

## TD n°1 : Energies et potentiels

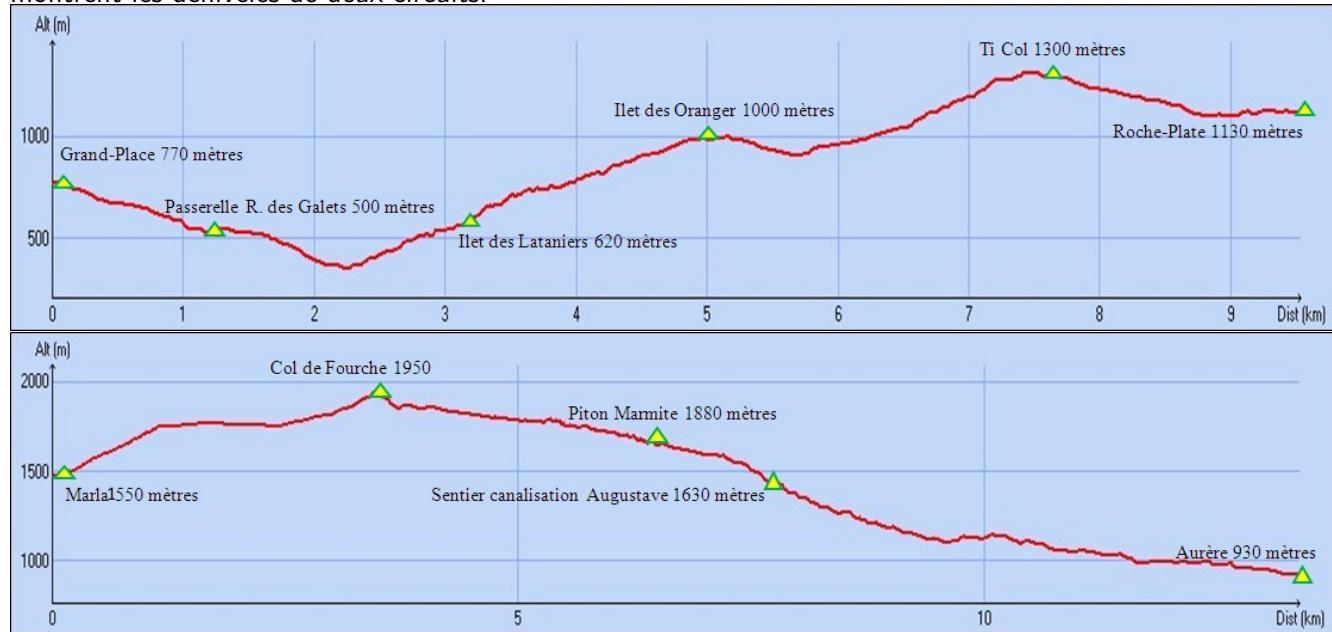
Dans tous les exercices « exprimer » signifie donner l'expression littérale et « calculer » demande l'expression littérale puis l'application numérique. Les calculettes sont admises en T.D.

### Données utiles pour les exercices

- accélération de la pesanteur  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$
- 1 cal = 4.19 J
- charge élémentaire de l'électron  $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

### 1 Randonnées dans le cirque de Mafate

Le cirque de Mafate, au cœur de l'île de la Réunion, n'est accessible que par les sentiers ou les airs. C'est un lieu privilégié de randonnées. On s'intéresse à un randonneur de masse  $m = 80 \text{ kg}$ . Les figures ci-contre montrent les dénivelés de deux circuits.



1. Exprimer l'énergie potentielle  $E_p(z)$  du randonneur à une altitude  $z$ , pour un axe  $Oz$  de référence des altitudes partant du niveau de la mer et orienté vers le haut. Choisir une énergie nulle pour une altitude nulle. Indiquer le signe du travail de la pesanteur et des variations d'énergie potentielle gravitationnelle si on monte ou si on descend en altitude.

**Solution:**  $dW = m\vec{g} \cdot \vec{dz} = -mg dz = -dE_p \Rightarrow dE_p = +mg dz$   
 descente :  $dz < 0$ ,  $dW > 0$  moteur et on a bien une diminution d'énergie  $dE_p < 0$

montée :  $dz > 0$ ,  $dW < 0$  résistif et on a bien une augmentation d'énergie  $dE_p > 0$  (à fournir par les muscles et le métabolisme). On reconstruit plus d'énergie potentielle à plus haute altitude, disponible pour redescendre.

$$\int_0^z dE_p = mg \int_0^z dz \Rightarrow E_p(z) - E_p(0) = mg(z - 0) \text{ avec } E_p(0) = 0 \text{ d'où } E_p(z) = mgz$$

2. Calculer l'énergie potentielle  $\Delta E_1$  à fournir pour aller de l'îlet des Lataniers au Ti col en prenant en compte un rendement d'énergie musculaire  $\eta = 20\%$ . Est-ce la seule énergie musculaire à fournir ?

**Solution:** La variation d'énergie potentielle ne dépend que des points de départ et d'arrivée et non du fait qu'il a fallu monter à l'îlet des Orangers et redescendre pour remonter vers le col.

$$\Delta E_{p1} = mg(z_{col} - z_{ilet}) = 5.34e5 \text{ J} = 127 \text{ kcal}$$

$$\Delta E_1 = \Delta E_{p1}/\eta = 637 \text{ kcal}$$

On récupère de l'énergie potentielle gravitationnelle dans la descente après l'îlet des Orangers, mais on doit aussi freiner la descente et pour cela consommer de l'énergie musculaire. Donc  $\Delta E_1$  n'est qu'une limite inférieure de l'énergie à fournir.

3. Vous partez en vélo (de masse  $m' = 10 \text{ kg}$ ), sans vitesse initiale, du col de Fourche et vous arrivez sans freiner au piton Marmite. Quelle serait votre vitesse  $v$  à l'arrivée en l'absence de frottements sur le sol et dans l'air. Cette vitesse dépend-elle de la masse de bagages que vous emportez sur le vélo ? Dépend-elle du nombre de remontées qui jalonnent le parcours ?

**Solution:** La pesanteur dérive de l'énergie potentielle  $E_p$  donc on peut écrire la conservation de l'énergie totale en tout point du trajet pour la masse  $M = m + m'$  de l'ensemble randonneur et vélo.

$$E_{cin} + E_p = cte = 0 + E_{pF} = Mgz_F = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgz_M \Rightarrow \frac{1}{2}Mv^2 = Mg(z_F - z_M) \Rightarrow v = \sqrt{2g(z_F - z_M)} = 37.06 \text{ m/s} = 133.4 \text{ km/h} ! \text{ Mieux vaut avoir de bons freins sur le vélo !}$$

Cette vitesse ne dépend ni du relief intermédiaire, ni de la masse  $M$  du mobile.

