nous avons utilisé la transformée de Fourier pour calculer la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale en supposant que le régime libre était un épisode transitoire amorti, donc nul. De plus, la base de Fourier $\{e^{-j\omega t}\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ est une base pratique pour décomposer les modes d'oscillation d'un système linéaire soumis à une excitation périodique (modes indépendants). Si maintenant on veut pouvoir aussi décrire le régime transitoire (pour caractériser la rapidité du système par exemple), la base de fonction adaptée est celle des $\{e^{-pt}u(t)\}_{p \in \mathbb{C}}$. En effet, on se rappelle que la réponse en régime libre est la solution homogène de l'équation différentielle qui décrit le système, et que celle-ci est à chercher sous la forme $\{e^{r_i t}u(t)\}$ avec r_i les racines de l'équation caractéristique. Ainsi, pour des systèmes linéaires stables d'ordre inférieur à 2, les régimes transitoires rencontrés ont souvent été des exponentielles amorties avec ou sans oscillations. Donc décomposer ces

26. Rappelons que la transformée de Fourier est définie pour toute fonction $f(t)$, alors que la transformée de Laplace est définie pour une fonction dite causale, donc nulle à $t < 0$. Donc l'identification formelle n'est pas suffisante en toute rigueur. De plus la transformée de Laplace n'est définie que pour des nombres p pour lesquels l'intégrale converge i.e. tels que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} f(t) = 0$.

27. Certains ouvrages vont préciser la borne inférieure 0 en 0^- ou 0^+ pour gérer le problème de la dérivée de la fonction échelon en $t = 0$. Dans ce cours, les dérivées sont considérées au sens des distributions de fonction, et comme nous avons défini la fonction échelon en valant 1 en $t = 0$, il n'est pas nécessaire de préciser 0^+ ou 0^- .

solutions du régime libre sur la base des $\{e^{-pt}\}_{p \in \mathbb{C}}$ est le meilleur moyen de comprendre la réponse complète du système (régimes transitoire et permanent) à une excitation causale quelconque.

Propriété 5.2. Si on note $F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, alors la dérivée et la primitive de la fonction $f(t)$ vérifient les relations suivantes :

$$\mathcal{L}(f')(p) = pF(p) - f(0), \quad \mathcal{L}\left(\int_0^t f(t')dt'\right)(p) = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0)}{p} \quad (5.8)$$

avec $g(t) = \int_0^t f(t')dt'$ la primitive de $f(t)$.

Ces deux propriétés ressemblent très fortement à ce que l'on connaît pour la transformée de Fourier. On peut directement appliquer cette définition pour décrire l'impédance d'une bobine d'inductance L ou d'un condensateur de capacité C :

$$u = L \frac{di}{dt} \Rightarrow Z_L = Lp, \quad q = Cu = \int idt \Rightarrow Z_c = \frac{1}{Cp} \quad (5.9)$$

Appliquons la notion de transformée de Laplace sur un exemple simple : le filtre RC passe-bas. L'équation différentielle qui régit le système est :

$$e(t) = s(t) + RC \frac{ds(t)}{dt} \quad (5.10)$$

Dans le domaine de Laplace, pour un condensateur initialement déchargé ($s(0) = 0$), elle se transforme en :

$$E(p) = S(p) + RCpS(p) \quad (5.11)$$

d'où la fonction de transfert du filtre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RCp} \quad (5.12)$$

Regardons la réponse à un échelon de tension $Eu(t)$ de ce système : $E(p) = E/p$. La tension de sortie s'écrit :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{1}{1 + RCp} \frac{E}{p} = \frac{E}{p} - \frac{E}{p + 1/RC} \quad (5.13)$$

suite à une décomposition en fractions rationnelles. En réalisant la transformée de Laplace inverse (voir tableau 5), on obtient directement la réponse temporelle du système RC soumis à l'échelon de tension :

$$s(t) = Eu(t) - Ee^{-t/RC}u(t) = E \left(1 - e^{-t/RC}\right) u(t) \quad (5.14)$$

ce qui est tout à fait la réponse attendue. La méthode des transformées de Laplace est bien entendu trop lourde à mettre en œuvre pour ce circuit simple, mais prend tout son intérêt pour décrire des systèmes complexes avec des signaux d'entrée de formes quelconques. La démarche sera exactement la même que dans cet exemple mais plus pertinente et simplificatrice.

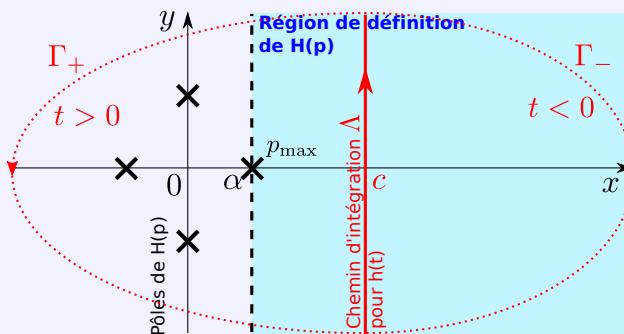
Retour sur la notion de causalité

Section 3.1.1 nous avons défini un système causal comme étant un système dont l'ordre du polynôme au numérateur de sa fonction de transfert est inférieur ou égal à celui du dénominateur ($m \leq n$). Cette propriété mathématique et son lien avec la causalité se vérifie via de l'analyse complexe sur les fonctions de transfert exprimées dans le formalisme de Laplace.

Tout d'abord la transformée de Laplace $H(p)$ d'une fonction causale $h(t)$ est définie sur la partie du plan complexe $p = (x + jy) \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re(p) > \alpha$ où α est le plus petit réel positif vérifiant $|h(t)| \leq K e^{\alpha t}$. Ensuite, étant donnée une fonction $H(p)$, la transformée de Laplace inverse, si elle existe, est définie sur un chemin Λ parallèle à l'axe des imaginaires par :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{tp} H(p) dp \text{ avec } c > \alpha$$

et $c > \Re(p_{\max})$ avec p_{\max} le pôle de plus grande partie réelle (autrement dit on prend c un réel assez grand).



Notons que $h(t)$ représente alors la *réponse du système à une impulsion Dirac en entrée à $t = 0$* (de transformée de Laplace 1). Calculer $h(t)$ revient donc à obtenir la réponse impulsionale du système, et si le système est bien causal, sa réponse $h(t)$ doit être nulle pour $t < 0$, avant qu'il soit excité par l'entrée impulsionale. Calculer une telle intégrale peut se faire via le théorème des résidus et le choix de deux contours d'intégration suivant le signe de t . Soient deux arcs de *rayon infini* Γ_+ et Γ_- .

Supposons d'abord que $m < n$, alors $\lim_{|p| \rightarrow +\infty} H(p) = 0$, et pour $t < 0$, $\int_{\Gamma_-} H(p) e^{pt} dp = 0$ puisque Γ_- est dans la partie droite du plan complexe. Or le contour fermé $\Lambda + \Gamma_-$ n'entoure aucun pôle car $c > \Re(p_{\max})$. Donc d'après le théorème des résidus :

$$0 = \oint_{\Lambda + \Gamma_-} H(p) e^{pt} dp \approx \int_{\Lambda} H(p) e^{pt} dp = 2\pi j h(t) \Rightarrow h(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

Sur l'arc Γ_+ , l'intégrale n'est cette fois définie que pour $t > 0$ et $\int_{\Gamma_+} H(p) e^{pt} dp = 0$. Puisque $m < n$ des pôles sont entourés par $\Lambda + \Gamma_+$, $h(t)$ se calcule par le théorème des résidus et est non nulle, $h(t) \neq 0$ pour $t > 0$. Donc la fonction $h(t)$ est bien causale et existe si $m < n$.

Supposons maintenant que $m > n$. Pour c grand, sur le chemin Λ la fonction rationnelle $H(p)$ se simplifie en $\approx y^{m-n}$, puis il faut d'étudier la convergence de :

$$h(t) \approx e^{ct} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jty} y^{m-n} dy$$

L'intégrale sur Λ ne converge pas si $m > n$, ni pour $t > 0$ ni $t < 0$, et $H(p)$ n'est donc la transformée de Laplace d'aucune fonction causale.

Dans le cas $m = n$, en écrivant $H(p)$ comme la somme d'une constante et d'une fraction rationnelle de degré négatif, on trouve $h(t)$ sous la forme d'un multiple de Dirac plus une fonction causale. Donc la causalité physique est vérifiée.

Pour résumé, pour un système physique modélisé par une équation différentielle, il existe une solution $h(t)$ causale modélisant sa réponse impulsionale si $m \leq n$, cette solution étant obtenue par le passage en Laplace. Si $m > n$, alors il n'existe pas de solution causale à une excitation impulsionale et $H(p)$ ne modélise pas un système physique réel.

5.2 Caractérisation d'un système asservi

La dynamique de la boucle peut être caractérisée par trois critères.

5.2.1 Stabilité

Avoir un système bouclé stable impose le caractère amorti de la réponse libre et donc des phénomènes transitoires du système. En général définir et imposer la stabilité ne suffit pas : il faut donc définir et imposer un certain degré de stabilité i.e. définir des marges de sécurité vis à vis des risques d'instabilité. Les problèmes de stabilité seront abordés au chapitre 6. Dans la suite de ce chapitre, on ne considère que des systèmes stables.

5.2.2 Précision

Obtenir une bonne précision consiste à faire en sorte que la sortie du système finisse par tendre vers une valeur la plus proche possible de l'entrée. On peut distinguer deux types critères :

- *précision statique* : concerne l'étude des systèmes asservis en régime indépendant du temps ; on définit l'erreur statique comme la différence entre la sortie demandée et la sortie réalisée en $t \rightarrow +\infty$;
- *précision dynamique* : erreur avec laquelle la sortie suit la consigne imposée au système.

Théorème 5.3 (Théorème de la valeur finale). *Pour une transformée de Laplace dont tous les pôles sont à partie réelles strictement négatives, on a :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \quad (5.15)$$

Le théorème de la valeur finale est particulièrement utile pour prévoir si un système bouclé présente une erreur statique. Notons aussi que la précision d'un système bouclé dépend du signal d'entrée (le système peut ne pas avoir la même précision si le signal d'entrée est un échelon ou une rampe).

Démonstrations des propriétés de la transformée de Laplace

Pour toutes ces démonstrations, on suppose que $f(t)$ a de "bonnes propriétés".

Formule de dérivation : Par une intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{df(t)}{dt} dt = [f(t)e^{-pt}]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} + \int_0^{+\infty} pe^{-pt} f(t) dt \\ &= 0 - f(0) + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(0)\end{aligned}$$

Formule d'intégration : Posons $g(t) = \int_0^t f(t') dt'$ la primitive de $f(t)$. On a :

$$F(p) = \mathcal{L}(g')(p) = pG(p) - g(0) \Rightarrow G(p) = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0)}{p}$$

Théorème de la valeur finale : On sait que :

$$\mathcal{L}(f')(p) = pF(p) - f(0) \quad \text{i.e.} \quad \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{df(t)}{dt} dt = pF(p) - f(0)$$

Lorsque $p \rightarrow 0$, on a :

$$\begin{aligned}pF(p) - f(0) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{df(t)}{dt} dt \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} dt = [f(t)]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \\ \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \right) - f(0) &= \left(\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \right) - f(0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)\end{aligned}$$

5.2.3 Rapidité

On s'intéresse à la durée nécessaire pour que le système bouclé atteigne le régime permanent. La rapidité est liée à la valeur des paramètres du système. Un système est d'autant plus rapide que sa bande passante est élevée. Pour améliorer la rapidité du système on doit agir sur le signal d'erreur ϵ à l'aide d'un *élément correcteur*, qui va en général amplifier ce dernier lors du régime transitoire afin d'amplifier la réponse de la chaîne directe. L'inconvénient c'est qu'augmenter la rapidité de la réponse peut conduire à un dépassement de la valeur finale attendue voire à des oscillations. Augmenter la rapidité revient souvent à rapprocher le système d'un régime de fonctionnement instable.

Propriété 5.4. *De manière générale, il y a une compétition entre rapidité et stabilité.*

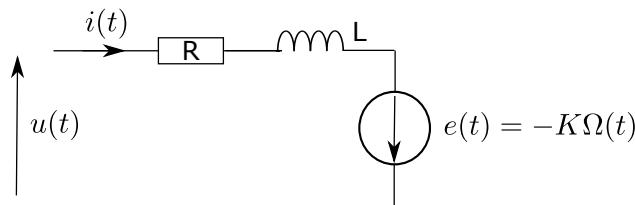
5.3 Application à l'asservissement d'un moteur à courant continu

Pour comprendre comment analyser un système bouclé asservi en régime linéaire stable, nous allons étudier l'asservissement en vitesse de rotation d'un moteur à courant continu (tel que sur la figure 41). Cet exemple permet de parler des propriétés générales d'un système en régulation, et peut être étudié expérimentalement à l'aide du matériel à disposition à l'agrégation.

5.3.1 Modélisation du système

Tout d'abord il faut écrire les équations qui régissent le système étudié et les traduire dans le domaine de Laplace. On pose $u(t)$ la tension d'alimentation du moteur à courant continu, $i(t)$ le courant circulant dans le moteur, $\Omega(t)$ sa vitesse de rotation, R et L sa résistance et son inductance interne, J son moment d'inertie, K son coefficient de couplage électromécanique, f un coefficient de frottement fluide et $C_{ch}(t)$ un éventuel couple de charge²⁸. En général les transformées de Laplace sont notées par les majuscules correspondantes.

- Équation électrique du moteur à courant continu :



$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K\Omega(t) \Rightarrow U(p) = RI(p) + LpI(p) + K\Omega(p) \quad (5.16)$$

$$\Rightarrow I(p) = \frac{1}{R + Lp} [U(p) - K\Omega(p)] \quad (5.17)$$

- Équation mécanique du moteur à courant continu :

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} = Ki(t) - f\Omega(t) - C_{ch}(t) \Rightarrow Jp\Omega(p) = KI(p) - f\Omega(p) - C_{ch}(p) \quad (5.18)$$

$$\Rightarrow \Omega(p) = \frac{1}{Jp + f} [KI(p) - C_{ch}(p)] \quad (5.19)$$

- Équation du comportement de la dynamo tachymétrique de coefficient²⁹ K_d et de réponse $r(t)$:

$$r(t) = K_d\Omega(t) \Rightarrow R(p) = K_d\Omega(p) \quad (5.20)$$

5.3.2 Système non asservi

Pour le moment ne regardons pas la chaîne de retour réalisée par la dynamo tachymétrique. On voit que les deux équations du moteur à courant continu forment en elles-mêmes un système en rétroaction à cause de la loi de modération de Lenz (la mise en rotation engendre une force contre-électromotrice dans le circuit qui s'oppose au passage du courant), qui peut se représenter par un schéma bloc tel que sur la figure 44.

28. Il s'agit du couple que l'on cherche à récupérer pour faire tourner tel ou tel objet, ou les frottements pour percer un mur, etc. C'est donc le couple utile mais considéré comme une charge (éventuellement variable) sur le système.

29. Sur la plaquette en TP, $K_d = K$ car le moteur et le génératrice sont identiques.

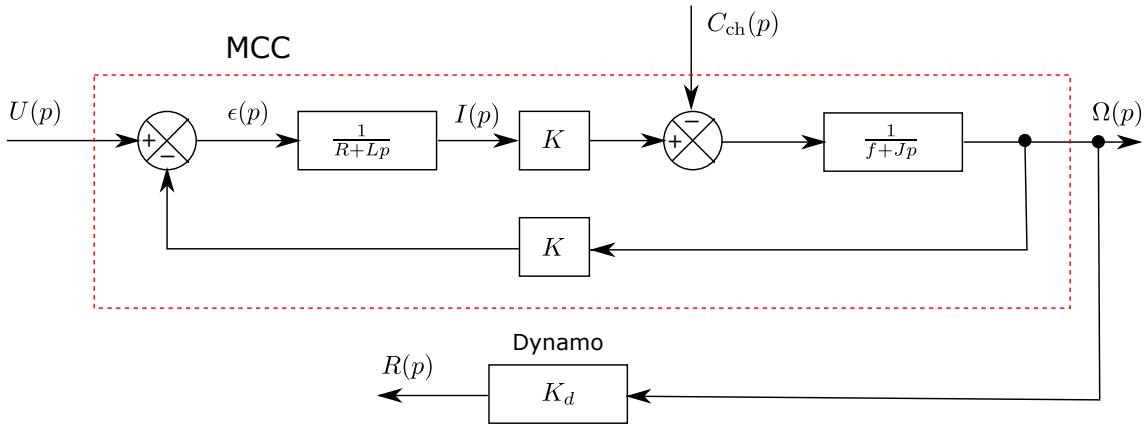


FIGURE 44 – Schéma bloc correspondant à la modélisation de la machine à courant continu et de la dynamo.

Les fonctions de transfert entre les différentes grandeurs du système peuvent être déduites des équations ou du schéma bloc. Par exemple, la fonction de transfert entre vitesse de rotation et tension d'entrée est :

$$\Omega(p) = \frac{1}{f + Lp} \left\{ -C_{ch}(p) + \frac{K}{R + Lp} [U(p) - K\Omega(p)] \right\} \quad (5.21)$$

$$\Rightarrow H_{MCC}(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{K^2 + fR + (JR + fL)p + JLp^2} \quad (5.22)$$

lorsque le système fonctionne en suivi de consigne ($C_{ch}(t) = 0$). Bien entendu des modélisations plus simples du système peuvent être employées ($L = 0, f = 0$) mais il est aussi intéressant d'observer la puissance du formalisme de Laplace et des schémas blocs pour décrire un modèle complexe.

Une simulation du modèle de moteur à courant continu et de son asservissement en vitesse a été réalisée pour illustrer cet exemple. Dans la figure 45 est représenté le diagramme de Bode de la fonction de transfert $H_{MCC}(p)$ du moteur pour des pertes assez faibles. Ce diagramme est caractéristique d'un système d'ordre 2.

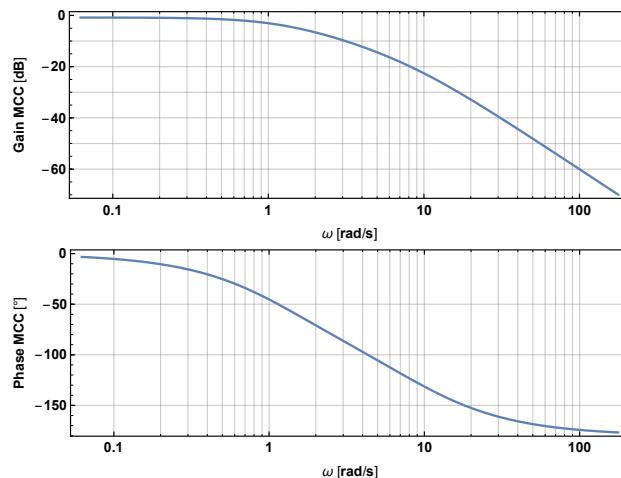


FIGURE 45 – Fonction de transfert $H_{MCC}(p)$ du moteur à courant continu étudié.

Pour étudier le comportement du système soumis à des perturbations de charge, comme on étudie des systèmes linéaires on utilise le principe de superposition et on combine linéairement la réponse de la boucle à une entrée $u(t)$ pour $C_{ch}(t) = 0$ avec la réponse pour une entrée un couple de charge quelconque $C_{ch}(t)$ et une entrée nulle $u(t) = 0$. La fonction de transfert $\Omega(p)/C_{ch}(p)$ décrit la réponse en régulation du système asservi.

Précision du système ouvert : avec la donnée de la fonction de transfert, il est ensuite possible de calculer la réponse de la chaîne directe à une tension d'entrée $U(p)$ échelon d'amplitude U :

$$H_{MCC}(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{K^2 + fR + (JR + fL)p + JLp^2} \quad (5.23)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\Omega(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p H_{MCC}(p) U(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p H_{MCC}(p) \frac{U}{p} = \frac{KU}{K^2 + fR} \neq \frac{U}{K} \quad (5.24)$$

La vitesse de rotation attendue pour un moteur à courant continu idéal alimenté par une tension U est $\Omega = U/K$. On observe ici que le système réel ne peut pas fournir la vitesse de rotation désirée à cause des pertes comme on pouvait s'y attendre (voir aussi figure 46 gauche). Par conséquent, pour améliorer la réponse du système à une commande il faut l'asservir tel que sur la figure 47.

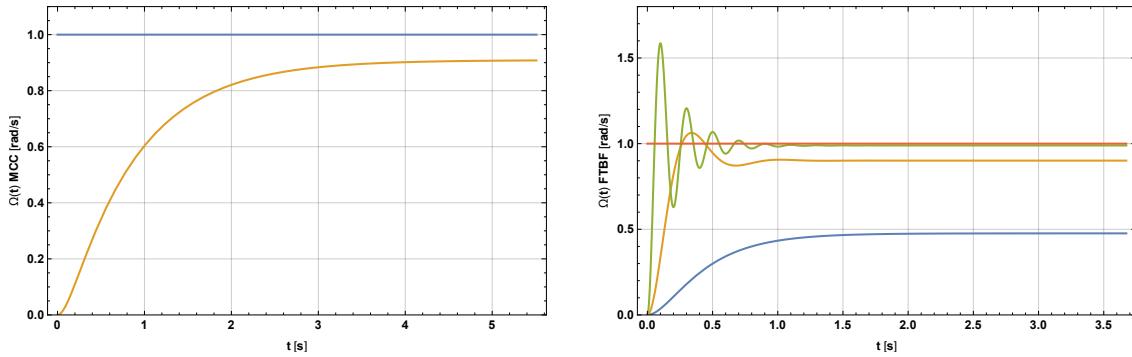


FIGURE 46 – *Gauche* : réponse temporelle associée à la fonction de transfert $H_{MCC}(p)$ (jaune) pour un échelon de commande (bleu) : une erreur statique est présente. *Droite* : réponse temporelle de la boucle fermée associée à la fonction de transfert $H_{FTBF}(p)$ pour différentes valeurs $K_d = 1$ (bleu), 10 (jaune), 100 (vert) pour un échelon de commande (rouge) : la précision et la rapidité augmentent avec K_d mais des oscillations apparaissent.

5.3.3 Système asservi

La réponse $r(t)$ du système est comparé à la commande $e(t)$ via un soustracteur. La fonction de transfert en boucle fermée pour une tension de commande $E(p)$ en fonctionnement suiveur de commande s'écrit :

$$H_{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{E(p)} = K_d H_{MCC}(p) \quad (5.25)$$

$$H_{FTBF}(p) = \frac{\Omega(p)}{E(p)} = \frac{H_{MCC}(p)}{1 + H_{FTBO}(p)} \quad (5.26)$$

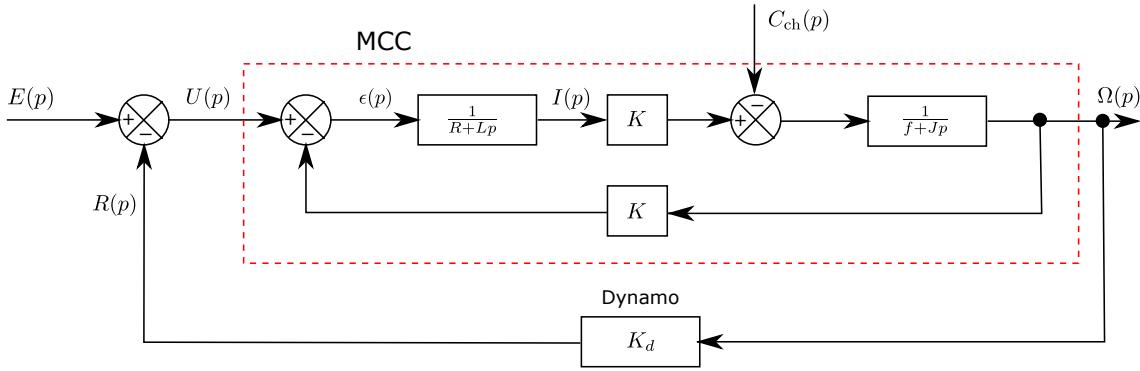


FIGURE 47 – Régulation de vitesse d'un moteur à courant continu.

Précision du système asservi : dans le cas du système asservi, soumis à une tension de commande échelon d'amplitude E , la réponse du système converge vers :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p\Omega(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pH_{FTBF}(p)E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pH_{FTBF}(p)\frac{E}{p} \\ &= \frac{KE}{K^2 + fR} = \frac{KE}{KK_d + K^2 + fR} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Si on choisit un gain $K_d \gg K$, en supposant que les pertes mécaniques et résistives sont faibles on peut obtenir :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(t) \approx \frac{E}{K_d} \quad (5.28)$$

Donc boucler le système peut permettre au système de répondre avec une erreur statique moindre à une commande sous forme d'échelon si la chaîne de détection a un *taux de contre-réaction fort* (voir figure 46 droite). La précision du système bouclé sera d'autant meilleure que le détecteur est sensible. La conception de la chaîne de retour doit donc être particulièrement soignée. La valeur de la tension de commande doit alors être adaptée au fonctionnement du détecteur *i.e.* l'utilisateur désirant une vitesse de rotation Ω doit fournir une tension $E = K_d\Omega$.

Notons que pour une tension d'entrée sous forme de rampe ($e(t) = kt \Rightarrow E(p) = k/p^2$) l'erreur statique tend vers l'infini : le système n'atteint jamais la valeur finale attendue et l'erreur ne fait qu'augmenter³⁰. De plus augmenter le gain K_d n'est pas toujours possible ni souhaitable de manière générale (cela peut rendre le système instable), donc pour obtenir une erreur statique nulle il faut rajouter des *éléments correcteurs* dans la boucle.

5.4 Intérêt d'un élément correcteur

Un correcteur est un élément de fonction de transfert $C(p)$, en général électronique, rajouté dans la boucle juste après le comparateur afin d'améliorer soit la précision, la stabilité ou la rapidité (voir figure 48). Différents types de correcteur existent pour améliorer l'un ou l'autre de ces critères : "proportionnel", "intégrale", "dérivée", "déphasage"... La fonction de transfert en boucle fermée pour le système bouclé avec correcteur s'écrit :

$$H_{FTBO}^c(p) = \frac{R(p)}{E(p)} = K_d C(p) H_{MCC}(p) \quad (5.29)$$

30. Sans parler des problèmes de limitation en puissance et en vitesse de rotation de la machine.

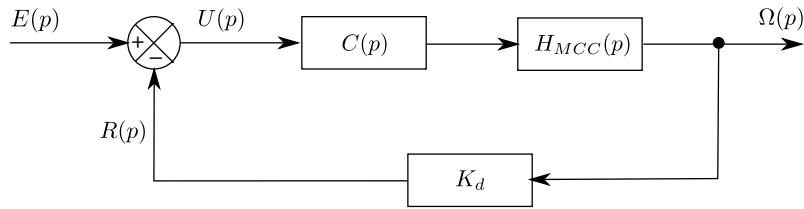
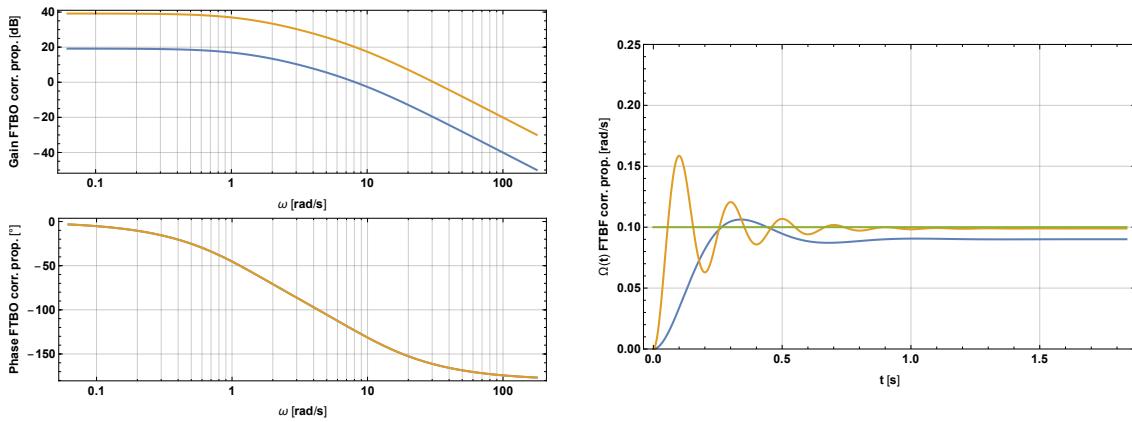


FIGURE 48 – Régulation de vitesse d'un moteur à courant continu avec élément correcteur.

$$H_{FTBF}^c(p) = \frac{\Omega(p)}{E(p)} = \frac{C(p)H_{MCC}(p)}{1 + K_dC(p)H_{MCC}(p)} \quad (5.30)$$

5.4.1 Correction proportionnelle

FIGURE 49 – Gauche : diagrammes de Bode de la fonction de transfert $H_{FTBF}^c(p)$ avec correction proportionnelle pour $K_c = 1$ (bleu), 10 (jaune). Droite : réponse temporelle de la boucle fermée associée à la fonction de transfert $H_{FTBF}^c(p)$ avec correction proportionnelle pour $K_d = 10$ et différentes valeurs $K_c = 1$ (bleu), 10 (jaune) pour un échelon de commande (vert) : la précision et la rapidité augmentent avec K_c mais les oscillations se renforcent.

Propriété 5.5. La correction proportionnelle consiste à rajouter un simple amplificateur après le soustracteur :

$$C(p) = K_c \quad (5.31)$$

avec K_c une constante.

Cet élément peut être réalisé par exemple par un amplificateur non inverseur à AO. Son rôle est de dilater le signal d'erreur ϵ (ou le diminuer) pour que le système réagisse fortement (ou faiblement). L'intérêt de la correction proportionnelle est en général de rendre le système plus rapide et atténuer l'erreur statique. Examinons la fonction de

transfert en boucle fermée pour s'en convaincre :

$$\begin{aligned}
 H_{FTBF}^c(p) &= \frac{K_c \frac{K}{K^2 + fR + (JR + fL)p + JLp^2}}{1 + K_d K_c \frac{K}{K^2 + fR + (JR + fL)p + JLp^2}} \\
 &= \frac{K_c K}{K_c K_d K + K^2 + fR + (JR + fL)p + JLp^2} \\
 &= \frac{K_c K}{K_c K_d K + K^2 + fR} \times \frac{1}{1 + \frac{JR + fL}{K_c K_d K + K^2 + fR} p + \frac{JL}{K_c K_d K + K^2 + fR} p^2}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Augmenter le gain du correcteur K_c revient à diminuer le coefficient d'amortissement donc à rendre le système plus rapide. La même propriété s'observe pour un système d'ordre 1. Mais le coefficient d'amortissement diminuant, le système risque de dépasser la valeur de consigne, ce que l'on doit chercher à éviter dans certains cas (accostage d'un bateau, perçage, etc...).

Étudions maintenant la précision statique :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\Omega(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pH_{FTBF}(p) \frac{E}{p} = \frac{K_c K}{K_c K_d K + K^2 + fR} \tag{5.33}$$

Si $K_c \gg K$, en supposant que les pertes mécaniques et résistives sont faibles, même avec K_d de l'ordre de 1, on peut obtenir :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(t) \approx \frac{E}{K_d} \tag{5.34}$$

La correction proportionnelle permet donc de réduire la précision statique sans changer les propriétés techniques de l'actionneur ou du capteur.

5.4.2 Correction dérivative

Propriété 5.6. *L'action dérivée va permettre de fournir en entrée de l'actionneur un signal qui va dépendre du signe et de la vitesse de variation du signal d'erreur ϵ :*

$$C(p) = K_c p \tag{5.35}$$

Sans rentrer dans les détails, ce type d'action peut permettre de relever l'ordre du système et donc d'éviter des comportements oscillatoires et des dépassements de consignes³¹. Il faut noter que ce type de correcteur est purement théorique et n'est pas réalisable physiquement à cause de la condition de causalité. De plus il amplifie les hautes fréquences donc potentiellement du bruit.

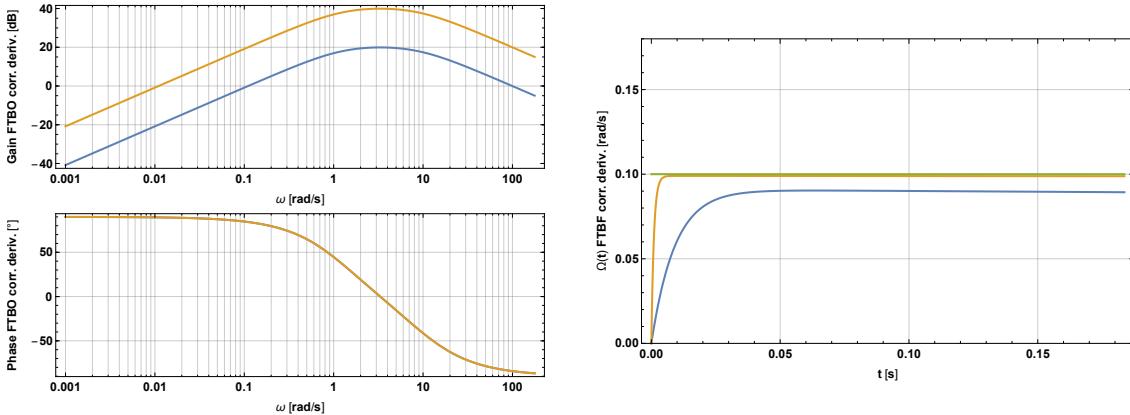


FIGURE 50 – *Gauche* : diagrammes de Bode de la fonction de transfert $H_{FTBO}^c(p)$ avec correction dérivative pour $K_c = 1$ (bleu), 10 (jaune). *Droite* : réponse temporelle de la boucle fermée associée à la fonction de transfert $H_{FTBF}^c(p)$ avec correction dérivative pour $K_d = 10$ et différentes valeurs $K_c = 1$ (bleu), 10 (jaune) pour un échelon de commande (vert) : la précision et la rapidité augmentent avec K_c et les oscillations disparaissent.

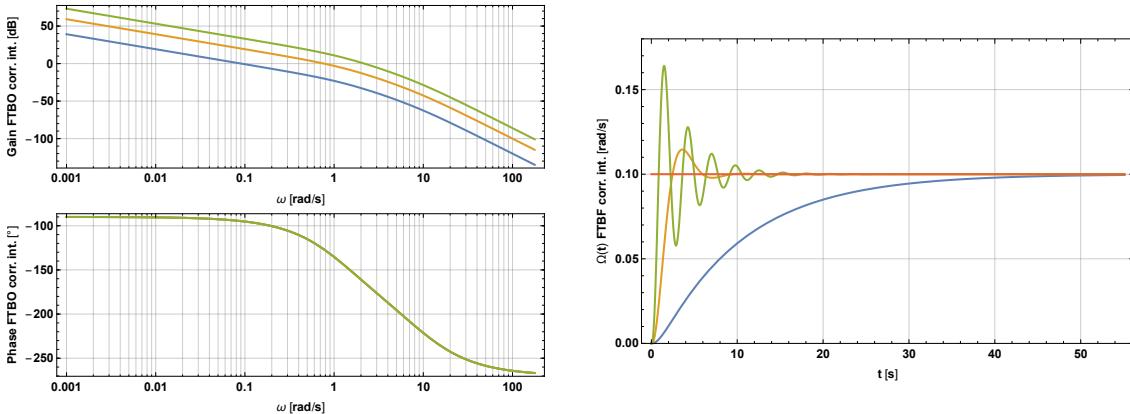


FIGURE 51 – *Gauche* : diagrammes de Bode de la fonction de transfert $H_{FTBO}^c(p)$ avec correction intégrale pour $K_c = 1$ (bleu), 10 (jaune). *Droite* : réponse temporelle de la boucle fermée associée à la fonction de transfert $H_{FTBF}^c(p)$ avec correction intégrale pour $K_d = 10$ et différentes valeurs $K_c = 0.01$ (bleu), 0.1 (jaune), 0.5 (vert) pour un échelon de commande (rouge) : l'erreur statique est nulle mais la rapidité a diminué, et les oscillations se renforcent lorsque K_c augmente.

5.4.3 Correction intégrale

Propriété 5.7. *La correction intégrale peut servir à supprimer une erreur statique :*

$$C(p) = \frac{K_c}{p} \quad (5.36)$$

31. Sur la figure 50, il semblerait que la réponse temporelle converge vers la valeur de consigne. En réalité, comme le montrerait le calcul, $\Omega(t)$ tend vers 0 sur un temps très long. Avec un correcteur plus réaliste du type correction proportionnelle plus correcteur dérivateur, la réponse converge en revanche avec une erreur statique d'autant plus petite que K_c est grand.

Tant qu'une erreur ϵ subsiste, elle va être intégrée ce qui va conduire le signal en sortie du correcteur à être de plus en plus important et donc forcer l'actionneur à résorber cette erreur. La commande intégrale est donc progressive mais persévérande. Reprenons l'exemple de la régulation de vitesse d'un moteur à courant continu soumis à un échelon de tension E :

$$\begin{aligned} H_{FTBF}^c &= \frac{K_c \frac{K}{p(K^2 + fR + (JR + fL)p + JLp^2)}}{1 + K_d K_c \frac{K}{p(K^2 + fR + (JR + fL)p + JLp^2)}} \\ &= \frac{K_c K}{K_c K_d K + p(K^2 + fR + (JR + fL)p + JLp^2)} \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\Omega(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pH_{FTBF}^c(p) \frac{E}{p} = \frac{K_c K E}{K_c K_d K} = \frac{E}{K_d} \quad (5.38)$$

Donc quelque soit la sensibilité K_d du détecteur ou le gain de la chaîne directe, le système bouclé converge vers la valeur demandée par la commande. Néanmoins rajouter une correction intégrale revient à augmenter l'ordre du système et donc peut conduire à des régimes de fonctionnement instables (voir chapitre 6).

5.4.4 Correction PID

La correction PID pour proportionnelle-intégrale-dérivateur est la somme des correcteurs précédents :

$$C(p) = K_P + K_D p + \frac{K_I}{p} \quad (5.39)$$

C'est un type de correcteur général qui peut permettre de répondre aux différentes problématiques de l'asservissement en ajustant les coefficients K_P, K_D, K_I .

5.5 Exercices (quelques solutions en annexe)

1. Reprendre la résolution du circuit RC avec le formalisme de Laplace mais en supposant le condensateur chargé sous une tension E en $t = 0$. Que se passe-t-il si le circuit est soumis à une tension d'entrée $e(t) = Eu(t)$? A une tension nulle?
2. Pour un système passe-bas d'ordre 1 quelconque bouclé par une chaîne de retour de gain K_d , montrer que l'on a conservation du produit gain-bande.

6 Oscillateurs

LES OSCILLATEURS se rencontrent dans tous les domaines de la physique, notamment en optique (par exemple le laser) ou en électronique. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons principalement aux seconds. Ils constituent en effet l'une des fonctions de base de l'électronique (analogique comme numérique). Ils sont utilisés pour cadencer le fonctionnement des systèmes (horloges de circuits numériques, montres, etc...). Ils peuvent également être utilisés pour fabriquer directement des signaux classiques de tests en électronique (générateurs analogiques) ou pour fabriquer des ondes porteuses pour les télécommunications.



FIGURE 52 – *Gauche* : un oscillateur intégré à quartz. *Milieu* : un oscillateur monté sur une carte mère d'ordinateur. *Droite* : un oscillateur dont la fréquence est contrôlée par une tension d'entrée (VCO : Voltage Controlled Oscillator).

Les oscillateurs à l'agrégation : ce chapitre concerne en particulier les épreuves suivantes :

- LP11 : Rétroaction et oscillations.
- LP25 : Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités.
- MP27 : Systèmes bouclés.
- MP28 : Instabilités et phénomènes non-linéaires.

6.1 Stabilité d'un système linéaire permanent

6.1.1 Étude théorique de la stabilité

Par définition, un régime linéaire est stable si à une entrée bornée quand $t \rightarrow +\infty$ correspond une sortie bornée quand $t \rightarrow +\infty$. Mais de toute façon les systèmes physiques réels ne délivrent pas de signaux infinis. Les signaux de réponse sont toujours limités par le phénomène de saturation des composants actifs tels que l'amplificateur opérationnel en électronique, par les limites de tolérance des appareils, etc... Quand les signaux théoriques sont trop grands, le système quitte le régime linéaire (qui n'est donc pas stable) et l'équation différentielle linéaire ne régit plus son fonctionnement.

Reprendons l'équation différentielle 3.1 à coefficients réels et constants déjà étudiée :

$$a_0 s(t) + \sum_{j=1}^n a_j \frac{d^j s}{dt^j} = b_0 e(t) + \sum_{i=1}^m b_i \frac{d^i e}{dt^i} \quad (6.1)$$

Pour trouver la solution complète de cette équation, il faut trouver une solution particulière et la forme générale de la solution en régime libre (i.e. de l'équation homogène). Pour

obtenir cette dernière, on teste les fonctions du types $s(t) \propto e^{rt}$. Ceci permet d'établir l'équation caractéristique associée à l'équation homogène :

$$a_0 + \sum_{j=1}^n a_j r^j = 0 \quad (6.2)$$

La résolution de cette équation polynomiale conduit à trouver n racines r_i réelles, complexes, nulles ou multiples et la solution générale de l'équation homogène est une combinaison linéaire des fonctions $\{e^{r_i t}\}_{i=1}^n$. Or, pour qu'un système linéaire soit stable, rappelons qu'il faut et il suffit que sa réponse en régime libre ne tende pas vers l'infini quand $t \rightarrow +\infty$. Par conséquent, il faut qu'aucune des racines r_i de l'équation caractéristique du système ne soit réelle et strictement positive, ni complexe à partie réelle strictement positive. Le cas où des racines complexes auraient leur partie réelle nulle correspond au cas particulier des systèmes auto-oscillants.

Propriété 6.1. *Un système linéaire permanent est stable si et seulement si la totalité des racines de l'équation caractéristique sont soit réelles négatives, soit complexes à partie réelle négative.*

Système d'ordre 1 : dans le cas d'un système d'ordre 1 :

$$s(t) + \tau \frac{ds}{dt} = 0 \quad (6.3)$$

la condition de stabilité énoncée ci-dessus impose $\tau > 0$. τ est alors la constante de temps du système.

Système d'ordre 2 : dans le cas d'un système d'ordre 2 quelconque, l'équation caractéristique s'écrit :

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (6.4)$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer $a > 0$. Le produit des racines vaut c/a . Donc, quelque soit le signe du discriminant Δ , la condition de stabilité (négativité des parties réelles de toutes les racines) impose $c/a > 0$ et donc c et a ont le même signe. On peut alors écrire l'équation différentielle homogène sous la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + s(t) = 0 \quad (6.5)$$

Trois situations se présentent suivant le signe du discriminant $\Delta = 4(\xi^2 - 1)/\omega_0^2$:

1. $\Delta > 0$ pour $\xi^2 > 1$: l'équation caractéristique a deux racines réelles $r_{\pm} = \omega_0 (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$
2. $\Delta < 0$ pour $\xi^2 < 1$: l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r_{\pm} = \omega_0 (-\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2})$.
3. $\Delta = 0$ pour $\xi = \pm 1$: l'équation caractéristique a une racine double $\mp\omega_0$

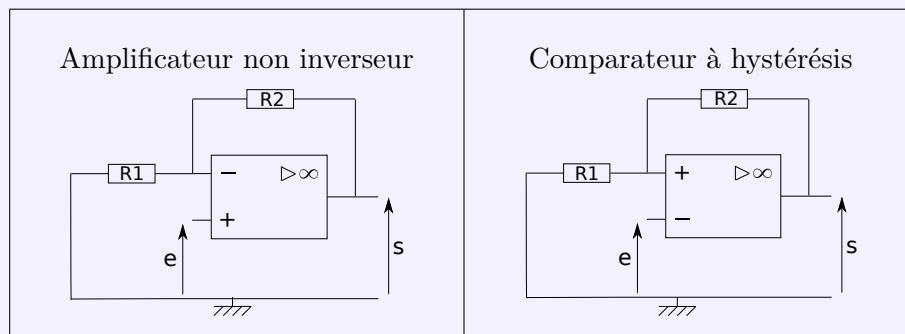
La condition de stabilité impose $\xi > 0$ (si on suppose $\omega_0 > 0$ par convention). Dans ce cas, ξ s'appelle le coefficient d'amortissement. Le cas $\xi = 0$ correspond au cas des systèmes auto-oscillants (deux racines complexes imaginaires purs).

Propriété 6.2. Les systèmes d'ordre 1 et 2 sont stables si et seulement si tous les coefficients de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle qui les régit sont de même signe.

