

Leçon : Lois de conservation en dynamique

Gabriel Le Doudic

Préparation à l'agrégation de Rennes

21 mai 2024

Niveau : CPGE

Prérequis : Cinématique et dynamique d'un point matériel

: Référentiels galiléens

: Force d'inertie

insertsubsection

Théorème du moment cinétique :

$$\vec{\mathcal{L}}_O = \vec{OM} \wedge m \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

Hors si \vec{L} est constante, sa direction l'est aussi. Cela signifie que \vec{OM} évolue dans un espace perpendiculaire à une direction constante : un plan.

insertsubsection

Théorème du moment cinétique :

$$\vec{\mathcal{L}}_O = \vec{OM} \wedge m \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

Hors si \vec{L} est constante, sa direction l'est aussi. Cela signifie que \vec{OM} évolue dans un espace perpendiculaire à une direction constante : un plan.

Relation fondamentale

$$\begin{cases} \vec{u}_r : & \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & = -G\frac{M}{r^2} \\ \vec{u}_\theta : & 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} & = 0 \end{cases} \quad (1)$$

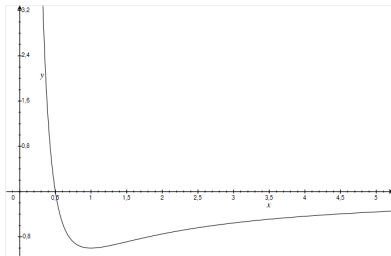
- la vitesse angulaire Keplerienne $\Omega(r_c) = \sqrt{\frac{GM}{r_c^3}}$
- La loi des aires $r^2\dot{\theta} = C$

Conséquences de la conservation de l'énergie-cas des satellites

Théorème de l'énergie mécanique

$$E_{Peff} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} \quad (2)$$

$$E_m \geq E_p :$$



$E_m = E_c + E_p$ comme $E_c > 0$ cela implique que les états accessibles :

- si $E_m = \min(E_p)$: mouvement circulaire
- si $\min(E_p) < E_m < 0$: deux intersections, deux solutions r_{min} et r_{max} . On a un mouvement qui oscille entre ces deux valeurs.
- si $E_m > 0$, il y a une intersection, mouvement entre r_{min} et $+\infty$.

Conséquences de la conservation de l'énergie-cas des satellites

On peut réécrire l'équation sur \vec{u}_r :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}$$

Cette équation a pour solution :

$$u = \frac{GM}{C^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

On retrouve alors l'équation d'une conique sur r

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$$

On peut exprimer l'excentricité en fonction de l'énergie mécanique tel que :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Em}{GMm}} \quad (3)$$

Illustrer avec programme python