4. Calculer le gain ou perte d'énergie gravitationnelle pour aller de Marla en Aurère à pied.

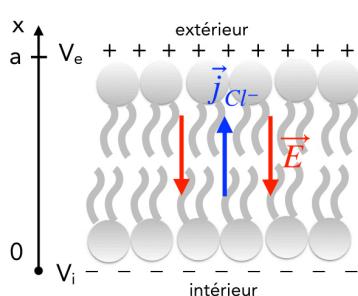
**Solution:** La variation d'énergie potentielle ne dépend que des points de départ et d'arrivée, donc on perd de l'énergie grav.

$$\Delta E_p = mg(z_{Aurere} - z_{Marla}) = mg(930 - 1550) = -487 \text{ kJ} = -116 \text{ kcal.}$$

## 2 Membrane de neurone

La membrane lipidique d'un axone de neurone est polarisée au repos de manière à avoir une différence de potentiel électrique entre l'intérieur ( $V_i$ ) et l'extérieur ( $V_e$ ) du neurone telle que  $V_i - V_e = -70 \text{ mV}$ .

1. Indiquer sur un dessin où se trouvent les excès de charges électriques positives et négatives, le sens du champ électrique au travers de la membrane et le sens du courant d'ions  $Cl^-$ .



**Solution:**

2. En supposant le champ uniforme au travers de la membrane d'épaisseur  $a = 6 \text{ nm}$ , calculer l'intensité du champ électrique. Comparer à la valeur maximale de  $0,6 \text{ V/m}$  recommandée pour l'exposition au champ électrique induit par les téléphones portables.

**Solution:**  $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} = E dx \Rightarrow \int_0^a dV = V_e - V_i = E \int_0^a dx = E(a - 0) = aE \Rightarrow E = \frac{V_e - V_i}{a} = 1.17e7 \text{ V/m}$

Les portables ne nuisent pas aux effets électriques qui permettent la conduction nerveuse (mais le dépôt d'énergie des ondes des portables n'est pas anodin).

3. Calculer l'énergie électrique  $\Delta E_e$  échangée par un ion  $Cl^-$  pendant la traversée spontanée de la membrane. Cette énergie est-elle perdue ou acquise par l'ion ?

**Solution:** mouvement de l'intérieur vers l'extérieur :  $\Delta E_e = -e(V_e - V_i) = -70 \text{ meV}$ .

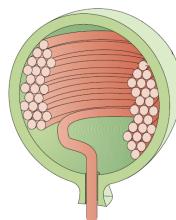
C'est bien une énergie perdue lors d'un mouvement spontané sous l'effet du champ (travail moteur du champ).

4. Comparer au maximum d'énergie potentielle gravitationnelle  $\Delta E_g$  que peut échanger l'ion de masse  $m = 5.9 \times 10^{-26} \text{ kg}$  à la traversée de la membrane.

**Solution:** Maximum de  $E_g$  quand le  $\vec{E}$  est (anti)parallèle à  $\vec{g}$  :  $\Delta E_g = mga = 3.5e-33 \text{ J} = 2.2e-14 \text{ eV} \ll \Delta E_e$

### 3 ADN de virus bactériophage

L'ADN d'un virus bactériophage a un diamètre  $D = 2 \text{ nm}$  et une longueur  $L = 7000 \text{ nm}$ . Il est enroulé dans un volume sphérique, de rayon  $R = 20 \text{ nm}$ , fourni par la capsidé selon le schéma ci-contre. Comme l'ADN est un acide fort il est fortement chargé en solution. Les groupes phosphate portent une charge élémentaire  $-e$  environ tous les  $\delta l = 0.34 \text{ nm}$ . Maintenir un équilibre requiert donc de fournir une énergie de confinement à toutes ces charges. Pour le bactériophage  $\phi_{29}$  cette énergie est fournie par une machine à protéines alimentée par l'hydrolyse de l'ATP. On note  $\epsilon = 6.95 \times 10^{-10} \text{ F/m}$  la permittivité diélectrique des milieux aquueux.



1. Calculer la densité linéique de charge  $\lambda$  de l'ADN et la charge totale  $Q$  de l'ADN.

**Solution:**  $\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{-e}{\Delta l} = -4.7e-10 \text{ C/m}$   
 $Q = \lambda L = -3.3e-15 \text{ C}$

2. Calculer le travail  $W$  de la force de Coulomb échangé pour approcher deux charges de groupe phosphate de l'infini à la distance  $2D$ . Commenter son signe.

**Solution:** force subie par la seconde charge  $-e$  dans le champ de la première :  $\vec{F} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon r^2} \vec{u}_r$  bien radiale "sortante" car les 2 charges se repoussent.

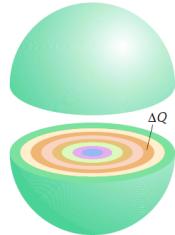
$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon r^2} dr \Rightarrow W = \int_{\infty}^{2D} dW = \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \int_{\infty}^{2D} \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{2D} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon D} = -7.35e-22 \text{ J} = -4.6 \text{ meV}$$

qui est bien négatif car résistif.

3. Retrouver le travail  $W$  sachant que le potentiel électrique à la distance  $r$  d'une charge  $Q$  isolée vaut  $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$ .

**Solution:** Le potentiel de la première charge  $-e$  vaut  $V(r) = -\frac{e}{4\pi\epsilon r}$ . L'énergie potentielle de la seconde charge  $-e$  dans le champ de la première vaut  $E_p(r) = -eV(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon r}$ . Le travail est égal et opposé à la variation d'énergie potentiel donc  $W = -[E_p(2D) - E_p(\infty)] = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon D}$ . ok

On cherche à déterminer l'énergie électrique nécessaire pour accumuler toutes les charges de l'ADN dans la capsid. On fera l'hypothèse simplificatrice que les charges sont réparties uniformément en volume. Pour ce faire, nous allons calculer le travail nécessaire pour assembler successivement des coquilles sphériques d'épaisseur  $dr$  et de charge  $dq$ .



4. Exprimer la densité volumique  $\rho$  de charge dans la capsid, puis la charge  $dq$  d'une coquille d'épaisseur  $dr$ .

**Solution:** On connaît la charge  $Q$  totale donc  $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$   
La quantité infinitésimale  $dq = \rho dV = \rho 4\pi r^2 dr = 3 \frac{Q}{R^3} r^2 dr$  (expliquer  $dV$  par surface \* épaisseur)

5. La charge des coquilles déjà assemblées jusqu'au rayon  $r$  vaut  $q(r)$ . Exprimer  $q(r)$  puis le potentiel électrique  $V'(r)$  de cette charge autour d'elle.

**Solution:**  $q(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3}$  et  $V'(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^3} \frac{r^2}{r}$

6. Exprimer l'augmentation d'énergie électrostatique  $dU$  lorsqu'on ajoute une coquille supplémentaire  $dq$ , puis calculer l'énergie totale  $U$  à fournir pour enruler l'ADN dans la capsid.