Pour les systèmes d'ordre supérieur, cette condition sur les signes des coefficients a_j de l'équation homogène reste nécessaire mais n'est plus suffisante. Il existe cependant des critères mathématiques applicables à ces coefficients pour déterminer si un système linéaire est stable (critère algébrique de Routh).

Conséquences pour l'étude de la stabilité d'un montage à AO

Pourquoi faut-il absolument une boucle de rétroaction entre la sortie et l'entrée inverseuse d'un AO pour assurer la stabilité du montage ?



Dans tous les calculs de montages à AO idéal en régime linéaire, on écrit l'égalité des potentiels aux bornes du composant $V_+ = V_-$. On ne peut donc pas comprendre à partir de ces calculs la différence fondamentale entre les entrées inverseuse et non inverseuse, ni prévoir que les montages identiques où l'on aurait simplement inversé les bornes + et - de l'AO deviendraient instables.

On rappelle le modèle linéaire de l'AO comme passe-bas du premier ordre :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s(t) = \mu_0(V_+ - V_-) = \mu_0\epsilon \quad (6.6)$$

avec $\mu_0 \approx 10^5$ positif, $f_c = 1/2\pi\tau = 10$ Hz et $s(t)$ la tension de sortie. Inverser les bornes + et - dans un montage équivaut formellement à changer le signe de μ_0 .

Reprendons le montage de l'amplificateur non-inverseur dont les équations sont :

$$\begin{cases} V_+ = e(t) \\ V_- = s(t)R_1/(R_1 + R_2) \end{cases} \Rightarrow \tau \frac{ds}{dt} + s(t) = \mu_0 \left(e(t) - s(t) \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = \mu_0\epsilon$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \frac{ds}{dt} + s(t) = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}} e(t)$$

Comme $\mu_0 \gg 1$, le signe de $\tau' = \tau / (1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2})$ est quasiment le signe de μ_0 . Le montage n'est donc stable que si $\mu_0 > 0$ donc avec une boucle de rétroaction

entre la sortie et l'entrée inverseuse. Au contraire, il devient instable et fonctionne en régime saturé si on inverse les bornes + et – puisque cela revient à changer le signe de μ_0 . Ce montage devient alors un comparateur à hystérésis.

Retenons que pour qu'un AO fonctionne en régime linéaire, il est nécessaire qu'une boucle relie son entrée – à la sortie. Ce n'est une condition suffisante que s'il n'y a pas de boucle entre l'entrée + et la sortie (une telle liaison peut rendre tout le montage instable).

6.1.2 Application aux systèmes bouclés

Point de vue équation différentielle : examinons les conditions de stabilité vues précédemment dans le cas des systèmes bouclés. On sait qu'un système linéaire est stable si et seulement si aucune des racines de l'équation caractéristique associée n'est réelle strictement positive ou complexe à partie réelle strictement positive. Or le polynôme 6.2 de l'équation caractéristique se retrouve au dénominateur de la fonction de transfert du système régit par l'équation différentielle 6.1. Les racines de l'équation caractéristique sont donc les pôles de la fonction de transfert. On peut par conséquent énoncer la propriété suivante :

Propriété 6.3 (Condition nécessaire et suffisante sur H_{FTBF}). *Un système asservi est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée ont tous leur partie réelle strictement négative.*

- Si toutes les parties réelles sont nulles, le système asservi est oscillant.
- Si une des parties réelles est positive, le système est instable.

Point de vue Laplace : considérons une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre n de la forme :

$$H_{\text{FTBF}}(p) = \frac{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} \quad (6.7)$$

avec p_i et z_i respectivement les pôles et zéros de la fonction de transfert. La réponse d'un tel système à une impulsion d'amplitude E_0 est donnée par $S(p) = H(p) \times E_0$, donc étudier la stabilité de la fonction de transfert est étudier la stabilité du système soumis à une impulsion. Par une décomposition en éléments simples, on obtient :

$$S(p) = E_0 \sum_{i=1}^r \frac{a_i}{p - p_i^{(r)}} + E_0 \sum_{j=1}^{(n-r)/2} \left(\frac{b_j}{p - p_j^{(c)}} + \frac{\bar{b}_j}{p - \bar{p}_j^{(c)}} \right) \quad (6.8)$$

avec a_i réel, b_j complexe, $p_i^{(r)}$ les r pôles réels et $p_j^{(c)}$ les $(n-r)/2$ pôles complexes conjugués. Or d'après la table des transformées de Laplace inverse section 5.1.4, ces fractions rationnelles s'inversent en fonctions temporelles de la forme $e^{p_i^{(r)} t}$ et $e^{p_j^{(c)} t}$. La réponse temporelle impulsionale $s(t)$ est donc instable s'il existe au moins un pôle réel positif ou un pôle complexe à partie réelle positive.

Point de vue Fourier : si l'on ne dispose pas du formalisme de Laplace pour discuter de la stabilité d'un système bouclé, mais seulement de celui de Fourier, on peut quand même appliquer la définition générale. Un système bouclé est stable si et seulement si tous les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée $\underline{H}_{FTBF} = \underline{A}/(1 + \underline{A}\underline{\beta})$ ont des parties réelles strictement négatives. Il s'agit donc d'étudier les zéros de la fonction $1 + \underline{A}(j\omega)\underline{\beta}(j\omega) = 1 + \underline{H}_{FTBO}(j\omega)$.

Comme $j\omega$ est un imaginaire pur, il s'agit donc de vérifier qu'il n'existe pas de valeur de ω qui annule cette fonction. S'il existe une pulsation ω_0 telle que $\underline{H}_{FTBO}(j\omega_0) = -1$ alors on a un pôle de partie réelle nulle et on atteint la situation critique d'un système auto-oscillant. En effet, comme on le verra pour les oscillateurs quasi-sinusoidaux, à la pulsation pour laquelle $\underline{H}_{FTBO}(j\omega) = -1$ il est possible d'envisager un signal de sortie sinusoidal de pulsation ω , même sans signal d'entrée, puisque $\underline{S}(j\omega) = \underline{H}_{FTBF}(j\omega)\underline{E}(j\omega)$. Dans ce cas, les deux conditions suivantes sont simultanément réalisées.

Propriété 6.4. *Un système bouclé est en limite de stabilité s'il existe une pulsation ω_0 telle que :*

$$\begin{cases} |\underline{H}_{FTBO}(j\omega_0)| = 1 \\ \text{Arg}(\underline{H}_{FTBO}(j\omega_0)) = -\pi \end{cases} \quad (6.9)$$

La première condition traduit que le signal est régénéré après "un tour de boucle", la seconde que le comparateur fonctionne en sommateur avec "interférence constructive".

6.1.3 Étude expérimentale de la stabilité d'un système bouclé

L'étude de la stabilité d'un système linéaire peut aussi se mener de manière expérimentale (i.e. graphique) à partir du relevé de son comportement fréquentiel en boucle ouverte. En effet, il n'est pas forcément toujours possible ni souhaitable de modéliser mathématiquement un système réel, et encore moins d'en calculer les pôles accompagnés d'une certaine confiance dans leur valeur. On l'a vu, finalement pour savoir si un système est instable ou non il suffit de savoir démontrer *l'existence* d'un pôle à partie réelle positive pour la fonction de transfert en boucle fermée. Il n'est donc pas nécessaire de le calculer explicitement. En revanche, on peut éventuellement mesurer la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte, et il existe un critère qui nous informe s'il sera stable ou instable une fois bouclé.

Propriété 6.5 (Critère simplifié du revers). *Si un système linéaire est stable en boucle ouverte, une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique du système en boucle fermée est qu'en parcourant le lieu de Nyquist $H_{FTBO}(j\omega)$ dans le sens des pulsations ω croissantes, on laisse le point critique -1 à gauche.*

Ce critère graphique permet de prédire si le système ouvert une fois bouclé sera stable ou instable³². Il ne faut cependant pas penser que ce critère est empirique car graphique,

32. Bien sûr, si on sait modéliser le système par sa fonction de transfert en boucle ouverte, on peut aussi appliquer le critère au diagramme de Nyquist calculé du système.

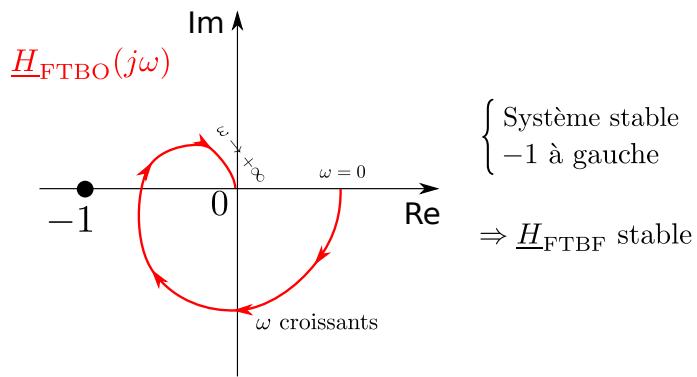


FIGURE 53 – Illustration du critère du revers : si $\underline{H}_{\text{FTBO}}(j\omega)$ est stable et que son contour passe à droite du point critique -1 dans le sens des ω croissants, alors on sait que bouclé ce système sera stable.

puisque il se démontre mathématiquement sans approximation et avec peu d'hypothèses dans le cadre de l'analyse complexe grâce au théorème de Cauchy (voir ci-dessous).

Le critère du revers ainsi que la lecture des marges de gain et de phase sur les diagrammes de Bode (voir ci-après) sont les outils les plus simples et les plus pratiques pour étudier la stabilité d'un système bouclé, avant de le boucler.

Démonstration du critère du revers (facultatif)

Propriété 6.6 (Théorème de Cauchy). *Soit $F(p)$ une fonction de la variable complexe p ayant P pôles et Z zéros à l'intérieur d'une courbe fermée Γ . En parcourant Γ dans le sens antitrigonométrique, la courbe $F(\Gamma)$ décrit $T = P - Z$ tours dans le sens trigonométrique autour de zéro.*

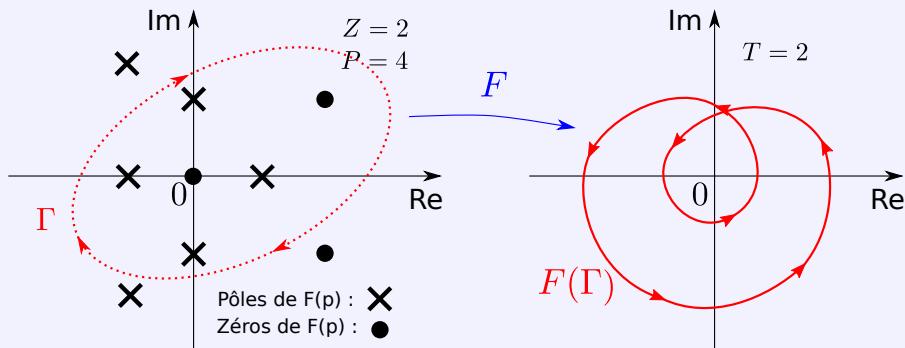


Illustration du théorème de Cauchy : soit Γ un contour et $F(p)$ une fonction du plan complexe. Γ entoure $Z = 2$ zéros de $F(p)$ et $P = 4$ pôles de $F(p)$. Donc d'après le théorème de Cauchy la courbe $F(\Gamma)$ entoure $T = 2$ fois l'origine du plan complexe.

Le théorème de Cauchy permet de relier le nombre de pôles et zéros d'une fonction entouré par un contour et le nombre de tour autour de zéro qu'elle fera si p appartient au contour.

Pour l'étude de la stabilité d'un système, on ne veut pas nécessairement connaître la valeur des pôles de $\underline{H}_{\text{FTBF}}(p)$ pour connaître le signe de leur partie réelle, mais on veut seulement connaître le nombre de pôles à partie réelle positive (ou le nombre

de zéros de $1 + \underline{H}_{FTBO}(p)$ à partie réelle positive). Alors un contour Γ d'intérêt est le contour dit de Bromwich Γ_B qui englobe tout le plan complexe à partie réelle positive. Si le tracé de $1 + \underline{H}_{FTBO}(\Gamma_B)$ réalise T tours autour de zéro et qu'on sait que Γ_B englobe $P = T$ pôles de $1 + \underline{H}_{FTBO}(p)$, alors cela signifie que $1 + \underline{H}_{FTBO}(p)$ possède $Z = 0$ zéros à partie réelle positive.

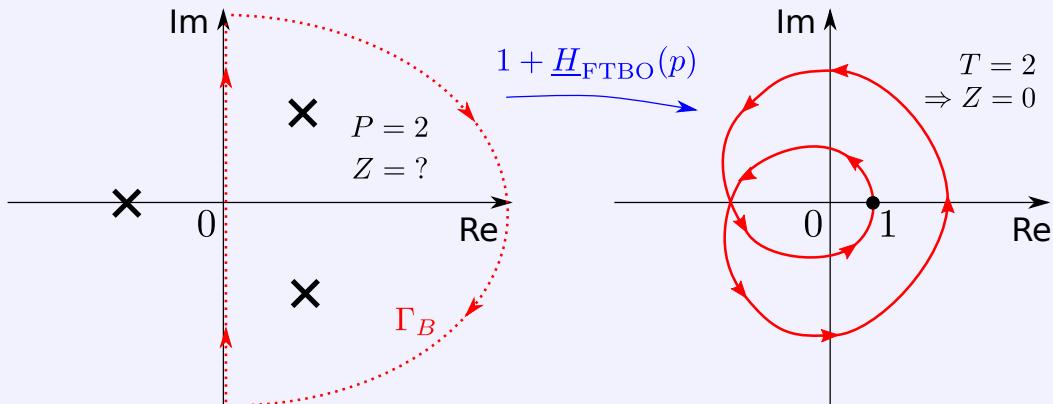


Illustration du critère de Nyquist : si le contour choisi est le contour de Bromwich Γ_B représenté à gauche, alors si on connaît le nombre de pôles instables de la fonction $1 + \underline{H}_{FTBO}(p)$, le comptage du nombre de tours du lieu $1 + \underline{H}_{FTBO}(\Gamma_B)$ autour de zéro dans le sens trigonométrique permet d'en déduire le nombre de zéros à partie réelle positive de la fonction. On rappelle aussi que pour un système physique causal, $\underline{H}_{FTBO}(p) \rightarrow 0$ avec $|p| \rightarrow \pm\infty$ donc le lieu $1 + \underline{H}_{FTBO}(\Gamma_B)$ passe forcément par le point +1.

Propriété 6.7 (Critère de Nyquist). *Un système asservi de fonction de transfert en boucle ouverte $\underline{H}_{FTBO}(p)$ est asymptotiquement stable en boucle fermée à la condition nécessaire et suffisante que $\underline{H}_{FTBO}(\Gamma_B)$ entoure le point critique -1 dans le sens trigonométrique un nombre T de fois égal au nombre P de pôles instables (à partie réelle positive) de $\underline{H}_{FTBO}(p)$.*

Grâce à ce critère géométrique, on peut connaître la stabilité d'un système en boucle fermée uniquement grâce à la donnée de sa fonction de transfert en boucle ouverte. Mais cela nécessite de connaître le nombre P de pôles instables de $\underline{H}_{FTBO}(p)$ et d'avoir le tracé du lieu $\underline{H}_{FTBO}(\Gamma_B)$. Rajoutons quelques arguments physiques pour restreindre l'étude de la stabilité.

Pour un système physique donc causal, $\underline{H}_{FTBO}(p)$ s'annule pour $|p| \rightarrow \infty$ donc sur l'extérieur du contour de Bromwich. Nécessairement le lieu $\underline{H}_{FTBO}(\Gamma_B)$ passe alors par le point 0 et seul le parcours de Γ_B le long de l'axe des imaginaires purs est d'intérêt. Cet axe peut être paramétré par la variable $j\omega$ et donc obtenir $\underline{H}_{FTBO}(\Gamma_B)$ revient à savoir tracer la courbe $\underline{H}_{FTBO}(j\omega)$ appelée *lieu de Nyquist*.

Ensuite, un système physique linéaire est décrit par une équation différentielle à coefficients réels, par conséquent $\underline{H}_{FTBO}(-j\omega) = \underline{H}_{FTBO}^*(j\omega)$: le lieu de Nyquist d'un système physique est symétrique par rapport à l'axe des réels. Donc, pour tracer le lieu $\underline{H}_{FTBO}(\Gamma_B)$, il est suffisant de ne s'intéresser qu'au parcours du demi axe positif des imaginaires purs $\omega > 0$: le lieu de Nyquist peut donc être obtenu expérimentalement par une étude fréquentielle du système en boucle ouverte.

Enfin, de manière général, les systèmes physiques ont des fonctions de transfert à boucle ouverte qui ne contiennent pas de pôles à partie réelle positive (sinon on sait qu'il diverge déjà en boucle ouverte). Ceci permet de définir le critère simplifié de stabilité en boucle fermée appelé critère du revers.

Propriété 6.8 (Critère simplifié du revers). *Si le système est stable en boucle ouverte ($H_{FTBO}(p)$ n'a pas de pôles instables), une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique du système en boucle fermée est qu'en parcourant le lieu de Nyquist $H_{FTBO}(j\omega)$ dans le sens des pulsations ω croissantes, on laisse le point critique -1 à gauche. Le sens des pulsations ainsi défini garantit que le contour approche le point -1 avec une phase négative.*

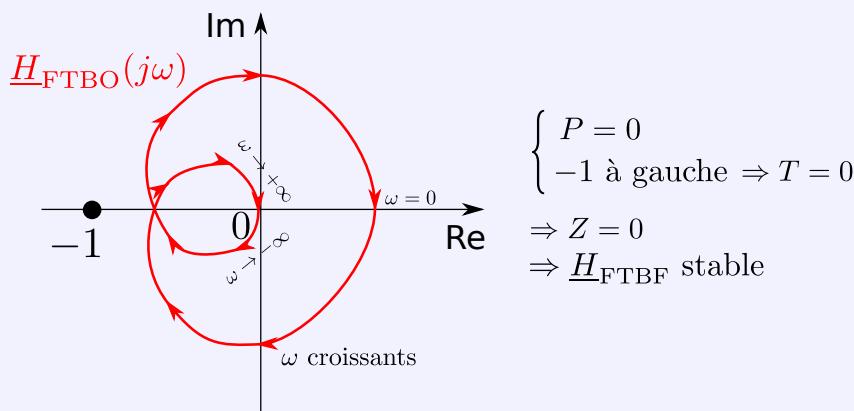


Illustration du critère du revers : si $H_{FTBO}(j\omega)$ est stable et que son contour passe à droite du point critique -1 dans le sens des ω croissants, alors on sait que bouclé ce système sera stable.

Systèmes d'ordre 1 et 2 : pour des systèmes asservis du type filtre passe-bas d'ordre 1 ou 2 en boucle ouverte, la phase n'est jamais inférieure à -180° (voir figure 54), donc les fonctions de transfert en boucle ouverte n'atteignent jamais le point critique -1 : ces systèmes sont donc stables.

Propriété 6.9. *Les systèmes bouclés avec un soustracteur et dont la fonction de transfert en boucle ouverte est un passe-bas d'ordre 1 ou 2 sont stables.*

Attention, s'ils sont bouclés avec un sommateur, le point critique à regarder est $+1$ et ces systèmes peuvent présenter des instabilités. Les systèmes d'ordre supérieurs à deux sont toujours potentiellement instables. Du critère du revers on peut donc en déduire la propriété suivante.

Marges de gain et de phase : le critère du revers peut être traduit de la manière suivante pour les systèmes bouclés d'ordre quelconque :

- soit ω_c la pulsation critique pour laquelle $\text{Arg}(H_{FTBO}(j\omega_c)) = -\pi$ (ou -180°), le système est stable si $|H_{FTBO}(j\omega_c)| < 1$ (cela traduit qu'après un tour de boucle le signal est plus petit que celui qui lui a donné naissance)
- soit ω_φ la pulsation telle que $|H_{FTBO}(j\omega_\varphi)| = 1$, le système est stable si $-\pi < \text{Arg}(H_{FTBO}(j\omega_\varphi)) \leq 0$.

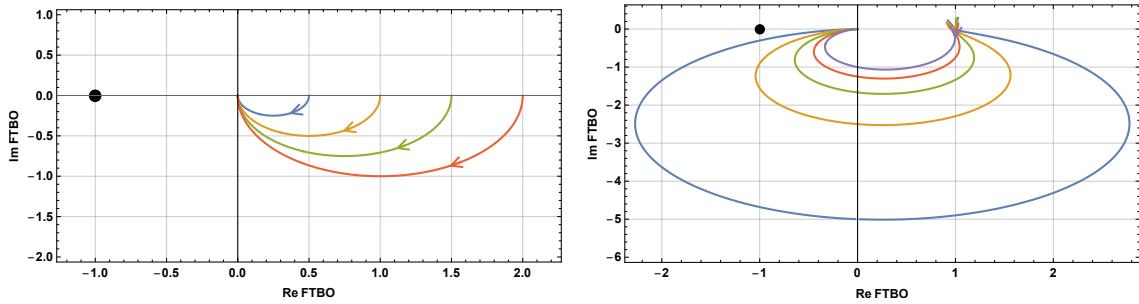


FIGURE 54 – *Gauche* : lieux de Nyquist de la fonction de transfert d'ordre 1 $\underline{H}_{FTBO}(j\omega) = K/(1 + j\omega\tau)$ pour différentes valeurs de K . *Droite* : lieu de Nyquist de la fonction de transfert du 2e ordre $\underline{H}_{FTBO}(j\omega) = K/(1 + 2\xi j\omega/\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2)$ pour différentes valeurs de $0 < \xi < 1$.

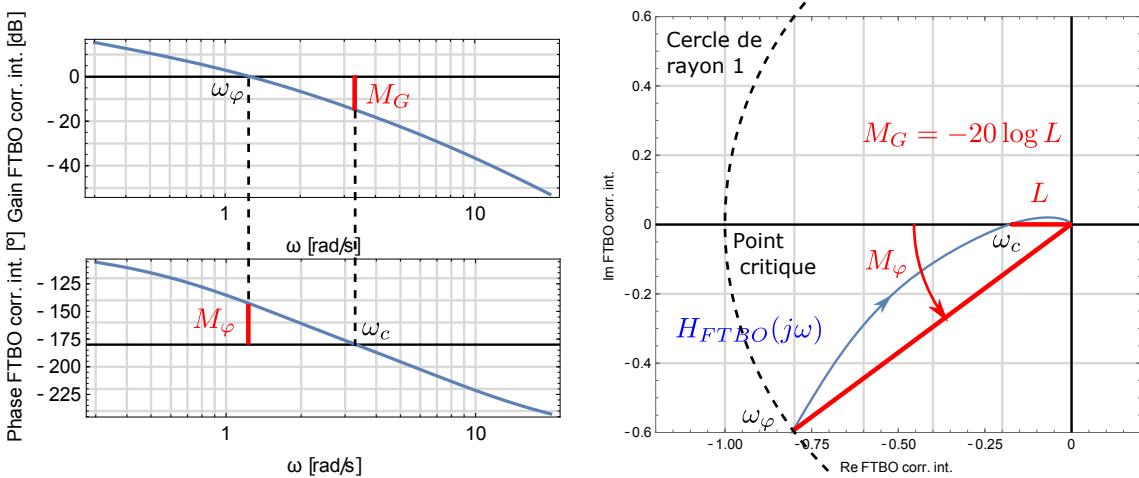


FIGURE 55 – Marges de gain M_G et de phase M_φ représentées sur les diagrammes de Bode (gauche) et de Nyquist (droite) pour une fonction de transfert à boucle ouverte $H_{FTBO}(j\omega)$ telle que présentée section 5.4.3.

En général, savoir si un système est stable ou non ne suffit pas : il faut connaître le *degré de stabilité*. En effet, si un système bouclé est trop près des conditions limites de la stabilité, une légère modification des paramètres (par exemple une variation de température ou autre) pourrait rendre le système instable. On définit en quelque sorte une marge de sécurité pour le gain et la phase :

- *marge de gain* : si ω_c est la pulsation pour laquelle $\text{Arg}(\underline{H}_{FTBO}(j\omega_c)) = -180^\circ$, on définit la marge de gain en dB par :

$$M_G = -20 \log(|\underline{H}_{FTBO}(j\omega_c)|) \quad (6.10)$$

- *marge de phase* : si ω_φ est la pulsation telle que $|\underline{H}_{FTBO}(j\omega_\varphi)| = 1$, on définit la marge de phase M_φ en degrés par :

$$M_\varphi = 180^\circ + \text{Arg}(\underline{H}_{FTBO}(j\omega_\varphi)) \quad (6.11)$$

Propriété 6.10. *Un système est stable en bouclé fermée avec un soustracteur si $M_G > 0$ ou $M_\varphi > 0$. Si ces conditions ne sont pas satisfaites, le système est instable.*

Des valeurs considérées empiriquement comme correctes pour assurer la stabilité du système sont $M_\varphi > 45^\circ$ et $M_G > 10 \text{ dB}$. Il est fréquent que si l'une des deux marges est convenable, l'autre le soit aussi. Ces marges sont facilement lisibles sur les diagrammes de Bode ou de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte (voir figure 55).

Si les marges de gain et de phase ne sont pas respectées, alors le système devient instable. Reprenons l'exemple de la machine à courant continu asservie en vitesse de rotation avec un correcteur intégrateur (section 5.4). Ce système est d'ordre 3 et sa fonction de transfert en boucle ouverte est représentée figure 55 pour un gain du correcteur $K_c = 0.2$. Si jamais ce nombre est supérieur, alors le lieu de Nyquist risque de dépasser le point critique -1 tel que sur la figure 56 et le système devient instable.

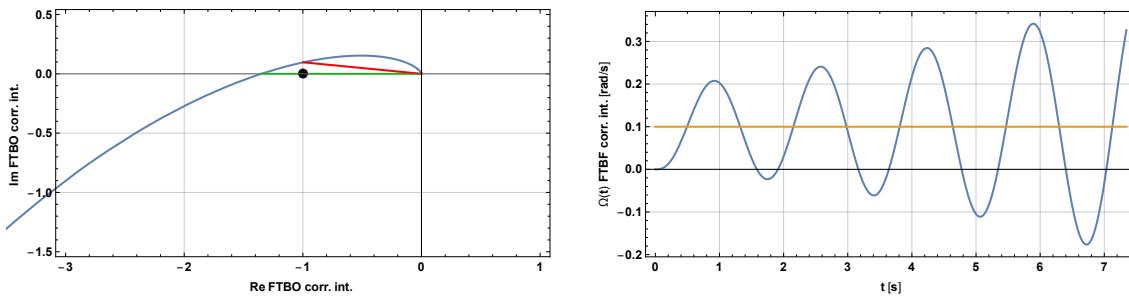


FIGURE 56 – *Gauche : lieu de Nyquist de la fonction de transfert $H_{FTBO}(j\omega)$ pour une machine à courant continu asservie en vitesse de rotation avec un correcteur intégral telle que le système dépasse le point critique -1 ($K_c = 1.5$). Droite : réponse temporelle (bleu) à un échelon de tension (jaune) du système devenu instable par une trop grande valeur du correcteur intégral.*

6.1.4 Généralités sur les systèmes auto-oscillants

Dans un système auto-oscillant (ou oscillateur), il n'y a pas de source à l'entrée de la boucle. Le signal est engendré par le système lui-même, les oscillations "accrochant" un signal de perturbation quelconque. Par exemple, en électronique, il pourra s'agir d'une impulsion due à la mise sous tension des appareils ou à des perturbations électromagnétiques captées par induction par les fils, etc...

En électronique, l'énergie produite provient évidemment des sources de tension continues non représentées sur les schémas servant à l'alimentation des composants actifs. De même, pour tous les systèmes auto-oscillants de tout domaine de la physique (optique, mécanique, par exemple), une source d'énergie extérieure est nécessaire à l'entretien des oscillations.

On distingue deux types d'oscillateurs :

1. les *oscillateurs quasi-sinusoïdaux*, tels que le signal de sortie soit presque sinusoïdal
2. les *oscillateurs à relaxation*, délivrant un signal périodique non sinusoïdal.

6.2 Oscillateurs quasi-sinusoidaux

6.2.1 Structure d'un oscillateur quasi-sinusoidal

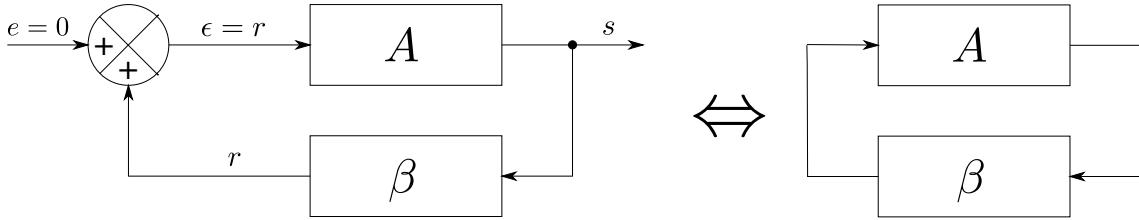


FIGURE 57 – Schéma fonctionnel unifilaire général d'un système bouclé pour l'étude des oscillateurs (utilisation d'un sommateur).

Dans l'étude des oscillateurs quasi-sinusoidaux, il est usuel de remplacer le soustracteur par un sommateur (voir figure 57). Dans ce cas, la fonction de transfert en boucle fermée devient :

$$\underline{H}_{\text{FTBF}} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{A}}{1 - \underline{A}\underline{\beta}} \quad (6.12)$$

Notons alors que le critère de stabilité de Nyquist ne s'intéresse plus au contournement du point -1 mais du point $+1$.

Pour fabriquer un oscillateur quasi-sinusoidal, il faut régler les paramètres du système bouclé de telle sorte que sa fonction de transfert en boucle fermée contiennent au moins un pôle complexe imaginaire pur (et son conjugué). En effet, d'après l'équation 6.8, cela signifie que la réponse impulsionnelle $S(p)$ contient au moins un terme en $1/(p^2 + \omega_0^2)$ donc présente une réponse sinusoïdale à la pulsation ω_0 . Cette condition sur les paramètres se traduit dans le formalisme de Fourier par la condition suivante.

Propriété 6.11 (Condition de Barkhausen). *Pour qu'un système bouclé soit auto-oscillant ($s(t) \neq 0$ avec $e(t) = 0$), il doit exister une pulsation ω_0 telle que :*

$$1 - \underline{A}(j\omega_0)\underline{\beta}(j\omega_0) = 0$$

La propriété ci-dessus n'est valable qu'avec un sommateur dans le système. Avec un soustracteur, la condition de Barkhausen devient $1 + \underline{A}(j\omega_0)\underline{\beta}(j\omega_0) = 0$. On fait un choix purement conventionnel. Notons que la fonction de transfert en boucle fermée n'a plus de sens pour un oscillateur en fonctionnement car l'entrée en nulle.

Si cette condition est réalisée pour une unique valeur ω_0 de ω , le système oscillera de façon sinusoïdale à ω_0 . Si cette condition est réalisée pour plusieurs valeurs de ω , le signal de sortie sera une superposition de signaux sinusoïdaux à ces fréquences. On supposera dorénavant qu'il n'y a qu'une seule valeur ω_0 vérifiant la condition de Barkhausen.

En pratique, on a toujours du mal à obtenir très précisément la condition de Barkhausen, à cause des incertitudes sur les valeurs des composants. C'est pourquoi on n'a pas d'oscillateur exactement sinusoïdal à ω_0 , et on parle d'oscillateur quasi-sinusoidal à ω_0 . Pour observer un signal périodique en l'absence d'entrée, il faut réaliser la condition de Barkhausen au mieux, mais en se plaçant dans une situation légèrement instable i.e. d'après le critère du revers $|\underline{A}(j\omega)\underline{\beta}(j\omega)| \gtrsim 1$. Sinon toute perturbation est amortie et aucune oscillation n'accroche.

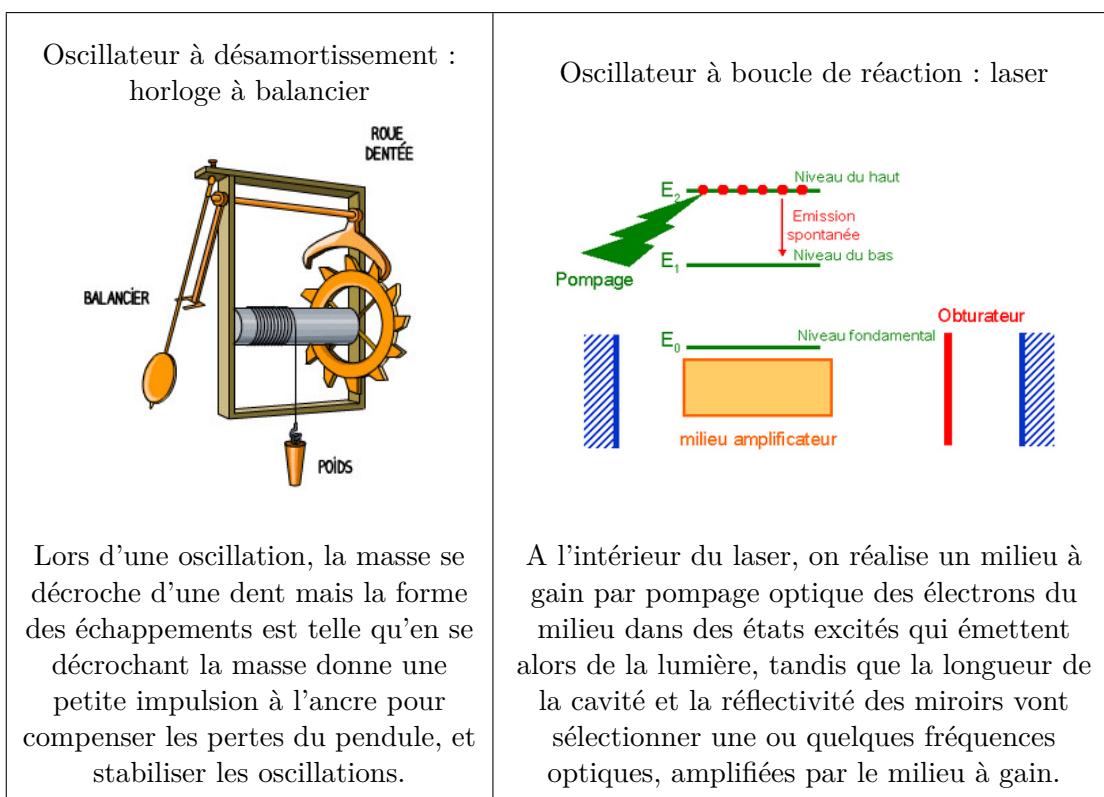
Notons que, pour que des oscillations puissent naître à partir d'une perturbation d'entrée, il ne suffit pas que le régime linéaire du système soit instable. Il faut aussi que, une fois parvenu à sa saturation, le système n'y reste pas indéfiniment, et finisse par retrouver le régime linéaire. Alors, il oscille entre saturation haute et basse : le régime saturé doit lui aussi être instable.

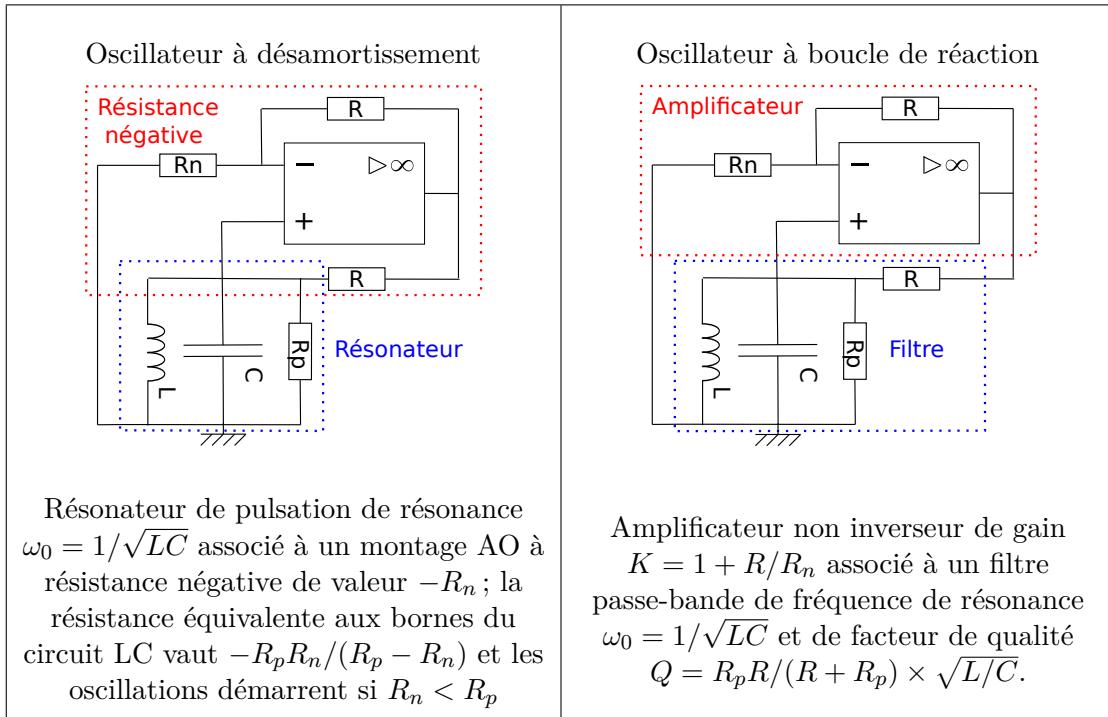
Les oscillations se réalisent entre les deux valeurs de saturation. Moins le système reste en régime saturé, i.e. plus il est proche de la réalisation exacte de la condition de Barkhausen, plus le signal se rapproche d'un signal sinusoïdal pur à ω_0 . L'étude exacte est assez complexe, car une fois en régime saturé, il faut écrire la nouvelle équation qui régit le système dans ce régime, et calculer sa durée.

Les oscillateurs quasi-sinusoïdaux peuvent être classés en deux familles :

1. *les oscillateurs à désamortissement*, qui associent un résonateur avec un dispositif actif compensant les pertes du système
2. *les oscillateurs à boucle de réaction*, qui associent un amplificateur à un filtre.

La distinction entre les deux n'est pas toujours aisée en électronique, mais plus évidente dans les deux exemples ci-dessous.





6.2.2 Étude de l'oscillateur à pont de Wien

On peut retrouver toutes les notions précédentes sur l'oscillateur à pont de Wien présenté figure 58.

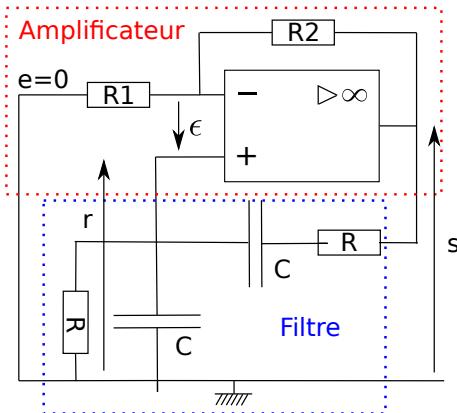


FIGURE 58 – Oscillateur à pont de Wien.

Analyse en termes de fonction de transfert : condition de Barkhausen.

- Filtre :

$$\underline{\beta} = \frac{r}{s} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2} = \frac{1/3}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (6.13)$$

avec $Q = 1/3$ et $\omega_0 = 1/RC$.

- Amplificateur :

$$\underline{s} = -\frac{R_2}{R_1}\underline{e} + \frac{R_2 + R_1}{R_1}\underline{r} \quad (6.14)$$

- Fonction de transfert :

$$H_{FTBF} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 - \frac{\beta}{R_1} \frac{R_2 + R_1}{R_1}} \quad (6.15)$$

- Condition de Barkhausen :

$$1 - \frac{\beta}{R_1} \frac{R_2 + R_1}{R_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{\underline{r}}{\underline{s}} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2} \quad (6.16)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = \omega_0 = 1/RC \\ \frac{R_2 + R_1}{R_1} = 3 \text{ ou } R_2 = 2R_1 \end{cases} \quad (6.17)$$

Analyse en termes de fonction de transfert : condition sur H_{FTBO} .

la fonction de transfert en boucle ouverte de l'oscillateur à pont de Wien s'écrit :

$$H_{FTBO}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{V_+} = A\beta = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2} \quad (6.18)$$

avec $A = 1 + R_2/R_1$. Dans notre convention (sommateur au lieu de soustracteur), on cherche à ce que la fonction de transfert en boucle ouverte vaille $+1$ pour avoir un oscillateur. L'étude des diagrammes de Nyquist ou de Bode permet de déduire que cette valeur est atteinte en ω_0 pour $A = 3$.

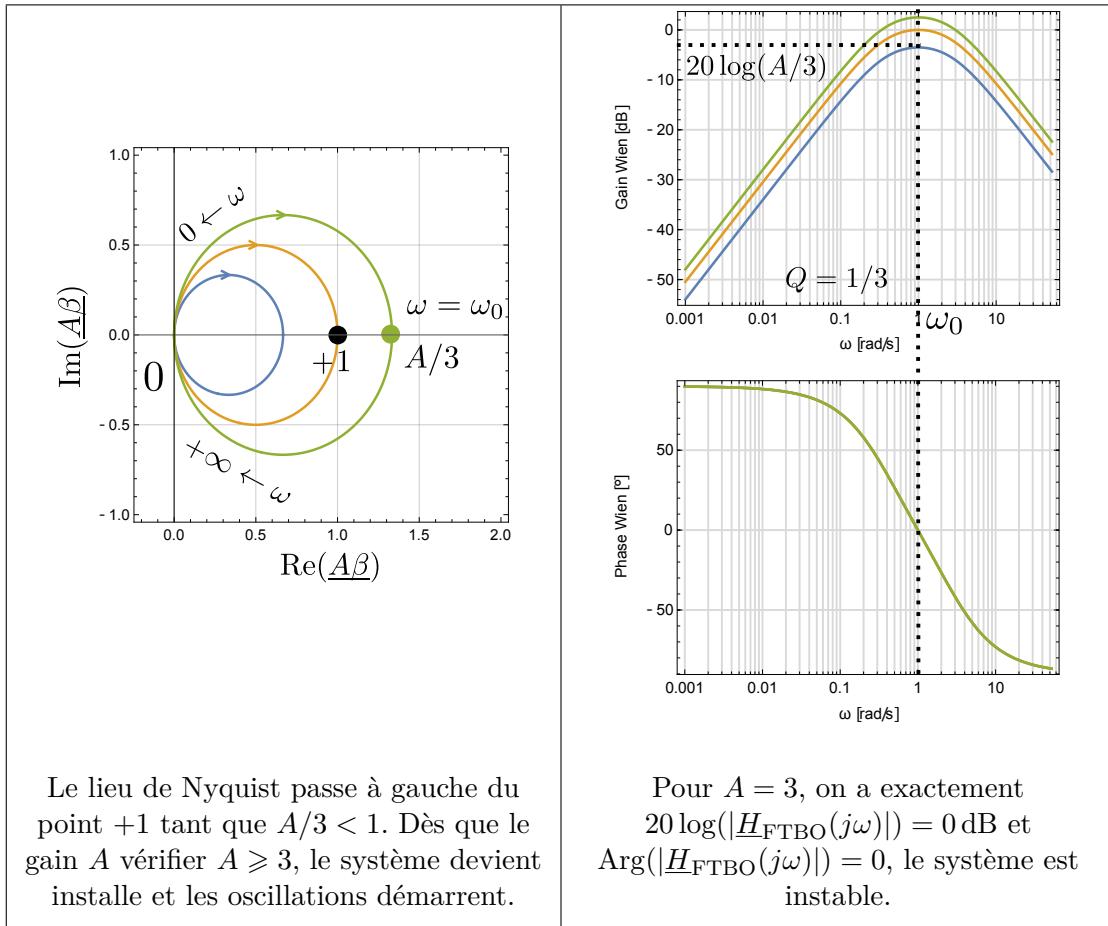
Analyse en termes d'équation différentielle : à partir de H_{FTBF} , on a facilement accès à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{RC} (3 - A) \frac{ds}{dt} + \frac{1}{(RC)^2}s = 0 \quad (6.19)$$

On retrouve la condition théorique d'oscillation $\omega = \omega_0 = 1/RC$ et $A \geq 3$. En pratique, il est très difficile d'obtenir exactement $R_2 = 2R_1$. On cherche donc à avoir un coefficient d'amortissement légèrement négatif $\xi = 3 - A \lesssim 0 \Leftrightarrow R_2 \gtrsim 2R_1$.

Inversion des bornes de l'AO : si l'on réalise le même montage en inversant simplement les bornes $+$ et $-$ de l'AO, la sortie de l'AO est toujours saturée, indépendamment du rapport R_2/R_1 . Le régime saturé devient stable et en pratique on observe aléatoirement $s = +V_{sat}$ ou $-V_{sat}$, constante.

Dans ce qui précède, on a implicitement supposé l'AO idéal en écrivant $V_+ = V_-$. Pour comprendre ce qu'il se passe si l'on inverse les bornes de l'AO, donc si l'on change fictivement le signe de μ_0 , il ne faut pas garder ce modèle mais par exemple prendre le modèle AO du premier ordre fondamental. Le problème est uniquement mathématique, car l'on aboutit à une équation différentielle du système du 3e ordre (ordre 2 du pont de Wien plus ordre 1 du modèle de l'AO). En utilisant les critères mathématiques de stabilité, on constaterait que le système ne peut pas fonctionner en régime linéaire, quel que soit R_2/R_1 avec $\mu_0 < 0$. Avec $\mu_0 < 0$, on est dans le cas d'un système dont le régime linéaire est instable et dont le régime saturé est stable.



6.2.3 Oscillateur à quartz

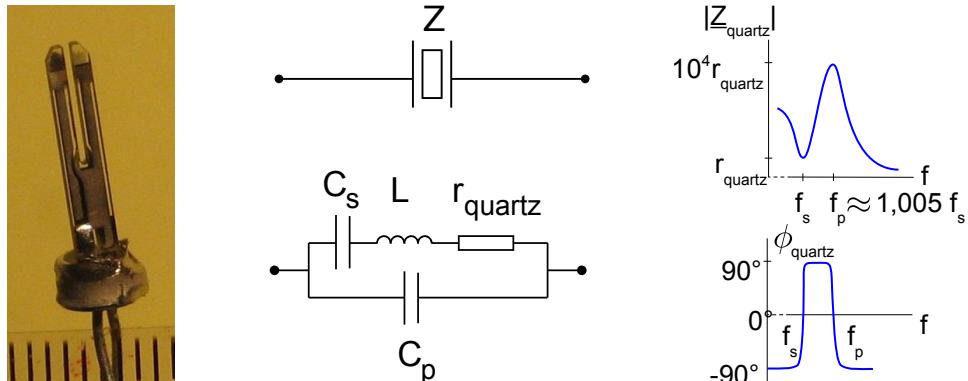


FIGURE 59 – Gauche : quartz de montre sans son boîtier (source : Wikipedia). Centre : symbole et circuit équivalent d'un quartz. Droite : allure du diagramme de Bode d'un quartz

Le quartz est un cristal d'oxyde de silicium. On constate que si l'on applique une différence de potentiel sur deux électrodes fixées au matériau, c'est-à-dire si on place ce dernier dans un champ électrique, il va se déformer. Inversement, s'il est soumis à des efforts mécaniques, une différence de potentiel va apparaître à ses bornes. C'est ce couplage électromécanique qui va donner au composant ces caractéristiques particulières.

Techniquement, le composant se présente sous la forme d'un cylindre métallique, renfermant un diapason dont les deux bras sont en quartz. Sur chaque bras est déposé une électrode permettant d'appliquer une tension extérieure. L'effet piézo-électrique permet de remplacer la sollicitation mécanique du diapason (percussion) par une sollicitation électrique (tension).

Cette structure permet d'obtenir une résonance mécanique pour une fréquence très précise. En effet, la rigidité du quartz, en confinant l'énergie acoustique dans les bras du diapason, va permettre d'atteindre de très forts facteurs de qualité. De plus, le diapason est placé sous vide afin d'éviter toute interaction visqueuse avec un gaz, ce qui permet d'augmenter le facteur de qualité.

Électriquement, le quartz est un dipôle qui peut être représenté par le schéma électrique équivalent de la figure 59. C'est la résonance mécanique qui va donner à l'impédance du dipôle les propriétés qui correspondent au schéma. La capacité C_p représente physiquement le condensateur réalisé par les deux électrodes séparées par un isolant électrique. En revanche, les éléments r , L et C sont des éléments motionnels qui permettent de modéliser le couplage électromécaniques dans le matériau. Des valeurs typiques pour ce modèle sont $C_s = 0.1 \text{ fF}$, $C_p = 10 \text{ pF}$, $L = 10 \text{ H}$ et $r_q = 1 \text{ k}\Omega$.

Le diagramme de Bode correspondant à l'impédance du quartz est représenté figure 59. On note que la phase est négative pour la plupart des fréquences, sauf entre deux fréquences correspondant à la résonance série $LC_s\omega_s^2 = 1$ et à la résonance parallèle $LC'\omega_p^2 = 1$ avec $C' = C_sC_p/(C_s + C_p)$. Ces deux fréquences sont très proches. Sur la plage étroite, le composant sera plutôt inductif, ailleurs capacitif.

Inséré dans un système bouclé avec un amplificateur linéaire, ce composant permet de créer un système auto-oscillant avec un facteur de qualité très élevé et donc une bonne stabilité en fréquence. La température a en revanche une incidence notable sur la caractéristique de l'oscillateur. A plus long terme, le vieillissement va lui aussi faire dériver lentement la fréquence de l'oscillateur.

Stabilité en fréquence

La stabilité en fréquence caractérise les possibles variations de fréquence d'un oscillateur quasi-sinusoidal. Pour un signal de sortie $s(t) = S \cos(\varphi(t))$ avec $\varphi(t)$ la phase instantanée, on définit la fréquence instantanée par :

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt}$$

La stabilité en fréquence est définie expérimentalement par $\sigma = \delta f/f_0$ où δf est l'amplitude de variation de la fréquence instantanée observée pour le système, ou analytiquement pour un signal quasi-sinusoidal par :

$$\frac{\delta\varphi}{\sigma} = \omega_0 \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

Elle s'exprime en général en *parties par million* (p.p.m.) : 1 p.p.m. correspondant à une variation relative de 10^{-6} mais quand même à 13 s/an ! Les montres ont une exigence de 1 p.p.m., mais pour un satellite de télécommunication (impossible à réparer ou régler une fois lancé dans l'espace), l'exigence doit être bien supérieure. Pour un oscillateur basé sur un filtre passe-bande, la stabilité en fréquence est inversement proportionnelle au facteur de qualité Q :

$$\sigma \approx \frac{\delta\varphi}{2Q}$$

Avec $Q = 1/3$, la stabilité en fréquence d'un oscillateur à pont de Wien est de l'ordre de 1000 p.p.m. pour des fluctuations de phase de l'ordre du milliradian (le bruit de phase étant dû à l'agitation thermique dans le système), ce qui est énorme. En pratique cet oscillateur n'est plus utilisé, on préfère des oscillateurs à quartz dont le facteur de qualité est plutôt de l'ordre $Q \approx 10^4$.

On peut mesurer en TP la stabilité de l'oscillateur à pont de Wien. En utilisant un mode persistant à l'oscilloscope, placer le zéro des temps à gauche de la fenêtre, utiliser un trigger externe, et observer la dispersion dessinée par le signal sinusoïdal à droite de l'écran (sur une plage de temps suffisamment large). En mesurant la largeur de la trace laissée par le signal, il est possible de remonter à la stabilité en fréquence.

6.3 Oscillateurs à relaxation

6.3.1 Définition

Un oscillateur à relaxation (ou montage astable) est un générateur autonome qui délivre une tension périodique non sinusoïdale. Nous nous limitons ici aux montages astables délivrant une tension périodique de forme rectangulaire. Ils évoluent donc naturellement entre deux états instables.

Une telle situation ne se trouve pas qu'en électronique : citons par exemple le cas du siphon ou de l'extracteur de Soxhlet en chimie. Elle se réalise facilement en électronique en bouclant un comparateur à hystérésis sur un intégrateur (ou un pseudo-intégrateur).

6.3.2 Exemple du multivibrateur astable

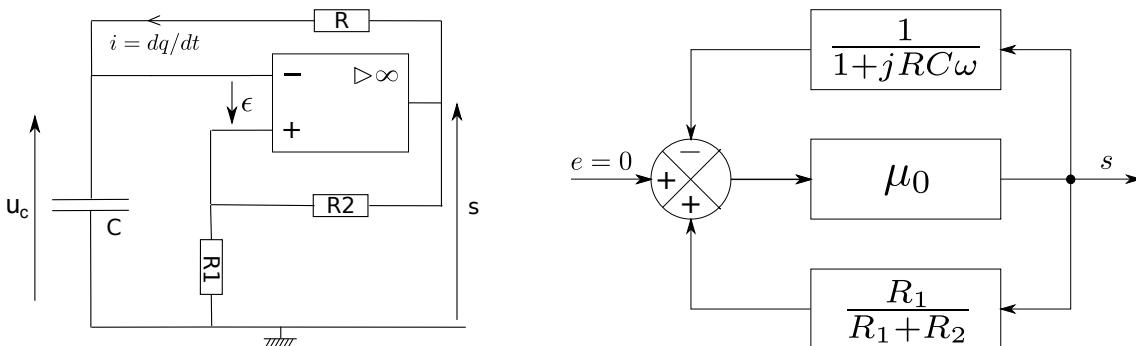


FIGURE 60 – *Gauche* : Montage multivibrateur astable. *Droite* : Schéma bloc fonctionnel équivalent.

Il existe un grand nombre de structures de circuits astables. Nous allons raisonner sur le cas particulier du multivibrateur astable (figure 60). Dans ce montage, on ne parle plus d'oscillateur quasi-sinusoïdal car l'élément de retour n'est pas sélectif ce qui signifie que les formes d'ondes mises en jeu restent très distordues. Pour étudier la stabilité du régime linéaire, on va utiliser le modèle de l'AO d'ordre 0 : $s = \mu_0(V_+ - V_-)$ (le modèle du premier ordre n'apporte rien à la compréhension du système si ce n'est des calculs).

L'AO réalise la comparaison entre la tension de sortie du filtre passe-bas u_c et la tension de sortie du diviseur de tension $u = R_1/(R_1 + R_2)s$. Tant que $s = V_{\text{sat}}$, le condensateur

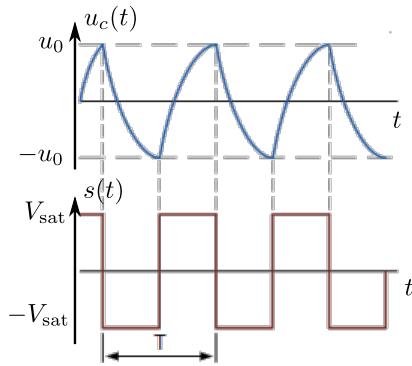


FIGURE 61 – Evolution temporelle des tensions $u_c(t)$ et $s(t)$ du multivibrateur astable, en régime périodique.

se charge, u_c augmente jusqu'à la valeur $u_0 = R_1/(R_1 + R_2)V_{\text{sat}}$: l'AO bascule alors en saturation basse. Lorsque $s = -V_{\text{sat}}$, le condensateur se décharge, u_c diminue jusqu'à dépasser la valeur $-u_0$: l'AO bascule en saturation haute. Le régime est donc périodique après un régime transitoire. La période T des oscillations est :

$$T = 2RC \ln \left(\frac{V_{\text{sat}} + u_0}{V_{\text{sat}} - u_0} \right) \quad (6.20)$$

Étude sur la fonction de transfert : la fonction de transfert en boucle fermée du système peut se déduire du schéma bloc représenté figure 60 :

$$\begin{aligned} H_{\text{FTBF}}(j\omega) &= \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 \left(\frac{1}{1 + jRC\omega} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)} \\ &= \frac{\mu_0(1 + jRC\omega)}{1 + \mu_0 \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) + jRC\omega \left(1 - \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)} \end{aligned} \quad (6.21)$$

L'étude du dénominateur de la fonction de transfert nous montre qu'on a un pôle réel et positif en supposant $\mu_0 \gg 1$:

$$p_0 = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{RC} > 0 \quad (6.22)$$

Le système bouclé est donc bien instable.

Étude sur l'équation différentielle :

$$s = \mu_0(V_+ - V_-) = Ri + q/C \quad (6.23)$$

$$V_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2}s, \quad V_- = u_c = q/C \quad (6.24)$$

En combinant ces quatre équations, on obtient l'équation différentielle suivante :

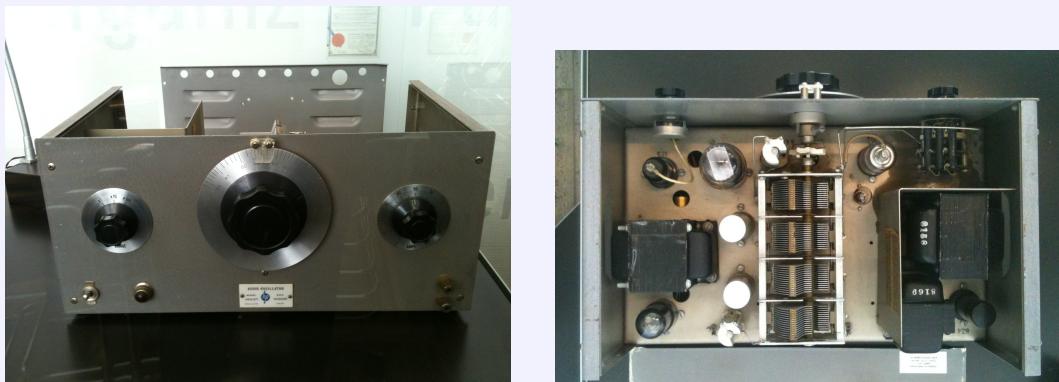
$$\left(1 - \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \frac{ds}{dt} + \left(\frac{1}{RC} + \mu_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{RC} \right) s = 0 \quad (6.25)$$

Comme $\mu_0 \gg R_1/(R_1 + R_2)$, on a une constante de temps $\tau < 0$ donc un régime instable. La sortie est toujours saturée car les régimes transitoires sont même extrêmement courts ($|\tau/RC| \gg 1$).

Quelques mots sur les oscillateurs

Dans ce chapitre, nous avons décrit le principe général des oscillateurs électroniques et leurs réalisations avec des composants de base. Néanmoins, les oscillateurs ne doivent pas être vus comme des curiosités de travaux pratiques. Ce sont des éléments cruciaux dans les systèmes électroniques de notre quotidien, puisqu'ils assurent la production et la stabilité en fréquence des signaux alternatifs nécessaires à leur fonctionnement comme : la fréquence de la porteuse d'un émetteur, la fréquence de l'oscillateur local de réception dans le récepteur, le signal d'horloge de tous les systèmes numériques (ex : cadencement des opérations sur une carte mère d'ordinateur, oscilloscope, GBF) etc. Dans les équipements actuels, les oscillateurs se présentent sous deux formes : intégré dans une puce électronique en compagnie d'autres fonctions, ou comme composant indépendant.

Pour assurer la stabilité en fréquence, le gain de boucle d'un oscillateur quasi-sinusoidal doit être le plus proche possible de 1, afin de ne pas produire un signal trop écrété et donc riche en harmoniques et instable en fréquence. C'est pourquoi des boucles à rétro-actions contrôlant le gain et donc la stabilité en amplitude sont rajoutées aux oscillateurs. C'est le cas de l'oscillateur HP200A, oscillateur à pont de Wien stabilisé en amplitude par une ampoule à filament, étudié en thèse de master par Bill Hewlett et fabriqué par David Packard dans son garage à Palo Alto (Californie) (premier produit commercialisé par HP en 1939).



Oscillateur HP200A : à l'intérieur on reconnaît au centre des condensateurs variables, en haut droite une ampoule à filament (dont la résistance augmente avec la température), des ampoules à vide pour l'amplification, un transformateur en bas à droite.

Ainsi, selon les fréquences et la stabilité recherchées, différents résonateurs et circuits existent (voir <https://www.les-electroniciens.com/sites/default/files/cours/oscillateurs.pdf>) : oscillateurs de Hartley, Collpits, à résistance négative, à quartz, en céramique, etc. Dans un ordinateur, on trouve ainsi plusieurs horloges, de gammes de fréquence différentes, avec par exemple un oscillateur contrôlé en tension dans le processeur, asservi par une boucle à verrouillage de phase sur l'oscillateur de la carte mère (quitte à réaliser des multiplication ou division de fréquence).

6.4 Exercices (quelques solutions en annexe)

1. Étudier l'oscillateur à résistance négative présenté section 6.2.1 : retrouver les conditions d'oscillations du système.
2. Étudier le comportement du comparateur à hystérésis.
3. Démontrer la formule 6.20.
4. Écrire la fonction de transfert en boucle fermée d'un filtre passe-bas d'ordre 2 avec une boucle de retour de gain K_d et un sommateur. Cette situation correspond à un système oscillant en rétroaction positive (balançoire,...), en étudiant le régime temporelle montrer que ce système peut être instable.

7 Télécommunications

LE BUT d'un système de télécommunication est de transmettre une information à une certaine distance. Pour cela différents procédés existent selon le signal à transmettre mais fondamentalement le codage d'un signal sur un support en vue de sa transmission repose sur des principes communs. Dans ce chapitre, nous verrons en particulier les notions liées à la modulation et la démodulation d'une onde porteuse électromagnétique, en amplitude et en fréquence, dont on trouve de nombreuses applications dans la vie courante mais aussi à l'agrégation.

Les télécommunications à l'agrégation : les notions de modulation ou de démodulation peuvent apparaître dans les épreuves suivantes :

- LP12 : Traitement d'un signal. Étude spectrale.
- MP23 : Mise en forme, transport et détection de l'information. (indispensable)
- MP24 : Signal et bruit. (éventuellement pour la détection synchrone)
- MP27 : Systèmes bouclés. (éventuellement pour la boucle à verrouillage de phase)

7.1 Introduction

Le plus ancien moyen de télécommunication est l'expression orale : toute société humaine possède un langage propre, sorte de codage de ses connaissances ou de ses sentiments. Une deuxième façon de présenter l'information à transmettre est l'écriture, prolongement de la forme orale si l'écriture est de type phonétique (alphabet) ou prolongation de notions conceptuelles déconnectées de l'oral si l'écriture est à base d'idéogrammes (cas du monde sinisé). Une troisième manière de représenter de l'information est l'image fixe (peinture, photographie) ou animée (cinéma, vidéo). Le stade actuel de codage de l'information est la représentation numérique, soit du son, soit du texte, soit de l'image. L'information doit donc être transformée d'abord en signal à transmettre ce qui sous-entend une mise en forme et un *codage*. Les techniques de codage se sont développées dans le but d'assurer un plus grand débit mais aussi une plus grande fiabilité dans la transmission.

Transmettre l'information d'un endroit à un autre n'est rien d'autre que de la transporter par des moyens divers, qui ont évolués au cours des siècles. Le transport peut être sonore (tam-tam africains), visuel (signaux de fumée des indiens d'Amérique, télégraphe de Chappe) mais aussi réalisé tout simplement par un messager, un porteur (un facteur, un pigeon voyageur, un avion). Dans l'époque récente on a su introduire de nouveaux types de porteur de l'information permettant un débit plus important, une accessibilité plus souple, une sécurité plus grande... On utilise maintenant les ondes électromagnétiques (dans différents domaines de fréquence ou de longueur d'onde), et l'on emploie le terme de *porteuse*, bien que certains n'y voyaient aucune application au départ :

Electromagnetic waves are of no use whatsoever [...] this is just an experiment that proves Maestro Maxwell was right—we just have these mysterious electromagnetic waves that we cannot see with the naked eye. But they are there.

Heinrich Hertz, découvreur des ondes électromagnétiques 1886-1890

Si l'on parle de transporter ou transmettre l'information il faut spécifier, bien sûr selon les moyens mis en œuvre, le chemin que l'on va utiliser pour cela (par terre, par mer, par air...). On parle aussi de *canal de transmission* en particulier quand on utilise une porteuse

électromagnétique. Le chemin doit être adapté au mieux à la façon dont l'information est transportée, ou encore le *canal de transmission doit être adapté à la porteuse employée*. L'information prend bien sûr une certaine place sur le chemin qui lui est dédié (taille des signaux de fumée, encombrement des lettres, mais aussi encombrement spectral dans le cas de la porteuse électromagnétique). On parle alors de *largeur de canal* ou de largeur de bande.

Enfin, la façon de *confier l'information* (au préalable mise en forme et codée) au moyen de transport peut être de confier un message à un porteur qui la prend dans sa main ou dans une boîte... S'il s'agit là encore d'utiliser une onde électromagnétique, il faudra en quelque sorte "accrocher l'information" à cette porteuse, et l'on parle alors de *modulation* de la porteuse.

A l'arrivée, il faudra ouvrir la lettre ou le paquet, décoder l'information. On parlera aussi de *démodulation* à la réception.

Enfin, pour terminer ce panorama général, il est important de parler de critère de qualité pour la transmission mise en œuvre. La lettre a-t-elle été mouillée ou salie ? Manque-t-il une partie ? Le son ou l'image ont-ils été déformés ? On utilise les notions de *spectre*, de *bruit*, de *rapport signal à bruit* ou de *taux d'erreur par bit* (bit error rate).

Examinons un peu plus le cas de la transmission d'un signal audio par une porteuse électromagnétique. A quelle fréquence faut-il choisir celle dernière ? Si l'on imagine transmettre une onde électromagnétique de même fréquence que le signal audio, on est confronté à deux problèmes :

1. encombrement : impossible à la réception de distinguer deux signaux de la même plage de fréquence (comme deux personnes qui parlent en même temps dans une pièce)
2. dimensions des antennes : pour être émise et réceptionnée une onde électromagnétique nécessite une antenne dont la taille doit être de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde émise ; pour les fréquences audibles (environ 20 Hz à 20 000 Hz), l'antenne doit être de taille gigantesque mais aussi d'une grande variabilité : de 1500 km à 1.5 km.

Il faut donc changer de gamme de fréquence : au lieu de travailler à la fréquence (basse) du signal, on travaille au voisinage de la fréquence (élevée) de la porteuse. Une porteuse de 1 MHz modulée par un signal audio n'encombre que la gamme 1.00002 – 1.02000 MHz. On peut ainsi créer de nombreux canaux dans une gamme de fréquence de quelques MHz. De plus la longueur d'onde est plus raisonnable pour la taille des antennes (pour $f = 100$ MHz, $\lambda = 3$ m). Enfin la variation relative de fréquence est faible : une seule antenne peut être adaptée à tous les canaux.

Quelle quantité peut-on moduler sur une porteuse électromagnétique ? Une onde porteuse s'écrit typiquement :

$$s_p(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.1)$$

On peut donc jouer sur plusieurs paramètres :

- A : modulation d'amplitude (radio AM, modulation d'amplitude d'un faisceau laser dans une fibre optique)
- ω : modulation de fréquence (radio FM, télévision par satellite)
- φ : modulation de phase (radiotéléphonie VHF et UHF)

Ces paramètres peuvent être modulés de façon *analogique* ou *numérique*.

D'ores et déjà, commençons par donner quelques ordres de grandeurs concernant les télécommunications.

- Quelques chiffres sur la radio :

Type de modulation	Modulation d'amplitude	Modulation en fréquence
Fréquence de la porteuse	150 kHz – 26.1 MHz	87.5 MHz – 108 MHz
Fréquence maximale du signal utile	4.5 kHz	15 kHz
Intervalle entre deux canaux	10 kHz	200 kHz
Avantages	longue portée, signal facile à fabriquer et recevoir	meilleure bande passante et donc qualité sonore, beaucoup moins sensible aux parasites

- Téléphonie mobile : deux bandes à 800 – 900 et 1700 – 1900 MHz, modulation en fréquence (et bientôt 3500 MHz avec la 5G)
- Télévision numérique terrestre : 474 – 786 MHz répartis en 60 canaux de 8 MHz
- Télévision satellite : environ 10 GHz
- Internet par fibre optique : environ 2×10^{14} Hz

7.2 Modulation et démodulation d'amplitude

La transmission radiophonique par modulation d'amplitude est la première à avoir mise en œuvre pour diffuser à partir des années 1920 typiquement les informations nationales, météorologiques et quelques émissions musicales, à des fréquences de l'ordre de 100 kHz. L'enjeu est donc d'accrocher une information essentiellement vocale de l'ordre de la centaine de hertz, sur une onde électromagnétique de fréquence bien plus rapide.

7.2.1 Le multiplicateur analogique

Ce composant est tout à fait commun dans les salles de TP et sera donc utilisé comme mélangeur (Figure 62). Les multiplicateurs de signaux analogiques sont couramment employés en électronique. Ils réalisent correctement la multiplication de deux signaux de faible puissance et de fréquences inférieures au MHz. De tels circuits comportent :

- deux bornes d'alimentation symétriques ± 15 V
- deux entrées différentielles X_1, X_2 et Y_1, Y_2 (les tensions appliquées ne doivent pas dépasser 10 V)
- un circuit multiplicateur réalisant l'opération $k(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)$ où k est une constante caractéristique du composant (souvent $k \approx 0.1 \text{ V}^{-1}$)
- un sommateur ajoutant la tension $z(t)$ au résultat précédent (si on ne se sert pas de cette fonction, il est impératif de mettre cette entrée à la masse)

- une sortie $s(t)$ réalisant l'opération :

$$s(t) = k(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) + z(t) \quad (7.2)$$

- une masse M.

Dans la suite, on considérera pour simplifier que $X_2 = Y_2 = z(t) = 0$ V. Pour une onde porteuse $v_p(t) = A_p \cos(\omega_p t)$ et un signal modulant $v_u(t)$, le multiplicateur renvoie alors la tension :

$$v_s(t) = k v_p(t) v_u(t) = k A_p v_u(t) \cos(\omega_p t) \quad (7.3)$$

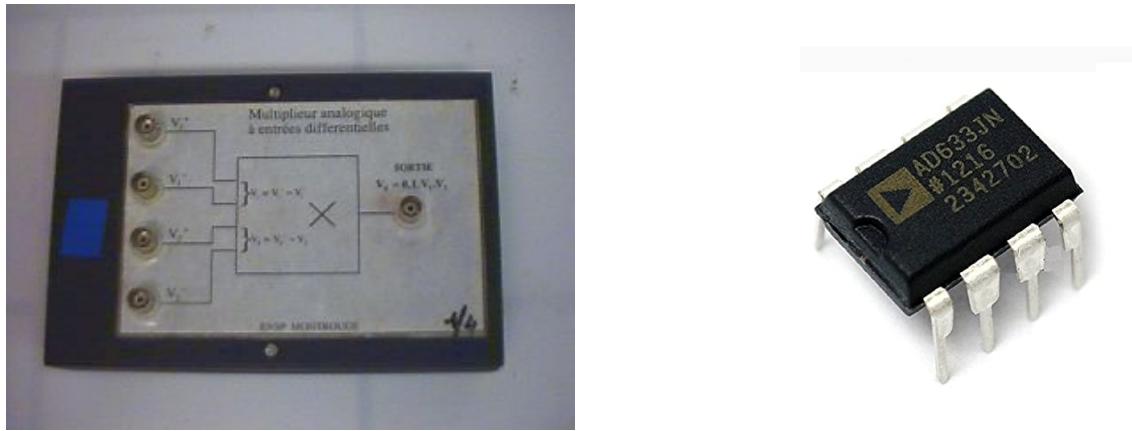


FIGURE 62 – Gauche : multiplicateur analogique en TP. Droite : multiplicateur analogique AD633JN AD633.

7.2.2 Modulation

La modulation d'amplitude conventionnelle est *appelée* modulation double bande à porteuse conservée (*DBPC*). Le signal $v_u(t)$ est injecté dans le multiplicateur additionné³³ d'une tension continue V_u :

$$v_s(t) = k A_p [V_u + v_u(t)] \cos(\omega_p t) = k A_p V_u [1 + m(t)] \cos(\omega_p t) \quad (7.4)$$

avec $m(t) = v_u(t)/V_u$. On introduit le signal modulant normalisé $m_n(t) = m(t)/\max|m(t)|$:

$$v_s(t) = k A_p V_u [1 + \mu m_n(t)] \cos(\omega_p t), \quad \mu = \frac{\max|v_u(t)|}{V_u} \quad (7.5)$$

où μ est *l'indice de modulation*. C'est donc le ratio entre l'amplitude maximum du signal utile et la tension continue qui lui est additionnée. Dans le cas particulier d'un signal $v_u(t)$ sinusoïdal de pulsation ω_u , on pose $v_u(t) = v_u \cos(\omega_u t)$, alors le signal de sortie du multiplicateur est :

$$v_s(t) = k A_p V_u [1 + \mu \cos(\omega_u t)] \cos(\omega_p t), \quad \mu = \frac{v_u}{V_u} \quad (7.6)$$

Dans la suite, afin de ne conserver que les termes qui jouent un rôle essentiel, on pose $k = 1 \text{ V}^{-1}$, $V_u = 1 \text{ V}$, $A_p = 1$ d'où

$$v_s(t) = [1 + \mu \cos(\omega_u t)] \cos(\omega_p t)$$

C'est l'équation d'une sinusoïde dont l'amplitude varie au rythme du signal utile (d'où le nom de modulation d'amplitude).

³³ Le calcul ci-dessous correspond au cas où la tension continue est additionnée avant la multiplication, on peut aussi imaginer inverser les opérations ce qui change marginalement les calculs.

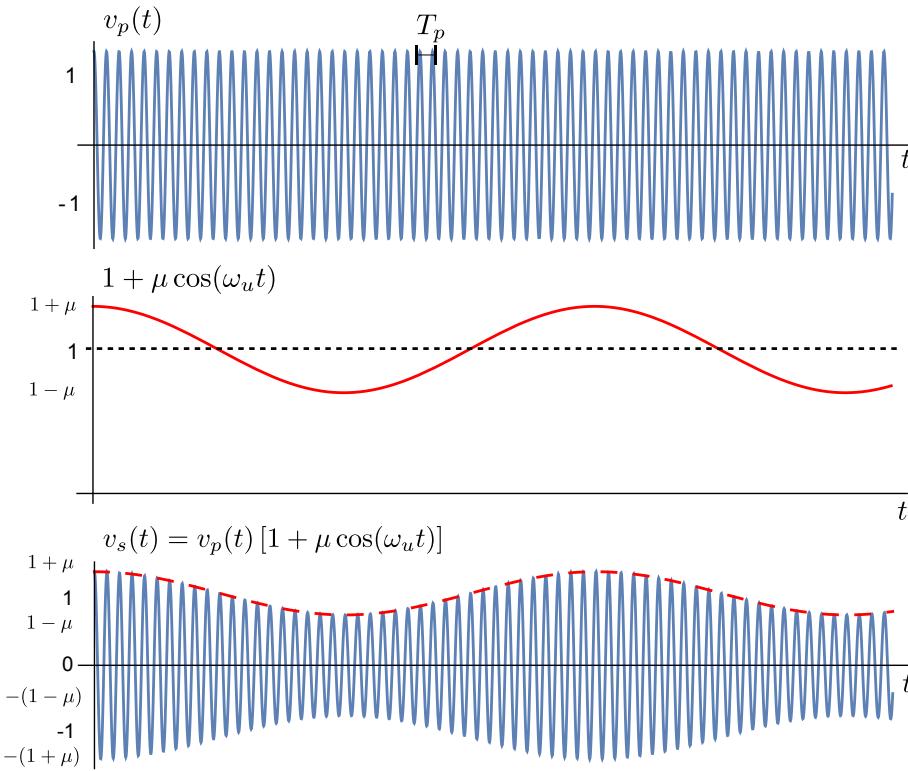


FIGURE 63 – Représentation de la modulation d'amplitude d'une porteuse sinusoïdale par un signal sinusoïdal additionné d'un offset.

Représentation dans le domaine temporel : la sortie $v_s(t)$ résultant d'une modulation d'amplitude DBPC est représentée figure 63. Sur le graphe du signal modulé on lit :

$$v_{s,\text{crête max}} = 1 + \mu, v_{s,\text{crête min}} = 1 - \mu \quad (7.7)$$

Définition 7.1. L'indice de modulation se mesure expérimentalement par :

$$\mu = \frac{v_{s,\text{crête max}} - v_{s,\text{crête min}}}{v_{s,\text{crête max}} + v_{s,\text{crête min}}} \quad (7.8)$$

Il se présente alors deux cas particuliers (figure 64). Dans le cas $\mu = 1$ (modulation à 100%), l'enveloppe du signal modulé s'annule avec une période $2\omega_u$. Dans le cas $\mu > 1$, on est en sur-modulation, ce qui pose des problèmes pour retrouver le signal modulant avec une détection de crête (voir section 7.2.3). Pour corriger cela on peut augmenter la tension continue V_u (en général on ne modifie pas le signal utile $v_u(t)$).

Représentation dans le domaine fréquentiel : la multiplication étant une opération non-linéaire, de nouvelles fréquences apparaissent dans le spectre du signal modulé. Dans le cas d'un signal modulant sinusoïdal, on a :

$$v_s(t) = [1 + \mu \cos(\omega_u t)] \cos(\omega_p t) = \cos(\omega_p t) + \frac{\mu}{2} \cos((\omega_p - \omega_u)t) + \frac{\mu}{2} \cos((\omega_p + \omega_u)t) \quad (7.9)$$

Le spectre est donc composé de trois raies au voisinage de ω_p .

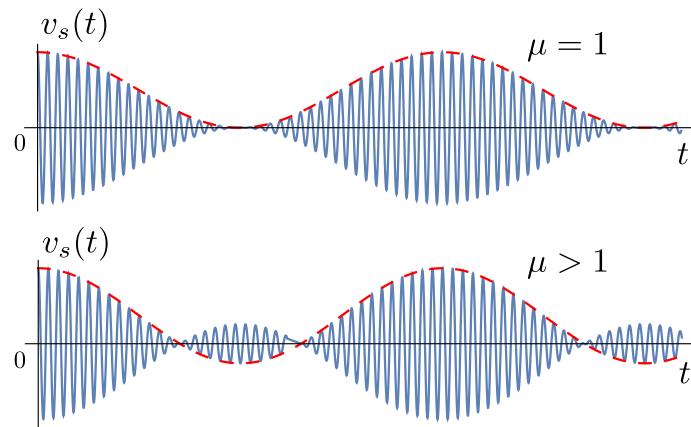
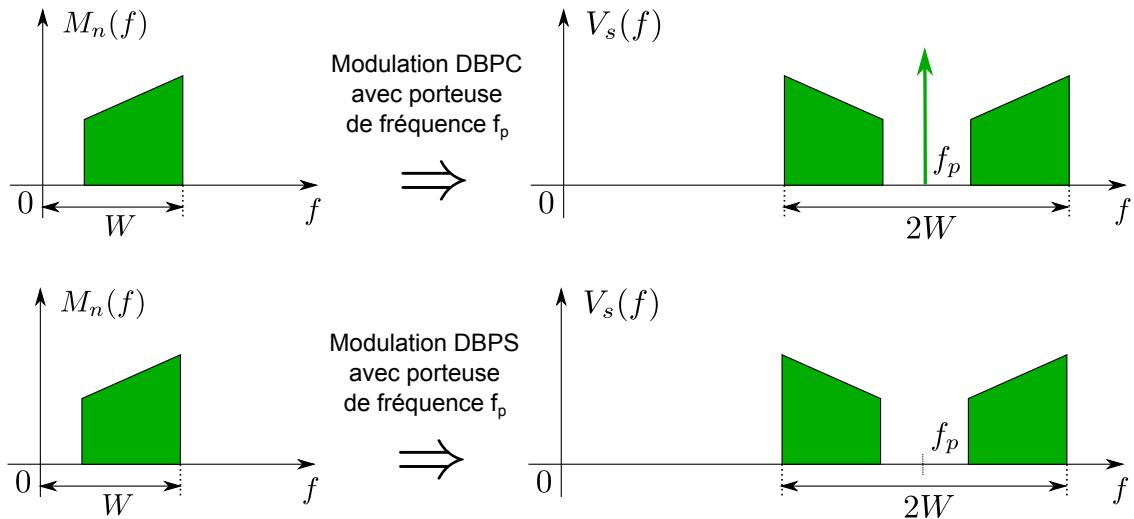
FIGURE 64 – Cas $\mu = 1$ (haut) et $\mu > 1$ (bas).

FIGURE 65 – Représentation fréquentielle de la modulation d'amplitude DBPC (haut) et DBPS (bas).

Dans le cas général d'un signal modulant quelconque, posons $M_n(f)$ le spectre associé au signal modulant normalisé $m_n(t)$. Le spectre du signal de sortie est alors représenté figure 65. On remarque donc qu'un canal doit être deux fois plus large que le spectre du signal à transmettre.

Autres types de modulation : dans une émission à modulation DBPC à $\mu < 1$, la porteuse concentre la majeure partie de l'énergie émise, et la largeur de canal occupé est deux fois plus large que le spectre du signal modulant. Or une seule bande latérale permettrait de restituer le signal modulant. On voit donc du point de vue de la puissance émise et de l'encombrement spectral du canal, la modulation DBPC n'est pas idéale.

La modulation *double bande à porteuse supprimée* (DBPS) est obtenue par simple multiplication du signal de la porteuse par le signal modulant :

$$v_s(t) = kA_p v_u(t) \cos(\omega_p t) \quad (7.10)$$

Ce cas correspond à une modulation DBPC pour $\mu \rightarrow \infty$. Dans le spectre du signal modulé la fréquence de la porteuse disparaît mais l'encombrement spectral est le même

(voir figure 65). L'avantage de la modulation DBPS permet de concentrer la puissance de l'antenne dans la transmission du spectre contenant le signal uniquement. L'inconvénient est que l'utilisateur à la réception doit se débrouiller pour reconstruire la porteuse pour démoduler correctement le signal (voir section 7.2.3). Pour éviter cela, on peut simplement atténuer la puissance contenue dans la fréquence porteuse, on parle alors de *modulation à porteuse atténée*.

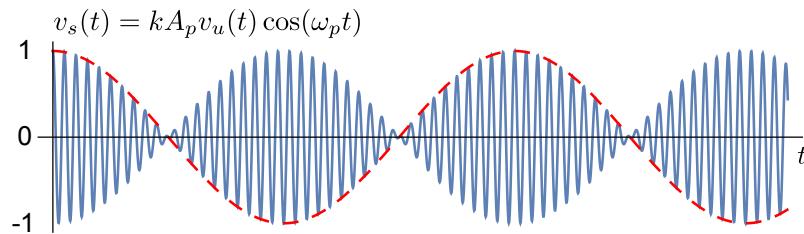


FIGURE 66 – Allure du signal émis en modulation d'amplitude à porteuse supprimée.

Pour réduire l'encombrement du canal, il est possible de supprimer un des deux côtés du spectre autour de la porteuse (elle-même supprimée), c'est ce qu'on appelle la modulation à bande latérale unique (BLU). On peut conserver soit la bande inférieure soit la bande supérieure. Cette technique est employée entre autres dans les communications marines ou de l'aviation : réduire l'encombrement spectral permet de définir plus de canaux et donc de communiquer avec plus de navires à la fois, un par canal.

7.2.3 Démodulation

L'opération pour ne récupérer que le signal de spectre $M_n(f)$ codé dans la porteuse est forcément non linéaire. Nous allons étudier deux méthodes réalisables en TP : la détection de crête et la détection synchrone.

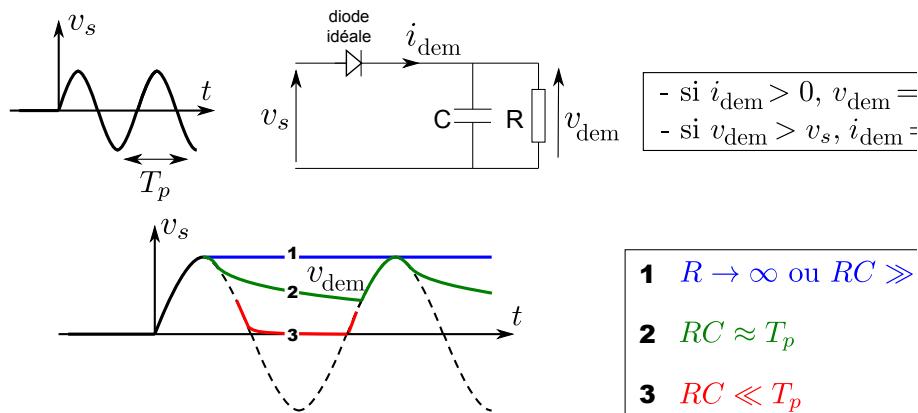


FIGURE 67 – Principe de la détection de crête.

Détection de crête : le circuit de détection est constitué simplement d'une diode et d'un filtre passe-bas RC parallèle (figure 67). Quand la tension $v_s - v_{\text{dem}}$ aux bornes de la diode est positive, la diode conduit et le condensateur se charge. Quand la tension $v_s - v_{\text{dem}}$ est négative, la diode se bloque, le condensateur se décharge dans la résistance. Lors de la charge de la capacité, comme la résistance présente dans la branche du condensateur est faible, celle-ci est beaucoup plus rapide que la décharge dans la résistance dans la branche

parallèle. Si la constante de temps du circuit résistance-condensateur est correctement choisie, sa tension reste à peu près constante entre deux crêtes de la porteuse.

La constante de temps du circuit doit être choisie de façon à ce que la fréquence de la porteuse soit filtrée tandis que la plus haute fréquence contenue dans le signal est conservée. Elle doit donc être choisie de façon intermédiaire entre T_p période de la porteuse et $T_{u,min}$ la période minimale du signal. Dans l'idéal on choisit $\tau = RC$ légèrement plus petit que T_p voire un ordre de grandeur en dessous.

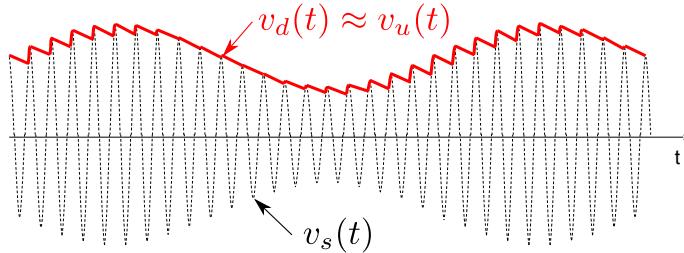


FIGURE 68 – Effet de la détection de crête sur une porteuse modulée par un signal sinusoïdal de période T_u .

Figure 68, on voit que le signal démodulé est voisin (à un offset près) du signal utile. En pratique, l'écart de fréquence entre v_u et v_p est beaucoup plus grand que sur la figure et l'ondulation résiduelle est négligeable. En revanche, on comprend en étudiant la figure 64 que l'opération de détection de crête ne permet pas de retrouver le signal utile en cas de surmodulation. Cependant, la détection synchrone le permet.

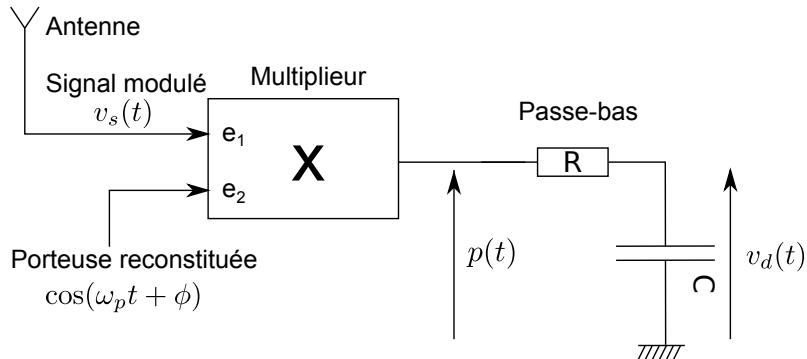


FIGURE 69 – Principe de la démodulation par détection synchrone.

Détection synchrone : dans le cas d'un signal modulé en amplitude avec porteuse supprimée on ne peut pas utiliser la détection d'enveloppe, ni dans les cas de surmodulation. La détection synchrone consiste à multiplier le signal modulé reçu par un signal de même fréquence et de même phase que la porteuse, le tout étant suivi d'un passe-bas (figure 69). Pour régénérer aussi exactement la porteuse, on peut utiliser une boucle à verrouillage de phase, mais la fréquence porteuse doit être présente dans le signal modulé, même atténuée (voir section 7.3.1). Si la fréquence porteuse est complètement absente du spectre reçu, il faut alors se débrouiller pour bien accorder un oscillateur local pour générer un signal de même fréquence que la porteuse, mais la réception est mauvaise (on entend des battements dans le cas de la radio) (voir encadré section 7.3.1).