**Solution:**  $dU = V'(r)dq = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon R^6} r^4 dr \Rightarrow U = \int_0^R dU = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon R^6} \left(\frac{R^5}{5} - 0\right) = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon R}$

**Solution:**  $U_{el} = \int_0^R \frac{\rho^2 4\pi}{3\epsilon} r^4 dr = \frac{\rho^2 4\pi R^5}{15\epsilon} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R} = 3.73 \text{e-14 J} = 0.23 \text{ MeV}$

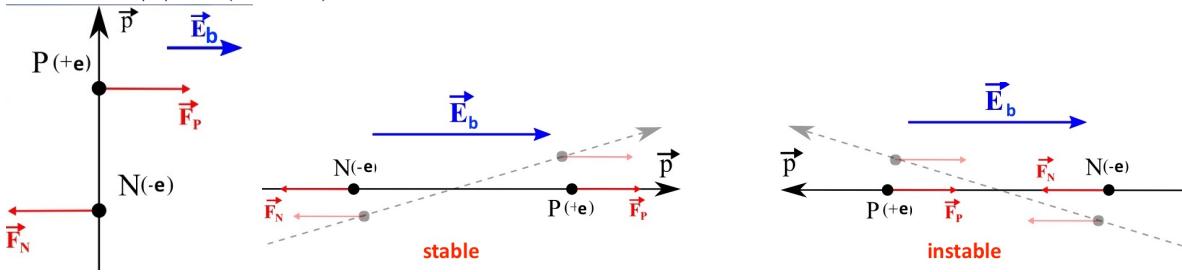
Dans la réalité les charges de l'ADN sont écrantées par la présence d'ions positifs qui s'approchent des ions phosphate qui rendent l'interaction électrostatique des charges de l'ADN beaucoup plus faible.

## 4 Une molécule qui fait tourner la tête

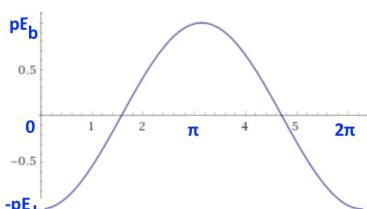
Un épileptique souhaite prendre du bromure de potassium comme anticonvulsif. Il le laisse se dissoudre dans un verre d'eau près de sa boîte internet. Les molécules ( $K^+$ ;  $Br^-$ ) pivotent et s'alignent sous l'effet du champ électrique  $\vec{E}_b$  de la boîte. On considérera ce champ comme uniforme.

1. Sachant que les ions sont situés à 0.2 nm et 0.3 nm du centre de gravité de la molécule, calculer le moment dipolaire  $p$  d'une molécule  $KBr$  et donner sa direction. Expliquer pourquoi la molécule pivote sous l'effet du champ externe. Indiquer les positions d'équilibre stable et instable de la molécule dans le champ externe.

**Solution:**  $|\vec{p}| = e(r_1 + r_2) = 8.0 \times 10^{-29} \text{ C m}$ .



2. L'énergie potentielle du dipôle plongé dans le champ externe s'écrit  $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_b$ . Tracer l'allure de  $E_p(\theta)$  en fonction de l'angle  $\theta$  qui sépare les vecteurs dipôle et champ externe. Commenter.



**Solution:**

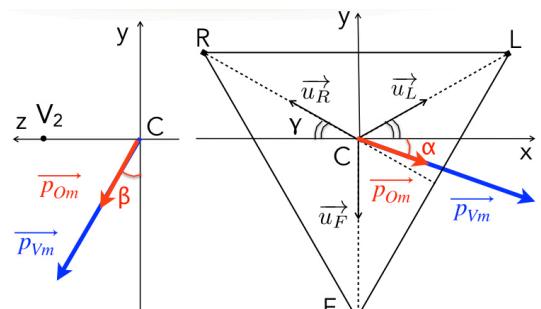
Équilibre stable au minimum d'énergie et instable au maximum.

3. On mesure une énergie de retournement d'une molécule  $|\Delta E_r| = 10^{-8} \text{ eV}$ , calculer l'intensité du champ électrique de la boîte internet.

**Solution:**  $|\Delta E_r| = 2pE_b \Rightarrow E_b = \frac{\Delta E_r}{2p} = 10 \text{ V/m}$

## 5 Polarisation des oreillettes et des ventricules

L'orientation du dipôle cardiaque est à peu près colinéaire au moment du maximum de l'onde de polarisation des oreillettes  $\vec{p}_{Om}$  et du maximum de polarisation des ventricules  $\vec{p}_{Vm}$ , avec un rapport en norme  $p_{Om}/p_{Vm} \approx 0.2$ .



1. Exprimer la différence de potentiel électrique  $V_{II} = V_F - V_R$  dans le plan frontal pour chacun de ces deux maxima en fonction des vecteurs dipôles, du vecteur unitaire  $\vec{u}_{RF}$  et de l'angle  $\gamma$ . Calculer le rapport  $V_{II0}/V_{IV}$ .

**Solution:**  $\vec{u}_{CF} - \vec{u}_{CR} = 2 \cos \gamma \vec{u}_{RF}$  (à démontrer uniquement par dessin. Pour cela, dessiner le vecteur résultant  $\vec{CM} = \vec{u}_{CF} + \vec{u}_{RC}$  qui se retrouve parallèle à  $\vec{u}_{RF}$ . Puis utiliser le fait que l'angle entre  $\vec{CF}$  et  $\vec{CM}$  est aussi l'angle entre les droites perpendiculaires à ces vecteurs, donc l'angle entre l'axe Ox et la direction  $\vec{u}_{CL}$ , c'est-à-dire  $\gamma$ . Puis projeter chaque contribution avec  $\cos \gamma$ ).

$$V_{II0} \propto \vec{p}_{Om} \cdot (\vec{u}_{CF} - \vec{u}_{CR}) \propto (2 \cos \gamma) \vec{p}_{Om} \cdot \vec{u}_{RF}$$

$$V_{IV} \propto \vec{p}_{Vm} \cdot (\vec{u}_{CF} - \vec{u}_{CR}) \propto (2 \cos \gamma) \vec{p}_{Vm} \cdot \vec{u}_{RF}$$

même angle entre  $\vec{p}_{Om}$  et  $\vec{u}_{RF}$  et entre  $\vec{p}_{Vm}$  et  $\vec{u}_{RF}$ , donc  $V_{II0}/V_{IV} = p_{Om}/p_{Vm} \approx 0.2$

2. Même question pour le rapport de différence de potentiel  $V_{2O}/V_{2V}$  dans le plan sagittal.

**Solution:**  $V_{2O} \propto \vec{p}_{Om} \cdot \vec{u}_z$  et  $V_{2V} \propto \vec{p}_{Vm} \cdot \vec{u}_z$   
même angle entre  $\vec{p}_{Om}$  et  $\vec{u}_z$  et entre  $\vec{p}_{Vm}$  et  $\vec{u}_z$ , donc  $V_{2O}/V_{2V} = p_{Om}/p_{Vm} \approx 0.2$

## TD n°2 : Fluides parfaits

Dans tous les exercices « exprimer » signifie donner l'expression littérale et « calculer » demande l'expression littérale puis l'application numérique. Les calculettes sont admises en T.D.

Tous les gaz et liquides sont considérés ici comme parfaits.

### Données utiles pour les exercices

- Constante des gaz parfaits :  $R = 8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mole}^{-1}$
- Accélération de la pesanteur :  $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$
- masse volumique de l'eau :  $\rho_e = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
- $\ln(1 + \epsilon) \approx \epsilon$  pour  $\epsilon \ll 1$

## 1 Mesure du volume résiduel pulmonaire par dilution d'hélium

Un spiromètre est un appareil capable de mesurer des volumes pulmonaires. Il est composé d'un réservoir de gaz de volume fixe  $V_s = 8 \text{ L}$ , relié à un embout par lequel respire le patient. On cherche à mesurer le volume résiduel pulmonaire  $V_R$  restant dans les poumons après expiration maximale. Le spiromètre contient initialement un mélange d'air et d'hélium, avec  $n_{He} = 39 \text{ mmol}$  d'hélium, sous la pression atmosphérique  $p_{atm} = 1 \text{ atm}$  et à la température constante  $T = 25^\circ\text{C}$  de la pièce.

Après une expiration maximale, le patient prend l'embout et respire le mélange du spiromètre. Au bout de quelques cycles respiratoires, les gaz du spiromètre et des poumons sont parfaitement mélangés. Le patient expire au maximum dans le spiromètre. La pression interne  $p'$  dans le système vaut alors 30 mm Hg au-dessus de la pression atmosphérique. On ferme l'embout et on mesure une fraction d'hélium  $x'_{He} = 10\%$  dans le spiromètre.

1. Calculer le nombre  $n_{tot}$  total de moles de gaz dans le mélange initial du spiromètre, la proportion initiale  $x_{He}$  d'hélium du mélange et la pression partielle d'hélium qu'inspire le patient initialement.

**Solution:** mélange dans le volume  $V_s$  à la pression  $p_{atm}$  sous la température  $T$  donc  $n_{tot} = \frac{p_{atm}V_s}{RT} = 0.32 \text{ mole}$   
 $x_{He} = n_{He}/n_{tot} = 0.039/0.32 = 12.1 \%$   
 pression partielle de l'hélium :  $p_{He} = x_{He}p_{atm} = 0.12 \text{ atm}$

2. Calculer la masse molaire  $M_{He}$  de l'hélium  ${}^4_2\text{He}$  puis la masse volumique  $\rho_{He}$  d'hélium dans le mélange initial du spiromètre.

**Solution:**  $M_{He} = 4 \text{ g} = 4\text{e-}3 \text{ kg}$   
 $\rho_{He} = \frac{m_{He}}{V} = \frac{n_{He}M_{He}}{V} = 1.95\text{e-}2 \text{ kg/m}^3$

3. Exprimer le nombre  $n'_{tot}$  total de moles de gaz du mélange final dans le spiromètre et les poumons en communication, en expiration maximale. Calculer le volume résiduel  $V_R$  pulmonaire.

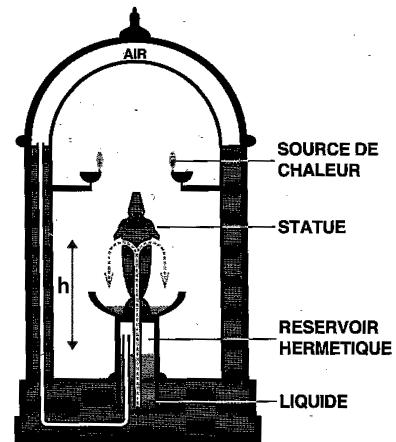
**Solution:**  $T$  constante tout au long de l'examen. La pression  $p'$  vaut  $p' = p_{atm} + 30/760 = 1.04e5$  atm.  
d'où  $n'_{tot} = \frac{p'(V_S+V_R)}{RT}$   
conservation de  $n_{He}$  donc  $x'_{He} = n_{He}/n'_{tot} = 0.1 \Rightarrow V_R = \frac{n_{He}RT}{p'x'_{He}} - V_S = 1.28e-3$  m<sup>3</sup> = 1.28 l

4. L'air initialement injecté dans le spiromètre et dans les poumons étant composé de 78% de  $N_2$ , 21% de  $O_2$  et 1% de gaz rares, calculer la pression partielle  $p_{O_2}$  d'oxygène dans le mélange final des poumons du patient en expiration maximale.

**Solution:**  $p' = p_{O_2} + p_{N_2} + p_{GR} + p_{He}$  et  $p_{He}/p' = x'_{He} \Rightarrow p_{O_2} + p_{N_2} + p_{GR} = (1 - x'_{He})p' = 0.9p'$  et  $p_{O_2} = 0.21 \times 0.9 \times p' = 0.197 \sim 0.2$  atm.

## 2 La statue d'Artémis

Il a existé pendant l'antiquité une statue d'Artémis « miraculeuse » : lorsque les prêtres venaient prier la déesse et allumaient les lampes éclairant l'autel, les seins multiples de la déesse laissaient échapper du lait après un certain temps. Athanasius Kircher, un savant allemand du XVII<sup>ème</sup> siècle a découvert son secret. Le montage est illustré ci-contre. Au-dessus des lampes se trouve un réservoir d'air d'un volume  $V_0 = 0,3$  m<sup>3</sup> relié à un réservoir de lait situé sous la statue et lui-même relié aux seins de la statue. Avant la prière la pression est partout égale à la pression atmosphérique, la température est de  $T_i = 10^\circ\text{C}$ . Une fois les lampes allumées, elles chauffent le réservoir d'air à une température  $T_f = 40^\circ\text{C}$ . L'air est composé de 21% de  $O_2$ , 78% de  $N_2$  et 1% de gaz rares. La masse volumique du lait vaut  $\rho_{lait} = 1030$  g/litre.



1. Calculer le nombre  $n$  de moles d'air dans le réservoir d'air et la pression partielle d'azote qui y règne initialement.

**Solution:** On sait que  $p_{atm}V_0 = nRT_i$  donc  $n = \frac{p_{atm}V_0}{RT_i} = 12,76$  mol.  
 $p_{N_2} = 0.78 \times p_{atm} = 0.78$  atm

2. Calculer la masse molaire équivalente  $M_G$  des gaz rares de l'air connaissant la masse molaire  $M_a = 29$  g/mole du mélange d'air et les masses atomiques de l'oxygène  $^{16}_8O$  et de l'azote  $^{14}_7N$ . Calculer la masse d'air dans le réservoir.

**Solution:**  $M_a = 0.78M_{N_2} + 0.21M_{O_2} + 0.01M_G = 0.78 \cdot 28 + 0.21 \cdot 32 + 0.01M_G \Rightarrow M_G = 44$  g/mole  
 $m = n \times M_a = 370$  g = 0.37 kg

3. Calculer la différence de pression  $\Delta p_1$  résultant de la hausse de température si le réservoir d'air était isolé du réservoir de lait.