Supposons maintenant que le signal de la porteuse est correctement reconstruit et notons le $v'_p(t) = \cos(\omega_p t + \varphi)$. Pour réaliser la détection synchrone ce signal est multiplié

par le signal modulé capté par l'antenne (et éventuellement amplifié avant). Le signal produit vaut :

$$p(t) = [1 + \mu m_n(t)] \cos(\omega_p t) \times \cos(\omega_p t + \varphi) = [1 + \mu m_n(t)] [\cos \varphi + \cos(2\omega_p t + \varphi)] \quad (7.11)$$

Par filtrage on élimine le signal de pulsation $2\omega_p$ et on ne garde que le signal démodulé :

$$v_{\text{dem}}(t) = [1 + \mu m_n(t)] \cos \varphi \quad (7.12)$$

et $v_{\text{dem}}(t)$ est bien l'image du signal utile $v_u(t)$.

En cas de non synchronisme de l'oscillateur local avec la porteuse du signal, on peut entendre des battements. De plus, il faut chercher à avoir $\varphi = 0$ ou π . Si le déphasage varie avec le temps ($\varphi \rightarrow \varphi(t)$), on parle de phénomène de "fading"³⁴.

7.3 Modulation et démodulation de fréquence

L'émission radiophonique par modulation de fréquence est apparue dans les années 1940, et utilise toujours aujourd'hui la gamme de fréquence située autour de 100 MHz. Cette technique permet une transmission du signal moins sensible aux parasites environnementaux et des largeurs de canaux plus importantes (ce qui permet de diffuser des émissions musicales avec une bonne qualité audio), mais est de plus courte portée.

7.3.1 La boucle à verrouillage de phase

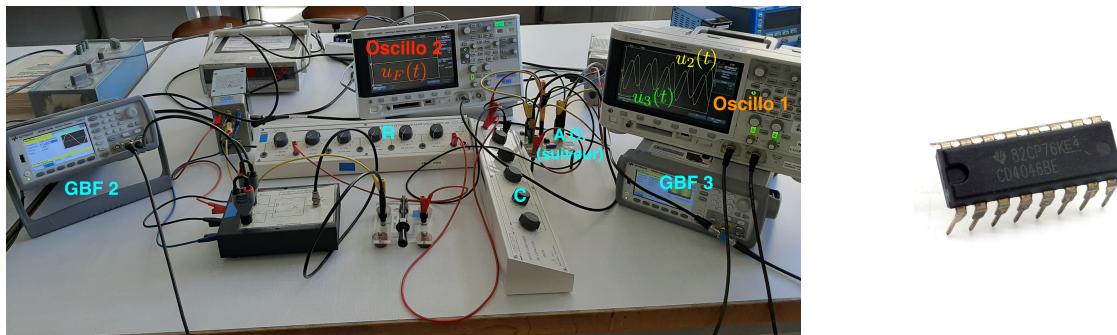


FIGURE 70 – *Gauche* : montage de la boucle à verrouillage de phase. *Droite* : circuit intégré CD4046BE Phase Locked Loop DIP-16 Texas 213ic085 (1.89€ seulement...).

La *boucle à verrouillage de phase* (phase locked loop = PLL) est un montage permettant d'asservir la phase instantanée d'un signal de sortie sur la phase instantanée d'un signal d'entrée. Par conséquent c'est aussi un système capable d'asservir la fréquence de sortie du système sur la fréquence d'entrée. Une fois synchronisé - on dit aussi verrouillé (locked) - l'écart en phase entre les deux signaux reste constant, d'où le nom de boucle à verrouillage de phase. La première PLL date de 1932. Elle a été réalisée par l'ingénieur français De Bellescize qui est donc considéré comme l'inventeur des "télécommunications cohérentes".

34. La phase peut varier à cause de perturbations météorologiques qui brouillent aléatoirement la phase du signal émis, ou des variations des paramètres physiques de la ionosphère. Si la radio est écoutée dans une voiture roulant dans un environnement plein d'obstacles (paysage, immeubles), alors le fading peut être dû au fait que l'utilisateur capte des signaux ayant emprunté des chemins différents et donc arrivant avec des phases différentes au récepteur. Pour un exemple audio : <https://www.youtube.com/watch?v=8NpZT4ZB3rU>.

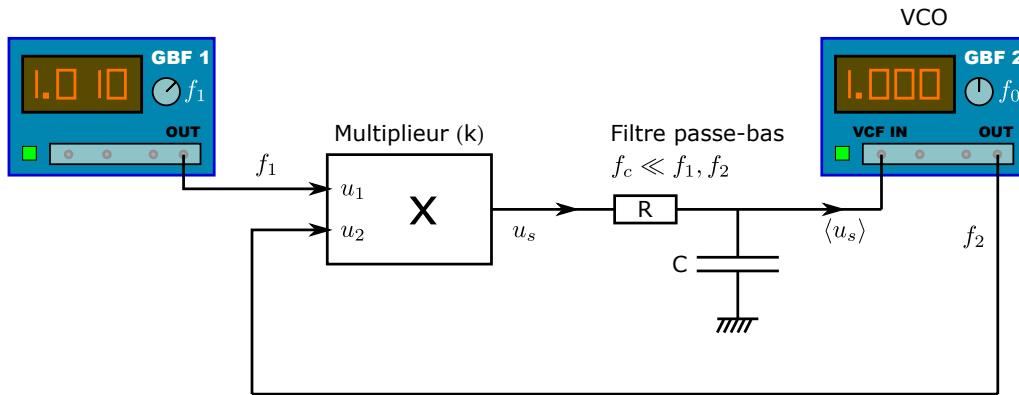


FIGURE 71 – Schéma bloc d'une boucle à verrouillage de phase analogique.

En 1965 est apparu le premier circuit intégré permettant de réaliser une boucle purement analogique ; dans les années 1970 on vit les premiers éléments dits numériques (comparateurs de phase) puis la PLL tout numérique ne contenant aucun composant passif du type condensateur ou résistance (voir Figure 70). Enfin, à l'âge des micro-contrôleurs et des processeurs de signaux il est possible de développer des PLL dites "software PLL". On trouve maintenant des boucles à verrouillage de phase dans des domaines innombrables : communications, asservissement de vitesse, optique...

Une boucle à verrouillage de phase est constituée :

- d'un *filtre passe-bas* de fréquence de coupure très inférieure aux fréquences des signaux mis en jeu
- d'un *oscillateur contrôlé en tension* (VCO)
- et d'un *comparateur de phase* qui renvoie un signal proportionnel au déphasage entre une entrée arbitraire et le VCO.

Dans une boucle de type analogique comme rencontrée en TP, le comparateur de phase est un multiplicateur. Le schéma bloc de la boucle est donné à la figure 71. Les fréquences sont ici des fonctions du temps (par exemple en modulation de fréquence on codera l'information d'un signal sur la fréquence de la porteuse).

On notera $u_1(t)$ le signal d'entrée de la boucle, de pulsation ω_1 et de phase $\varphi_1(t)$:

$$u_1(t) = U_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1(t)) \quad (7.13)$$

Le signal de sortie du VCO est noté de la même manière :

$$u_2(t) = U_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2(t)) \quad (7.14)$$

Comparateur de phase : le signal de sortie du comparateur de phase est noté $u_s(t)$. Dans le cas d'un multiplicateur, on obtient :

$$u_s(t) = \frac{k}{2} U_1 U_2 \{ \cos [(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2(t) - \varphi_1(t)] + \cos [(\omega_2 + \omega_1)t + \varphi_2(t) + \varphi_1(t)] \} \quad (7.15)$$

Filtre passe-bas : à la sortie du filtre, on récupère seulement la composante basse-fréquence. Dans le cas d'un filtre parfait, on a :

$$u_f(t) = K_f \cos [(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2(t) - \varphi_1(t)] \quad (7.16)$$

Oscillateur contrôlé en tension : un VCO délivre une tension de fréquence proportionnelle à une tension d'entrée (si le VCO est linéaire, ce qu'on supposera ici). La pulsation $\omega_2(t)$ du signal de sortie est donc définie par :

$$\omega_2(t) = \omega_0 + K_0 u_f(t) \quad (7.17)$$

où K_0 est le gain de l'oscillateur et ω_0 une fréquence centrale à choisir par l'utilisateur.

Fonctionnement de la boucle : l'asservissement de la boucle est non-linéaire, notamment à cause de la présence de seuils. L'explication théorique complète est donc délicate, on se contentera de quelques explications en admettant la présence du synchronisme.

Si la boucle est accrochée alors $\omega_2 = \omega_1$ et les pulsations ne varient plus dans le temps. Alors les pulsations vérifient d'après 7.17 :

$$\frac{\omega_2 - \omega_0}{K_0} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{K_0} = u_f(t) \quad (7.18)$$

Or dans ce cas on a aussi $u_f(t) = K_f \cos(\varphi_2(t) - \varphi_1(t))$ d'après 7.16 donc le déphasage entre les deux signaux est donné par :

$$\cos(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) = \frac{\omega_1 - \omega_0}{K_0 K_f} \quad (7.19)$$

Si la boucle est verrouillée, alors l'écart en phase entre le signal d'entrée et le signal de l'oscillateur est constant dans le temps : en cas de synchronisme $\omega_2 = \omega_1$ l'oscillateur est asservi en phase.

Dans le cas particulier où $\omega_1 = \omega_0 = \omega_2$, alors $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$ et $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$. Pour une faible variation $\delta\omega > 0$ de la fréquence d'entrée ω_1 autour de ce point de fonctionnement, un déphasage $\delta\varphi_e$ entre le signal d'entrée et le signal du VCO à l'entrée de la boucle. D'après 7.19, on a :

$$\omega_1 = \omega_0 + \delta\omega \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta\varphi_e\right) \approx \frac{\delta\omega}{K_0 K_f} \quad (7.20)$$

$$\Rightarrow \delta\varphi_e \approx -\frac{\delta\omega}{K_0 K_f} \quad (7.21)$$

car $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta\varphi_e\right) \approx -\delta\varphi_e$. La sortie du VCO crée donc un déphasage $\delta\varphi_e$ négatif entre les signaux et le comparateur de phase réagit donc avec une tension positive ($u_f \propto -\sin \delta\varphi_e$) qui va augmenter ω_2 pour rejoindre ω_1 : la boucle est donc stable et reste verrouillée sur la nouvelle pulsation ω_1 .

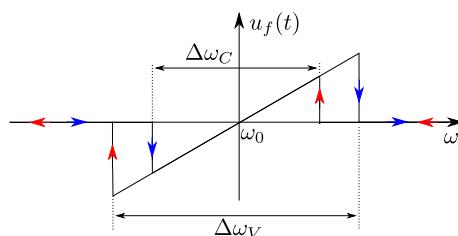


FIGURE 72 – Plages de capture et de verrouillage de la boucle à verrouillage de phase. Les flèches représentent les deux chemins par valeur de pulsation ascendante ou descendante qui illustrent la capture puis le verrouillage de la boucle.

On considère la boucle dans un état "non verrouillé". La *plage de capture* est l'intervalle de fréquences d'entrée pour lesquels le VCO est capable de se synchroniser sur le signal d'entrée. Au départ le VCO fonctionne à la fréquence ω_0 , et si la différence de fréquence $\omega_1 - \omega_0$ sort de la bande passante du filtre passe-bas, alors $u_f \approx 0$. Pour verrouiller la boucle, il faut donc régler ω_0 pour que l'écart $\omega_0 - \omega_1$ soit contenu dans la bande passante du filtre et obtenir une tension de commande du VCO $u_f(t)$ non nulle, et une rétroaction qui permet le synchronisme du VCO sur le signal d'entrée. Donc $\Delta\omega_C = 2 \times 2\pi B_F$ où B_F est la bande passante du filtre (en Hz).

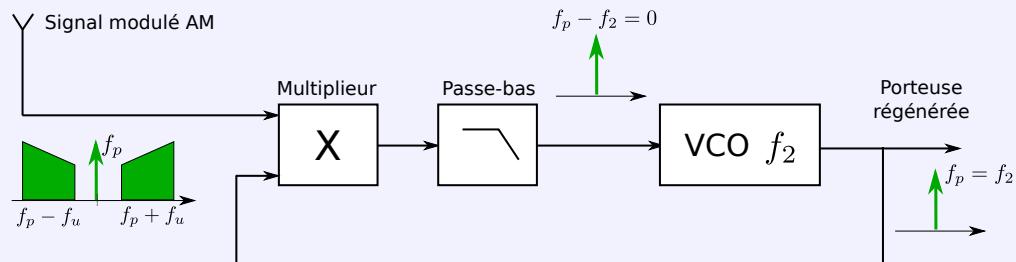
On considère maintenant que la boucle est dans l'état verrouillé. La *plage de verrouillage* est l'intervalle $\Delta\omega_V$ de fréquences du signal d'entrée (donc ω_1) à l'intérieur de laquelle on peut faire varier lentement la fréquence du signal d'entrée la boucle restant verrouillée (i.e. $\omega_2 = \omega_1$). L'excursion possible en ω_2 est donnée par le VCO : $\omega_2 \in [\omega_0 - K_0 K_f, \omega_0 + K_0 K_f]$ (car $u_{f,\max} = K_f$ et $u_{f,\min} = -K_f$). Donc $\Delta\omega_V = 2K_0 K_f$.

Logiquement, on doit avoir $\Delta\omega_C \leq \Delta\omega_V$. Les plages de capture et de verrouillage sont représentées figure 72.

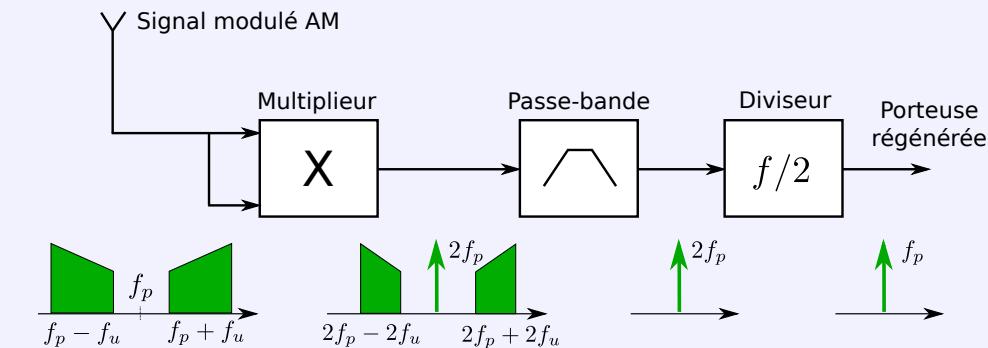
Important à savoir : la boucle à verrouillage de phase peut être utilisée dans un système de démodulation d'amplitude pour régénérer une porteuse de même fréquence et phase que le signal modulé, et ainsi permettre sa démodulation par détection synchrone.

Régénération de la porteuse en AM

Si le signal modulé en modulation AM est en porteuse conservée ou atténuee, alors à l'aide d'une boucle à verrouillage de phase on peut régénérer un signal de porteuse exactement de même fréquence que celle qui a été utilisée lors de la modulation. Mais cela nécessite que la fréquence de la porteuse soit assez isolée dans le spectre du signal modulé ou d'avoir un filtre suffisamment sélectif pour ne pas capter des fréquences venant du signal modulant.



Si le signal modulé est à porteuse supprimée, alors le signal capté par l'antenne est multiplié par lui-même, puis un filtre passe-bande en extrait le signal de fréquence $2f_p$. Un diviseur de fréquence (souvent numérique), permet ensuite de récupérer un signal de fréquence f_p exactement.



7.3.2 Modulation de fréquence

Pour moduler en fréquence une porteuse (amplitude $A_p = 1 \text{ V}$ et pulsation ω_p), il suffit d'utiliser un VCO. Pour un signal modulant sinusoïdal $v_u(t) = A_u \cos \omega_u t$, en sortie d'un VCO réglé sur la fréquence $f_0 = f_p$ on obtient un signal de fréquence :

$$f_s(t) = f_p + K_0 v_u \cos \omega_u t \quad (7.22)$$

On pose $\Delta f = K_0 v_u$ la *déviation de fréquence* (ou *excursion en fréquence*), on en déduit $f_s = f_p + \Delta f \cos \omega_u t$. Cette grandeur est facilement mesurable sur un oscilloscope en utilisant un mode de visualisation persistant et en identifiant la sinusoïde de fréquence la plus basse et celle de fréquence la plus haute à l'écran. Dans un système réel $\Delta f \ll f_p$.

Le signal de sortie du VCO peut s'écrire sous la forme :

$$v_s(t) = A_s \cos \varphi_s(t) \quad (7.23)$$

avec $\omega_s = d\varphi_s/dt$ la pulsation instantanée du signal. D'où :

$$\varphi_s(t) = \int \omega_s dt = \int (\omega_p + \Delta \omega \cos \omega_u t) = \omega_p t + \frac{\Delta \omega}{\omega_u} \sin \omega_u t \quad (7.24)$$

Définition 7.2. *Dans le cas d'une modulation de fréquence, l'indice de modulation est défini par :*

$$\boxed{\beta = \frac{\Delta f}{f_u}} \quad (7.25)$$

pour un signal modulant sinusoïdal. Pour un signal modulant quelconque de largeur spectrale b , il devient :

$$\boxed{\beta = \frac{\Delta f}{b}} \quad (7.26)$$

β comme Δf est donc proportionnel à l'amplitude du signal utile.

Spectre d'une modulation de fréquence : on pourrait croire que le domaine spectral occupé est compris entre $f_p - \Delta f$ et $f_p + \Delta f$, mais il ne faut pas confondre la fréquence instantanée du signal modulé qui appartient effectivement à cet intervalle, avec les fréquences des signaux sinusoïdaux permanents nécessaires pour reconstituer le signal modulé. Ainsi en modulation d'amplitude la fréquence du signal ne varie pas et pourtant il y a trois fréquences dans le spectre !

On part de $v_s(t) = A_s \cos(\omega_p t + \beta \sin \omega_u t) = \Re(\underline{v}_s(t))$ avec :

$$\underline{v}_s(t) = A_s e^{j\omega_p t} e^{j\beta \sin \omega_u t} \quad (7.27)$$

Or, on a la formule suivante :

$$e^{jx \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) e^{jn\theta} \quad (7.28)$$

avec $J_n(x)$ la fonction de Bessel d'ordre n . On retiendra que les fonctions de Bessel $J_n(1)$ sont les coefficients du développement en série de Fourier des fonctions $\cos(\sin \theta)$ et $\sin(\sin \theta)$.

On peut donc écrire :

$$\underline{v}_s(t) = A_s e^{j\omega_p t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_u t} = A_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{j(\omega_p + n\omega_u)t} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} v_s(t) &= \Re(\underline{v}_s(t)) = A_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_p + n\omega_u)t \\ &\propto J_0(\beta) \cos \omega_p t + J_1(\beta) \cos(\omega_p + \omega_u)t + J_{-1}(\beta) \cos(\omega_p - \omega_u)t + \\ &\quad J_2(\beta) \cos(\omega_p + 2\omega_u)t + J_{-2}(\beta) \cos(\omega_p - 2\omega_u)t + \dots \end{aligned} \quad (7.30)$$

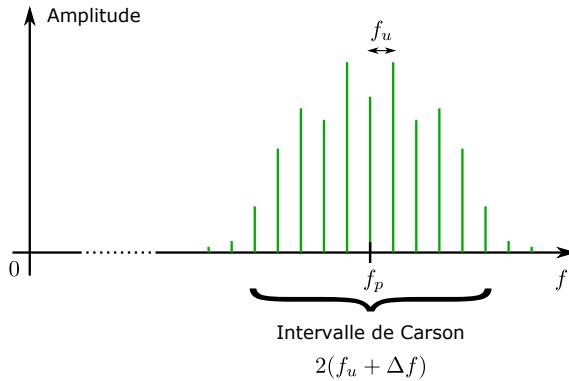


FIGURE 73 – Spectre d'un signal modulé en fréquence.

Seules deux propriétés des fonctions de Bessel serviront ici :

- $|J_{-n}(x)| = |J_n(x)|$ donc les raies spectrales sont symétriques autour de f_p
- $J_n \ll 1$ si n est assez grand d'où la règle de Carson donnée ci-après.

Le spectre d'un signal modulé en fréquence est représenté figure 73. Les fonctions $J_n(\beta)$ s'annulent régulièrement quand β varie et en particulier $J_0(\beta) = 0$ pour $\beta = 2.4, 5.52, \dots$: ces valeurs de β annulent la contribution de la porteuse dans le spectre du signal émis. On voit aussi que le spectre contient une infinité de raies, équidistantes, symétriques autour de la fréquence de la porteuse. L'occupation spectrale d'un signal modulé en fréquence dans un canal est donc infinie et plus importante que dans le cas d'une modulation d'amplitude. Comment donc garantir que chaque utilisateur n'empêtre pas (trop) sur le canal du voisin ?

Propriété 7.3. *On définit la règle de Carson (admise ici), qui énonce que 98% de l'énergie du signal modulé en fréquence par une sinusoïde se situe dans l'intervalle :*

$$f_p - (f_u + \Delta f) \leq f_p \leq f_p + (f_u + \Delta f) \quad (7.31)$$

Cette règle devient empirique pour un signal quelconque. La bande de Carson est donc de largeur $2(f_u + \Delta f)$ pour un signal sinusoïdal ou $2(\Delta f + b)$ pour un signal quelconque de largeur spectrale b .

La bande de Carson peut être retrouvée expérimentalement à l'oscilloscope en sommant la hauteur (au carré) des pics observés dans la transformée de Fourier du signal

modulé. En radio FM, les canaux sont espacés de 200 kHz et l'excursion en fréquence autorisée est donc au maximum de $\Delta f = 80$ kHz pour un signal utile de fréquence maximale $f_u = 20$ kHz. Pour y parvenir une chaîne de radio doit régler l'excursion en fréquence de son antenne via la relation $\Delta f = K_p v_u$ (donc régler K_p ou v_u de façon à obtenir $\Delta f < 80$ kHz). Ceci garantit une bonne cohabitation des stations de radio sur l'ensemble du spectre disponible.

7.3.3 Démodulation de fréquence

La démodulation de fréquence peut être réalisée par une boucle à verrouillage de phase. La fréquence centrale du VCO est réglée sur celle de la porteuse f_p . Une fois la boucle verrouillée, le VCO délivre un signal de fréquence $f_2(t) = f_p + K_p u_f(t)$ égale à la fréquence du signal d'entrée modulé en fréquence en amont par un autre VCO $f_1(t) = f_p + K'_p v_u(t)$ (on suppose que l'émetteur utilise un VCO de constante différente K'_p). On en déduit la forme du signal à la sortie du filtre passe-bas $u_f(t)$ en cas de synchronisme :

$$f_2(t) = f_1(t) \Leftrightarrow f_p + K_p u_f(t) = f_p + K'_p v_u(t) \Leftrightarrow u_f(t) = \frac{K'_p}{K_p} v_u(t) \quad (7.32)$$

La tension en sortie du filtre est donc l'image du signal modulant : l'utilisateur peut donc utiliser la sortie du filtre pour écouter la radio FM.

7.4 Suppléments sur les télécommunications modernes

Aujourd'hui, il faut être conscient que la radio est bien plus complexe que ce qui est présenté en TP, avec notamment la transmission de signaux stéréo (donc codage du signal "gauche" et "droit"), et surtout une transmission non plus analogique mais numérique.

7.4.1 Antennes radio

Quelques mots sur les antennes radio. La chaîne France Inter possédait jusqu'au 31 décembre 2016 une seule antenne pour émettre en grandes ondes (modulation d'amplitude à 162 kHz) située à Allouis dans le Cher (centre de la France). L'antenne est en réalité constituée de deux pylônes de 350 mètres (plus hauts que la Tour Eiffel) d'une puissance de 2000 kW, pour pouvoir émettre sur des milliers de kilomètres à travers l'Europe (figure 74). Avant la numérisation des appels téléphoniques, l'antenne créait de telles perturbations dans son environnement immédiat que les habitants des communes alentour pouvaient écouter France Inter sur leurs téléphones fixes.

Cet émetteur est aujourd'hui chargé uniquement de diffuser par radio en modulation de phase l'heure légale française définie par une horloge atomique située dans le bâtiment principal. Le signal émis présente l'avantage d'une meilleure réception à l'intérieur des bâtiments que d'autres, tels les signaux GPS ou les signaux de téléphonie mobile. L'établissement et la diffusion du temps légal français est sous la responsabilité du laboratoire LNE-SYRTE de l'observatoire de Paris, ainsi que son raccordement au temps universel géré par le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) (décret n°2017-292 du 06 mars 2017)³⁵. Avoir accès au temps légal français intéresse particulièrement les acteurs institutionnels (judiciaires, collectivités), bancaires (pour dater finement les transactions),

³⁵. Voir <https://www.observatoireparis.psl.eu/-heure-legale-francaise-.html> pour plus d'informations. Notons que depuis 2016 le LNE-SYRTE diffuse aussi le temps universel par un protocole internet (Network Time Protocol) qui permet de mettre à l'heure les horloges des systèmes informatiques mais ce temps n'a pas encore de valeur légal.

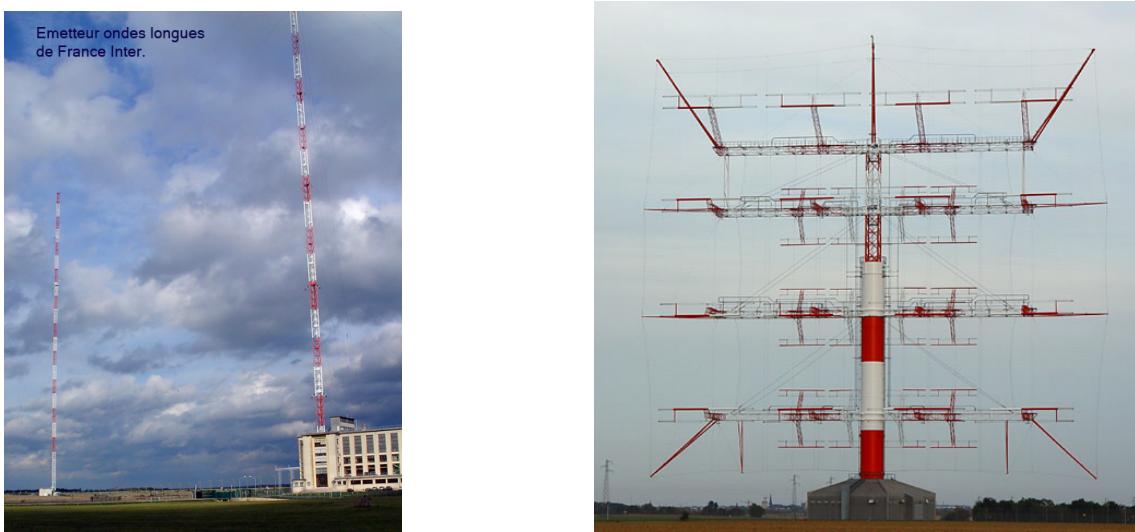


FIGURE 74 – *Gauche* : l’ancien émetteur de France Inter en ondes longues sur 162 kHz implanté à Allouis, constitué de deux pylônes de 350 m. *Droite* : antennes des émetteurs ondes courtes de 500 kW de Radio France International (RFI) à Ste Aoustrille près de Issoudun.

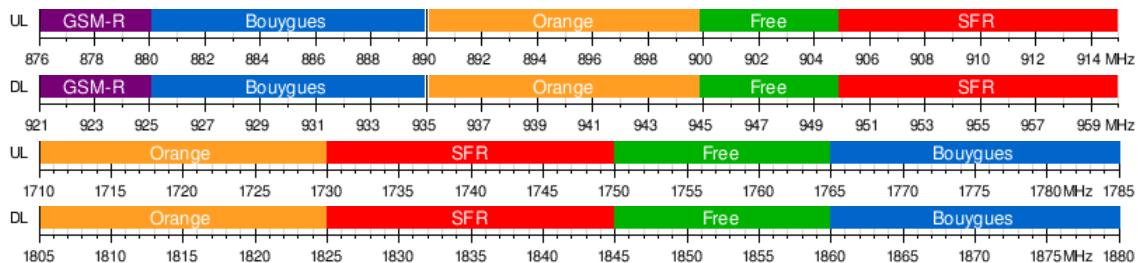


FIGURE 75 – Attribution des canaux de fréquence GSM en France en 2016 : les différents canaux sont répartis entre les 4 opérateurs téléphoniques et SNCF-Réseau (GSM-R), sur deux bandes centrées sur 900 MHz et 1800 MHz, elles-mêmes coupées en deux pour la réception (DL) et l’émission (UL) d’information (*source* : Wikipedia).

industriels (télécommunications ou EDF par exemple) (exactitude en temps l’ordre de la milli-seconde, stabilité en fréquence à 10^{-12})..

Autres antennes d’envergure : les antennes des émetteurs ondes courtes (≈ 10 MHz) de 500 kW de Radio France International (RFI) à Ste Aoustrille près de Issoudun (figure 74). Ces antennes Alliss sont directives et tournent sur elles-mêmes. Il y en a ainsi 12 depuis 1998, de près de 180 tonnes chacune, implantées sur plusieurs dizaines d’hectares. Une seule antenne mesure 80 m de hauteur, d’un poids de 180 tonnes, et occupe près de 3 hectares. Ce type d’antennes est implanté directement au-dessus de son émetteur de 500 kW, installé dans le “bloc bâtiment” supportant l’antenne. Elles portent toutes le nom d’un grand fleuve vers lequel elles sont le plus souvent dirigées (Danube, Volga, Gange, Mississippi,...).

Enfin, en modulation de fréquence la portée des antennes est beaucoup plus courte (environ 50 km) ce qui oblige une station à disposer de nombreuses antennes, sauf en milieu urbain où le jeu des réflexions sur les murs d’immeubles permet de mieux diffuser la radio aux utilisateurs³⁶. Mais pour éviter qu’un utilisateur ne capte deux ou trois antennes en

36. On rappelle qu’à $f \approx 100$ MHz, $\lambda \approx 3$ m donc les obstacles d’une dizaine ou centaine de mètres

même temps et entende des signaux décalés (voire qui interfèrent), des antennes voisines diffusent une même station à des fréquences différentes. Voilà pourquoi on constate que les fréquences de France Inter changent régulièrement entre départements.

7.4.2 Multiplexage

Selon le support de propagation de l'onde électromagnétique (air ou câble électrique), il existe différents moyens pour partager les informations codées sur une porteuse électromagnétique aux différents utilisateurs. Le multiplexage est une technique qui consiste à faire passer plusieurs informations à travers un seul support de transmission. Il existe deux techniques principales de multiplexage : temporelle et fréquentielle.

Le *multiplexage fréquentiel* consiste à partager le spectre électromagnétique de l'émetteur en différents canaux de fréquences. Chaque canal doit contenir la majeure partie (en puissance) du spectre de la porteuse modulée pour que le signal codé ne se retrouve pas dans les bandes voisines.

Le *multiplexage temporel* consiste à répartir le temps d'utilisation de la bande passante entre les différentes communications. Par exemple, en téléphonie fixe plusieurs utilisateurs peuvent être branchés sur un même câble et communiquer en même temps, mais un commutateur rapide répartit temporellement les signaux sur la ligne. Les trames d'une durée de 125 µs sont divisées en 32 intervalles de temps, donc un utilisateur reçoit 3.9 µs de conversation toutes les 125 µs³⁷. Le récepteur doit être synchronisé en phase avec le commutateur pour recevoir la bonne communication. On notera que dans cet exemple, le multiplexage temporel est possible car pour transmettre la voix il suffit de transmettre son mode fondamental pour que le discours reste intelligible. Le partage de la ligne se fait donc au détriment de la qualité de restitution de la voix (d'où une déformation de la voix des interlocuteurs au téléphone).

La norme GSM en téléphonie mobile utilise à la fois le multiplexage fréquentiel (les utilisateurs sont répartis dans différents canaux en fréquence larges de 200 kHz) et temporel (les utilisateurs d'un même canal n'utilisent qu'une fraction temporelle de l'antenne³⁸).

7.4.3 Récepteur superhétéodyne

Pour un type de transmission sur porteuse électromagnétique il existe de nombreux canaux adjacents qui doivent être décodés par le même appareil, et qu'il est pourtant nécessaire de bien séparer lors de la réception. Il serait difficile de construire des filtres très sélectifs en grand nombre dans un récepteur (un par canal), voire de faire un filtre accordable en fréquence sur une plage très large et présentant de très bonnes caractéristiques.

La technique dite superhétéodyne (abréviation de "supersonic-hétéodyne") consiste à mélanger le signal radio-fréquence de fréquence f_p à décoder avec le signal d'un oscillateur

influent beaucoup plus sur la propagation du signal FM que sur le signal AM, de longueur d'onde $\approx 3 \text{ km}$. De plus les ondes AM peuvent se réfléchir sur l'ionosphère terrestre, une couche de gaz ionisé en haute altitude de pulsation plasma $f_p \approx 10 \text{ MHz}$ (valeur qui varie dans la journée), ce qui augmente la portée des antennes AM par rapport aux antennes FM.

37. De plus à l'ère du numérique les signaux sont échantillonnés et codés sur 8 bits, ce qui fait une transmission à $32 \times 8 \times 1/(125 \mu\text{s}) = 2048 \text{ kbits/s}$.

38. Il y a 8 intervalles de temps alloués par trame de 4.6 ms à répartir entre 7 utilisateurs (un intervalle est réservé pour l'envoi de bits de contrôle). Dans chaque intervalle le téléphone envoie sur le canal montant et reçoit sur le canal descendant un paquet d'une centaine d'octet de voix numérisée et compressée. Pour transmettre et recevoir des données (images, internet...), le protocole et les antennes doivent être perfectionnées et c'est ce qui correspond aux normes EDGE, GPRS, 3G, 4G, etc...

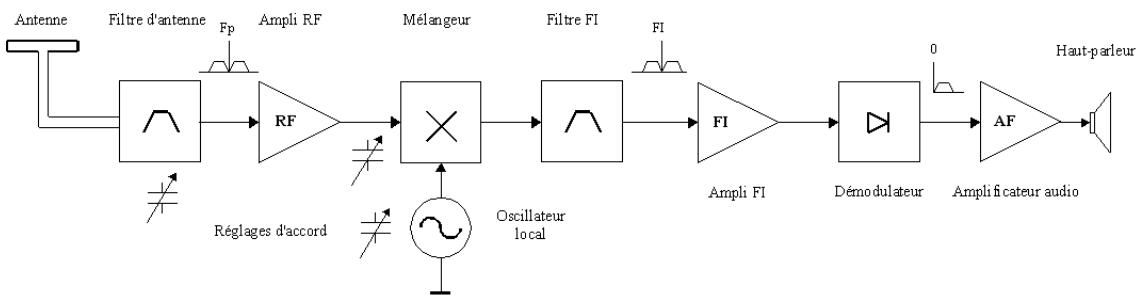


FIGURE 76 – Chaîne de réception superhétérodyne dans le cas de la radio (*source : Wikipedia*)

local f_{LO} . On obtient alors classiquement la somme et la différence des fréquences, cette dernière étant centrée sur la fréquence dite intermédiaire $f_I = |f_p - f_{LO}|$. On peut ensuite isoler le terme de la différence avec un filtre passe-bande centré sur la fréquence intermédiaire. Pour que le tout fonctionne, l'utilisateur modifie la fréquence f_{LO} de l'oscillateur local de façon à ce que la fréquence intermédiaire obtenue rentre dans la bande passante du filtre passe-bande. Pour réaliser le mélange de deux signaux sinusoïdaux, on peut utiliser un multiplicateur pour les basses fréquences, ou un mélangeur à diodes pour les plus hautes fréquences.

Selon les fréquences, l'oscillateur local peut être issu d'un simple oscillateur à quartz ou d'un processus numérique de synthèse de signaux (Direct Digital Synthesis) directement intégré dans une puce électronique. Ces derniers sont basés sur le principe du compteur numérique et de la conversion numérique analogique, et s'ils sont codés sur un nombre de bits élevés ils permettent à l'utilisateur d'avoir une incrémentation plus fine dans le choix des fréquences (voir une illustration du principe avec le convertisseur simple rample chapitre 8).

Le filtre intermédiaire est conçu autour des fréquences intermédiaires de 455 kHz (pour la modulation d'amplitude), 10.7 MHz (pour la modulation de fréquence en radio), ou 38.9 MHz (pour la télévision en Europe). Les fréquences intermédiaires sont le plus souvent contrôlées par les autorités de chaque pays (pour éviter que des bruits parasites ne soient émis à ces fréquences), et c'est pourquoi elles sont prédéterminées selon les usages. La réponse du filtre doit être suffisamment large pour contenir le spectre complet du signal à recevoir, et pour accepter les dérives de fréquence de l'émetteur et de l'oscillateur local du récepteur. A contrario, la réponse du filtre doit être suffisamment étroite pour rejeter convenablement les émissions adjacentes. On trouve dans le commerce de bons filtres très sélectifs à ces fréquences là, principalement à base de céramiques ayant une résonance à la fréquence considérée (voir Figure 77). Typiquement, la bande passante de ces filtres est de 80 kHz en FM et 10 kHz en AM.

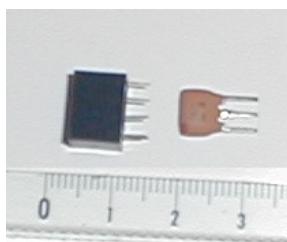


FIGURE 77 – Filtres céramique 455 kHz à six éléments (à gauche) et filtre céramique 10.7 MHz (à droite) (*source : Wikipedia*).

8 Electronique numérique

Dans une communication numérique, l'information est transmise à l'aide d'une suite d'éléments binaires, susceptibles de présenter deux états notés respectivement "0" et "1". L'idée n'est pas nouvelle si l'on considère que les premières transmissions électriques ont été faites en Morse, en codant le signal par un élément binaire pouvant prendre deux états : le point et le trait [20]. Les technologies numériques ont pris une importance considérable dans la société et dans les instruments qui nous équipent. Pourtant la science du numérique est encore relativement peu enseignée dans le supérieur, mais il faut noter son apparition récente dans quelques programmes de classe préparatoire.

L'électronique numérique à l'agrégation : des notions d'électronique numérique peuvent apparaître dans les épreuves suivantes :

- LP23 : Aspects analogique et numérique du traitement d'un signal. Étude spectrale.
- MP23 : Mise en forme, transport et détection de l'information.
- MP24 : Signal et bruit.

8.1 Signaux numériques

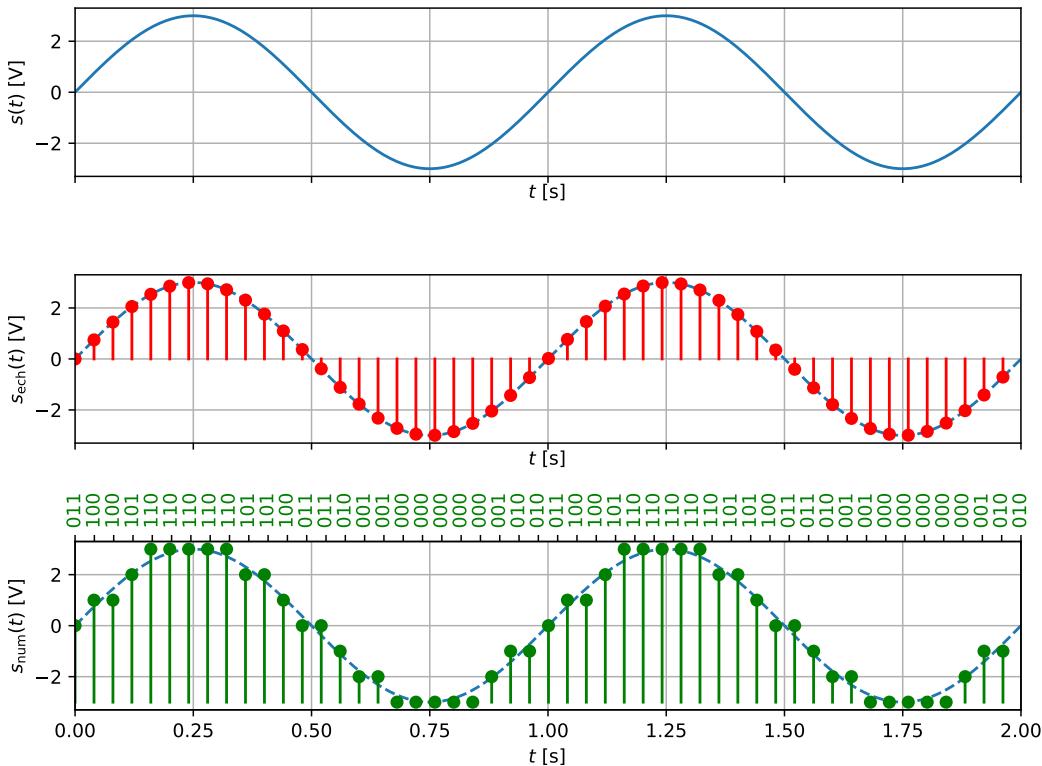


FIGURE 78 – Échantillonnage numérique d'un signal $s(t)$ sur 8 niveaux : le signal peut être représenté par une suite de 0 et de 1.

Un signal analogique est continu et par conséquent comporte mathématiquement une infinité de points. Dans un appareil numérique, l'image du signal analogique récupéré doit être stockée dans une mémoire. Pour ne stocker qu'un nombre fini de points, on va acquérir

les points du signal à numériser à des intervalles de temps régulier (échantillonnage) et sur une durée limitée (troncation).

L'opération d'échantillonnage et de numérisation du signal sous forme binaire est représentée figure 78. La construction d'un signal numérique à partir d'un signal analogique se décompose en trois opérations fondamentales :

- l'*échantillonnage* du signal avec une période régulière T_e ,
- la *quantification* du signal échantillonné sur un niveau discret,
- la *représentation* de chaque niveau par un élément binaire.

On conçoit que chaque étape laisse le champ libre à l'imagination. Nous n'envisagerons que les méthodes les plus immédiates.

Échantillonnage : le signal échantillonné $s_{\text{ech}}(t)$ est obtenu en prélevant sur le signal $s(t)$ une suite d'échantillons $s(0), s(T_e), s(2T_e)$, etc... à la fréquence $f_e = 1/T_e$. Cette opération peut être représentée par la multiplication du signal par un peigne de Dirac :

$$s_{\text{ech}}(t) = s(t) \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \quad (8.1)$$

Nous verrons plus loin que l'échantillonnage doit être réalisé à une fréquence f_e deux fois supérieures à la fréquence maximale contenue dans le signal pour être correcte.

Quantification : puis les valeurs prélevées doivent être numérisées. La plage de variations du signal $s(t)$ est découpée en S niveaux s_0, s_1, \dots, s_{S-1} . La résolution de la numérisation est donnée par $\Delta s = s_{j+1} - s_j$ (1 V sur la figure 78). Chaque valeur d'échantillon $s(t)\delta(t - kT_e)$ est alors arrondie au niveau s_j dont elle est le plus proche.

$$s(t = kT_e) \mapsto s_k = \min_j |s(t = kT_e) - s_j| \quad (8.2)$$

Le signal discréteisé peut *in fine* s'écrire sous la forme :

$$s_{\text{num}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \delta(t - kT_e) \quad (8.3)$$

sans considération sur la taille de la mémoire numérique pour stocker les nombres s_k .

Représentation binaire : dans une représentation décimale, un nombre entier positif n peut se décomposer en base 10 selon :

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j 10^j$$

ou en base 2 selon :

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} b_j 2^j$$

On pourrait généraliser cette écriture à tout nombre réel. Mais, dans le premier cas, les $\{a_j\}$ sont les 10 chiffres allant de 0 à 9, alors que dans le second ce sont les 2 seuls chiffres 0 ou 1. Coder électriquement un nombre dans une représentation décimale nécessiterait donc l'utilisation de 10 états différents et bien distinguables même si du bruit se superpose au signal, alors qu'une représentation à 2 états est plus simple et plus fiable.

Représentations binaire et décimale

Donnons quelques exemples de représentation en base 2. Pour un codage sur $N = 8$ bits, les nombres suivants s'écrivent :

- $1 = 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \Rightarrow 00000001$
- $42 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \Rightarrow 00101010$
- $128 = 1 \times 2^7 + 0 \Rightarrow 10000000$
- $255 = 255 = 1 \times 2^8 - 1 = \sum_{k=0}^7 2^k \Rightarrow 11111111$

Lors d'une numérisation binaire, le nombre de niveaux S doit être une puissance de 2. Comme de plus il doit être fini (pour des raisons de stockage en mémoire), il s'écrit sous la forme $S = 2^N$, où N est un entier. Chacun des $S = 2^N$ niveaux de quantification s_k se décompose en base 2 sous la forme :

$$s_j = \Delta s [b_0 2^0 + b_1 2^1 + \dots + b_{N-1} 2^{N-1}] \quad (8.4)$$

où les b_0, \dots, b_{N-1} peuvent prendre uniquement les valeurs 0 et 1. Un chiffre b_j est appelé bit et N est le nombre de bits sur lequel est numérisé le signal. L'ensemble des $\{b_j\}$ forme le nombre binaire correspondant à $s_j : b_{N-1}b_{N-2}\dots b_2b_1b_0$. Dans le cadre d'une transmission numérique, c'est donc cette séquence de 0 et de 1 que l'on doit transmettre pour signifier la valeur d'un échantillon.