**Solution:** volume et  $n$  constants et  $pV_0 = nRT$  donc  $p \propto T \Rightarrow dp/p = dT/T$   
 $\frac{\Delta p_1}{p_{atm}} = \frac{\Delta T}{T_i} \Rightarrow \Delta p_1 = p_{atm} \frac{T_f - T_i}{T_i} = 1,06 \cdot 10^4$  Pa = 0,106 atm  
insister que  $dT$  en K est égal à  $dT$  en Celsius (mais pas les valeurs de  $T$  !)

4. Calculer la surpression  $\Delta p_2$  nécessaire pour faire monter le lait jusqu'à la hauteur de la sortie des tuyaux  $h = 0,5$  m.

**Solution:** On veut  $\Delta p_2 = \rho_{\text{lait}}gh = 5,1 \cdot 10^3$  Pa = 0,051 atm

5. Quelle température minimale  $T_{f,\min}$  le réservoir d'air doit-il atteindre pour faire sortir le lait ?

**Solution:** On doit avoir une pression  $p = p_{\text{atm}} + \rho_{\text{lait}}gh = p_{\text{atm}} + \Delta p_2$  au-dessus de la surface du lait dans le réservoir pour le faire monter et atteindre les seins. On cherche  $\Delta T$  tel que  $\Delta p_1 = \Delta p_2$ , donc  $\Delta T_{\min} = \frac{T_i}{p_{\text{atm}}} \Delta p_1 = \frac{T_i}{p_{\text{atm}}} \Delta p_2 = 14.4$  K = 14.4 °C, donc  $T_{f,\min} = T_i + 14.4 = 24.4$  °C

6. Après un certain temps, un volume  $\Delta V$  de lait est sorti de la statue et on retrouve une pression insuffisante pour faire monter le lait. Calculer l'augmentation relative de volume  $\Delta V/V_0$  et le volume  $\Delta V$  de lait sorti.

**Solution:** Le volume d'air a augmenté à  $V_0 + \Delta V$  puisque le lait a laissé place à l'air. La sortie de lait s'arrête lorsque la pression dans le réservoir revient à  $p_{\text{atm}} + \rho_{\text{lait}}gh = p_{\text{atm}} + \Delta p_2$  d'où  $(p_{\text{atm}} + \Delta p_2)(V_0 + \Delta V) = nRT_f \Rightarrow \Delta V = \frac{nRT_f}{p_{\text{atm}} + \Delta p_2} - V_0$ . On avait  $nR = \frac{p_{\text{atm}}}{T_i} V_0$  donc  $\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{p_{\text{atm}}}{p_{\text{atm}} + \Delta p_2} \frac{T_f}{T_i} - 1 = 0.052$  et  $\Delta V = 0.052 V_0 = 1.56 \times 10^{-2}$  m<sup>3</sup> = 15.6 litres.

7. Calculer le travail  $|\Delta W|$  échangé entre l'air et le milieu extérieur pour cette détente à température  $T_f$  constante. A-t-il été gagné ou fourni par l'air ?

**Solution:**  $|dW| = p dV$  avec  $pV = nRT_f$  pendant la détente de l'air.

$|\Delta W| = nRT_f \int_{V_0}^{V_0+\Delta V} \frac{dV}{V} = nRT_f \ln \frac{V_0+\Delta V}{V_0} = nRT_f \ln(1 + \frac{\Delta V}{V_0}) \approx nRT_f \frac{\Delta V}{V_0} = 1725$  J. Fourni par l'air pour pouvoir occuper le volume  $\Delta V$  supplémentaire.

### 3 Plongée sous-marine

Un plongeur réalise une descente en mer où la densité de l'eau vaut  $d_m = 1.025$ . On note  $\rho_m$  est la masse volumique de l'eau de mer. Il respire de l'air composé de 80% de N<sub>2</sub> et de 20% d'O<sub>2</sub>. Le plongeur a une température  $T = 37$  °C. La pression atmosphérique extérieure vaut  $p_{\text{atm}} = 1$  bar. On choisit un axe 0z vertical ascendant avec une origine à la surface libre de l'eau qu'on considère immobile.

1. Exprimer la pression  $p(z)$  à la profondeur  $z$ . Que vaut la pression dans les poumons du plongeur ?

**Solution:** On a  $p(0) = p_{\text{atm}}$  et on fait attention qu'en plongée  $z < 0$ . Or la pression augmente avec la profondeur, donc  $p(z) = p_{\text{atm}} - \rho_m g z$  pour avoir  $p(z) > p_{\text{atm}}$ .

La pression inspirée dans les poumons est égale à la pression ambiante  $p(z)$  sinon le plongeur serait écrasé par la pression de l'eau (si  $p_{\text{poumon}} < p(z)$ , ou inversement exploserait). C'est pourquoi il est très difficile de retenir sa respiration sans laisser échapper des bulles quand on plonge en apnée sur quelques mètres de profondeur (donc quelques bars supplémentaires dans l'eau).

2. Le plongeur descend à une profondeur  $z_1$  où son tympan est soumis à une force de 25 N. Sachant que la surface de son tympan vaut  $S = 80$  mm<sup>2</sup>, quelle est la valeur de  $z_1$  ?

**Solution:** La force de pression s'écrit  $|F| = p(z_1)S$ . Il suit que :  $p(z_1) = \frac{|F|}{S} = 312500 \text{ Pa} = 3.125 \text{ bars}$ . En utilisant le résultat de la question précédente, on a :  $p(z_1) = \frac{|F|}{S} = p_{atm} - \rho_m g z_1 \Rightarrow z_1 = \frac{p_{atm} - p(z_1)}{\rho_m g} = -21.1 \text{ m}$ .

3. Calculer l'énergie thermique  $U$  de l'air dans ses poumons de volume  $V_p = 3$  litres à la profondeur  $z_1$  en prenant en compte que les deux gaz  $O_2$  et  $N_2$  sont diatomiques et parfaits.

**Solution:** On a 2 gaz diatomiques donc  $\frac{5}{2}kT$  d'énergie pour 5 degrés de liberté (3 pour translation + 2 pour rotation) par molécule.

$$\text{D'où } U = \frac{5}{2}n_{tot}RT. \text{ Or on a aussi } p(z_1)V_p = n_{tot}RT \Rightarrow U = \frac{5}{2}p(z_1)V_p = 2344 \text{ J.}$$

4. Le dioxygène inhalé devient toxique si sa pression partielle augmente et il existe un risque d'œdème pulmonaire quand elle atteint la valeur  $p_{O_2m} = 1.5 \text{ bar}$ . En déduire la profondeur maximale  $z_m$  à laquelle peut descendre sans danger le plongeur s'il respire de l'air.