Résolution d'un appareil numérique : la plage de quantification $S\Delta s$ du signal est fixée par l'appareil de mesure lors du choix du calibre (sur un multimètre ou un oscilloscope). Le pas de quantification Δs , donc la résolution, est d'autant meilleure que le nombre de bits N utilisé pour coder la valeur d'un échantillon est plus élevé. En effet si on choisit un calibre où la valeur maximale numérisable est c (par exemple 2 V, 20 V), calibre et résolution sont liés par :

$$\Delta s = \frac{c}{2^N} \quad (8.5)$$

C'est pourquoi en utilisant un oscilloscope numérique on agrandit au maximum la fenêtre de visualisation verticalement pour finement échantillonner le signal. De plus l'appareil sera d'autant plus précis (et cher) s'il code les tensions sur un nombre N élevé de bits.

Bruit de quantification : le passage du signal échantillonné $s_{\text{ech}}(t)$ au signal numérique $s_{\text{num}}(t)$ constitue une dégradation du signal, analogue à celle que produirait un bruit superposé au signal $s_{\text{ech}}(t)$. On l'appelle bruit de quantification $n(t)$. D'après la référence [20], on peut montrer que :

$$\langle n^2(t) \rangle = \frac{\Delta s^2}{12} \quad (8.6)$$

On remarque là encore l'intérêt d'augmenter le nombre de bits utilisés pour coder la valeur d'un échantillon. Mais le choix du nombre de bits utilisé doit être un compromis entre le nombre de valeurs nécessaires, la mémoire disponible et la vitesse de calcul ou d'acquisition.

Ordres de grandeurs

- Codage en 8 bits (1 octet) : le chiffre maximal 11111111 vaut $2^8 - 1 = 255$.
- Échelles de couleurs 8 bits dans la numérisation des images : $(2^8)^3 = 16$ millions de couleurs sont accessibles en codant chaque couleur R, V et B sur 8 bits (sur un vieux PC).
- Pour les transmissions téléphoniques, on utilise un codage sur 8 bits (256 niveaux).
- Les oscilloscopes Agilent InfiniiVision enregistrent jusqu'à $2^{16} = 65536$ points, et le nombre de bits pour l'échantillonnage vertical varie entre 8 et 12 selon la vitesse d'acquisition du signal.

8.2 Acquisition et numérisation de signaux électriques

8.2.1 Diviseur de fréquence par 2^N

Un diviseur de fréquence par 2, 4, 8 ou plus généralement 2^N est basé sur un élément logique implanté sous forme de puce électronique appelé *bascule* (ou "flip-flop"). Il s'agit d'un composant électronique à base de transistors dont la ou les sorties passent d'une valeur logique à une autre (0 V ou 5 V) selon l'état logique des entrées, qui peuvent être de différentes types (type D, T, JK,...). Une bascule est définie par sa table de vérité définissant ses états de sortie en fonction de l'état de ses entrées. C'est ainsi que, par exemple, certaines bascules réalisent des fonctions logiques du type XOR (ou-exclusif), NON-OU, NON-ET, etc. Ce qui distingue une bascule logique d'une simple porte est qu'elle garde en mémoire son dernier état : ce sont donc des composants très importants pour le calcul séquentiel et la mémoire informatique.

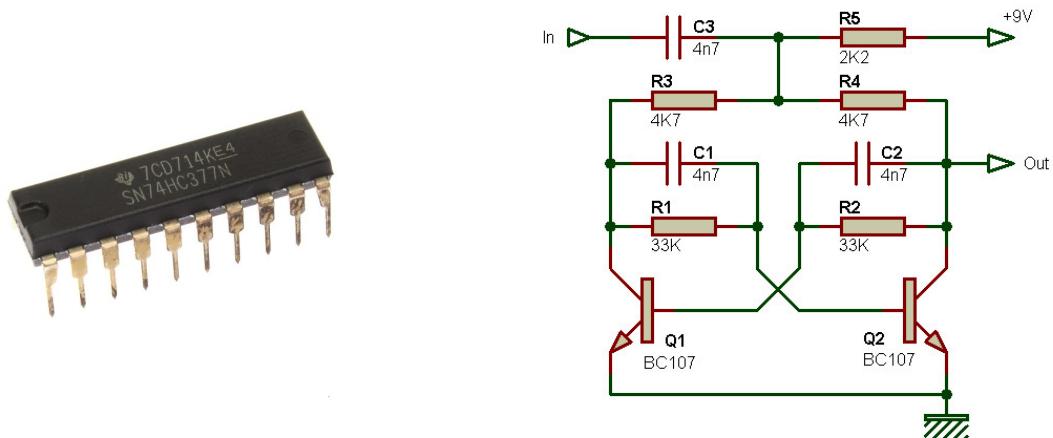


FIGURE 79 – *Gauche* : composant SN74HC377N réalisant une bascule de type D. *Droite* : montage à transistors pour réaliser un diviseur de fréquence par 2 équivalent à ce qui peut être présent dans le composant SN74HC377N une fois branché en diviseur de fréquence (*Source* : https://www.sonelec-musique.com/electronique_bases_diviseurs_frequence.html).

Une bascule de type D ou autre peut être branchée de telle manière à obtenir un composant à une seule entrée $e(t)$ et une seule sortie $s(t)$, dont l'état de la sortie bascule

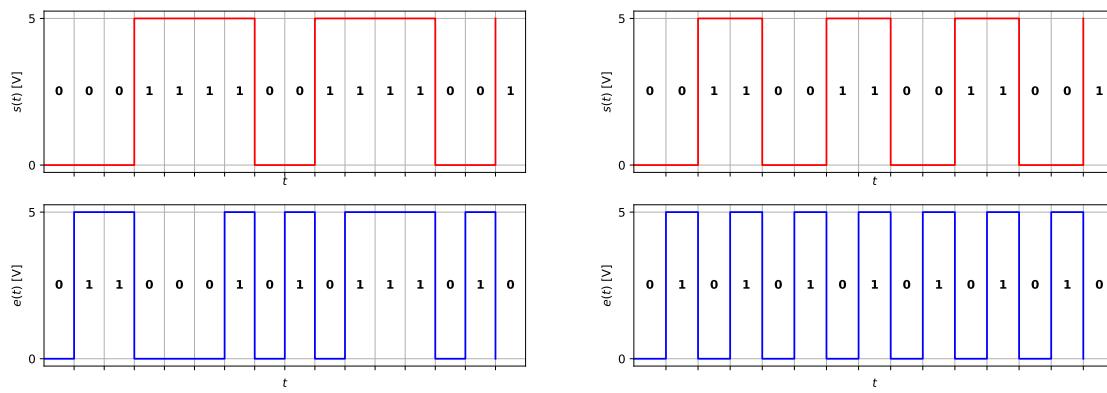


FIGURE 80 – *Gauche* : fonctionnement d'une bascule logique sur front descendant. *Droite* : application au diviseur de fréquence par 2.

dès que l'état de l'entrée change (voir figure 79). Elle peut fonctionner sur front montant, front descendant, ou les deux (voir figure 80 gauche).

En pratique, si on fournit à une bascule comme signal d'entrée $e(t)$ un signal d'horloge TTL, la sortie sera également un signal d'horloge mais à une fréquence 2 fois plus faible. Il se comporte en diviseur de fréquence par 2 (figure 80 droite). Mis en série, on peut obtenir un diviseur de fréquence par 2^N .

8.2.2 Compteur numérique

En utilisant plusieurs diviseurs de fréquence en série, on peut parvenir à réaliser un compteur binaire tel que représenté figure 81. Ainsi, au cours du temps, l'état de chaque voie de sortie peut être considéré comme un bit, valant 0 ou 1, et l'ensemble forme un nombre binaire. Ce nombre augmente de 1 toutes les deux périodes d'horloge : on obtient un compteur numérique en base 2. C'est exactement comme des enfants qui comptent lorsqu'ils jouent à cache-cache sauf que la période entre deux nombres est fixée par la période du signal d'horloge et les nombres sont exprimés en binaires.

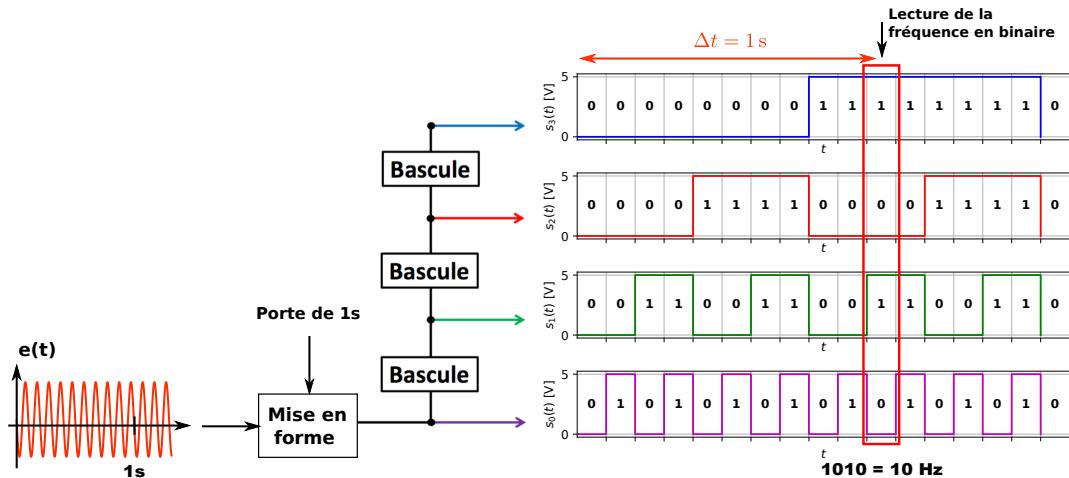


FIGURE 81 – Principe du compteur numérique, utilisé en fréquencemètre numérique avec $N = 4$ bits.

8.2.3 Application au fréquencemètre numérique

Maintenant on voit directement comment réaliser un fréquencemètre numérique simple. Le signal à mesurer de fréquence f est injecté dans un dispositif qui le met sous la forme d'un signal d'horloge. Puis les bascules comptent tous les fronts descendants pendant un temps $\Delta t = 1\text{ s}$ imposé par une horloge extérieure de fréquence $F = 1/(2\Delta t)$. On mesure ainsi un nombre n de fronts descendants, donc un nombre de périodes, sur une seconde : ce nombre n est directement la fréquence du signal. Plus généralement on a :

$$\Delta t \approx nT \Rightarrow f_{\text{mes}} = \frac{n}{\Delta t} \approx \frac{1}{T} \quad (8.7)$$

avec T la période du signal à mesurer et f_{mes} la fréquence mesurée.

Étudions maintenant sa précision. Comme Δt ne peut pas être un multiple exact de la période du signal à mesurer, on a une erreur sur le nombre n de fronts descendants de ± 1 donc :

$$(n - 1)T \leq \Delta t \leq (n + 1)T \Rightarrow -\frac{1}{\Delta t} \leq f - f_{\text{mes}} \leq \frac{1}{\Delta t} \quad (8.8)$$

La précision δf du fréquencemètre est donnée par :

$$\delta f = \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\delta f}{f} \approx \frac{\delta f}{f_{\text{mes}}} = \frac{1}{n} \quad (8.9)$$

avec n le nombre de périodes comptées.

Pour un fréquencemètre codant sur N bits, la fréquence maximale mesurable est $f_{\text{max}} = 2^N/\Delta t$. Pour atteindre des hautes fréquences il faut donc soit diminuer Δt , au détriment de la précision, soit augmenter N . Diminuer Δt augmente aussi la rapidité d'acquisition.

Pour mesurer des basses fréquences, ce système a une précision très faible. Il faut alors inverser les entrées du signal d'horloge externe et du signal à mesurer sur le fréquencemètre et le faire fonctionner en périodemètre. La fréquence mesurée correspond alors au nombre n de périodes de l'horloge de fréquence F pendant une demie-période $T/2$ du signal mis en forme (donc pendant que le signal d'horloge vaut 1). La période mesurée est donc :

$$\frac{T}{2} \approx \frac{n}{F}, \quad T_{\text{mes}} = \frac{2n}{F} \quad (8.10)$$

et sa précision est :

$$(n - 1)\frac{1}{F} \leq \frac{T}{2} \leq (n + 1)\frac{1}{F} \Leftrightarrow -\frac{2}{F} \leq T - T_{\text{mes}} \leq \frac{2}{F} \quad (8.11)$$

$$\delta T = \frac{2}{F} \Rightarrow \frac{\delta T}{T} \approx \frac{\delta T}{T_{\text{mes}}} = \frac{1}{n} \quad (8.12)$$

8.2.4 Convertisseur numérique-analogique (CNA)

Comme son nom l'indique un convertisseur CNA a pour rôle de transformer un signal numérique en un signal analogique. Il existe plusieurs façons d'y parvenir.

CNA à réseau de pondération en tension : ce convertisseur est représenté figure 82 : il est composé d'un AO précédé de N résistances en parallèle. Le CNA étudié en TP repose sur ce principe.

Soit un nombre binaire quelconque constitué par une série de chiffres $\{b_j\}$, $b_j \in \{0, 1\}$. Les valeurs des $\{b_j\}$ vont servir à commander des interrupteurs, avec la valeur 1 correspondant à un interrupteur fermé et 0 un interrupteur ouvert. D'après la loi des nœuds, le courant au point A vaut :

$$i = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{b_j E}{R_j} \quad (8.13)$$

avec $R_j = R/2^{j-1}$ la résistance alimentée par l'interrupteur j . D'où la tension en sortie de l'AO :

$$v_s = -\frac{ER'}{R} \sum_{j=0}^{N-1} 2^j \times b_j \quad (8.14)$$

On a donc converti un nombre binaire en une valeur décimale (une tension) analogique. Le nombre N correspond au nombre de bits du convertisseur.

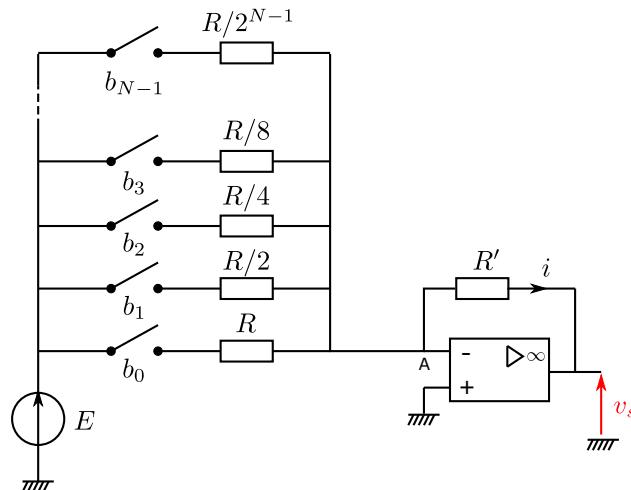


FIGURE 82 – Convertisseur numérique-analogique à réseau de pondération en tension.

Remarques :

1. En pratique, on considérera des tensions d'entrée de 5 V car la plupart des composants logiques fonctionnent avec un codage binaire 0 V / 5 V.
2. Par construction, la tension v_s est comprise entre 0 V et $-2^N ER'/R$. Il y a donc une plage finie de valeurs accessibles à un circuit donné. Or, le nombre de valeurs finales est lié au nombre de valeurs binaires initiales, soit 2^N pour un codage sur N bits. De plus, la discrétisation des valeurs finales est de $\Delta v_s = ER'/R$.
3. Ce montage est simple, et l'AO est utilisé comme un convertisseur tension-courant (d'impédance de sortie quasi nulle) suivant un montage simple d'additionneur de courants. Par contre, la valeur de la résistance totale du circuit varie fortement selon les valeurs numériques à convertir. Par exemple, pour un convertisseur de 10 bits, la valeur de la résistance totale varie d'un facteur 1024 ! Ainsi ce montage bien que simple à l'inconvénient d'avoir une impédance d'entrée qui varie beaucoup. On lui préfère en pratique des montages dit en « $R - 2R$ » [27].

CNA à réseau $R - 2R$: dans ce montage il n'y a que des résistances de valeurs R et $2R$. Il fonctionne sur le principe d'un diviseur de courant. L'avantage de ce réseau est que son impédance est constante et égale à R tout au long du réseau. En effet la

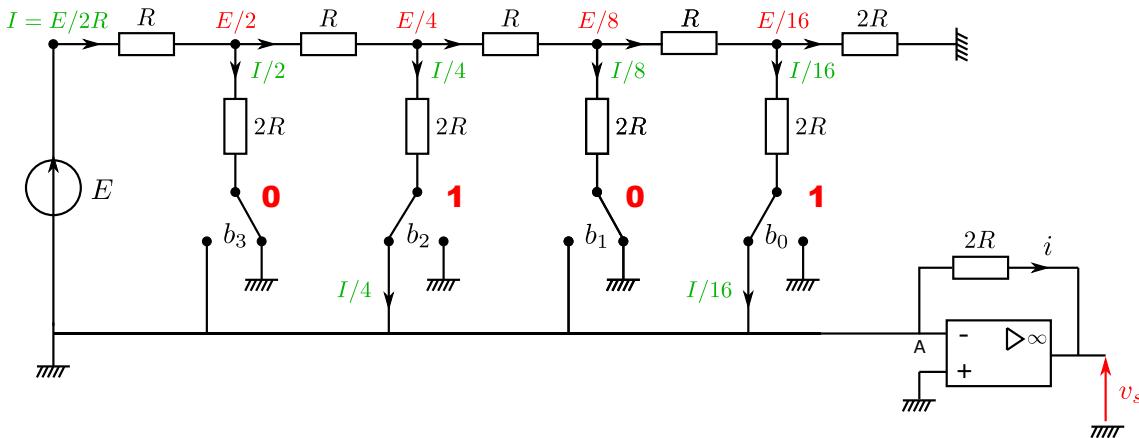


FIGURE 83 – Convertisseur numérique-analogique $N = 4$ bits à réseau $R - 2R$, codant le nombre 0101.

résistance équivalente vue depuis E vaut toujours R car deux résistances $2R$ en parallèle sont équivalentes à une résistance R , laquelle est en série avec une résistance R donc formant un résistance $2R$, et ainsi de suite... Par conséquent, à chaque nœud le courant est divisé en deux parts égales car chaque branche a une résistance équivalente valant $2R$.

D'après la figure 83, la tension en sortie de l'AO vaut :

$$v_s = -2Ri = -2 \sum_{j=0}^{N-1} b_j \frac{RI}{2^{N-j}} = -E \sum_{j=0}^{N-1} \frac{b_j}{2^{N-j}} = -2^{-N} E \sum_{j=0}^{N-1} 2^j \times b_j \quad (8.15)$$

d'après la loi des noeuds. La tension U_s est donc l'image directe sous forme analogique du nombre binaire à convertir.

Autres CNA : il existe bien d'autres technologies de CNA :

- CNA par pondération de courant (à base de transistors) ;
- CNA par pondération de tension à courants constants ;
- CNA par pondération de capacités ;
- CNA par pondération de capacités en réseau $C - 2C$;
- etc...

Pour une revue détaillé des CNA et CAN, voir les références [23, 22].

8.2.5 Convertisseur analogique-numérique (CAN)

Les convertisseurs analogique-numérique se rencontre au sein de nombreux appareils de mesures tels que les multimètres ou les oscilloscopes numériques. Nous allons détaillé le fonctionnement d'un CAN simple constitué d'un convertisseur simple rampe, d'un CNA et d'un comparateur.

Principe du convertisseur simple rampe : une horloge extérieure alimente un compteur binaire engendrant un comptage binaire à la fréquence $1/T$ de l'horloge. La durée de la rampe est liée à la fréquence de l'horloge et à N selon :

$$T_{\text{rampe}} = 2^N T \quad (8.16)$$

Les tensions binaires en sortie du compteur numérique ouvrent ou ferment les interrupteurs du CNA. Le chiffre binaire est ainsi converti en tension analogique par le CNA. On synthétise donc en sortie une rampe de tension numérique de 0 à v_{\max} de durée $2^N T$ avec N le nombre de bits du CNA. La tension v_{\max} dépend du convertisseur et est donc réglable. Le pas de discréétisation Δv de la rampe générée et lié aux paramètres du CNA est :

$$\Delta v = \frac{v_{\max}}{2^N - 1} \approx \frac{v_{\max}}{2^N} \quad (8.17)$$

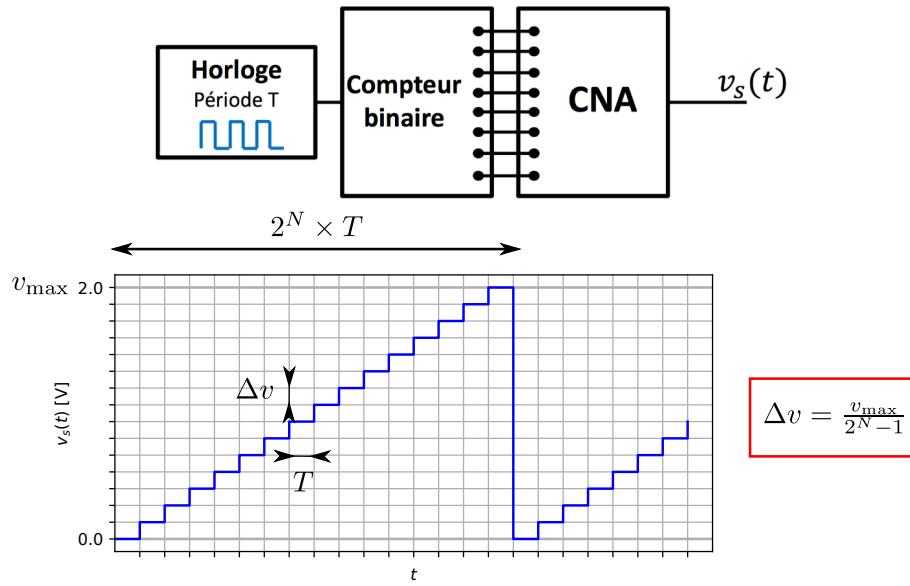


FIGURE 84 – Principe du convertisseur simple rampe.

Convertisseur analogie-numérique : le principe de base du convertisseur analogie-numérique simple rampe consiste à utiliser un compteur binaire pour créer une rampe de tension, puis comparer la tension de la rampe à la tension U_0 que l'on veut mesurer, et enfin relever la valeur numérique de la tension la plus proche de U_0 . Ce principe est schématisé figure 85. Un comparateur à AO simple peut être utilisé : celui-ci bascule à sa tension de saturation négative dès que la tension délivrée par la rampe est supérieure à U_0 .

La tension numérisée U_{mes} peut être lue directement sur le compteur binaire ou calculée via une *conversion temps-tension*. La mesure de Δt , durée pendant laquelle la tension U_0 est supérieure à celle de la rampe, permet de remonter à U_0 par une simple règle de trois :

$$U_{\text{mes}} = v_{\max} \frac{\Delta t}{T_{\text{rampe}}} = \frac{v_{\max}}{2^N} \frac{\Delta t}{T} \approx U_0 \quad (8.18)$$

La résolution en tension d'un tel convertisseur est due à la discréétisation de la rampe. La valeur de basculement est résolue à $\Delta v = v_{\max}/2^N$ près. Donc plus le nombre de bits est élevé, meilleur est la résolution en tension. De plus, plus la valeur de v_{\max} est élevée, moins bonne est la résolution. Or cette tension est réglable et en pratique correspond au calibre de l'appareil. Il est important donc de choisir le calibre adapté à la tension que l'on veut analyser pour bénéficier de la meilleure résolution.

La performance du CAN dépend aussi de l'horloge. La fréquence de l'horloge va fixer la vitesse d'échantillonnage du CAN. Sauf que plus le nombre de bits est élevé, plus

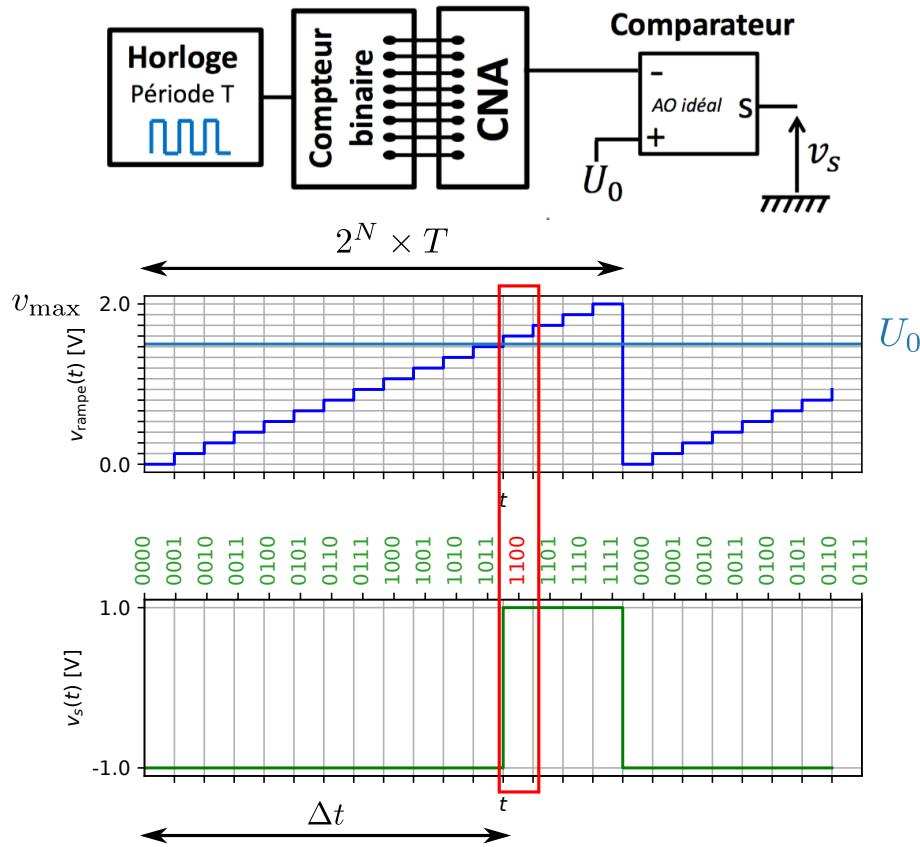


FIGURE 85 – Convertisseur analogique-numérique réalisé à partir d'un convertisseur simple rampe. Dans cette illustration $N = 4$ bits et le calibre est $v_{\max} = 2 \text{ V}$. Pour une tension à convertir $U_0 = 1.5 \text{ V}$, le CAN renvoie 1100 ce qui correspond à $U_{\text{mes}} = \Delta v(2^3 + 2^2) \approx 1.6 \text{ V}$.

il faut du temps pour réaliser la rampe. Ainsi précision et rapidité de conversion sont contradictoires³⁹.

La plupart des multimètres numériques donnent une incertitude de lecture comme une valeur constante uniquement dépendante du calibre et une valeur proportionnelle à la valeur mesurée. On propose ici une interprétation simpliste :

- si la pente de la rampe de tension α est mal calibrée (erreur de l'horloge ou de v_{\max}), alors le temps mesuré Δt est affecté d'une erreur : $\delta(\Delta t)/\Delta t = \delta\alpha/\alpha$. Or, la tension mesurée est $U_0 \approx U_{\text{mes}} \propto \Delta t$. Donc l'erreur commise sur U_{mes} est proportionnelle à la valeur mesurée.
- si le comparateur a un défaut (par exemple l'offset de l'AO est mal compensé), la mesure sera affectée d'un décalage constant, indépendant de la valeur mesurée. Donc l'erreur commise sur U_{mes} est indépendante de la valeur mesurée.

Si on perfectionne le montage de la figure 83, alors le basculement de la tension de sortie v_s de l'AO peut servir à déclencher la lecture du nombre binaire issu du compteur qui a généré le basculement et représentant U_0 . Notons que dans ce cours, seul le principe de base du CAN a été présenté. Les CAN réels sont bien plus complexes afin d'augmenter les performances (rapidité, précision de la mesure en temps). Un modèle plus élaboré est présenté dans la référence [27] (CAN double rampe).

39. Il existe ainsi sur les multimètres modernes un mode fast, medium ou slow pour pouvoir réaliser des mesures rapides moins précises, ou précises mais lentes.

8.3 Analyse spectrale d'un signal numérique

8.3.1 Notion de spectre

Soit un signal $s(t)$ dépendant du temps. On définit sa transformée de Fourier $\hat{s}(f)$ en terme de fréquence par :

$$\boxed{\hat{s}(f) = \mathcal{F}(s(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2j\pi f t} dt} \quad (8.19)$$

et sa transformée inverse par :

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{s}(f)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(f) e^{2j\pi f t} df \quad (8.20)$$

Le *spectre d'un signal* est la donnée de sa transformée de Fourier $\hat{s}(f)$, qui est un nombre *a priori* complexe. En général on se contente de ne représenter graphiquement que la norme du spectre, mais celle-ci ne contient que la moitié de l'information stockée dans la transformée de Fourier (l'autre moitié étant contenue dans la phase).

La série de Fourier est quant à elle adaptée à l'étude des *signaux périodiques*. Un signal périodique de période T peut se décomposer en série de Fourier selon :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{s}_n e^{2j\pi \frac{nt}{T}} \quad (8.21)$$

avec les coefficients de Fourier \hat{s}_n qui se calculent par :

$$\boxed{\hat{s}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-2j\pi \frac{nt}{T}} dt} \quad (8.22)$$

8.3.2 Transformée de Fourier d'un signal échantillonné

Avec les appareils numériques actuels, les signaux temporels numérisés prennent la forme :

$$s_{\text{num}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \delta(t - kT_e) \approx s(t) \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \quad (8.23)$$

Pour le moment on suppose encore que les appareils sont capables de stocker une infinité de points en mémoire, ce qui n'est évidemment pas le cas (en réalité, un appareil réel ne numérise le signal que sur une certaine plage de temps). La transformée de Fourier d'un signal numérique sans limite de points s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{s}_{\text{num}}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-2j\pi f t} s(t) \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \right] dt \\ &= \hat{s}(f) * \mathcal{F} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \right) \end{aligned} \quad (8.24)$$

Transformée de Fourier et produit de convolution

Le produit de convolution entre deux fonctions $s_1(t)$ et $s_2(t)$ est défini par :

$$[s_1 * s_2](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t' - t)s_2(t')dt' \quad (8.25)$$

La transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit des transformées de Fourier :

$$\mathcal{F}([s_1 * s_2](t)) = \mathcal{F}(s_1) \times \mathcal{F}(s_2) \quad (8.26)$$

et celle d'un produit à la convolution des transformées de Fourier :

$$\mathcal{F}(s_1(t) \times s_2(t)) = [\mathcal{F}(s_1) * \mathcal{F}(s_2)] \quad (8.27)$$

La transformée de Fourier d'un signal numérique peut être vue comme étant la convolution de la transformée du signal réel analogique et de la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac de fréquence $1/T_e$. Or la transformée d'un peigne de Dirac de période T_e est un peigne de Dirac de période f_e dans l'espace fréquentiel :

$$\mathcal{F}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)\right) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e) \quad (8.28)$$

Par conséquent, l'analyse de l'équation 8.24 nous dit que le spectre en amplitude du signal numérisé est celui du signal réel périodisé tous les f_e dans l'espace fréquentiel (voir figure 86).

Propriété 8.1. *Le spectre d'un signal échantillonné est un spectre continu, périodique de période f_e . Il est constitué par la répétition à l'infini avec la période f_e du spectre du signal analogique d'origine :*

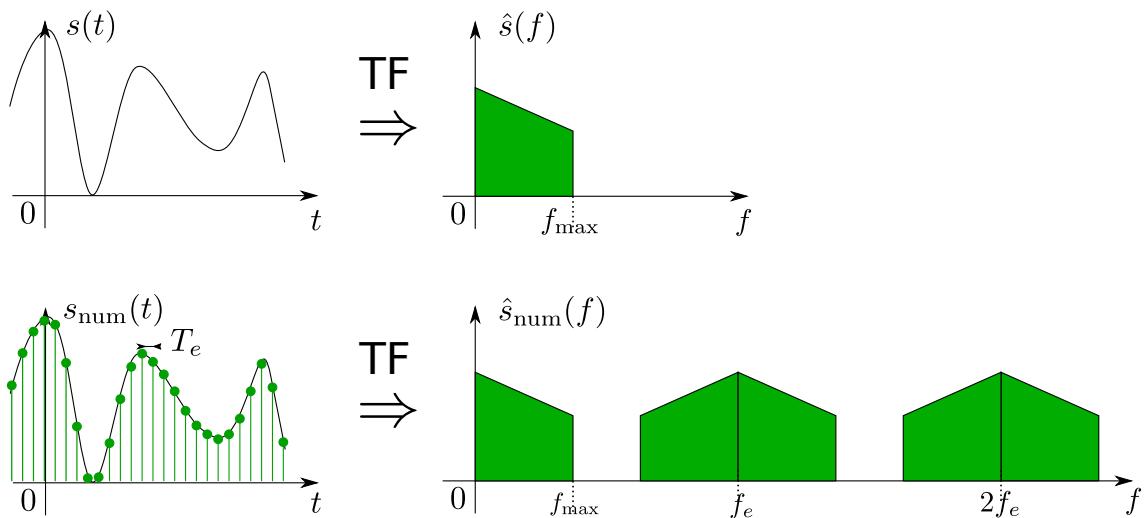
$$\hat{s}_{\text{num}}(f) = \hat{s}(f) * \left[\frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e) \right] = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{s}(f - kf_e) \quad (8.29)$$

On en déduit que si la fréquence maximale contenue dans le spectre de $s(t)$ est supérieure à $f_e/2$, alors on observe du repliement de spectre⁴⁰.

Théorème 8.2 (Théorème de Shannon). *La représentation discrète d'un signal exige des échantillons régulièrement espacés à une fréquence d'échantillonnage f_e supérieure au double de la fréquence maximale f_{\max} présente dans ce signal.*

Si l'on veut numériser le signal analogique du réseau téléphonique qui possède une bande passante s'étendant de 300 à 3400 Hz, quelle doit être la fréquence d'échantillonnage minimum ? La formule du théorème de Shannon nous montre immédiatement que la

40. Il se démontre en particulier que si l'échantillonnage respecte le critère de Shannon il est possible de reconstruire exactement le signal de départ $s(t)$ à partir de son spectre échantillonné, comme une interpolation de sinus cardinaux (voir <https://astromatic.net/m2aa1s/notes/Sampling.html#theoreme-de-lechantillonnage>).

FIGURE 86 – Effet de l'échantillonage d'un signal $s(t)$ sur son spectre de Fourier.

fréquence d'échantillonnage doit être supérieure au double de la fréquence maximum, soit 6800 Hz. La fréquence standard qui a été choisie dans le réseau numérique est de 8 kHz (i.e. une période de 125 µs), ce qui satisfait les conditions ci-dessus.

8.3.3 Cas de la FFT sur un oscilloscope

Relations générales : les appareils numériques réels ont une capacité en mémoire limitée et ne peuvent stocker qu'un nombre K fini de points du signal temporel :

$$s_{\text{num}}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} s_k \delta(t - kT_e) \quad (8.30)$$

Le signal peut éventuellement être pondéré par une fonction de fenêtrage $W(t)$ (voir section 8.3.4). Pour le moment on ne considère qu'une fonction de fenêtrage carrée simple. De plus, le résultat de la transformée de Fourier obtenu par un calcul numérique ne peut pas être une fonction continue de la fréquence pour cette même raison. L'enjeu est donc d'obtenir une collection finie de points représentant au mieux la transformée de Fourier théorique du signal $s(t)$.

La transformée de Fourier d'un signal échantillonné et tronqué s'écrit :

$$\hat{s}_{\text{num}}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2j\pi ft} \times \sum_{k=0}^{K-1} s_k \delta(t - kT_e) dt = \hat{s}(f) * \mathcal{F}\left(\sum_{k=0}^{K-1} \delta(t - kT_e)\right) \quad (8.31)$$

mais aussi :

$$\hat{s}_{\text{num}}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2j\pi ft} \times \sum_{k=0}^{K-1} s_k \delta(t - kT_e) dt = \sum_{k=0}^{K-1} s_k e^{-2j\pi kfT_e} \quad (8.32)$$

Le résultat de la transformée de Fourier est donc théoriquement une série finie mais pour le moment encore une fonction continue de la fréquence f , ce qui n'est pas calculable et mémorisable par un oscilloscope intrinsèquement limité par la taille de sa mémoire. Comment calculer $\hat{s}_{\text{num}}(f) = \sum_{k=0}^{K-1} s_k e^{-2j\pi kfT_e}$ avec un appareil numérique ? Il faut parvenir à en retirer un nombre de points fini et représentatif de $\hat{s}_{\text{num}}(f)$, mais lesquels ?

On introduit la transformée de Fourier discrète (TFD) d'un signal échantillonné sur K points comme le calcul d'un ensemble fini de K coefficients \hat{s}_n^{TFD} définis par :

$$\hat{s}_n^{\text{TFD}} = \sum_{k=0}^{K-1} s_k e^{-2j\pi n \frac{k}{K}} \quad \text{pour } 0 \leq n < K \quad (8.33)$$

On observe donc une correspondance directe entre la TFD et la TF d'un signal échantillonné :

$$\hat{s}_n^{\text{TFD}} = \hat{s}_{\text{num}} \left(f = \frac{n}{T_0} \right) \quad (8.34)$$

avec $T_0 = KT_e$ la durée d'acquisition du signal. Calculer la TFD d'un signal échantillonné permet donc d'avoir une image de K points représentatifs de sa TF aux fréquences multiples de f_e/K . Ce sont donc ces K points qu'un oscilloscope numérique doit chercher à calculer.

Propriété 8.3. *La transformée de Fourier d'un signal numérisé et échantillonné sur K points à la fréquence $f_e = 1/T_e$ est égale à la transformée de Fourier discrète de ce signal aux fréquences multiples de f_e/K . La résolution en fréquence est de $\delta f = f_e/K$ et la fréquence maximale du spectre accessible est $f_e/2$ (critère de Shannon).*

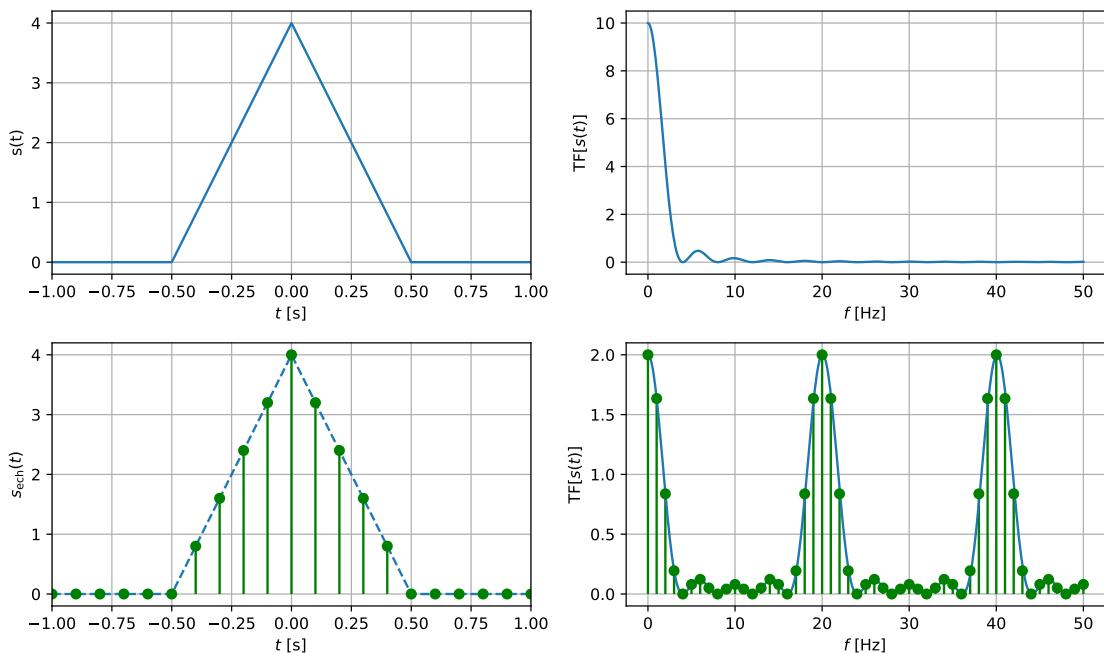


FIGURE 87 – *Haut : signal triangulaire et sa transformée de Fourier. Bas : signal triangulaire numérisé à une fréquence d'échantillonage $f_e = 10$ Hz, sa transformée de Fourier (trait plein bleu) et sa TFD (points verts).*

Ces opérations réalisées naïvement ont une complexité en $\mathcal{O}(K^2)$ puisqu'il y a K points à calculer par des séries de K termes. L'algorithme de *Fast Fourier Transform*⁴¹ (FFT)

41. Conceptuellement, il ne faut donc pas confondre la transformée de Fourier discrète et son algorithme de calcul.

propose de calculer la TFD d'un signal numérisé de façon rapide, en exploitant les symétries de la somme. Il a été publié en 1965 par James Cooley et John Tukey, et sa complexité en $\mathcal{O}(K \log K)$ en fait un algorithme bien plus rapide que son calcul brut.

L'algorithme FFT

L'algorithme de Transformée de Fourier Rapide (FFT) a été publiée sous sa forme moderne par James Cooley et John Tukey en 1965, mais des prémisses de l'algorithme avait déjà été utilisé par Carl Friedrich Gauss dès 1805.

Sur le principe, l'algorithme de Colley-Tukey ne fonctionne que pour les nombres de points K sous forme de puissance de 2, mais il consiste essentiellement à utiliser la périodicité de la fonction $e^{-2j\pi n \frac{k}{K}}$ pour éviter des redondances de calcul. Ainsi, en divisant en 2 le lot de points à calculer, les fonctions calculées pour le premier lot servent au second.

L'algorithme est très utilisé en traitement du signal, au delà de la simple transformée de Fourier, grâce à sa rapidité en $\mathcal{O}(K \log K)$. Par exemple il est plus avantageux de calculer un produit de convolution en passant par le produit des transformées de Fourier que directement, même si le but premier n'est pas d'obtenir la transformée de Fourier des signaux. De plus, des optimisations à l'algorithme original ont été apportées pour gérer les nombres K quelconques.

Règles pratiques : dans un oscilloscope, le nombre de points K en mémoire pour représenter un signal numérique est une constante. En revanche, l'utilisateur est libre de choisir la durée d'acquisition $T_0 = KT_e$ de ces points en changeant le calibre de la base de temps, ce qui modifie la fréquence d'échantillonnage :

$$f_e = \frac{1}{T_e} = \frac{K}{T_0} \quad (8.35)$$

Le spectre est calculé par une FFT et affiche les $K/2$ points de fréquence positive⁴² sur une plage de fréquence allant de 0 à $f_e/2$: donc la plage de fréquence est aussi choisie via le calibre de la base de temps. La résolution en fréquence δf est alors donnée par :

$$\delta f = \frac{f_e/2}{K/2} = \frac{1}{T_0} \quad (8.36)$$

Donc le choix de la base de temps fixe à la fois f_e , la plage de fréquence et la résolution.

Or il faut toujours respecter le critère de Shannon $f_e > 2f_{\max}$. Pour observer cette fréquence f_{\max} dans la plage de fréquence du spectre FFT, il faut augmenter la fréquence d'échantillonnage et donc diminuer la durée d'acquisition T_0 . Ceci a pour conséquence de diminuer la résolution spectrale de la FFT. Donc résolution et critère de Shannon s'opposent, et un compromis n'est pas toujours possible. On remarque cependant que plus K est grand (donc plus l'oscilloscope est cher), plus le compromis est réalisable car pour un même T_0 la fréquence d'échantillonnage est supérieure.

En pratique : il faut commencer avec un temps d'acquisition suffisamment court et l'augmenter progressivement jusqu'à une valeur satisfaisante.

42. On rappelle que la TF d'un signal réel est à symétrie hermitienne $\hat{s}(-f) = \hat{s}^*(f)$ donc symétrique en norme par rapport à $f = 0$. Seules les fréquences positives sont donc intéressantes pour les signaux physiques.