**Solution:** D'après la loi de Dalton,  $p_{O_2} = \frac{n_{O_2}}{n_{tot}}p(z) = x_{O_2}p(z)$  avec  $x_{O_2} = 0.2$  la fraction molaire de dioxygène dans l'air. Il vient  $z_m = \frac{1}{\rho_m g} \left( p_{atm} - \frac{p_{O_2m}}{x_{O_2}} \right) = -64.6 \text{ m}$ .

5. Lorsque la pression partielle en diazote atteint  $p_{N_2m} = 4 \text{ bars}$ , le plongeur est victime de l'ivresse des profondeurs. En déduire la nouvelle profondeur maximale  $z'_m$ .

**Solution:** En suivant le même raisonnement qu'à la question précédente on obtient :

$$z'_m = \frac{1}{\rho_m g} \left( p_{atm} - \frac{p_{N_2max}}{x_{N_2}} \right) = -39.8 \text{ m.}$$

6. Le plongeur remonte à la surface et fait un malaise sur le bateau. On lui injecte une perfusion de glucose de densité  $d_p = 1.050$ . La poche de perfusion est placée à une hauteur  $h$  au-dessus de son bras. Un cathéter est placé dans une veine où la tension vaut  $T_v = 10 \text{ mm Hg}$ . Le débit du goutte-à-goutte est lent. Calculer la hauteur  $h$  minimum à laquelle placer la perfusion.

**Solution:** La pression dans la poche est égale la pression atmosphérique (quel que soit le niveau de liquide car la poche est souple). La pression réelle dans la veine vaut  $p_v = p_{atm} + T_v$  avec  $T_v = 0.013 \text{ atm}$ . On néglige l'énergie cinétique dans le cathéter (débit lent). Donc on a aussi  $p_v = p_{atm} + \rho_pgh$  avec  $\rho_p = d_p \rho_e$ . Il vient alors :  $h = \frac{p_v - p_{atm}}{\rho_p g} = \frac{T_v}{\rho_p g} = 0.13 \text{ m}$ .

## 4 Lavage de PIC line

Lors de traitement intra-veineux de longue durée, on peut poser ce qu'on appelle un "PIC line" ou "PICC" (pour l'acronyme anglais Peripherally Inserted Central Catheter). C'est un cathéter posé sur une veine périphérique comme dans le bras et qui remonte par les veines jusqu'à la veine cave supérieure. Après chaque administration de traitement, il convient de nettoyer le "PIC line" en injectant une solution physiologique (mélange d'eau et de chlorure de sodium de masse volumique  $\rho$  proche de celle de l'eau) à l'aide d'une seringue. Celle-ci est composée d'un grand corps cylindrique (de longueur  $L_c = 15 \text{ cm}$  et de rayon interne  $R_c = 10 \text{ mm}$ ) et d'un embout cylindrique plus fin (de longueur  $L_e = 2 \text{ cm}$  et de rayon interne  $R_e = 1 \text{ mm}$ ). Le piston de la seringue se déplace sans frottement dans le corps de la seringue. On suppose que lors de l'injection, la seringue et la veine sont dans un même plan horizontal. La tension veineuse du patient vaut  $T_v = 10 \text{ mm Hg}$ .

1. Sachant que l'infirmière met  $\Delta t = 15$  secondes à faire son injection, calculer le débit  $Q$  et la vitesse  $v_e$  dans l'embout ?

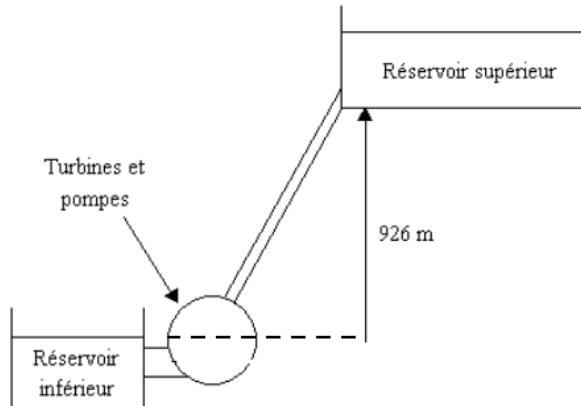
**Solution:**  $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = v_c S_c = v_e S_e$  où  $\Delta V = \pi R_c^2 L_c + \pi R_e^2 L_e$  est le volume injecté.  
Donc  $Q = \frac{\pi R_c^2 L_c + \pi R_e^2 L_e}{\Delta t} = 3.18 \text{e-}6 \text{ m}^3/\text{s} = 3.18 \text{ cm}^3/\text{s}$  et  $v_e = \frac{Q}{\pi R_e^2} = 1 \text{ m/s}$ .

2. En déduire la force constante  $F$  minimum que doit exercer l'infirmière sur le piston de la seringue (également de rayon  $R_c$ ).

**Solution:** On doit obtenir au moins la pression  $p_v = p_{atm} + T_v$  à l'entrée de la veine (E). Dans le corps (C) de la seringue règne une pression uniforme  $p_{atm} + \frac{F}{\pi R_c^2}$   
Bernoulli sur une ligne de courant horizontale entre ces points :  $p_{atm} + \frac{F}{\pi R_c^2} + \frac{1}{2} \rho v_c^2 = p_{atm} + T_v + \frac{1}{2} \rho v_e^2$   
Conservation du débit :  $v_c = v_e \left( \frac{R_e}{R_c} \right)^2$   
Donc  $F = \pi R_c^2 \left[ T_v + \frac{1}{2} \rho v_e^2 \left( 1 - \left( \frac{R_e}{R_c} \right)^4 \right) \right] \simeq \pi R_c^2 \left( T_v + \frac{1}{2} \rho v_e^2 \right) \simeq 0.6 \text{ N}$ .

## 5 Station de transfert d'énergie par pompage (STEP)

Le pompage-turbinage est une technique de stockage de l'énergie électrique. Elle repose sur le principe de pomper de l'eau en altitude pour stocker son énergie potentielle dans des bassins d'accumulation lorsque la demande d'énergie est faible — c'est le pompage — afin de redescendre et turbiner cette eau plus tard pour produire de l'électricité lorsque la demande est forte — c'est le turbinage. Les centrales de pompage-turbinage sont également appelées STEP - Stations de transfert d'énergie par pompage. On étudie une station dont le réservoir inférieur est un lac (on suppose ses dimensions très grandes). Le réservoir supérieur a pour dimensions :  $L = 200 \text{ m}$ ,  $l = 100 \text{ m}$  et profondeur  $H = 50 \text{ m}$  et il est situé en haut d'un barrage de hauteur  $h = 926 \text{ m}$ .