8.3.4 Problème du fenêtrage

Étude de la fenêtre rectangulaire : jusqu'à présent nous avons considéré une fenêtre rectangulaire :

$$W(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < T_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.37)$$

ce qui, formellement, conduit à étudier le signal :

$$s_{\text{num}}(t) = s(t) \times W(t) \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e) \quad (8.38)$$

La transformée de Fourier d'un tel signal correspond au produit de convolution des transformées de Fourier des trois facteurs. Donc le choix de la fenêtre $W(t)$ a son importance. Dans la section précédente, nous avons calculé la transformée de Fourier du signal échantillonné et tronqué comme étant :

$$\hat{s}_{\text{num}}(f) = \hat{s}(f) * \mathcal{F}\left(\sum_{k=0}^{K-1} \delta(t - kT_e)\right) \quad (8.39)$$

Or la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac tronqué s'écrit :

$$\mathcal{F}\left(\sum_{k=0}^{K-1} \delta(t - kT_e)\right) = \frac{1 - e^{2\pi j K f / f_e}}{1 - e^{2\pi j f / f_e}} = e^{\pi j(K-1)f/f_e} \frac{\sin(\pi K f / f_e)}{\sin(\pi f / f_e)} \quad (8.40)$$

Les pics du peigne de Dirac "s'élargissent" par rapport au cas $K \rightarrow \infty$. La TF présente des pics principaux avec une fréquence f_e et des maxima intermédiaires à une fréquence f_e/K . Le spectre affiché étant le produit de convolution du spectre théorique par cette fonction, ces harmoniques peuvent donc venir polluer la TFD du signal numérique, lui-même aussi échantillonné tous les f_e/K . Le choix d'une autre fonction de fenêtrage $W(t)$ peut permettre d'améliorer ce point, comme nous le verrons par la suite.

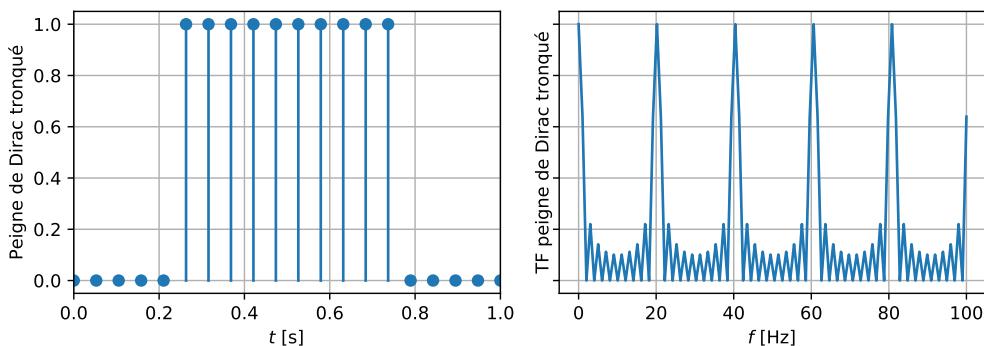


FIGURE 88 – Peigne de Dirac tronqué de période $T_e = 0.05$ s et son spectre de Fourier, de période 20 Hz, avec $K = 10$. Des annulations sont présentes tous les $f_e/K = 2$ Hz hors des pics principaux, espacés de $f_e = 20$ Hz.

Dans quel cas ces harmoniques sont-elles préjudiciables ? Comparons le cas où la période d'enregistrement est un multiple entier fortuit de la période du signal dont on réalise

l'analyse spectrale, à un cas où T_0 est quelconque (et qui est le cas général). Deux exemples de FFT correspondantes sont représentées figure 89. Dans les deux cas, la transformée de Fourier théorique (trait plein) est identique, c'est à dire que c'est la convolution du spectre théorique du signal (un pic de Dirac à $f = 2 \text{ kHz}$) avec la TF d'un peigne de Dirac tronqué. Sauf que dans le premier cas, comme la période d'échantillonnage est un multiple de la période du signal, les points de la FFT tombent sur les minima (et même les zéros) de la TF du peigne de Dirac, alors que dans le second cas ils sont décalés et les harmoniques de la TF de la fenêtre polluent le spectre recherché. Si on revient à la correspondance :

$$\hat{s}_n^{\text{TFD}} = \hat{s}_{\text{num}} \left(f = \frac{n}{T_0} \right) \quad (8.41)$$

on voit que si la fréquence f_s du signal n'est pas un multiple de $1/T_0$ alors la TFD n'échantillonne pas $\hat{s}_{\text{num}}(f)$ en f_s et donc rate la fréquence intéressante du spectre $\hat{s}(f)$.

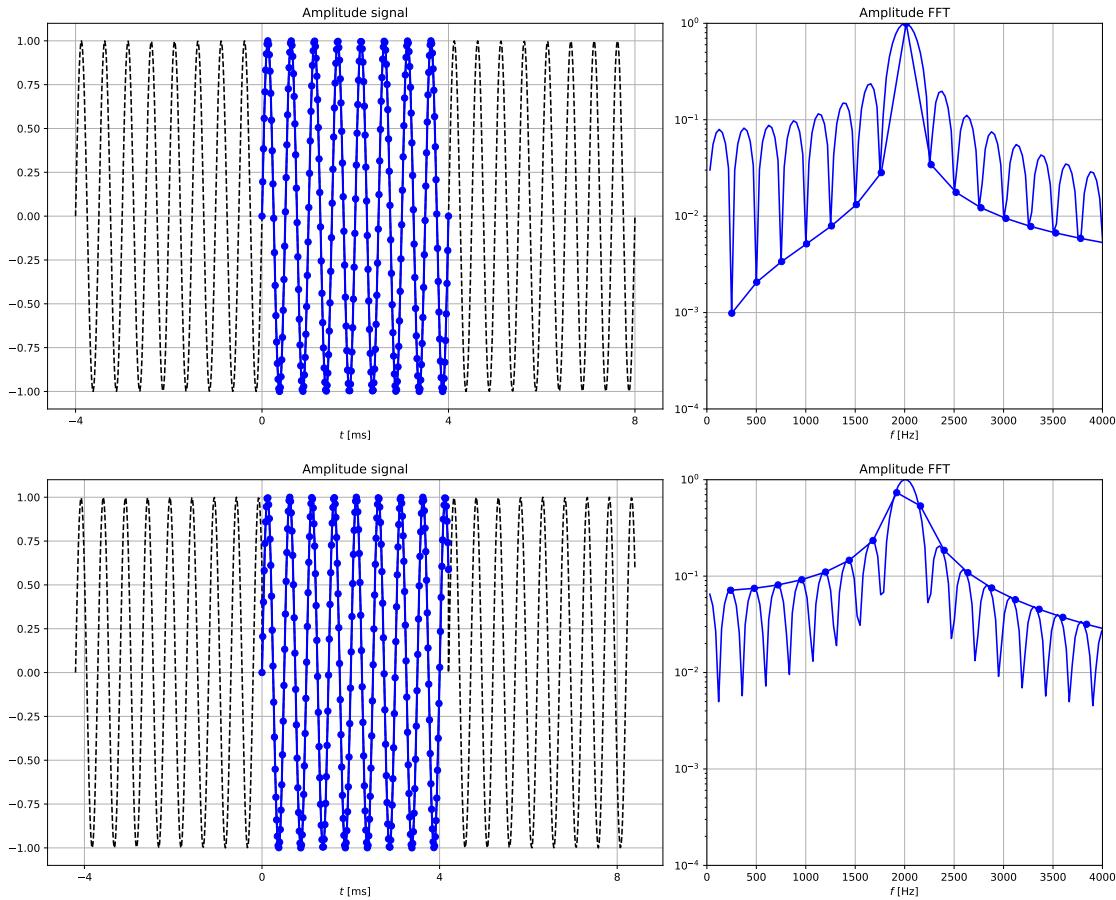


FIGURE 89 – *Haut* : A gauche le signal temporel $s(t)$ sinusoïdal de fréquence 2 kHz d'amplitude 1 V échantillonné sur $N = 256$ points et $T_0 = 4 \text{ ms}$, pondéré une fenêtre rectangulaire, et la FFT correspondante ($\delta f = 250 \text{ Hz}$). A droite, les traits pleins correspondent aux spectres théoriques (TF) calculés sur des signaux non échantillonnés, et les points aux spectres affichés à la résolution δf (FFT). *Bas* : idem mais $T_0 = 4.2 \text{ ms}$ ($\delta f = 238 \text{ Hz}$).

Une autre façon de comprendre ce problème est que la TFD se comporte comme si le signal échantillonné était périodique de période T_0 . En effet, la TFD est à la fois liée à la transformée de Fourier mais aussi à la série de Fourier : si on considère que les K points de $s_{\text{num}}(t)$ représentent une période d'un signal périodique de période T_0 , d'après

leur définition les coefficients de la série de Fourier associée sont :

$$\begin{aligned}\hat{s}_{\text{num},n} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_{\text{num}}(t) e^{-2j\pi \frac{nt}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{k=0}^{K-1} s_k \delta(t - kT_e) e^{-2j\pi \frac{nt}{T_0}} dt \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} s_k \int_0^1 \delta(uT_0 - kT_e) e^{-2j\pi n u} du = \sum_{k=0}^{K-1} s_k e^{-2j\pi n \frac{kT_e}{T_0}}\end{aligned}\quad (8.42)$$

Donc on obtient :

$$\boxed{\hat{s}_{\text{num},n} = \sum_{k=0}^{K-1} s_k e^{-2j\pi n \frac{k}{K}}} = \hat{s}_n^{\text{TFD}} \quad (8.43)$$

La TFD correspond donc exactement à la série de Fourier du signal échantillonné tronqué considéré périodique de période T_0 . Donc si la fenêtre ne tronque pas le signal sur un nombre entier de périodes, alors une discontinuité apparaît entre les échantillons $s(0)$ et $s(T_0)$ ce qui engendre des harmoniques artificielles dans le spectre du signal. Les représentations temporelles répétées avec une période T_0 sont présentées figure 89 en traits pointillés. Le signal ainsi périodisé n'est donc plus un signal sinusoïdal pur, les discontinuités induisent des harmoniques dans son spectre.

En résumé, le choix d'une fenêtre rectangulaire introduit des harmoniques qui peuvent polluer le spectre recherché, en particulier si la période d'échantillonnage n'est pas un multiple fortuit de la période du signal dont on cherche le spectre. Pour corriger cela, on peut donc imaginer trouver des fenêtres $W(t)$ qui :

- possèdent moins d'harmoniques dans leur transformée de Fourier ;
- garantissent une bonne périodisation du signal tronqué de période T_0 en s'annulant sur les bords de la fenêtre.

Choix d'une fonction de fenétrage : pour résoudre les problèmes liés à la fenêtre rectangulaire, le signal peut être pondéré par d'autres fonctions de fenétrage qui lissent ou annulent les discontinuités en bord de fenêtre, et ainsi réduisent l'impact du choix de la durée d'acquisition T_0 sur la qualité du spectre. Il y a par exemple les fenêtres de :

- Hamming :

$$W(t) = \begin{cases} 0.54(1 - 0.46 \cos(2\pi t/T_0)) & \text{si } 0 < t < T_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.44)$$

- Hanning :

$$W(t) = \begin{cases} 0.5(1 - \cos(2\pi t/T_0)) & \text{si } 0 < t < T_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.45)$$

- Blackmann-Harris :

$$W(t) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi t/T_0) + 0.08 \cos(4\pi t/T_0) & \text{si } 0 < t < T_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.46)$$

- gaussienne :

$$W(t) = \begin{cases} e^{-((t-T_0/2)/T_0)^2} & \text{si } 0 < t < T_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.47)$$

Et il en existe bien d'autres. Notons que les problèmes de fenêtrage en analyse numérique sont conceptuellement proches des problèmes d'apodisation en optique.

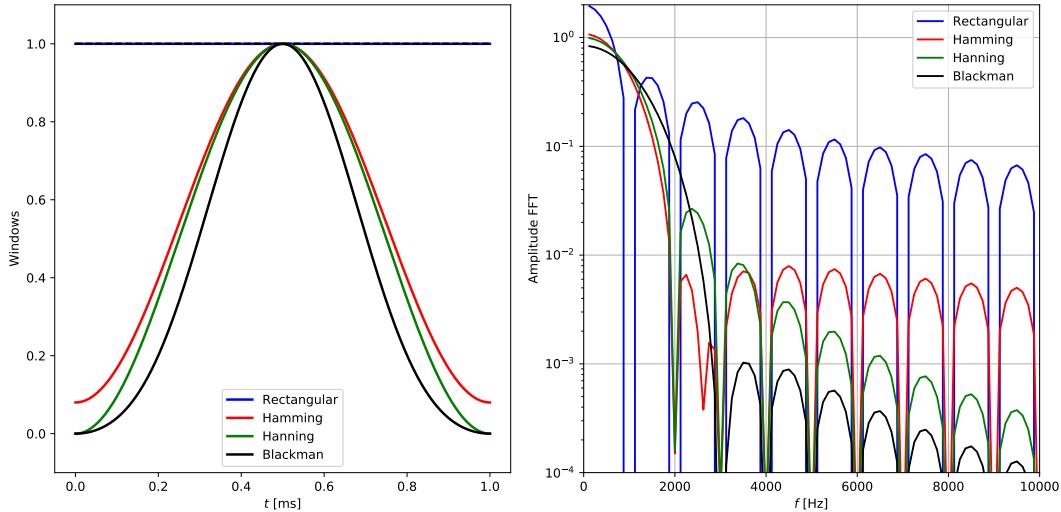


FIGURE 90 – Différentes fonctions de fenêtrage $W(t)$ (gauche) et les transformées de Fourier correspondantes (droite).

Différentes fenêtres et leurs transformées de Fourier sont représentées figure 90, on voit que toutes possèdent moins d'harmoniques que la fenêtre rectangulaire, mais toutes ne s'annulent pas aux bords. En revanche le pic central proposé par la fenêtre rectangulaire est le plus fin de tous. Le choix d'une fenêtre FFT va résulter d'un compromis entre la résolution en fréquence et la précision en amplitude. Il dépend donc en partie de ce que l'on veut mesurer et des caractéristiques du signal source.

Dans la figure 91, on constate les effets d'un choix de fenêtrage différents pour le signal présenté précédemment dans l'analyse de la fenêtre rectangulaire. Le pic central à 2 kHz possède une amplitude moins bien mesurée mais dans le second cas le spectre est moins pollué par les harmoniques apportées par le fenêtrage.

Toutes les fenêtres n'ont pas les mêmes propriétés en résolution en amplitude et résolution spectrale. Le choix de l'utilisation d'une fenêtre plutôt qu'une autre n'a vraiment d'intérêt que dans le cadre de l'analyse spectrale d'un signal composé de plusieurs composantes spectrales. Dans la figure 91, on voit par exemple que le poids des pics latéraux (lobes) diminue dans le spectre avec la pondération de la fenêtre, mais l'amplitude du pic à 2 kHz aussi. La largeur de ce dernier augmente légèrement aussi. Cette observation sur le cas d'un signal avec une seule composante spectrale est intéressante pour comprendre la FFT d'un signal plus complexe :

$$s(t) = 1 \text{ V} \times [\cos(2\pi f_1 t) + a \cos(2\pi f_2 t)] \quad (8.48)$$

Étudions d'abord le cas $f_1 = 2 \text{ kHz}$, $f_2 = 2.2 \text{ kHz}$ avec $a = 1$ (figure 92). Pour discerner deux composantes spectrales proches mais d'amplitudes comparables la fenêtre rectangu-

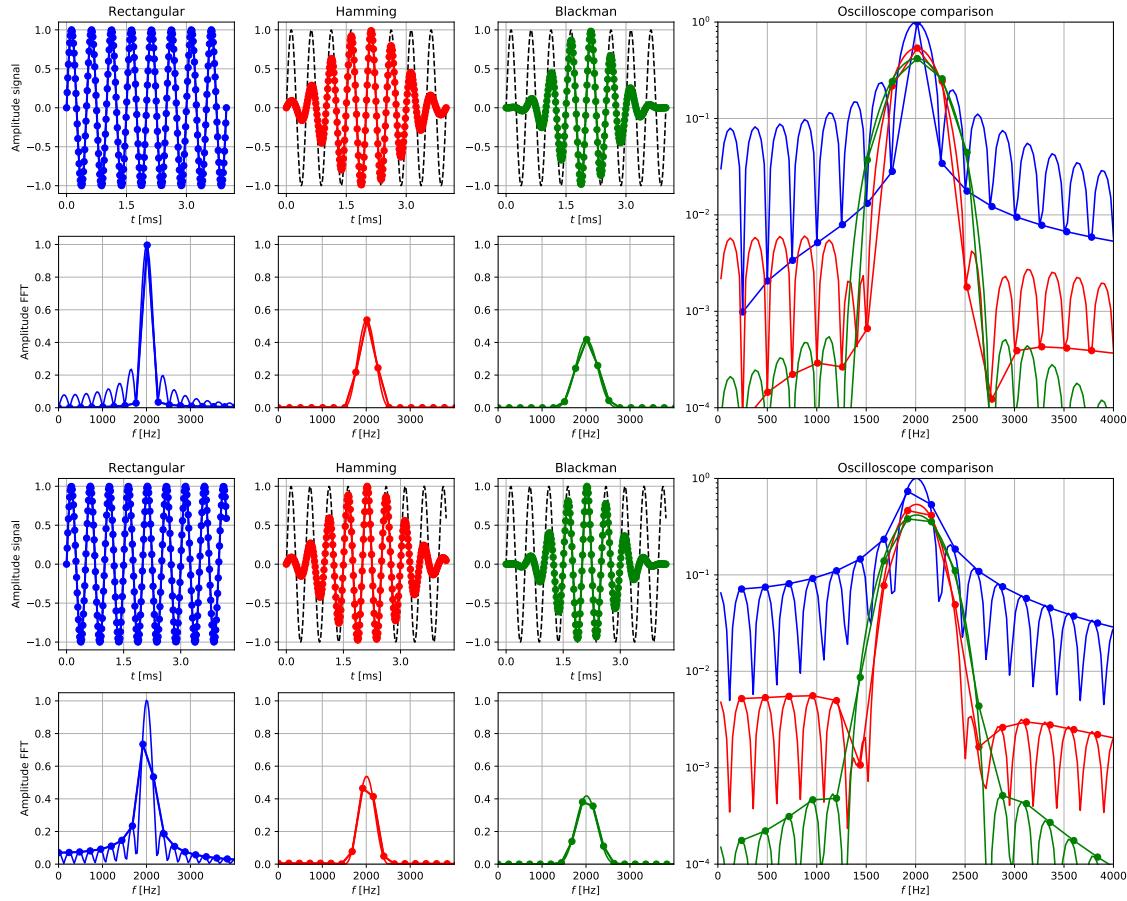


FIGURE 91 – *Haut* : A gauche le signal temporel $s(t)$ sinusoïdal de fréquence 2 kHz d'amplitude 1 V échantillonné sur $N = 256$ points et $T_0 = 4$ ms, pondéré par des fenêtres rectangulaire, Hamming et Blackmann, et les FFT correspondantes ($\delta f = 250$ Hz). A droite, les traits pleins correspondent aux spectres théoriques (TF) calculés sur des signaux non échantillonnés, et les points aux spectres affichés à la résolution δf (FFT). *Bas* : idem mais $T_0 = 4.2$ ms ($\delta f = 238$ Hz).

laire est préférable car elle propose des pics plus fins que les autres fonctions de fenêtrage. De plus les amplitudes des deux pics sont bien mesurés à 1 V.

Passons au cas où on a deux composantes en fréquence moins proches mais avec l'une dominante l'autre : $f_1 = 2$ kHz, $f_2 = 2.5$ kHz avec $a = 0.05$. Dans ce cas la composante spectrale faible est indiscernable dans les lobes générés par la fenêtre rectangulaire. Par contre elle apparaît clairement pour les autres choix de fenêtrages (voir figure 93). Remarquons cependant que les amplitudes affichées à ces fréquences sont inférieures à ce qu'elles devraient être (1 V et 0.05 V).

Terminons par un cas où les deux fréquences sont plus éloignées ($f_1 = 2$ kHz, $f_2 = 3$ kHz) mais avec une seconde composante encore plus faible ($a = 0.0005$). Sur la figure 94, la composante spectrale faible est discernable avec une fenêtre de Blackmann-Harris (en échelle log), mais est invisible pour les autres choix. La précision en amplitude s'est néanmoins encore dégradée.

En résumé, le choix du fenêtrage doit être adapté au signal étudié. Ce problème devient complexe quand on ne connaît pas ce signal et tout l'enjeu est de faire ressortir les composantes spectrale du bruit mais aussi des artefacts (lobes) engendrées par la numérisation.

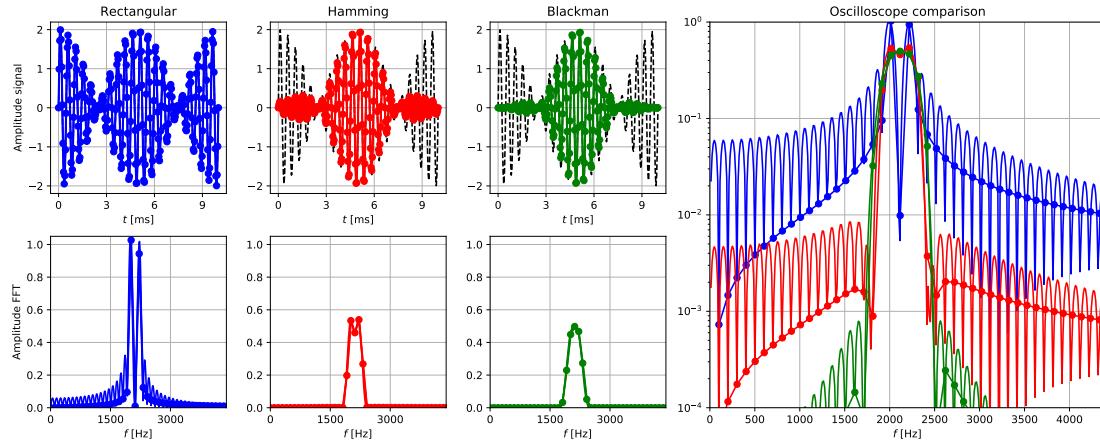


FIGURE 92 – A gauche le signal temporel $s(t)$ avec $f_1 = 2\text{kHz}$, $f_2 = 2.2\text{kHz}$ et $a = 1$ échantillonné sur $N = 256$ points et $T_0 = 10\text{ms}$, pondéré par des fenêtres rectangulaire, Hamming et Blackmann, et les FFT correspondantes ($\delta f = 100\text{Hz}$). Pour ces spectres, les traits pleins correspondent aux spectres théoriques (TF) et les points aux spectres affichés (TFD). A droite la comparaison des FFT avec en traits fins les spectres théoriques (TF) et avec les marqueurs circulaires les spectres affichés (TFD).

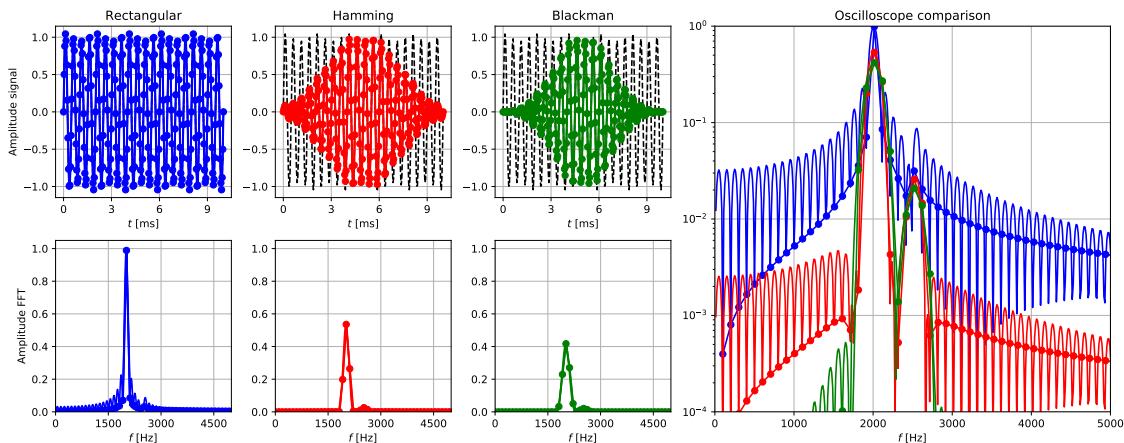


FIGURE 93 – A gauche le signal temporel $s(t)$ avec $f_1 = 2\text{kHz}$, $f_2 = 2.5\text{kHz}$ et $a = 0.05$ échantillonné sur $N = 256$ points et $T_0 = 10\text{ms}$, pondéré par des fenêtres rectangulaire, Hamming et Blackmann, et les FFT correspondantes ($\delta f = 100\text{Hz}$). A droite, les traits pleins correspondent aux spectres théoriques (TF) calculés sur des signaux non échantillonnés, et les points aux spectres affichés à la résolution δf (FFT).

sation et le fenêtrage. Il faut aussi faire un compromis entre la précision en amplitude et la résolution en fréquence.

8.4 Filtrage numérique

On appelle filtre numérique un système utilisé pour modifier la *distribution fréquentielle* d'un signal numérique selon des spécifications données [22]. Un filtre numérique peut être vu comme un procédé de calcul permettant de transformer une séquence de nombres d'un signal numérique d'entrée en une seconde séquence de nombres avec la modification voulue du signal. Le problème du filtrage numérique consiste donc à déterminer l'équation

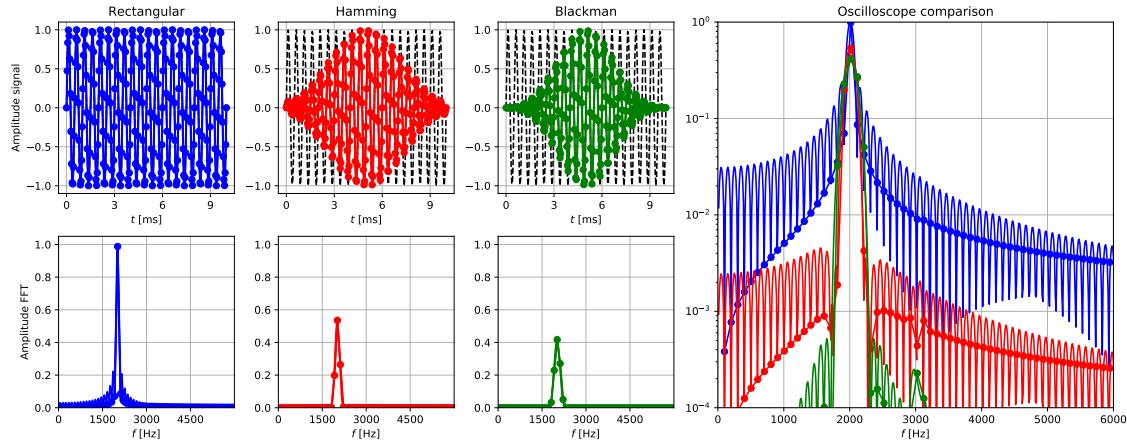


FIGURE 94 – A gauche le signal temporel $s(t)$ avec $f_1 = 2\text{ kHz}$, $f_2 = 3\text{ kHz}$ et $a = 0.0005$ échantillonné sur $N = 256$ points et $T_0 = 10\text{ ms}$, pondéré par des fenêtres rectangulaire, Hamming et Blackmann, et les FFT correspondantes ($\delta f = 100\text{ Hz}$). A droite, les traits pleins correspondent aux spectres théoriques (TF) calculés sur des signaux non échantillonnés, et les points aux spectres affichés à la résolution δf (FFT).

régissant cette transformation numérique qui d'une part doit respecter la réponse fréquentielle spécifiée en amont et d'autre part doit être réalisable. Le filtre numérique peut être implantée sous forme de logiciel (algorithme) ou matériel (circuit électronique).

Par rapport aux filtres analogiques, les filtres numériques apportent des avantages en fiabilité (gestion des erreurs, sécurité du stockage sous forme binaire) et adaptabilité (programmable).

8.4.1 Équation des différences

Nous allons aborder les filtres numériques avec le point de vue du physicien qui cherche à réaliser une transformation d'un signal $e(t)$ en un signal $s(t)$ via une équation différentielle linéaire à coefficients constants, comme dans les chapitres précédents :

$$a_0 s(t) + \sum_{j=1}^n a_j \frac{d^j s}{dt^j} = b_0 e(t) + \sum_{i=1}^m b_i \frac{d^i e}{dt^i} \quad (8.49)$$

Si on note $s_k = s(kT_e)$, alors les dérivées successives de la fonction $s(t)$ peuvent être approximées numériquement par :

$$\frac{ds}{dt}(kT_e) \mapsto \frac{s_k - s_{k-1}}{T_e} \quad (8.50)$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2}(kT_e) = \frac{d}{dt} \left[\frac{ds}{dt}(kT_e) \right] \mapsto \frac{1}{T_e} \left[\frac{s_k - s_{k-1}}{T_e} - \frac{s_{k-1} - s_{k-2}}{T_e} \right] = \frac{s_k - 2s_{k-1} + s_{k-2}}{T_e^2} \quad (8.51)$$

$$\frac{d^3 s}{dt^3}(kT_e) = \frac{d}{dt} \left[\frac{d^2 s}{dt^2}(kT_e) \right] \mapsto \frac{s_k - 3s_{k-1} + 3s_{k-2} - s_{k-3}}{T_e^3} \quad (8.52)$$

Avec cette approche eulérienne de l'écriture de la dérivation, on observe donc que l'équation différentielle 8.49 peut se réécrire comme une combinaison linéaire des $\{s_j, e_i\}$:

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j s_{k-j} = \sum_{i=0}^m \beta_i e_{k-i} \quad (8.53)$$

avec $\{\alpha_j, \beta_i\}$ des coefficients combinaisons linéaires respectivement des $\{a_j, b_i\}$. Dans le cadre de l'étude des filtres numériques, en choisissant $\alpha_0 = 1$, on obtient l'équation suivante appelée *équation aux différences* :

$$s_k = \sum_{i=0}^m \beta_i e_{k-i} - \sum_{j=1}^n \alpha_j s_{k-j} \quad (8.54)$$

qui constitue l'équation fondamentale pour décrire les algorithmes liés aux filtres numériques. Elle lie la sortie s_k d'un signal numérique à une transformation des échantillons de l'entrée $\{e_i\}$ et éventuellement des valeurs des échantillons $\{s_k\}$ précédents. A partir de cette expression, on peut distinguer deux grandes familles de filtres (voir figure 95) :

- les filtres non récursifs pour lesquels les coefficients $\{\alpha_j\}$ sont tous nuls ;
- les filtres récursifs pour lesquels au moins un coefficient α_j est non nul⁴³.

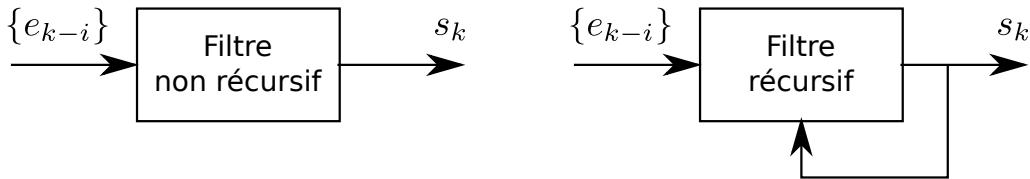


FIGURE 95 – Principe des filtres non récursifs et récursifs.

Un filtre non récursif : la moyenne

L'opération de moyenne d'un signal numérique est un exemple simple de filtre non récursif :

$$s_k = \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} e_{k-i} \quad (8.55)$$

où les $\{\beta_i\}$ valent tous $1/m$ et m donne la profondeur temporelle $\tau = mT_e$ sur laquelle le signal est moyenné.

8.4.2 Transformation en z

Dans le cas des signaux analogiques, on dispose de la transformée de Fourier ou de la transformée de Laplace pour analyser la réponse des filtres. Ces transformées ont l'avantage de pouvoir convertir les dérivées en multiplications par une variable, et ainsi de pouvoir convertir l'équation différentielle en fonction de transfert. Dans le cas des signaux discrets, on utilise la transformée en z , notée T_z [22] qui admet le même type de transformation des dérivées.

Théorème 8.4 (Transformée en z). *La transformée en z d'un signal causal $s(t)$ échantillonné à la période T_e s'exprime à l'aide de la variable complexe z selon la relation :*

$$T_z [s(t)] = \underline{S}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT_e) z^{-k} \quad (8.56)$$

43. Pour être calculable, la sortie s_k doit donc être précédée de n échantillons s_j stockés en mémoire, éventuellement initialisés à des valeurs judicieuses, si tous les α_j sont non nuls.

La propriété la plus importante à retenir pour l'étude des filtres numériques liée à cette transformée est celle du retard temporel.

Propriété 8.5 (Retard temporel). *Pour une période d'échantillonnage T_e , on a :*

$$T_z [s(t - nT_e)] = \underline{S}(z)z^{-n} \quad (8.57)$$

Ainsi, z^{-1} est appelé l'opérateur de retard.



L'application de cette propriété à l'écriture de la dérivée discrétisée nous montre que l'opérateur dérivée s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \mapsto \frac{1 - z^{-1}}{T_e}, \quad \frac{d^k}{dt^k} \mapsto \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_e} \right)^k \quad (8.58)$$

On obtient ainsi une méthode simple pour passer d'une représentation sous forme d'équation différentielle d'un filtre à sa transformée en z et à son équation aux différences.

8.4.3 Réalisation des filtres numériques

A partir de l'expression de la représentation en z du filtre numérique ou de son équation aux différences, il faut concevoir l'algorithme du calcul ou la structure matérielle permettant de réaliser ce filtre. Les filtres numériques peuvent être réalisés en utilisant les trois éléments de base (matériel ou logiciel) suivants : l'additionneur, le multiplicateur et le retard de T_e . Tout filtre numérique doit être une combinaison quelconque de ces trois uniques opérations. Un exemple de structure est schématisé figure 96 pour un filtre non récursif.

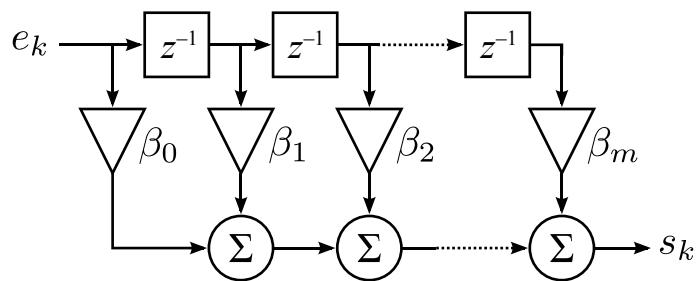


FIGURE 96 – Structure directe d'un filtre non récursif (Source : adapté de Wikipedia).

8.4.4 Fonction de transfert d'un filtre numérique

Si l'on s'appuie sur le formalisme des filtres analogiques, la représentation naturelle d'une fonction de filtrage numérique est l'écriture en terme de fonction de transfert. Nous allons ici en aborder trois, mais il en existe beaucoup d'autres qui ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients selon la fonction de filtrage à réaliser et son implémentation. Une application au filtre passe-bas suit dans la section suivante 8.4.5 pour illustrer ces trois méthodes.

Équation aux différences : en appliquant la transformée en z à l'équation aux différences, il vient :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^n \alpha_j s_{k-j} \right] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^m \beta_i e_{k-i} \right] z^{-k} \quad (8.59)$$

soit en permutant les sommes puis via un changement d'indice :

$$\underline{S}(z) \sum_{j=0}^n \alpha_j z^{-j} = \underline{E}(z) \sum_{i=0}^m \beta_i z^{-i} \quad (8.60)$$

On représente alors le filtre synthétisé par la fonction de transfert associée à l'équation aux différences :

$$\underline{H}(z) = \frac{\underline{S}(z)}{\underline{E}(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m \beta_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^n \alpha_j z^{-j}} \quad (8.61)$$

Méthode de l'invariance impulsionnelle : par cette méthode on synthétise un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle est égale à la réponse impulsionnelle échantillonnée du filtre analogique correspondant⁴⁴. En considérant la fonction de transfert d'un filtre analogique $\underline{H}(p)$ de réponse impulsionnelle $h(t)$, la réponse impulsionnelle échantillonnée s'écrit :

$$h_{\text{num}}(t) = T_e \sum_{k=0}^{+\infty} h_k \delta(t - kT_e), \quad h_k = h(kT_e) \quad (8.62)$$

Par conséquent, la transformée en z de $h_{\text{num}}(t)$ est donnée par :

$$T_z [h_{\text{num}}(t)] = \underline{H}(z) = T_e \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} \quad (8.63)$$

Cette représentation est valable tant que la fréquence de coupure du filtre est inférieure à la fréquence de Shannon.

Fonction de transfert en z : pour un filtre analogique de fonction de transfert $\underline{H}(p)$ dans le domaine de Laplace (ou $\underline{H}(j\omega)$ dans le domaine de Fourier), on peut rechercher la transformation qui permettrait d'avoir son écriture équivalente $\underline{H}(z)$ dans le plan des z . La relation exacte permettant de passer d'un domaine à l'autre est donnée par la définition même des transformées :

$$z \leftrightarrow e^{pT_e} \leftrightarrow e^{j\omega T_e} \quad (8.64)$$

soit $p \leftrightarrow \frac{1}{T_e} \ln z \leftrightarrow j\omega$. Si on réalise cette transformation, comme $\underline{H}(p)$ est en général un quotient de polynômes en p , $\underline{H}(z)$ ne l'est pas ce qui conduit à des difficultés de réalisation. Néanmoins la réponse fréquentielle du filtre numérique ainsi modélisé est rigoureusement identique à celle de son équivalent analogique.

Pour une fonction de filtrage désirée, il existe donc plusieurs manières de synthétiser et de représenter un filtre numérique. Cela tient au fait que l'opération d'approximation

44. On rappelle que la réponse impulsionnelle d'un filtre analogique est directement égale à la transformée de Laplace inverse de sa fonction de transfert $\underline{H}(p)$ puisque la transformée de Laplace d'une impulsion est 1.

pour passer du continu au discret n'est pas réalisée de la même manière, et n'est pas unique. Pour l'équation aux différences, on approxime la dérivée. Pour la méthode de l'invariance impulsionale, on approxime que la réponse impulsionale discrétisée est suffisante pour représenter le fonctionnement du filtre pour tout signal d'entrée. Pour la fonction de transfert de z , la fonction de filtrage est exacte mais la réalisation concrète de l'opération $\ln z$ nécessite une approximation pour être conçue via les trois opérations élémentaires.

8.4.5 Application au filtre passe-bas

Nous allons illustrer chacune des trois méthodes exposées précédemment sur l'exemple du filtre passe-bas régit par l'équation différentielle :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t) \quad (8.65)$$

Équation aux différences : en prenant une approche eulérienne de la dérivation, l'équation différentielle ci-dessus se réécrit pour un signal discrétisé à la période T_e :

$$\tau \frac{s_k - s_{k-1}}{T_e} + s_k = e_k \quad (8.66)$$

ce qui amène à la relation de récurrence :

$$s_k = \frac{\tau/T_e}{1 + \tau/T_e} s_{k-1} + \frac{1}{1 + \tau/T_e} e_k \quad (8.67)$$

Calculons aussi la fonction de transfert associée en prenant la transformée en z de l'équation différentielle 8.65 :

$$\begin{aligned} & \tau \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_e} \right) \underline{S}(z) + \underline{s}(z) = \underline{E}(z) \\ \Rightarrow & \underline{H}(z) = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{T_e} (1 - z^{-1})} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau}{T_e} \right) - \frac{\tau}{T_e} z^{-1}} \end{aligned} \quad (8.68)$$

L'implémentation de cet algorithme permet donc de réaliser un filtre passe-bas sur un signal numérique avec une pulsation de coupure $1/\tau$.

Méthode de l'invariance impulsionale : la réponse impulsionale d'amplitude E associée à l'équation différentielle 8.65 est :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t) \quad (8.69)$$

Échantillonnée à la période T_e , cette fonction temporelle s'écrit :

$$h_{\text{num}}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k \delta(t - kT_e), \quad h_k = \frac{1}{\tau} e^{-kT_e/\tau} \quad (8.70)$$

dont la transformée en z se calcule comme une suite géométrique :

$$\underline{H}(z) = \frac{T_e}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_e/\tau} z^{-k} = \frac{T_e/\tau}{1 - e^{-T_e/\tau} z^{-1}} \quad (8.71)$$

A partir de la fonction de transfert en z , on peut remonter à la réponse temporelle en utilisant la propriété du retard temporel :

$$\left(1 - e^{-T_e/\tau} z^{-1}\right) \underline{S}(z) = \frac{T_e}{\tau} E(z) \quad (8.72)$$

$$\Leftrightarrow s_k = e^{-T_e/\tau} s_{k-1} + \frac{T_e}{\tau} e_k \quad (8.73)$$

On observe donc que pour la même équation différentielle, suivant la méthode choisie on obtient des algorithmes de calcul de la réponse temporelle et des fonctions de transferts différents.

Fonction de transfert en z : la fonction de transfert dans le domaine de Laplace du filtre associé à cette équation différentielle est :

$$\underline{H}(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \quad (8.74)$$

ce qui donne dans le domaine des z pour un signal échantillonné à la période T_e :

$$\underline{H}(z) = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{T_e} \ln(z)} \quad (8.75)$$

De même en développant $\ln(z)$ en série entière et en utilisant la propriété du retard temporel on pourrait obtenir un algorithme de calcul de la réponse temporelle. Cependant celle-ci sera impossible à réaliser en pratique, avec un algorithme ou via un circuit imprimé.

Simulations : dans la figure 97 sont représentées les applications du filtre numérique passe-bas régi par l'équation différentielle 8.49 à une entrée impulsorielle, indicielle et sinusoïdale, pour différentes méthodes de synthèse du filtre numérique. On voit qu'elles diffèrent peu, et en particulier que la méthode de l'invariance impulsorielle est particulièrement adaptée pour filtrer une excitation impulsorielle. Les différences entre la sortie calculée et celle attendue pour un filtre analogique peuvent être réduites en augmentant la fréquence d'échantillonnage.

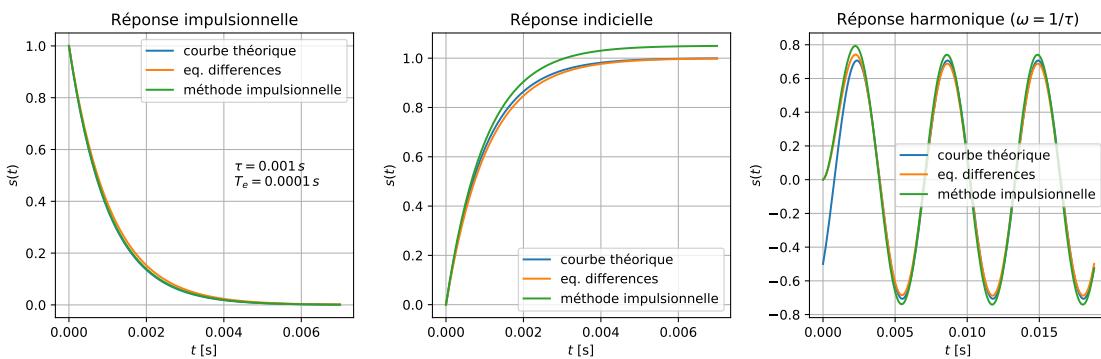


FIGURE 97 – Réponses impulsorielles, indicielles et harmoniques d'un filtre numérique passe-bas réalisé selon deux méthodes, avec $\tau = 1 \text{ ms}$ et $T_e = \tau/10$.

Les diagrammes de Bode associés aux trois méthodes étudiées sont représentés figure 98, en opérant la transformation $z \mapsto e^{j\omega T_e}$. A basse fréquence les diagrammes obtenus sont très similaires à celui attendu, avec une coupure à -3 dB autour de $1/\tau$. En

revanche plus on s'approche de la fréquence de Shannon $1/(2T_e)$ plus des divergences importantes apparaissent. Là aussi, augmenter la fréquence d'échantillonnage permettrait d'obtenir un filtrage numérique similaire à son équivalent analogique sur une plus grande plage de fréquence.

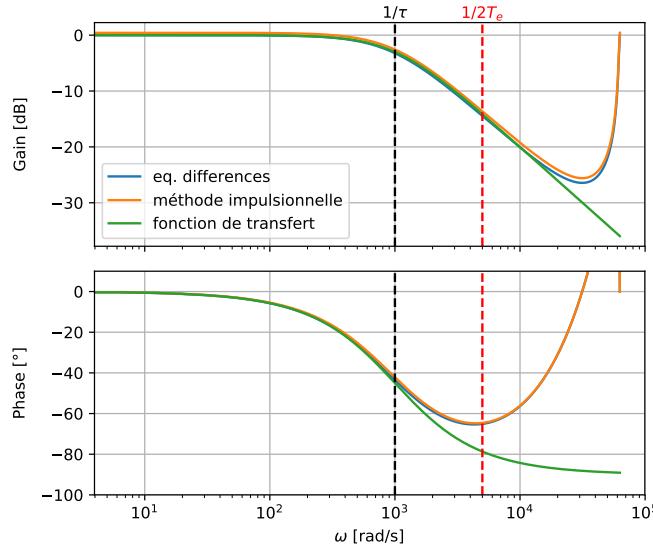


FIGURE 98 – Diagrammes de Bode d'un filtre numérique passe-bas réalisé selon trois méthodes, avec $\tau = 1 \text{ ms}$ et $T_e = \tau/10$.

8.5 Exercices (quelques solutions en annexe)

1. Pour un système passe-bas du 2e ordre de fonction de transfert :

$$\underline{H}(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (8.76)$$

calculer l'équation aux différences et les transformées en z par les trois méthodes exposées dans ce cours.

9 Composants semi-conducteurs

L'OBJECTIF de ce chapitre est de donner les clés pour comprendre le fonctionnement des composants basés sur des matériaux semi-conducteurs : la diode et le transistor bipolaire. La diode est principalement utilisée pour redresser une tension, et possède une caractéristique courant-tension fortement non linéaire. Le transistor a été inventé en 1946 par Bardeen, Shockley et Brattain (prix Nobel 1956). Les applications analogiques et numériques de ce composant sont variées : interrupteur commandé (porte logique), modulation de signaux, amplification de signaux. Mais le transistor est actuellement d'utilisation très limitée à l'agrégation. Seuls le suiveur de puissance et la commutation sont abordés. Il n'y a pas de leçon faisant appel au transistor.

Les composants électroniques à base de semi-conducteurs à l'agreg : des notions liées à ces composants peuvent apparaître dans les épreuves suivantes :

- MP18 : Matériaux semi-conducteurs.
- MP21 : Production et conversion d'énergie électrique-électrique.
- MP22 : Amplification de signaux.

9.1 Caractéristiques et modèle d'une diode

9.1.1 Jonction pn à l'équilibre thermodynamique

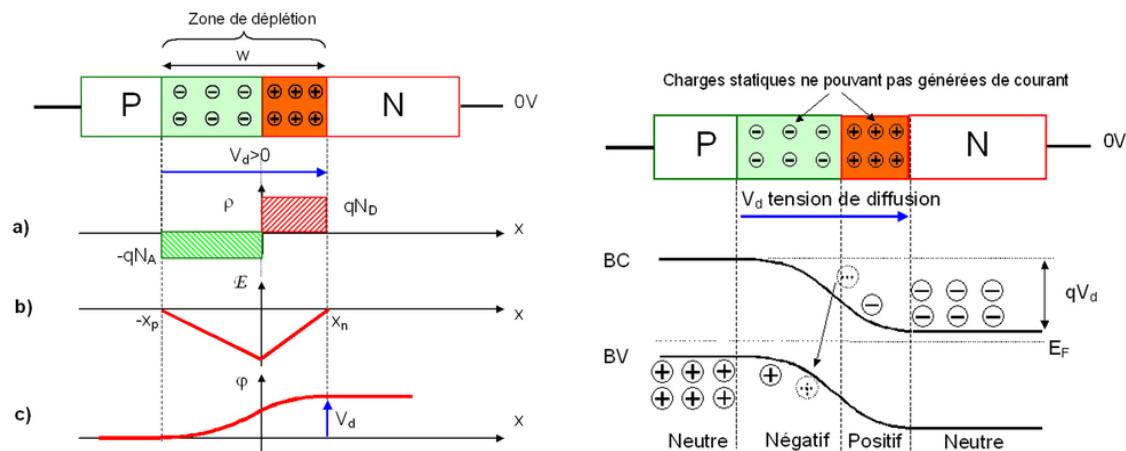


FIGURE 99 – Jonction pn à l'équilibre. *Gauche* : a) représentation des charges d'espace ρ en fonction de la densité de donneurs N_D et d'accepteurs N_A , b) le champ électrique c) le potentiel électrostatique. *Droite* : diagramme d'énergie d'une jonction pn représentant la difficulté pour les porteurs de charge de traverser la jonction du fait du potentiel électrostatique et des recombinaisons. (Source : <http://www.optique-ingénieur.org>)

Une jonction pn est l'association de deux semi-conducteurs accolés, l'un dit "dopé p" et l'autre dit "dopé n". Le dopage d'un matériau consiste à introduire, dans sa matrice, des atomes d'un autre matériau. Ces atomes vont se substituer à certains atomes initiaux et ainsi introduire davantage d'électrons ou de défauts électroniques, des trous. Tout dopage sert à modifier l'équilibre entre les électrons (charges négatives) et les trous (charges positives), pour favoriser la conduction électrique par l'un des deux types de porteurs. Les semi-conducteurs dopés n possèdent un excès de charges mobiles négatives tandis que les

semi-conducteurs dopés p possèdent un excès de charges mobiles positives. L'électrode métallique reliée à la région dopée p est appelée *anode* (sens d'entrée du courant en convention récepteur conventionnel), et l'électrode reliée à la région dopée n est appelée *cathode*.

Dans la jonction pn, la distribution des électrons et des trous tend à s'homogénéiser par diffusion, créant une *zone de déplétion* où la concentration en porteurs de charge libre est quasiment nulle. Les électrons et les trous se recombinent dans la zone de déplétion, qui est donc pauvre en porteurs de charge mobiles. Mais se faisant le semi-conducteur dopé n se charge positivement car il perd des électrons, alors que le semi-conducteur dopé p se charge négativement. La différence de potentiel ainsi créée contrebalance la diffusion des porteurs de charges. Pour le silicium la différence de potentiel⁴⁵ V_d créée par la diffusion varie typiquement entre 0.6 V et 0.8 V à 300 K.

La longueur de la zone de déplétion dépend des matériaux et de l'équilibre entre diffusion et force électrostatique (entre 0.1 et 10 μm).

9.1.2 Jonction pn polarisée

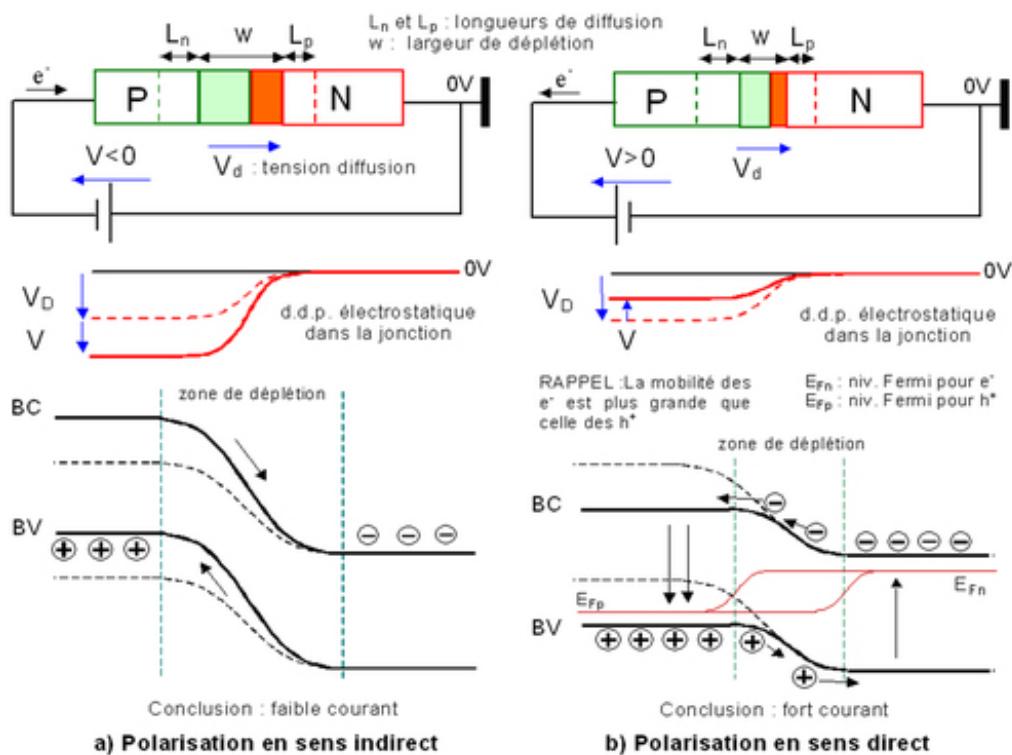


FIGURE 100 – Fonctionnement d'une jonction pn polarisée. (Source : <http://www.optique-ingenieur.org>)

Si on applique une différence de potentiel V aux bornes de la jonction, on peut modifier la taille de la zone neutre : plus cette zone est courte, plus la résistance de la jonction est

45. Contrairement aux apparences, la différence de potentiel développée entre l'anode et la cathode d'une diode reste nulle si elle n'est pas polarisée : on ne peut pas mesurer V_d en connectant les électrodes d'un multimètre aux bornes d'une diode. Ce paradoxe est facilement résolu si l'on réalise que le composant contient, outre la jonction pn, deux jonctions métal-semi-conducteur : ce sont les contacts ohmiques. Ces jonctions développent également des tensions de diffusion qui apparaissent en série avec V_d . La différence de potentiel mesurée entre les électrodes d'un multimètre est la somme des trois tensions de diffusion ; cette somme est ainsi nulle comme l'impose la condition d'équilibre.

faible.

Si l'on applique une tension positive du côté de la région p, cette tension attire les électrons minoritaires et laisse un plus grand nombre d'atomes porteurs d'un trou. Dans le même temps, les électrons, côté n, sont poussés par ceux venant du pôle négatif. A la jonction, soit des électrons tombent dans un trou, soit continuent leur course au travers de l'autre semi-conducteur de type p jusqu'à atteindre l'électrode opposée (+). L'intensité du courant varie en exponentielle de la tension.

En appliquant une tension négative du côté de la région p, on renforce la tension de diffusion qui contrecarre la circulation des porteurs de charge à travers la jonction. La résistance de la jonction très forte et le courant électrique est donc bloqué.

9.1.3 Les diodes

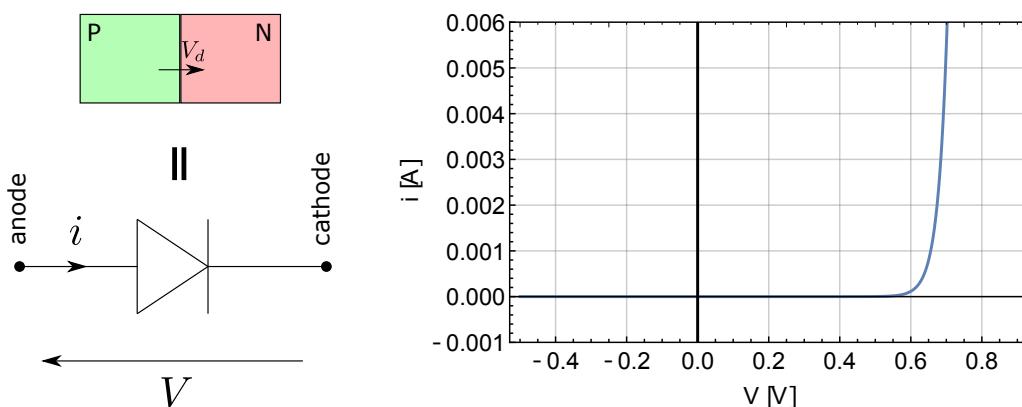


FIGURE 101 – Représentation symbolique et caractéristique d'une diode à jonction pn.

Propriété 9.1 (Loi de Schokley). *Dans le modèle de la jonction pn, la caractéristique courant-tension d'une diode est donnée par la relation :*

$$i = I_S \left(e^{\frac{eV}{k_B T}} - 1 \right) \quad (9.1)$$

avec $I_S \approx 10^{-14}$ A le courant de saturation et T la température (voir figure 101). Pour $T = 300$ K, on a $V_T = k_B T/e = 25.9$ mV.

Une diode est un dipôle électronique non-linéaire conçu autour d'une jonction pn. Typiquement, pour une diode simple au silicium, une polarisation directe $V \approx 0.7$ V produit un courant i compris entre 1 et 10 mA environ. D'après la caractéristique courant-tension (figure 101), on voit que ce type de composant peut servir à redresser un courant alternatif car le composant ne laisse passer un courant notable que lorsqu'elle est polarisée en direct, avec un seuil autour de 0.7 V. Sinon elle est bloquante, tel un interrupteur ouvert dans le circuit électronique.

Il existe une multitude de diodes de conceptions et d'usages différents. Nous allons simplement en décrire quelques unes.

Diode Zener : La diode Zener est plus fortement dopée qu'une diode conventionnelle. L'effet Zener a lieu lorsque, sous l'application d'une tension inverse suffisante

V_Z , l'augmentation du champ électrique provoque une libération soudaine de porteurs de charge de telle sorte que le courant augmente brutalement alors que la tension aux bornes reste pratiquement constante.

La tension V_Z est aussi appelée *tension de claquage*, car une jonction pn trop polarisée en inverse contient un champ électrique si intense dans la zone de dépletion qu'il peut provoquer l'ionisation directe du matériau. La libération d'un grand nombre de paires électron-trou par ionisation augmente la densité des porteurs libres, ce qui entraîne une augmentation rapide du courant alors que la tension varie peu. De plus ces porteurs de charges sont très accélérés par le champ électrique et ionisent alors eux-mêmes le matériau par collisions : c'est l'effet avalanche. Le claquage est réversible et non-destructif tant que la puissance dissipée $V_Z \times i$ est inférieure à la limite renseignée par le constructeur (maximum $i \approx 10 \text{ mA}$).

La caractéristique d'une diode Zener est représentée figure 102. On reconnaît que pour des tensions $V < V_Z$ on a la caractéristique d'un générateur de tension quasi-idéal car on obtient une tension à ses bornes qui dépend très peu du courant appelé.

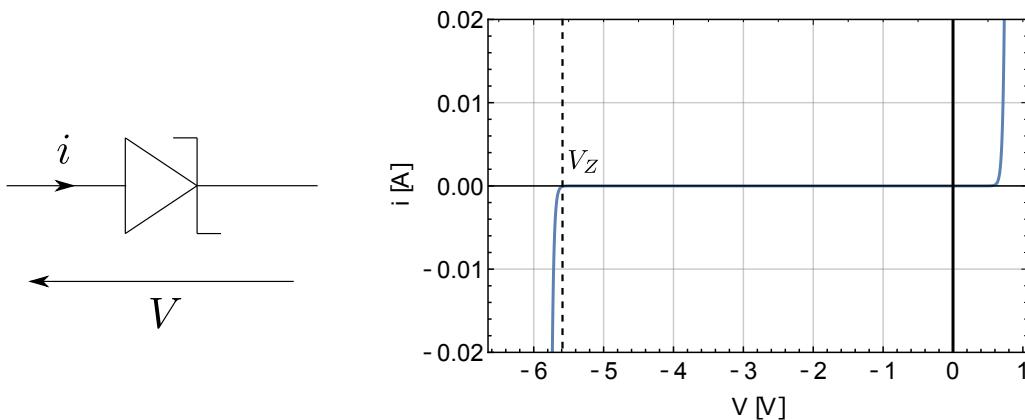


FIGURE 102 – Représentation symbolique et caractéristique d'une diode Zener.

Thermistance : La caractéristique courant-tension d'une jonction pn dépend de la température de façon exponentielle. Dans le cas d'une diode au silicium, sur une plage importante de température et à courant i constant, la tension V décroît approximativement linéairement de 2 mV par degré Celsius (voir figure 103).

Diode électroluminescente : Dans une jonction pn, la recombinaison d'un électron avec un trou peut s'accompagner d'émission d'un photon. Pour émettre de la lumière, la jonction doit donc être polarisée en direct pour favoriser ces recombinaisons. La couleur de la lumière émise va dépendre des matériaux choisis, mais aujourd'hui les LEDs couvrent l'ensemble du spectre allant de l'infrarouge au bleu. Le 7 octobre 2014, Shuji Nakamura, Isamu Akasaki et Hiroshi Amano ont reçu le prix Nobel de physique pour leurs travaux sur les LED bleues, lesquelles ont permis des progrès majeurs dans la conception des LEDs blanches d'éclairage domestique et des écrans.

Diode laser : C'est une variante de la diode électroluminescente, capable d'émettre de la lumière cohérente. Le processus d'émission est aussi basé sur la recombinaison électron-trou mais des miroirs semi-réfléchissants en bout de jonction créent une cavité résonnante qui sélectionne une longueur d'onde. Ces sources lumineuses sont largement utilisées dans

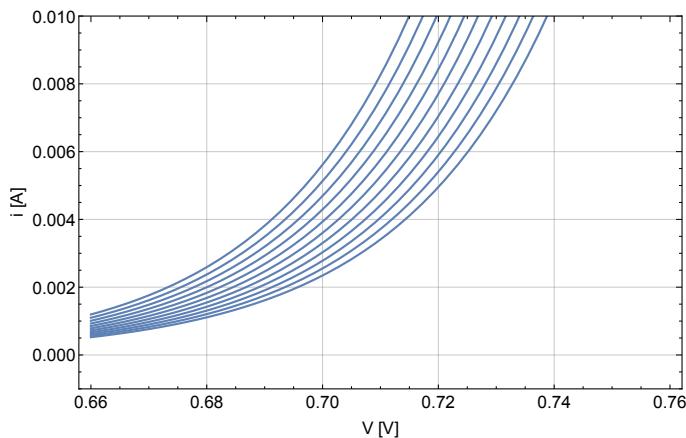


FIGURE 103 – Caractéristiques d'une jonction pn pour des températures T allant de 300 K à 310 K (de gauche à droite). À un courant donné i , l'espacement entre les caractéristiques est quasiment linéaire avec la température, sur une plage assez grande.

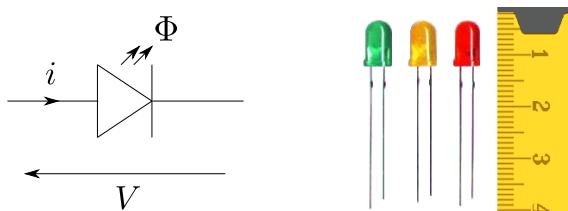


FIGURE 104 – Gauche : représentation symbolique des LEDs. Droite : LEDs de différentes couleurs.

les télécommunications (car elles sont facilement modulables en intensité), les pointeurs lasers, les lecteurs de CD, etc...

Photodiode : Si la jonction pn est polarisée en inverse, on bloque le courant. Seul subsiste un très faible courant en sens indirect. En éclairant la jonction avec un flux lumineux Φ , on crée des paires électron-trou qui vont alimenter le courant en sens indirect de façon sensible. Ce courant supplémentaire est proportionnel au flux lumineux reçu.

9.2 Caractéristiques et modèle du transistor bipolaire

9.2.1 Présentation du composant npn

Un transistor est un dispositif semi-conducteur à trois électrodes, appelées *collecteur C*, *base B* et *émetteur E*, qui permet de contrôler un courant (ou une tension) sur une des trois électrodes via les deux autres (exemples figure 105). Un transistor bipolaire est un des dispositifs électroniques à base de semi-conducteur de la famille des transistors. Son principe de fonctionnement est basé sur l'utilisation de deux jonctions pn, l'une polarisée en direct et l'autre en inverse⁴⁶. La polarisation de la jonction pn inverse permet de réguler, au prix d'un faible courant électrique, un courant beaucoup plus important, en la rendant plus ou moins passante.

46. Polariser en direct : porter la partie p (anode) de la jonction à un potentiel positif par rapport à la partie n (cathode).

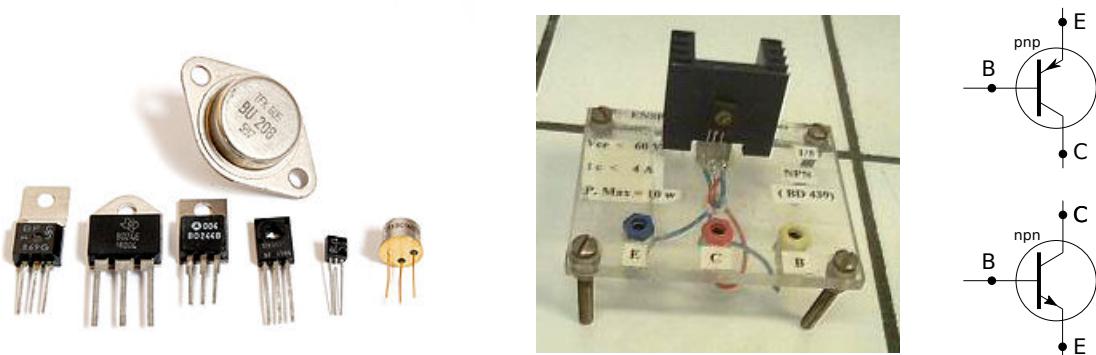


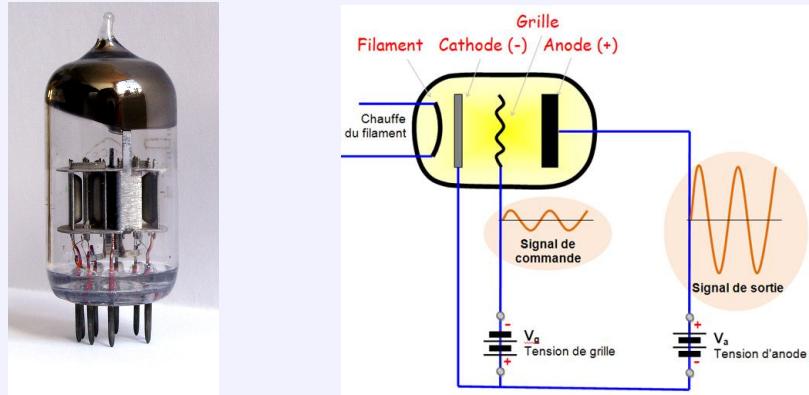
FIGURE 105 – *Gauche* : des transistors. *Milieu* : transistor bipolaire npn de la prépa agreg monté sur son dissipateur thermique. *Droite* : symboles électriques du transistor bipolaire npn et pnp, le sens de la flèche indique le sens positif du courant en fonctionnement linéaire.

Dans un transistor bipolaire, par construction la zone *émetteur* est fortement dopée n par rapport à la zone *collecteur* (le dispositif n'est donc pas symétrique : on ne peut pas brancher le transistor à l'envers) et la base est en général très mince et faiblement dopée.

Pour un transistor pnp, les mêmes raisonnements que pour un transistor npn s'appliquent, mais en inversant tous les courants et les signes des tensions.

Historique du transistor

L'invention du transistor à semi-conducteurs a été motivé par la volonté de remplacer les tubes à vide qui ont servi à construire les premiers téléviseurs, postes radiophoniques, ordinateurs, etc.



Gauche : tube à vide moderne à géométrie cylindrique. *Droite* : fonctionnement d'une triode (Source :<http://villemin.gerard.free.fr/aScience/Electron/Triode.htm>)

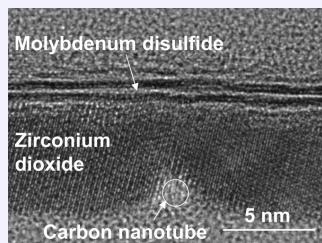
En particulier, la triode est un élément à trois électrodes composé d'une cathode chauffée directement ou indirectement, d'une anode qui reçoit les électrons arrachés de la cathode, et d'une grille intermédiaire dont le potentiel régule le nombre d'électrons parvenant à l'anode. Ce fonctionnement est donc très similaire à celui du transistor utilisé en amplificateur de courant.



Oscilloscope Tektronix 556 à 50 MHz produit entre 1966 et 1975, dont on voit un certain nombre de triodes sur le dessus.

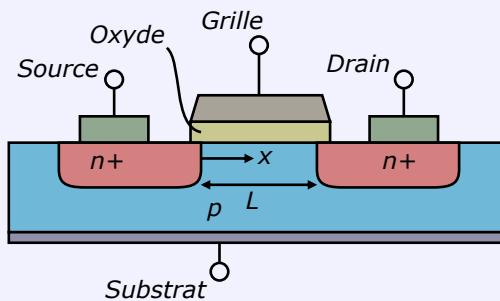
Suite aux travaux sur les semi-conducteurs, le transistor a été inventé le 23 décembre 1947 par les Américains John Bardeen, William Shockley et Walter Brattain, chercheurs des Laboratoires Bell. Ces chercheurs ont reçu pour cette invention le prix Nobel de physique en 1956. Le transistor est considéré comme un énorme progrès face au tube électronique : beaucoup plus petit, plus léger et plus robuste, il fonctionne avec des tensions faibles, autorisant une alimentation par piles, et presque instantanément une fois mis sous tension. Au contraire, les tubes électroniques demandaient une dizaine de secondes de chauffage, généraient une consommation importante et nécessitaient une source de tension élevée (plusieurs centaines de volts). Le tube à vide reste aujourd’hui utilisé pour l’amplification de signaux demandant des fortes puissances (par exemple dans le dernier étage des antennes émettrices ALLISS à Issoudun) ou des hautes fréquences (four micro-ondes).

Aujourd’hui, les transistors se comptent en dizaines de milliards dans les processeurs d’ordinateur, et les fabricants atteignent des tailles de l’ordre de 15 nm. Le Berkeley Lab’s Materials Science Division est même parvenu en 2016 à construire un transistor nanométrique avec un tube de carbone de 1 nm de diamètre, de quoi respecter la loi de Moore encore quelques années.



Transistor à fibre de carbone conçu par le Berkeley Lab’s Materials Science Division en 2016.

Autres types de transistors



Principe de fonctionnement du transistor à effet de champ (*Source : Wikipedia*).

Le transistor à effet de champ permet de contrôler le courant traversant le transistor par un champ électrique (et non plus un courant d'injection dans la base) via une *grille* isolée par une couche d'*oxyde*, entre une *source* et un *drain* (voir figure ci-dessous). En général, l'électrode du substrat et la source sont reliées entre elles (donc on a toujours 3 pattes au composant), et souvent mises à la masse.

Contrairement au transistor bipolaire, ce transistor présente une impédance d'entrée quasiment infinie. Ce transistor est donc commandé en tension contrairement au transistor bipolaire qui est commandé en courant par le courant de base. Le principal avantage est donc de pouvoir maintenir un état donné sans avoir à fournir de puissance (courant d'entrée nul). Ce composant est surtout utilisé en commutation que ce soit pour l'électronique de puissance ou pour la réalisation de circuits numériques (processeurs, mémoires,...). Il a aussi un meilleur comportement à haute fréquence.

Il existe aussi des transistors hybrides (technologies bipolaires et effet de champ combinées), unijonction, adaptées aux radiofréquences, aux hautes puissances...

9.2.2 L'effet transistor

Nous étudions ici le cas d'un transistor bipolaire du type npn (figures 106 et 107) pour lequel les tensions V_{BE} et V_{CE} , ainsi que le courant entrant à la base, I_B , sont positifs.

Lorsque le transistor n'est pas branché, il est semblable à deux jonctions pn tête-bêche : les électrons des semi-conducteurs dopés n tendent à diffuser dans la base dopée p mais finissent par être retenus par les champs électriques créés dans les zones de déplétion.

Dans une utilisation normale, la diode base-émetteur est plus ou moins polarisée en direct. L'abaissement de la barrière de potentiel dans la jonction base-émetteur permet aux électrons de conduction de l'émetteur d'être plus nombreux à diffuser plus loin dans la base. Or la base étant très mince ($e < 1 \mu\text{m}$) et peu dopée, beaucoup d'électrons échappent aux recombinaisons et sont nombreux à finir d'apparaître et accélérer par le champ électrique de la jonction base-collecteur avant de se recombiner avec les trous de la base. La variation du potentiel de la base V_B permet donc de réguler le flux d'électrons passant de l'émetteur au collecteur. Le prix à payer est qu'une partie des électrons ainsi émis vont se recombiner avec les trous du courant de base, mais on a alors l'illusion que le faible courant de base pilote le fort courant en sortie de l'émetteur, ou que l'on a réalisé une amplification de courant.

Lorsque la tension collecteur-émetteur est suffisamment positive, la quasi-totalité des électrons est collectée, et le courant de collecteur ne dépend pas de cette tension ; c'est la

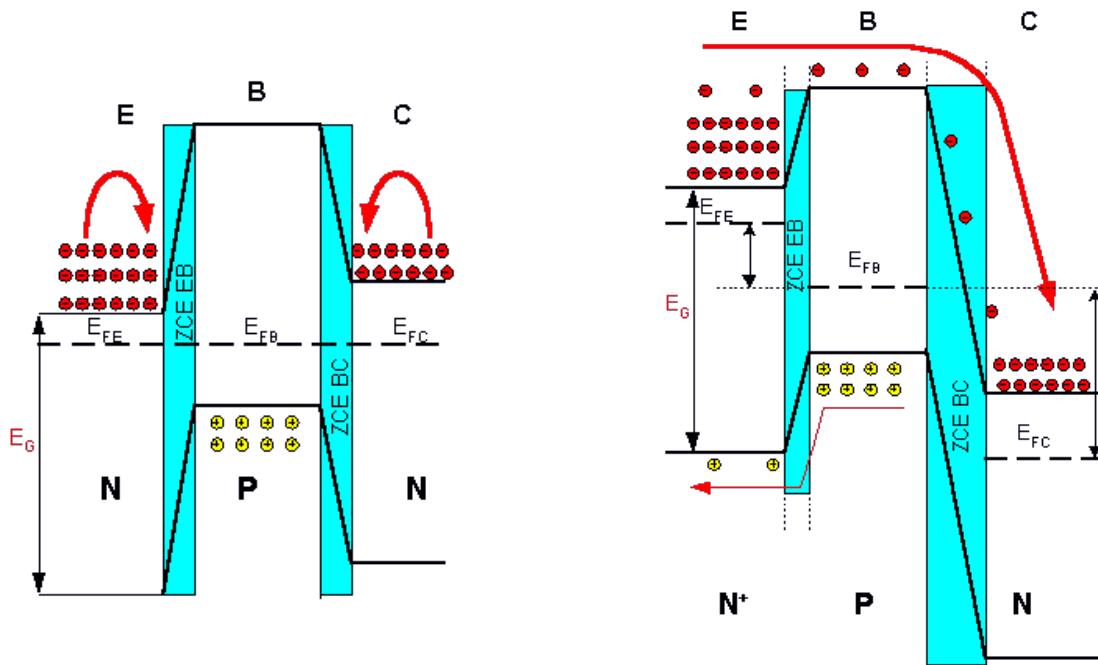


FIGURE 106 – Effet de la polarisation d'un transistor npn sur la conduction des électrons
(Source : <http://www.polytech-lille.fr/>).

zone linéaire. Dans le cas contraire, les électrons stationnent dans la base, se recombinent, et le gain chute ; c'est la zone de saturation.

Équations : idéalement, presque tout le courant d'électrons issu de l'émetteur se retrouve dans le collecteur :

$$I_C = \alpha I_E \quad (9.2)$$

avec $\alpha = 1 - \epsilon$ ($\epsilon \ll 1$). Le courant des trous circulant de la base vers l'émetteur (ajouté au courant de recombinaison des électrons neutralisés par un trou dans la base) correspond au courant de base I_B . La recombinaison avec des trous venant du courant de base retire une fraction ϵ des électrons allant de l'émetteur au collecteur. Le courant I_B est une fonction exponentielle de la tension base-émetteur car on a ici une jonction pn passante. Une très petite variation de la tension induit une grande variation du courant :

$$I_B = I_B^{\text{sat}} e^{eV_{BE}/k_B T} \quad (9.3)$$

avec $k_B T/e \approx 26 \text{ mV}$ à $T = 300 \text{ K}$. On peut montrer que ce courant est aussi grossièrement proportionnel au courant de collecteur I_C . En effet la loi des nœuds appliquée au composant donne :

$$I_C + I_B = I_E \Leftrightarrow I_C(1 - \alpha) = \alpha I_B \quad (9.4)$$

$$I_C = \frac{\alpha}{1 - \alpha} I_B \equiv \beta I_B \quad (9.5)$$

C'est l'effet transistor. Il faut bien être conscient que cette relation simple est le résultat complexe issu du choix d'avoir une base fine et un émetteur très dopé. Cette proportionnalité donne l'illusion que le courant de base contrôle le courant de collecteur. Pour un modèle de transistor donné, les mécanismes de recombinaison sont technologiquement difficiles à maîtriser et le gain $\beta = I_C/I_B$ peut seulement être certifié supérieur à une certaine

valeur (par exemple 100 ou 1000). Pour les transistors usuels, β est compris entre 100 et 400 mais il y a une forte dispersion parmi les composants issus d'une même fabrication et une forte dépendance avec la température.

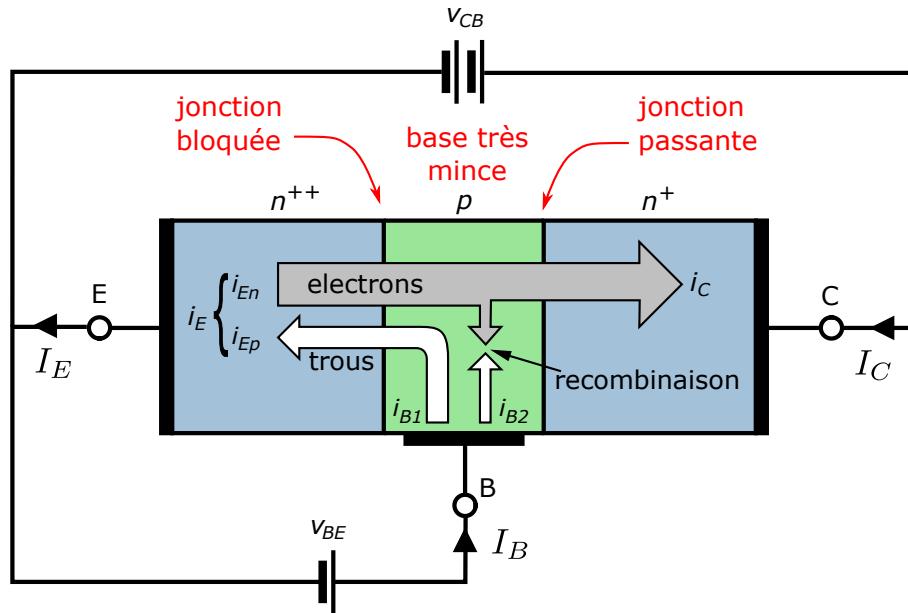


FIGURE 107 – Principe de fonctionnement du transistor npn (*Source : adapté de Wikipedia*).

9.2.3 Réseau de caractéristiques

Pour caractériser complètement le fonctionnement d'un transistor, il faut déterminer les relations entre 6 grandeurs I_E , I_C , I_B , V_{CB} , V_{CE} et V_{BE} . Les loi des mailles et loi des nœuds $V_{CB} + V_{BE} + V_{EB} = 0$ et $I_B + I_C + I_E = 0$ font qu'en fait quatre de ces grandeurs sont indépendantes.

Pour établir des relations quantitatives entre elles, il faut choisir un montage particulier : nous allons étudier le montage en *émetteur commun*. Dans ce dernier, l'émetteur est reliée à la masse du circuit, et les grandeurs V_{CB} et I_E ne sont pas pertinentes à regarder puisque imposées par le reste du circuit⁴⁷ (voir figure 107). Le transistor peut alors être caractérisé via 4 variables : I_C , I_B , V_{CE} et V_{BE} . En pratique, on a l'habitude d'étudier $I_B = f(V_{BE})$ à V_{CE} constant et $I_C = f(V_{CE})$ à I_B constant.

Caractéristique $I_B = f(V_{BE})$ à V_{CE} constant : la caractéristique $I_B = f(V_{BE})$ à V_{CE} constant est présentée figure 108 gauche. L'expérience montre qu'elle ne dépend quasiment pas de V_{CE} si $V_{CE} \geq 1$ V. Dans la zone d'amplification, le courant I_B suit une loi exponentielle caractéristique d'une diode autour de $V_{BE} \approx 0.6$ V. L'inverse de la pente de la caractéristique donne la résistance d'entrée du transistor seul (non-négligeable et fortement non linéaire).

Caractéristiques $I_C = f(V_{CE})$ à I_B constant : les caractéristiques $I_C = f(V_{CE})$ à I_B constant sont présentées figure 108 droite. Pour $V_{CE} \geq 1$ V, I_C dépend faiblement de V_{CE}

47. Pour un autre montage, ce seront deux autres grandeurs qui seront mises à l'écart et un jeu différent de caractéristiques qui seront représentées.

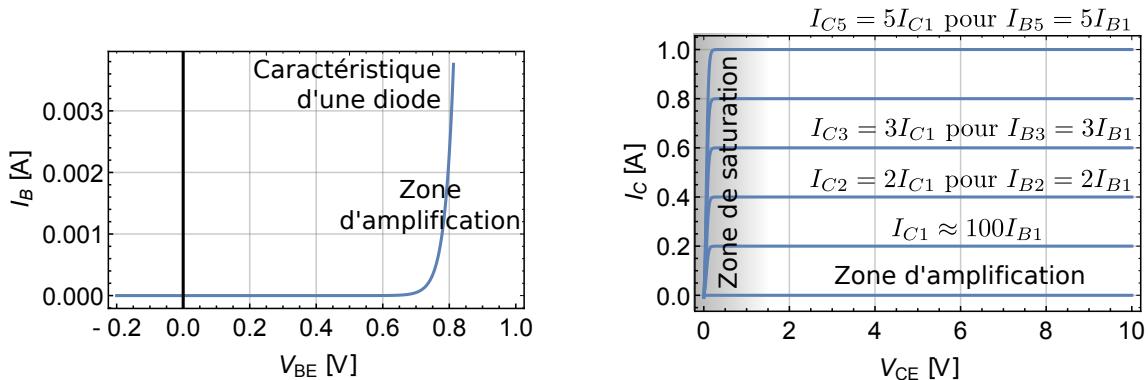


FIGURE 108 – Gauche : Caractéristique $I_B = f(V_{BE})$ à V_{CE} constant. Droite : Caractéristiques $I_C = f(V_{CE})$ à I_B constant (pour I_B variant de 0 0.01 mA par pas de 0.002 mA).

à I_B donné. En revanche, on a bien une dépendance linéaire avec I_B .

Lorsque la tension V_{CE} passe typiquement sous les 0.6 V, la tension $V_{CB} = V_{CE} - V_{BE}$ devient positive et la jonction CB est polarisée en direct aussi. Le courant circule alors normalement par conduction ohmique et le courant de base I_B ne pilote plus le courant de collecteur I_C . C'est le régime saturé⁴⁸.

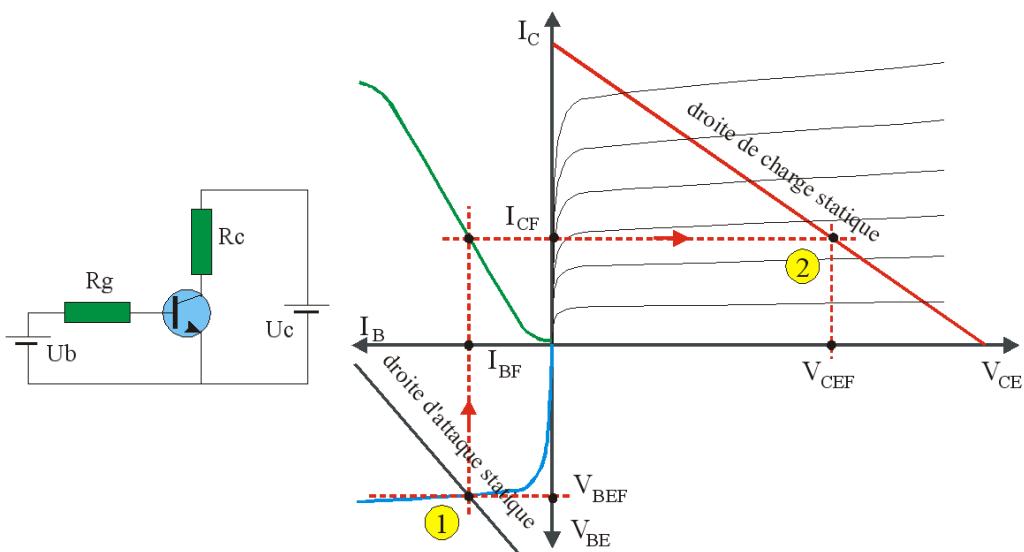


FIGURE 109 – Réseau de caractéristiques complet (Source : <http://res-nlp.univ-lemans.fr/>). Le contexte dans lequel est branché le transistor, ici les résistances R_g et R_c , impose le point de fonctionnement.

Réseau de caractéristiques complet Le point de fonctionnement d'un transistor est décidé par le circuit dans lequel il est branché. Graphiquement, l'intersection des caractéristiques courant-tension des différents composants entourant le transistor donne ce point,

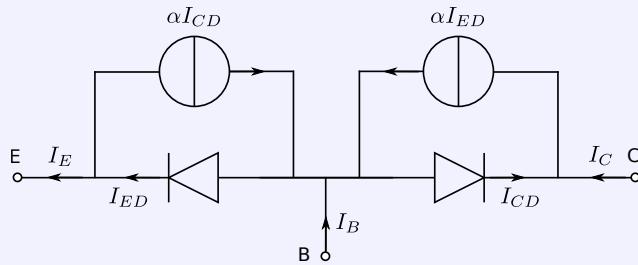
48. Attention, à la vue des caractéristiques, il pourrait sembler plus logique de parler de régime saturé pour les plateaux à $V_{CE} > 1$ V. La zone $V_{CE} < 1$ V possède un comportement linéaire (ohmique) mais est décrite comme saturée car la troisième entrée du transistor (la base) n'a ici plus aucun effet sur le fonctionnement du composant, qui ne fonctionne plus que comme une résistance.

et donc les courants et tensions disponibles. A ces relations on peut ajouter celles issues des lois des mailles et loi des nœuds $V_{CB} = V_{CE} + V_{EB}$ et $I_E = -I_B - I_C$.

Modèle de Elbers-Moll

Les équations modélisant le mieux le fonctionnement d'un transistor bipolaire sont celles données par le modèle de Elbers-Moll, qui assimile le transistor à deux diodes tête-bêche associées à deux générateurs de courant en parallèle :

$$\begin{aligned} I_C &= I_S \cdot \left[\left(e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} - e^{\frac{V_{BC}}{V_T}} \right) - \frac{1}{\beta} \left(e^{\frac{V_{BC}}{V_T}} - 1 \right) \right] \\ I_E &= I_S \cdot \left[\frac{1}{\beta} \left(e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} - 1 \right) + \frac{1}{\beta} \left(e^{\frac{V_{BC}}{V_T}} - 1 \right) \right] \\ I_B &= I_S \cdot \left[\left(e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} - e^{\frac{V_{BC}}{V_T}} \right) - \frac{1}{\beta} \left(e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$



La résolution de ces équations redonne le réseau de caractéristiques de la figure 109 avec l'addition de la loi des mailles $V_{CB} = V_{CE} + V_{EB}$.

9.2.4 Régimes de fonctionnement d'un transistor bipolaire

Propriété 9.2 (Les trois régimes du transistor). *Selon le courant de base I_B , le transistor monté en émetteur commun sous une tension U_+ possède alors trois régimes de fonctionnement (voir figure 110) :*

1. *transistor bloqué : $I_B = 0 \Rightarrow I_C = 0$, CE se comporte comme un interrupteur ouvert car $V_{CE} = U_+$;*
2. *régime d'amplification linéaire : $I_C = \beta I_B$;*
3. *transistor saturé : $I_C \approx I_C^{max} < \beta I_B$, CE se comporte comme un quasi court-circuit car $V_{CE} \approx 0$ V.*

Le régime de fonctionnement bloqué correspond au cas où $I_B = 0$, puisqu'alors $V_{BE} < 0$ et la jonction émetteur-base est polarisée en inverse (bloquante). Le régime de fonctionnement saturé correspond au cas où I_B n'a plus aucune influence sur le fonctionnement du transistor et celui-ci se comporte comme une résistance de faible valeur (chute de tension < 1 V). Entre ces deux régimes, le courant de base I_B pilote proportionnellement le courant au collecteur I_C . Dans les trois cas, le fonctionnement du transistor bipolaire est décidé par le circuit électrique dans lequel il est introduit⁴⁹.