1. Calculer l'énergie potentielle gravitationnelle de l'eau stockée dans le réservoir supérieur lorsqu'il est plein.

**Solution:** Pour une masse  $m$ , l'énergie potentielle est donnée par  $dE_p = -m\vec{g} \cdot \vec{dz} = +mg dz \Rightarrow E_p = mgz + \text{cte.}$

La contribution à l'énergie potentielle d'une couche de volume  $dV = lL dz$  située à l'altitude  $h + z$  dans le réservoir ( $0 \leq z \leq H$ ) vaut  $dE_p = \rho_e dV g(h + z)$ , d'où  $E_p = \rho_e lLg \int_0^H (h + z) dz = \rho_e lLg(hH + H^2/2) = \rho_e lLHg(h + H/2) = \rho_e Vg(h + H/2) = 9.33 \text{e}12 \text{ J}$ .

On souhaite remplir le réservoir supérieur pour stocker de l'eau. Avant le démarrage le réservoir est à moitié rempli. On met en route la pompe. La canalisation a un diamètre  $d = 2 \text{ m}$  et une longueur  $\lambda = 1000 \text{ m}$ . La vitesse moyenne dans la canalisation est de  $v = 3 \text{ m/s}$ .

2. Calculer le débit  $Q$  de la pompe, le temps  $\tau$  nécessaire pour remplir le réservoir et la vitesse  $v_S$  de montée de la surface du réservoir supérieur.

**Solution:** Par définition,  $Q = \pi \frac{d^2}{4} v = 9,42 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ .

Une autre façon de calculer le débit est  $Q = V/\tau$ , ainsi  $\tau = \frac{V}{Q} = \frac{Hl}{2Q} = 53079 \text{ s} = 14,7 \text{ h}$ .

Conservation du débit donc  $Q = Ll v_S \Rightarrow v_S = \frac{Q}{Ll} = 4.7 \text{e-4 m/s}$

3. Calculer la surpression  $\Delta p$  minimum que doit avoir la pompe pour remplir le réservoir et calculer sa puissance .

**Solution:** Appliquons Bernoulli entre les surfaces des deux réservoirs en considérant que la pression vaut  $p_E = p_S = p_{atm}$  aux interfaces eau-air. Ecrire d'abord la relation  $p_S = p_E + \Delta p > p_E$  hors tout autre terme pour bien mettre la surpression du bon côté de l'équation.

$$p_E + \rho_e g z_E + \frac{1}{2} \rho_e v_E^2 + \Delta p = p_S + \rho_e g (z_E + h + H) + \frac{1}{2} \rho_e v_S^2$$

La surface du lac inférieur ne varie pas d'altitude (grandes dimensions) donc  $v_E \sim 0$ . On vérifie aussi que  $\frac{1}{2} \rho_e v_S^2 \ll \rho_e g (h + H)$  donc on obtient d'où  $\Delta p = \rho_e g (h + H) = 9,57 \text{e}6 \text{ Pa} = 95.7 \text{ atm}$ .

$P = \Delta p Q = 90.19 \text{ MW}$ .

Dans la réalité, il faut plus car il y a perte d'énergie par frottements dans la canalisation, un rendement  $< 1$  de la pompe, etc...

## TD n°3 : Fluides visqueux

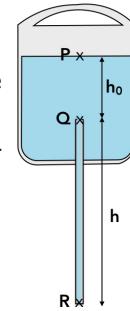
Dans tous les exercices « exprimer » signifie donner l'expression littérale et « calculer » demande l'expression littérale puis l'application numérique. Les calculettes sont admises en T.D.

### Données utiles pour les exercices

- accélération de la pesanteur :  $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$
- masse volumique de l'eau :  $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

### 1 Perfusion

Un flacon rigide de perfusion a été rempli d'un liquide de densité proche de 1. Une petite valve maintient la pression atmosphérique de 1 atm dans l'air du flacon. Un tuyau de longueur  $h = 1 \text{ m}$ , de rayon  $a$  et de section  $\sigma = 2 \text{ mm}^2$  transmet le liquide de perfusion au patient. Une hauteur  $h_0 = 10 \text{ cm}$  sépare la surface supérieure du liquide et l'entrée du tuyau. On néglige tout d'abord la viscosité du liquide de perfusion et le tuyau est ouvert sur l'air.



1. Calculer les pressions aux points P et R.

**Solution:** extrémités P et R exposées à l'air donc  $p_P = p_R = p_{atm}$ .

2. Calculer la vitesse  $v_R$  de sortie du liquide en proposant une approximation.

**Solution:** masse volumique du liquide  $\rho = d\rho_{eau} \approx \rho_{eau} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . Bernoulli entre P et R :  $p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_P^2 + \rho g(h + h_0) = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_R^2$ . Le flacon étant grand devant le volume du tuyau B, on peut tenter de négliger la vitesse  $v_P \ll v_R$ . D'où  $v_R = \sqrt{2g(h + h_0)} = 4.65 \text{ m/s} = 16.7 \text{ km/h}$  !

3. Calculer le débit  $Q$  correspondant de perfusion et commenter votre approximation.

**Solution:**  $Q = \sigma v_R = 9.3 \text{ ml/s} = 33.4 \text{ l/h}$  beaucoup trop fort. On ne peut pas mettre à 0 la vitesse  $v_P$  de descente du liquide, mais on peut toujours dire  $v_P \ll v_R$  à cause des différences de section du tuyau et du flacon.

On prend maintenant en compte la viscosité  $\eta = 4 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$  du liquide de perfusion et on branche un cathéter de section  $\sigma_c = 1 \text{ mm}^2$  et de longueur  $L = 1 \text{ cm}$  au bout du tuyau B.

4. Comparer les pertes de charge dans le tuyau et le cathéter en calculant leur rapport  $\Delta p_c / \Delta p_t$ .

**Solution:** Conservation du débit entre le tuyau et le cathéter et Poiseuille  $\Delta p = \frac{8\eta l}{\pi a^4} Q$   
 donc  $\Delta p_c / \Delta p_t = \frac{L}{h} \left( \frac{a}{a_c} \right)^4$   
 avec  $\sigma = \pi a^2$  et  $\sigma_c = \pi a_c^2$  on obtient  $\Delta p_c / \Delta p_t = \frac{L}{h} \left( \frac{\sigma}{\sigma_c} \right)^2 = 0.04$

5. Exprimer la perte totale de charge  $\Delta p$  entre le point P et le point d'entrée dans la veine. Commenter.

**Solution:** Flacon, tuyau et cathéter en série donc  $\Delta p = \Delta p_f + \Delta p_t + \Delta p_c$ . Or les grandes dimensions du flacon impliquent que  $\Delta p_f \ll \Delta p_t$  et le rapport de 0.04 entre  $\Delta p_c$  et  $\Delta p_t$  indique qu'on peut négliger aussi  $\Delta p_c$ , d'où  $\Delta p \sim \Delta p_t$

6. On branche le cathéter dans la veine du patient où règne une tension  $T_v = 10$  mm Hg. On néglige l'impact du cathéter, donc le système est équivalent à brancher directement l'extrémité R du tuyau dans la veine. Exprimer la conservation des énergies entre les points P et R. Montrer que l'expression peut se mettre sous la forme d'une équation du second degré  $A v_R^2 + B v_R + C = 0$  en fonction de la vitesse moyenne  $v_R$ .