49. On rappelle que le fonctionnement de l'AO dépend de même du circuit dans lequel il est branché.

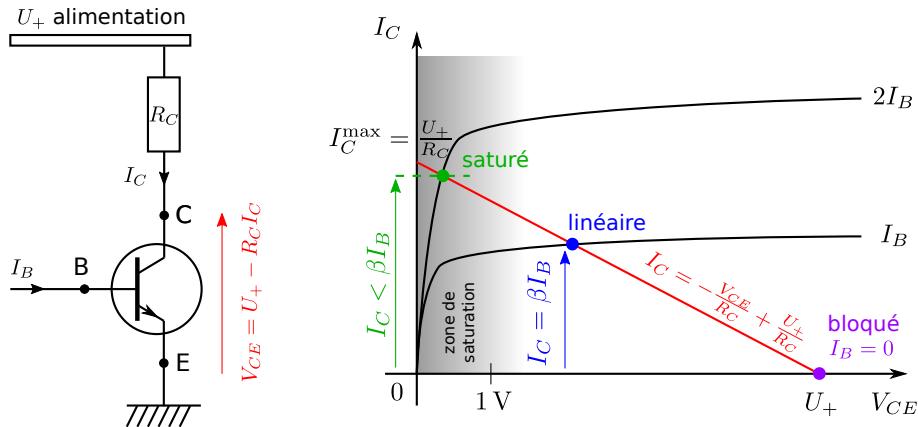


FIGURE 110 – Les trois régimes de fonctionnement du transistor monté en émetteur commun. On observe que selon le courant de base I_B injecté le transistor peut fonctionner selon trois régimes : bloqué ($I_B = 0$), linéaire ($I_B = I_C/\beta$) et saturé ($I_B > I_C/\beta$).

<ul style="list-style-type: none"> Transistor bloqué $I_B = 0 \rightarrow I_C = 0$ (2 jonctions P-N bloquées)		 <i>Robinet fermé : débit nul</i>
<ul style="list-style-type: none"> Régime d'amplification linéaire $I_C / I_B = \beta$ (1 P-N bloquée, 1 passante)		 <i>Robinet entrouvert : débit ∝ ouverture</i>
<ul style="list-style-type: none"> Transistor saturé $I_B > I_C^{\max} / \beta$ (2 jonctions P-N passantes)		 <i>Robinet saturé : débit indépendant de l'ouverture</i>

FIGURE 111 – Modélisation des trois régimes de fonctionnement du transistor et analogie hydraulique.

9.3 Applications de puissance

9.3.1 Notion d'amplification

Que veut dire en général amplification ? La notion d'amplification suppose usuellement un gain de puissance entre le signal d'entrée et le signal de sortie. Un amplificateur est donc un quadripôle actif possédant une source d'énergie extérieure. Contre-exemple : un transformateur élévateur de tension n'est pas un amplificateur.

Qu'est-ce qu'un bon amplificateur ? Il doit posséder en premier lieu un bon rendement et ses composants doivent supporter la chaleur à dissiper par les pertes. Un amplificateur audio de puissance reçoit généralement à son entrée un signal de faible amplitude (inférieur à 1 V) et de faible puissance et doit délivrer à sa sortie un signal de forte puissance

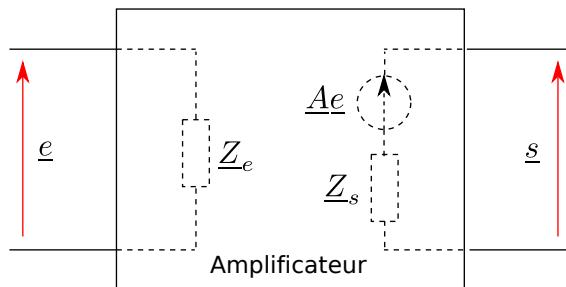


FIGURE 112 – Modèle équivalent d'un amplificateur. Suivant la technologie de l'amplificateur, une relation différente lie $e(t)$ à $s(t)$ mais elle est souvent du type $s(t) = A \times e(t)$ avec A une constante.

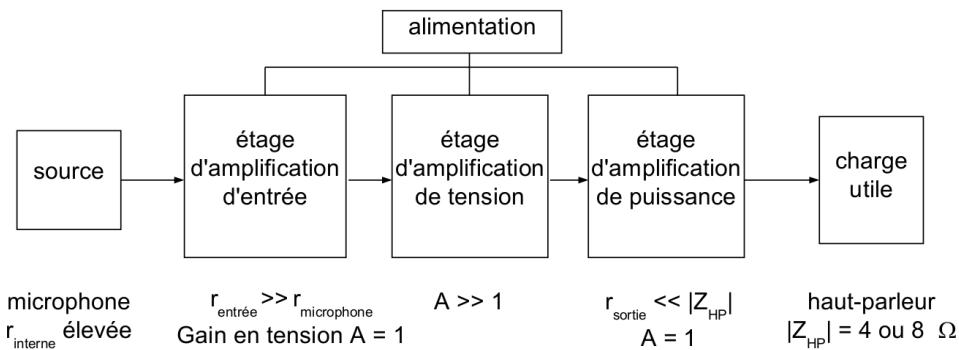


FIGURE 113 – Exemple typique d'un amplificateur de sonorisation. Les étages d'amplification d'entrée et de puissance sont ici des adaptateurs d'impédance.

(généralement entre 10 W et 100 W) dans une charge dont l'impédance est relativement faible (l'impédance nominale typique d'un haut-parleur est de 4Ω à 16Ω). L'étage de sortie doit donc produire un signal dont la tension et le courant ont des amplitudes élevées. En principe, il est souhaitable que le gain en tension de l'étage de sortie soit indépendant de l'impédance de la charge, ce qui lui permet de s'adapter à des haut-parleurs de différentes impédances sans modifier l'amplitude de la tension de sortie et donc sans provoquer de saturation ou de distorsion inacceptable. Pour satisfaire cette condition, il faut une configuration présentant une impédance de sortie Z_s très faible. En revanche, l'impédance d'entrée Z_e doit être élevée car le signal d'entrée ne possède pas un courant élevé on veut une image de la tension à amplifier la plus claire possible.

Pour avoir un bon amplificateur, il faut aussi que le système délivre un signal aussi fidèle que possible au signal d'entrée. Un bon amplificateur doit surmonter les problèmes de distorsion d'amplitude et harmonique, et éviter d'ajouter du bruit thermique ou du bruit de grenaille au signal amplifié.

Un AO est-il un bon amplificateur de puissance ? Son impédance de sortie est bien entendu faible, mais le courant de sortie est limité à 10 mA. La puissance maximale délivrable par un tel composant est donc d'environ $15 \text{ V} \times 10 \text{ mA} = 0.15 \text{ W}$ pour des signaux continus... ce qui est très peu ! Le problème de l'amplification de signal peut très bien être illustré par la problématique de l'amplification d'une voix. Un micro d'impédance élevée ne peut pas faire fonctionner directement un haut-parleur d'impédance faible, même avec un simple AO (essayez en TP). Une chaîne d'amplification complète doit donc être insérée entre les deux (voir figure 113), qui évite au maximum la distorsion de la voix.

9.3.2 Montages amplificateurs avec transistor bipolaire

Un transistor bipolaire peut être utilisé comme amplificateur de trois manières différentes. En effet, il est considéré comme un quadripôle dont une électrode est commune à l'entrée et la sortie et donc à potentiel fixé (par la masse ou un générateur de tension). Il existe donc trois façons de le considérer :

- émetteur commun, utilisé en amplification,
- collecteur commun, utilisé en adaptation d'impédance,
- base commune.

et dans chacun des cas l'entrée et la sortie sont les deux électrodes dont le potentiel n'est pas fixé.

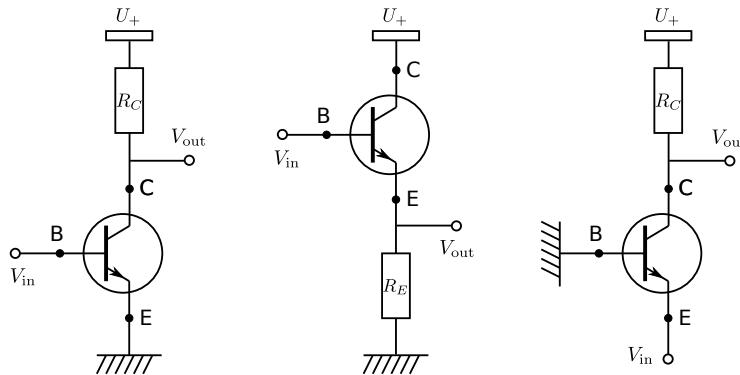


FIGURE 114 – Les trois schémas de base pour le montage des transistors : de gauche à droite les montages émetteur commun, collecteur commun puis base commune.

Dans le montage en émetteur commun, un courant est envoyé dans la base, commande le courant qui circule dans le collecteur et détermine des variations de tension aux bornes de la résistance de collecteur R_C et produit une tension de sortie V_{out} qui est une image amplifiée négativement du signal d'entrée.

Le montage en collecteur commun est appelé également émetteur suiveur. Dans ce montage, la tension de l'émetteur suit la tension de la base à 0.6 V près de façon à permettre au courant de base de piloter un courant plus important du collecteur vers l'émetteur. C'est un amplificateur de courant et un abaisseur d'impédance.

Le montage en base commune est plus rare et ne sera pas étudié dans ce cours.

9.3.3 Principe d'un suiveur de puissance

Le dispositif présenté figure 115, un montage en collecteur commun, est plus précisément un suiveur de tension permettant l'amplification de puissance. La tension de sortie est l'image de la tension d'entrée V_e à un décalage près de 0.6 V :

$$V_s = V_e - V_{BE} \approx V_e - 0.6 \text{ V} \quad (9.6)$$

Le domaine linéaire est donc limité inférieurement par cette tension, et supérieurement par la tension d'alimentation U_+ puisque $V_s > 0$ pour que la jonction base-émetteur soit passante et :

$$V_{CE} = U_+ - V_s \geq 1 \text{ V} \Rightarrow V_e \lesssim U_+ \quad (9.7)$$

Le débit en courant est en revanche potentiellement bien plus important, $I_E \approx I_C = \beta I_B$ et adapté à la charge R_u . On a donc réalisé une amplification de puissance par amplification

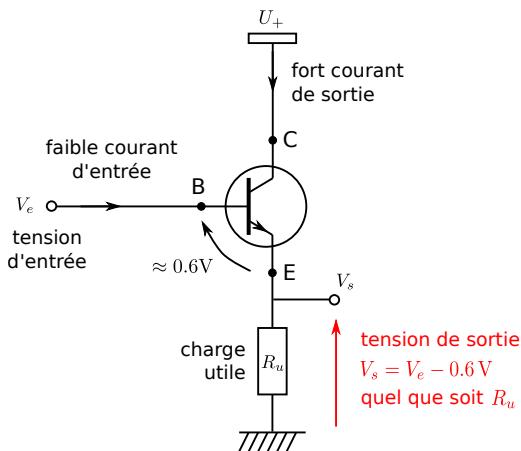


FIGURE 115 – Suiveur de puissance.

du courant. Une étude plus détaillée de ce circuit (et plus généralement des montages à émetteur commun) montre bien que ce circuit possède une impédance d'entrée élevée et une impédance de sortie faible.

9.3.4 Application à l'étage de puissance d'une alimentation stabilisée

Ici l'alimentation stabilisée est réalisée par une diode Zener, dont la caractéristique est de fournir une tension quasi-constante quelle que soit le courant qui la traverse lorsqu'elle est polarisée en inverse. L'étage de puissance d'une alimentation stabilisée est présenté figure 116. L'objectif de cet étage est de permettre à l'alimentation de fournir toujours la même différence de potentiel quel que soit l'appel de courant créé par la charge qui y est branchée. En faisant varier R_u et en mesurant la tension à ses bornes, on obtient typiquement la caractéristique figure 116 dont la pente moyenne ($\approx 0.1 \Omega$) donne la résistance de sortie moyenne de l'alimentation stabilisée. Notez que la puissance dissipée dans le transistor vaut environ 10 W puisque la tension V_{CE} vaut $U_+ - V_u = 10.6 \text{ V}$ et le courant $9.4/10 \approx 1 \text{ A}$. Cette puissance détruirait presque instantanément un transistor ordinaire qui ne peut supporter que 0.5 W au maximum. Il faut utiliser un transistor de puissance accolé à un radiateur.

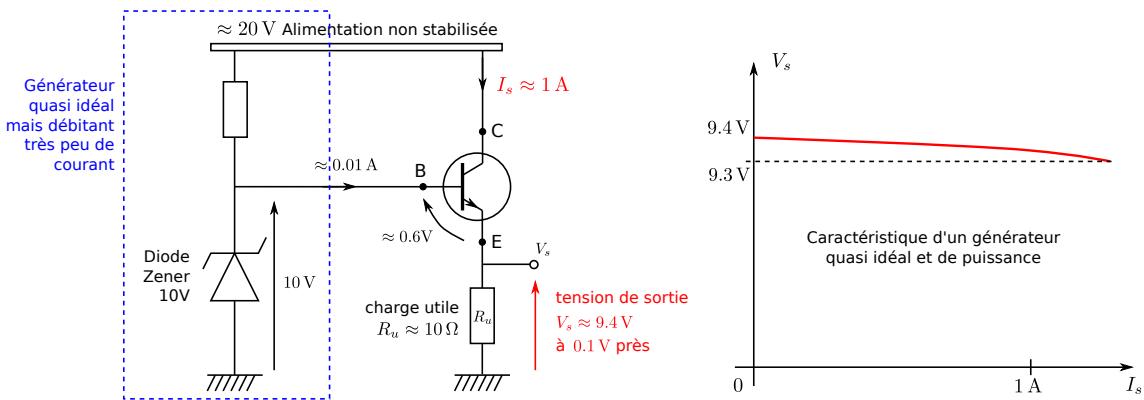


FIGURE 116 – Principe d'une alimentation stabilisée à l'aide d'un suiveur de puissance.

9.3.5 Amplificateur Push-Pull

L'objectif est de réaliser un suiveur de puissance pour signal alternatif, et qui possède un bon rendement.

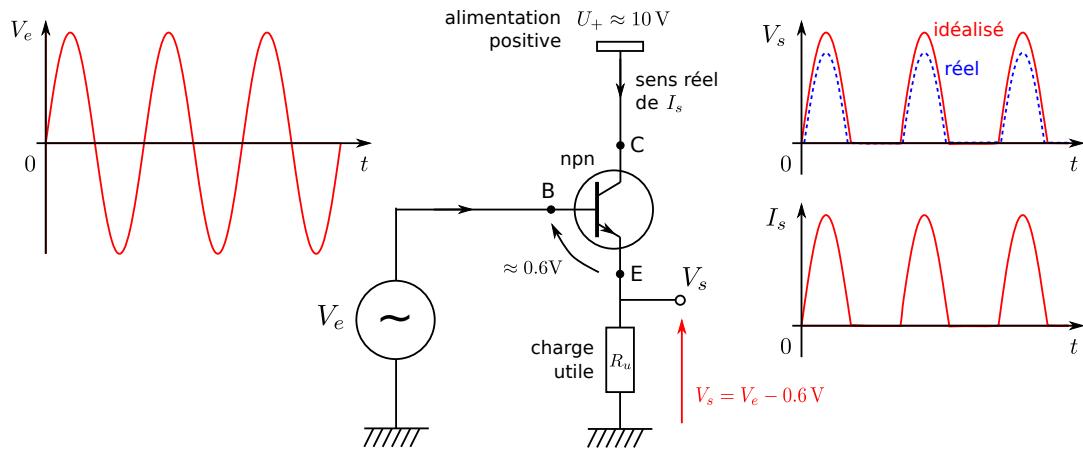


FIGURE 117 – Montage Push.

Montage Push Le montage Push est un suiveur de puissance adapté à la partie positive du signal d'entrée alternatif. La tension de sortie V_s est l'image de la partie positive de la tension d'entrée V_e mais avec un décalage de 0.6 V . Un transistor bipolaire npn est utilisé.

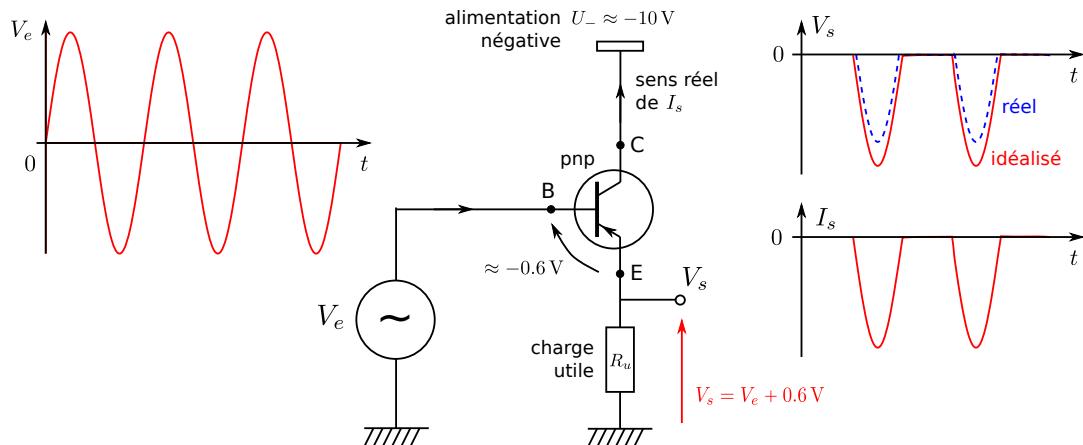


FIGURE 118 – Montage Pull.

Montage Pull Le montage Pull est un suiveur de puissance adapté à la partie négative du signal d'entrée alternatif. Un transistor bipolaire pnp est utilisé.

Montage Push-Pull Le montage Push-Pull constitue un suiveur de puissance pour le signal alternatif complet. En revanche, le décalage de 0.6 V crée une distorsion dans le signal de sortie. Si le signal d'entrée vient d'un microphone, le son en sortie de ce montage n'est donc pas fidèle au son original : il faut envisager une correction à ce montage (voir Duffait).

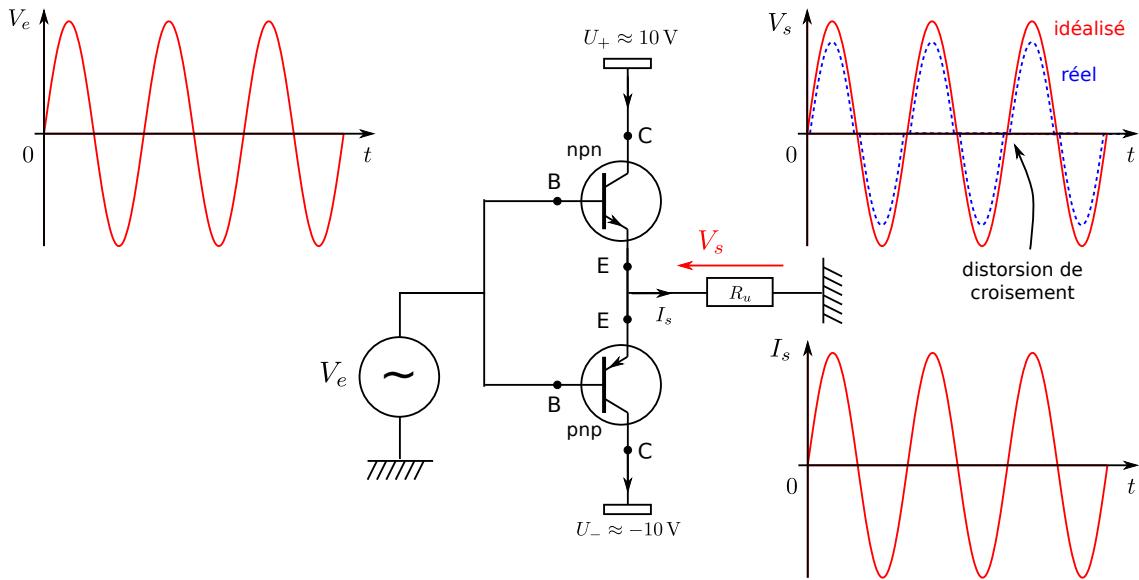


FIGURE 119 – Montage Push-Pull.

Calcul du rendement maximum η_{\max} de l'amplificateur Push-Pull Le rendement de l'amplificateur Push-Pull est défini par :

$$\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{alim}} + P_{\text{commande}}} \approx \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{alim}}} \quad (9.8)$$

Le rendement maximum est obtenu pour $V_s^{\text{crête}} \approx U_+$ (limite de l'écrêtage en sortie, ce qui correspond au cas étudié en TP). Pour calculer ce rendement maximum, il suffit d'étudier une demie période, ici l'alternance positive, pendant laquelle seul le transistor npn est passant⁵⁰ :

$$P_{\text{utile}} = \frac{(V_s^{\text{eff}})^2}{R_u} = \left(\frac{U_+}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{R_u} = \frac{U_+^2}{2R_u} \quad (9.9)$$

$$P_{\text{alim}} = \langle U_+ I_{\text{alim}+} \rangle = U_+ \langle I_{\text{alim}+} \rangle = U_+ \left\langle \frac{U_+}{R_u} \sin \omega t \right\rangle = \frac{U_+^2}{R_u} \langle \sin \omega t \rangle \quad (9.10)$$

La moyenne étant prise sur une demie période, on a :

$$\langle \sin x \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dx \sin x = \frac{2}{\pi} \quad (9.11)$$

D'où le rendement maximum :

$$\eta_{\max} \approx \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{alim}}} = \frac{\pi}{4} \approx 79\% \quad (9.12)$$

Le rendement maximum du montage Push-Pull est donc excellent ! Dans un amplificateur de puissance le rendement est un élément important : songer au cas d'un amplificateur de chaîne HI-FI qui pour fournir 100 W acoustique dissiperaient 1000 W sous forme de chaleur si le rendement n'était que de 10%. Plus généralement, si on ne travaille pas à la limite de l'écrêtage, le rendement en régime sinusoïdal devient :

$$\begin{cases} P_{\text{utile}} = \frac{(V_s^{\text{max}})^2}{2R_u} \\ P_{\text{alim}} = U_+ \frac{V_s^{\text{max}}}{R_u} \langle \sin \omega t \rangle \end{cases} \Rightarrow \eta \approx \frac{\pi}{4} \frac{V_s^{\text{max}}}{U_+} \quad (9.13)$$

50. Pendant ce temps le transistor pnp est bloqué et on a $P_{\text{alim}} = \langle U_+ I_{\text{alim}+} \rangle + \langle U_- I_{\text{alim}-} \rangle = \langle U_+ I_{\text{alim}+} \rangle$.

Pour mesurer le rendement du montage expérimentalement, il faut faire la mesure sur une période. V_s^{eff} est mesuré par un voltmètre alternatif RMS branché sur R_u , $\langle I_{\text{alim}+} \rangle$ et $\langle I_{\text{alim}-} \rangle$ sont mesurés avec des ampèremètres en mode continu branchés en série sur les deux alimentations.

9.4 Le transistor en commutation

Le transistor peut-être utilisé dans un régime binaire entre ses états bloqué et saturé. Cette utilisation non-linéaire du transistor est très importante : ordinateurs, alimentations à découpage, les hacheurs...

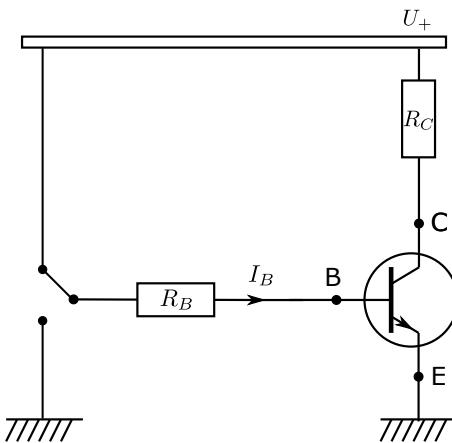


FIGURE 120 – Illustration du fonctionnement du transistor en commutation. En général il n'y a pas d'interrupteur sur l'entrée, mais dans notre cas il permet de discuter du fonctionnement du montage.

Le principe de fonctionnement du transistor en commutation peut être discuté à partir de la figure 120. Entre C et E , le transistor se comporte comme un interrupteur commandé par le courant I_B :

- cas bloqué : $I_B = 0 \Rightarrow I_C = 0$, CE se comporte comme un interrupteur ouvert donc $V_{CE} = U_+$
- cas saturé : quand I_B est suffisamment grand, CE se comporte comme un quasi court-circuit donc $V_{CE} \approx 0 \text{ V}$

Dans le cas saturé, plus précisément on se place à $V_{CE}^{\text{saturé}} \approx 0.1 \text{ V} \ll 0.6 \text{ V}$ donc à $V_{CE} < V_{BE}$. La saturation commence lorsque $I_B > I_C/\beta$ mais en pratique on se place dans le cas où $I_B \gg I_C/\beta$. Or on a :

$$I_C = \frac{U_+ - 0.6 \text{ V}}{R_C} \approx \frac{U_+}{R_C} \quad (9.14)$$

$$I_B = \frac{U_+ - 0.6 \text{ V}}{R_B} \approx \frac{U_+}{R_B} \quad (9.15)$$

d'où $R_B \ll \beta R_C$. En pratique, on prend usuellement $R_B \approx 10R_C$ puisque $\beta \gtrsim 100$. Encore une fois, ce sont les choix des valeurs de R_B et R_C qui déterminent le régime de fonctionnement du transistor.

Dans ce dispositif, la puissance perdue est très faible, sauf lors des transitions que l'on veut les plus courtes possibles, pour faire des opérations logiques les plus rapides possibles.

A Annexe 1 : Bibliographie indicative

Références

Électromagnétisme :

- [1] Olivier S., Gié H. et Sarmant J.P., *Physique Spé. PC* et PC - cours et exercices d'application*, Tec & Doc, 2000, AG PhA1 OLI.
- [2] Jackson J.D., *Électrodynamique classique : cours et exercices d'électromagnétisme*, Dunod, 2001, AG PhF1 JAC.
- [3] Reignier J., *De l'éther de Fresnel à la relativité restreinte*, Annales Fondation Louis de Broglie, Volume 29, nos 1-2, 2004, <http://aflb.ensmp.fr/AFLB-291/aflb291p021.pdf>
- [4] Jech B., *Variations sur le potentiel vecteur*, BUP 815, juin 1999.
- [5] Jech B., *Variations sur le potentiel vecteur*, BUP 830, janvier 2001.
- [6] Domps A., *Remarques sur l'ARQS en électromagnétisme*, BUP 851, février 2003.
- [7] Rousseaux G. et Domps A., *Remarques supplémentaires sur l'ARQS en électromagnétisme*, BUP 868, novembre 2004.
- [8] Augier D., <http://augier.david.free.fr/notes/tension.pdf>.
- [9] Fleckinger R., Carl R. et Pérez J.P., *Faut-il, en régime quasi-stationnaire, tuer la différence de potentiel ?*, BUP 722, mars 1990.
- [10] Boussié A., *Quelle tension mesure un voltmètre en régime quasi-statique ?*, BUP 744, mai 1992.
- [11] Wheeler J.T., *Gauging Newton's Law*, Can.J.Phys.85 :307-344, 2007, arXiv :hep-th/0305017, <https://arxiv.org/abs/hep-th/0305017>.

Electrocinétique :

- [12] Gréacias P. et Migeon J.P., *Physique Sup. MPSI et PTSI - cours et exercices d'application*, Tec & Doc, 2003, AG PhA1 GRE.
- [13] Faroux R. et Renault J.P., *Électrocinétique & électronique : cours et 93 exercices corrigés*, Dunod, 1997, AG PhA1 FAR.
- [14] Brébec J.M., *Électronique, electrocinétique I et II : 1ère année MPSI-PCSI-PTSI, 1ère année*, Hachette, 1995, AG PhA1 BRE.
- [15] Delacressonniere B. et More C., *Électronique : 1re année*, Tec & Doc, 1995, AG PhA1 DEL.
- [16] Vincent, Adrien F., *Vers une utilisation synaptique de composants mémoires innovants pour l'électronique neuro-inspirée*, Thèse de doctorat dirigée par Galdin-Retailleau Sylvie en électronique et optoélectronique, nano- et microtechnologies, Paris Saclay, 2017, <http://www.theses.fr/2017SACL034>

Toute l'électronique et plus de façon très pédagogique :

- [17] Horowitz P., *Traité de l'électronique analogique et numérique. Volume 1. , Techniques analogiques*, Elektor, 1996, AG PhF6 HOR

Filtres et systèmes bouclés :

- [18] Olivier S., More C. et Gié H., *Physique 2e année PSI PSI**, Tec & Doc, 2000, AG PhA1 OLI.

[19] Brébec J.M., *Électronique : 2e année, PSI-PSI* I et II*, Hachette, 1997, AG PhA1 BRE.

[20] Manneville F. et Esquieu J., *Electronique : systèmes bouclés linéaires, de communication et de filtrage : cours et exercices corrigés*, Dunod, 2001, AG PhF6 MAN.

Télécommunications :

[21] More C., *Transmission de signaux : cours et exercices d'électronique*, Tec & Doc, 1995, AG PhF6 MOR.

[22] Cottet F., *Traitemet des signaux et acquisition de données - cours et exercices corrigés*, Dunod, 2002, AG PhF6 COT.

Diodes et Transistors :

[23] Niard J., *Électronique - terminale F2*, Nathan, 1983, AG PhF6 NIA.

[24] Malvino A.P., *Principes d'électronique*, MacGraw-Hill, 1988, AG PhZ MAL.

[25] Ngo C., *Physique des semi-conducteurs : cours et exercices corrigés*, Dunod, 2012, AG PhH8 NGO.

[26] Colinge J.P. et Van de Wiele F., *Physique des dispositifs semi-conducteurs*, De Boeck, 1996, AG PhF6 COL.

[27] Duffait R. et Lièvre J.P., *Expériences d'électronique : agrégation de sciences physiques*, chap. IV et VI, Bréal, 1999, AG PhA3 DUF.

Électronique numérique :

[28] Horowitz P., *Traité de l'électronique analogique et numérique. Volume 2. , Techniques numériques et analogiques*, Elektor, 1996, AG PhF6 HOR

B Annexe 2 : Quelques solutions d'exercices

B.1 Chapitre 2

1. ...

2. On peut toujours supposer que $V_D = 0$. Alors par les théorèmes de Millmann aux points A et B :

$$V_A = \frac{-i_D + \frac{0}{\underline{Z}_2} + \frac{e}{\underline{Z}_1}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}}, \quad V_B = \frac{i_D + \frac{0}{\underline{Z}_3} + \frac{e}{\underline{Z}_4}}{\frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4}} \quad (\text{B.1})$$

Or d'après la loi d'Ohm on a $V_A - V_B = r_D i_D$ donc on obtient :

$$i_D = \frac{e \left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} - \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \right)}{r_D + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}} \quad (\text{B.2})$$

qui s'annule pour $\underline{Z}_2 \underline{Z}_4 = \underline{Z}_1 \underline{Z}_3$.

3. 1) On a $u_1 = E_1 - R_1 i'_1 = -R'_1 i''_1$ et $i_1 = i'_1 + i''_1$ d'où la relation $u_1(i_1)$. 2) On a $u_2 = -R_2 i_2 - R'_2 i'_2$ et $i_2 = \eta_2 + i'^2$ d'où la relation $u_2(i_2)$. Dans les deux cas on a une tension entre A et B non nulle pour un courant nul donc ce sont des dipôles acrtifs.

4. 1) Si une source de tension est associée en parallèle avec un dipôle (qui n'est pas assimilable à une source de tension) l'ensemble est équivalent à la source de tension seule. Si une source de courant est associée en série avec un dipôle (qui n'est pas assimilable à une source de courant) l'ensemble est équivalent à la source de courant seule. Ainsi, en transformant les générateurs de tension en leur équivalent Norton, associant ces derniers en parallèle, et revenant à une représentation de Thévenin, on obtient $E_{\text{Th}} = e + R\eta$ et $R_{\text{Th}} = R/2$. 2) $E_{\text{Th}} = E/4 + 2R\eta$ et $R_{\text{Th}} = R/2$.

B.2 Chapitre 4

1. (a) $\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + (3 - K)jRC\omega - (RC\omega)^2}$
- (b) $\underline{H}(j\omega) = \frac{-K(RC\omega)^2}{1 + (3 - K)jRC\omega - (RC\omega)^2}$
2. $\underline{H}(j\omega) = \frac{-Y_1 Y_3}{Y_2 Y_3 + Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}$ et $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + j\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{RC\omega}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{RC\omega} \right)}$

B.3 Chapitre 5

1. $H_{FTBF}(p) = \frac{\frac{K}{1+\tau p}}{1+\frac{KK_d}{1+\tau p}} = \frac{K}{1+KK_d} \times \frac{1}{1+\frac{\tau p}{1+KK_d}} = \frac{K'}{1+\tau' p}$ avec $K' = K/(KK_d + 1)$ et $\tau' = \tau/(KK_d + 1)$. La bande passante d'un filtre d'ordre 1 est $\Delta\omega = 1/\tau$ donc $K'\Delta\omega' = K\Delta\omega$

B.4 Chapitre 6

1. (a) Résolution du point de vue de l'oscillateur à désamortissement : le montage à résistance négative se comporte comme une résistance de valeur $-R_n$ en régime linéaire et $+R$ en régime saturé, en parallèle de la résistance R_p . L'équation différentielle dans le régime linéaire de la tension v au borne du résonateur s'écrit :

$$\ddot{v} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_p} - \frac{1}{R_n} \right) \dot{v} + \frac{1}{LC} v = 0 \quad (\text{B.3})$$

En régime saturé, elle devient :

$$\ddot{v} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{R} \right) \dot{v} + \frac{1}{LC} v = 0 \quad (\text{B.4})$$

Dans le régime saturé, les oscillations sont amorties qui permet de quitter ce régime et de retourner vers le régime linéaire. Dans ce dernier, si $R_p > R_n$ alors le coefficient d'amortissement devient négatif et les oscillations démarrent.

- (b) Résolution du point de vue de l'oscillateur à boucle de réaction : l'AO joue le rôle d'un amplificateur de gain $A = 1 + R/R_n$ suivi d'un filtre. La fonction de transfert en boucle ouverte d'écrit :

$$\underline{H}_{\text{FTBO}} = \frac{1 + \frac{R}{R_n}}{1 + \frac{R}{R_p}} \frac{1}{1 + \frac{RR_p}{R+R_p} \left(\frac{1}{jL\omega} + jC\omega \right)} = \frac{K}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (\text{B.5})$$

Le point $+1$ est atteint par la fonction de transfert en boucle ouverte à $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ pour $K \geq 1 \Leftrightarrow R_n \leq R_p$.

2. ...

3. On a un circuit RC soumis à deux régimes : tension d'entrée V_{sat} avec condition initiale $u_c(0) = -u_0$ et tension d'entrée $-V_{\text{sat}}$ avec condition initiale $u_c(0) = +u_0$. L'équation différentielle résolu du circuit RC donne dans le premier cas :

$$u_c(t) = V_{\text{sat}} - (u_0 + V_{\text{sat}})e^{-t/RC} \quad (\text{B.6})$$

Résoudre l'équation $u_c(t_1) = u_0$ donne $t_1 = RC \ln \left(\frac{V_{\text{sat}}+u_0}{V_{\text{sat}}-u_0} \right)$. Dans le deuxième cas, on obtient de la même manière $t_2 = RC \ln \left(\frac{V_{\text{sat}}+u_0}{V_{\text{sat}}-u_0} \right) = t_1$, d'où la formule 6.20.

4. Il faut remarquer qu'une équation différentielle d'ordre 2 est instable si tous les coefficients ne sont pas du même signe, donc étudier le cas $K_d > 1/K$.

C Annexe 3 : Programme d'électronique en PSI

	<p>risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.</p>
--	---

Partie 3 - Formation disciplinaire

ÉLECTRONIQUE

Présentation

Cette partie renforce et complète l'étude des circuits électriques linéaires menée dans la partie « signaux physiques » du programme de première année. Ainsi, les notions de filtrage et d'analyse spectrale sont réinvesties, en particulier dans les activités expérimentales. Le programme de deuxième année ajoute la rétroaction et le bouclage des systèmes linéaires dans le but d'aborder les notions suivantes :

- la stabilité ;
- les oscillateurs ;
- la réalisation de filtres actifs à forte impédance d'entrée pour une association en cascade.

Ces différentes thématiques sont illustrées à l'aide de l'amplificateur linéaire intégré ALI (également appelé amplificateur opérationnel) dont l'étude n'est pas une fin en soi mais un outil permettant des réalisations expérimentales variées.

Par ailleurs, des exemples de manifestations des non linéarités sont abordés à l'occasion de la saturation d'un amplificateur ou de la réalisation d'une fonction mémoire (comparateur à hystérésis).

Afin de compléter l'approche analogique des circuits électriques, un module à vocation expérimentale est consacré au traitement numérique des signaux à travers les sujets suivants :

- l'échantillonnage et le repliement de spectre ;
- le filtrage numérique ;
- les conversions analogique/numérique et numérique/analogique.

Enfin, la problématique de la transmission d'un signal temporel codant une information est abordée dans l'étude et la réalisation d'une modulation, en relation avec la partie du programme consacrée à la propagation des ondes électromagnétiques.

Objectifs de formation

- Passer d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle et réciproquement.
- Analyser la stabilité d'un système linéaire.
- Étudier des manifestations des non linéarités.
- Effectuer quelques opérations de traitement du signal en électronique analogique et numérique.

Le bloc 1 s'intéresse aux propriétés des systèmes linéaires déjà abordés en première année. Les capacités relatives au filtrage et à la décomposition harmonique d'un signal périodique sont révisées sans ajout de nouvelles compétences. Dans le but de faciliter le lien avec le cours de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur, la notation symbolique de la fonction de transfert $H(p)$ est utilisée sans faire référence à la transformée de Laplace. L'étude est complétée par une analyse de la stabilité des systèmes du premier et du second ordre en examinant le régime transitoire associé à la relation différentielle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Stabilité des systèmes linéaires	
Fonction de transfert d'un système entrée-sortie linéaire continu et invariant.	Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (relation différentielle).
Stabilité.	Discuter la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 d'après les signes des coefficients de la relation différentielle ou de la fonction de transfert.

Le bloc 2 illustre quelques propriétés relatives à la rétroaction sur l'exemple de l'amplificateur linéaire intégré. L'identification de certains montages à des systèmes bouclés permet de faire le lien avec le cours d'automatique de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur. L'étude des circuits est strictement limitée à des situations pouvant être facilement abordées avec les outils introduits en première année (loi des mailles, loi des nœuds, diviseur de tension). La vitesse limite de balayage de l'ALI est uniquement évoquée en TP afin d'identifier les distorsions harmoniques traduisant un comportement non linéaire. Les limitations associées aux courants de polarisation et la tension de décalage ne sont pas étudiées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Rétroaction	
Modèle de l'ALI défini par une résistance d'entrée infinie, une résistance de sortie nulle, une fonction de transfert du premier ordre en régime linéaire, une saturation de la tension de sortie, une saturation de l'intensité de sortie.	Citer les hypothèses du modèle et les ordres de grandeur du gain différentiel statique et du temps de réponse.
Montages amplificateur non inverseur et comparateur à hystérésis.	Représenter les relations entre les tensions d'entrée et de sortie par un schéma fonctionnel associant un soustracteur, un passe-bas du premier ordre et un opérateur proportionnel. Analyser la stabilité du régime linéaire.
Compromis gain/bande passante d'un système bouclé du premier ordre.	Établir la conservation du produit gain-bande passante du montage non inverseur.
Limite en fréquence du fonctionnement linéaire.	Identifier la manifestation de la vitesse limite de balayage d'un ALI dans un montage.
Cas limite d'un ALI idéal de gain infini en régime linéaire.	Identifier la présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse comme un indice de probable stabilité du régime linéaire. Établir la relation entrée-sortie des montages non inverseur, suiveur, inverseur, intégrateur. Exprimer les impédances d'entrée de ces montages. Expliquer l'intérêt d'une forte impédance d'entrée et d'une faible impédance de sortie pour une association en cascade.
Cas limite d'un ALI idéal de gain infini en régime saturé.	Identifier l'absence de rétroaction ou la présence d'une unique rétroaction sur la borne non inverseuse comme l'indice d'un probable comportement en saturation. Établir la relation entrée-sortie d'un comparateur simple. Pour une entrée sinusoïdale, faire le lien entre la non linéarité du système et la génération d'harmoniques en sortie.

	Établir le cycle d'un comparateur à hystérésis. Décrire le phénomène d'hystérésis en relation avec la notion de fonction mémoire.
--	---

Le bloc 3 s'intéresse à une étude non exhaustive des oscillateurs en électronique. Les exemples sont choisis à l'initiative du professeur et les fonctions de transfert des filtres utilisés sont fournies. En TP, on complète l'étude par une analyse spectrale des signaux.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Oscillateurs Oscillateur quasi-sinusoidal réalisé en bouclant un filtre passe-bande du deuxième ordre avec un amplificateur.	Exprimer les conditions théoriques (gain et fréquence) d'auto-oscillation sinusoïdale d'un système linéaire bouclé. Analyser sur l'équation différentielle l'inégalité que doit vérifier le gain de l'amplificateur afin d'assurer le démarrage des oscillations. Interpréter le rôle des non linéarités dans la stabilisation de l'amplitude des oscillations. Réaliser un oscillateur quasi-sinusoidal et mettre en évidence la distorsion harmonique des signaux par une analyse spectrale.
	Approche documentaire : en relation avec le cours sur les ondes, décrire le fonctionnement d'un oscillateur optique (laser) en termes de système bouclé auto-oscillant. Relier les fréquences des modes possibles à la taille de la cavité.
Oscillateur de relaxation associant un intégrateur et un comparateur à hystérésis. Générateur de signaux non sinusoïdaux.	Décrire les différentes séquences de fonctionnement. Exprimer les conditions de basculement. Déterminer la période d'oscillation. Réaliser un oscillateur de relaxation et effectuer l'analyse spectrale des signaux générés.

Le bloc 4 est exclusivement étudié de manière expérimentale et aborde la question du traitement numérique du signal dans le prolongement du programme de première année. Le professeur introduira les thèmes proposés au fur et à mesure des besoins et en relation avec les autres sujets d'étude.

Le phénomène de repliement de spectre est expliqué qualitativement à l'aide d'une analogie stroboscopique, l'objectif étant de mettre en place la condition de Nyquist-Shannon et de réaliser convenablement une acquisition numérique en vue d'une analyse spectrale.

Afin de mettre en évidence d'autres effets associés à l'échantillonnage, on réalise de manière comparative un filtre analogique passe-bas et un filtre numérique remplissant la même fonction, ce dernier étant réalisé à l'aide d'une feuille de calcul traitant l'acquisition numérique d'une entrée analogique, un CNA restituant ensuite une sortie analogique. La transformée en Z est hors programme, on étudie expérimentalement l'influence de la fréquence d'échantillonnage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Electronique numérique	
Échantillonnage.	Décrire le mouvement apparent d'un segment tournant observé avec un stroboscope. Expliquer l'influence de la fréquence d'échantillonnage.
Condition de Nyquist-Shannon.	Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre au moyen d'un oscilloscope numérique ou d'un logiciel de calcul numérique.
Analyse spectrale numérique.	Choisir les paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une acquisition numérique afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.
Filtrage numérique.	Réaliser un filtrage numérique passe-bas d'une acquisition, et mettre en évidence la limitation introduite par l'échantillonnage.
Porte logique.	Mettre en œuvre une porte logique pour réaliser un oscillateur.

Le bloc 5 est l'occasion de faire le lien entre la propagation des ondes électromagnétiques et le traitement du signal afin d'expliquer la problématique de la transmission d'une information. Cette étude sera illustrée en TP à l'aide d'un multiplieur analogique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5. Modulation-Démodulation	
Transmission d'un signal codant une information variant dans le temps.	Définir un signal modulé en amplitude, en fréquence, en phase. Citer les ordres de grandeur des fréquences utilisées pour les signaux radio AM, FM, la téléphonie mobile. Approche documentaire : expliquer l'intérêt et la nécessité de la modulation pour les transmissions hertziennes.
Modulation d'amplitude.	Interpréter le signal modulé comme le produit d'une porteuse par une modulante. Décrire le spectre d'un signal modulé.
Démodulation d'amplitude.	À partir de l'analyse fréquentielle, justifier la nécessité d'utiliser une opération non linéaire. Expliquer le principe de la détection synchrone. Réaliser une modulation d'amplitude et une démodulation synchrone avec un multiplieur analogique.