**Solution:** Faire écrire d'abord que " $p_P = p_R + \Delta p$ " en dehors de tout autre terme pour bien avoir plus de pression en amont qu'en aval car perte d'énergie  $\Delta p$  par frottement sur le trajet. Ensuite écrire que  $p_R = p_{atm} + T_v$  pour ne pas faire imploser le patient. Les faire aussi réfléchir avant d'écrire les maths qu'on doit avoir  $\rho g(h + h_0) > T_v + \Delta p_t$  pour que le liquide de perfusion pénètre dans la veine. La gravitation doit fournir l'énergie de surpression de la veine et les pertes de charge dans le tuyau.

$$p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_P^2 + \rho g(h + h_0) = p_{atm} + T_v + \Delta p_t + \frac{1}{2} \rho v_R^2$$

$$\text{On développe } \Delta p_t \text{ et } Q \text{ donc } \Delta p_t = \frac{8\eta h}{\pi a^4} \sigma v_R = \frac{8\eta h}{\pi a^4} \pi a^2 v_R = \frac{8\eta h}{a^2} v_R = \frac{8\pi \eta h}{\sigma} v_R$$

$$\text{On néglige } v_P \ll v_R \text{ d'où } 0 = \frac{1}{2} \rho v_R^2 + \frac{8\pi \eta h}{\sigma} v_R + T_v - \rho g(h + h_0)$$

Remarque : le liquide étant visqueux, la vitesse  $v_R$  est la vitesse moyenne à travers la section du tube et est égale à la moitié de la vitesse maximum sur l'axe.

7. Calculer la vitesse moyenne  $v_R$  et le volume  $V$  perfusé en  $\Delta t = 1$  heure.

**Solution:** discriminant  $\Delta = \left( \frac{8\pi \eta h}{\sigma} \right)^2 - 2\rho [T_v - \rho g(h + h_0)]$

$$\text{solution } v_R = \frac{1}{\rho} \left( -\frac{8\pi \eta h}{\sigma} + \sqrt{\Delta} \right) = 0.19 \text{ m/s}$$

$$V = \sigma v_R \Delta t = 1.4 \text{e-3 m}^3 = 1.4 \text{ L encore fort, mais plus raisonnable. D'où l'utilité du robinet qui règle la vitesse du goutte à goutte.}$$

## 2 Tensiomètre

La méthode classique de prise de tension chez un patient se fait en gonflant un brassard équipé d'un manomètre (appareil de mesure de pression) autour du bras (entre l'épaule et le coude) jusqu'à bloquer le passage du sang dans le bras. On le dégonfle ensuite lentement tout en écoutant le pouls dans le creux du coude à l'aide d'un stéthoscope. On peut entendre un pouls seulement lorsque le sang repasse par intermittence. On considère un patient ayant un débit cardiaque au repos  $Q = 5$  litres/minute, une tension artérielle systolique  $T_s = 12$  cm Hg et une tension artérielle diastolique  $T_d = 6$  cm Hg. On néglige les pertes de Poiseuille entre le cœur et l'artère sous-clavière, qui est la principale artère du bras. On note  $\eta = 5 \times 10^{-3}$  Pa s la viscosité du sang et  $d = 1.06$  la densité du sang.

1. Calculer le débit dans l'artère sous-clavière  $Q_b$ , en supposant que la vitesse du sang  $v_b$  dans le bras est la même que dans l'aorte en sortie du cœur, sachant que leurs rayons sont respectivement de  $r_b = 3$  mm et  $r_a = 1.5$  cm.

**Solution:** Débit cardiaque total dans l'aorte,  $Q = \pi r_a^2 v_a$ , et dans l'artère du bras,  $Q_b = \pi r_b^2 v_b$  d'où  $Q_b/Q = (r_b/r_a)^2 (v_b/v_a) = (r_b/r_a)^2 = (3/15)^2 \Rightarrow Q_b = 0.04 \times Q = 0.2 \text{ litre/min} = 3.33 \text{e-6 m}^3/\text{s}$

- On considère un patient allongé horizontalement. Exprimer à quelle pression minimale il faut gonfler le brassard pour couper complètement le passage du sang ? Pour quelle plage de pression le sang passe-t-il par intermittence ? Expliquez comment se fait la mesure de la tension.

**Solution:** Le sang ayant la même vitesse dans l'aorte et l'artère du bras, celles-ci étant à la même altitude, et si on néglige les pertes de charge dans l'aorte, la pression sanguine dans l'artère sous-clavière est égale à celle de l'aorte ( $T_s$  ou  $T_d$  aux deux extrêmes du cycle cardiaque). Il faut gonfler le brassard au-delà de  $p_s = p_{atm} + T_s$  pour arrêter le sang (écoulement impossible si pression supérieure en aval par rapport à l'amont). Le sang repasse normalement en deçà de  $p_d = p_{atm} + T_d$ . Le sang passe donc par intermittence entre ces deux valeurs, au rythme des expulsions cardiaques (bruit de pouls). Quand on dégonfle lentement le brassard, la pression systolique se lit sur le manomètre quand on commence à entendre un pouls, et la pression diastolique se lit dès qu'on n'entend plus les pulsations du pouls.

- Le brassard comprime légèrement le bras (on n'entend pas le pouls) et le débit  $Q_b$  normal est maintenu. On note  $T$  et  $T'$  les tensions artérielles juste en amont et en aval de la zone du brassard. Celui-ci diminue le rayon de l'artère sous-clavière à la valeur  $r < r_b$  sur une longueur  $L_1 = 10 \text{ cm}$ . La résistance hydraulique de l'artère augmente-t-elle ou diminue-t-elle sous le brassard ? Exprimer la différence de tension  $T' - T$ . Que se passe-t-il si le rayon diminue à  $r < \left(\frac{8\eta L_1 Q_b}{\pi T}\right)^{1/4}$  ?

**Solution:** Le rayon diminue, donc la résistance hydraulique augmente.

Perte de charge  $\Delta p = \frac{8\eta L_1}{\pi r^4} Q_b$ .

A la sortie du brassard, l'artère retrouve son rayon  $r_b$ , donc la vitesse (qui avait augmenté dans le rétrécissement pour maintenir  $Q_b$ ) revient à la valeur amont  $v_b = v_a = v$ .

Conservation de la densité volumique d'énergie entre les points d'entrée et de sortie de la zone du brassard :  $p_{atm} + T + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_{atm} + T' + \Delta p + \frac{1}{2}\rho v^2$ , d'où  $T' - T = -\Delta p < 0$ . ok car on doit avoir une perte de pression en aval.

Le rayon  $r < \left(\frac{8\eta L_1 Q_b}{\pi T}\right)^{1/4}$  correspond à une perte de charge  $\Delta p' > T$ , donc la tension artérielle en amont ne suffit pas à couvrir les pertes d'énergies par frottement. Le sang va ralentir et le débit diminuer pour transférer de l'énergie cinétique d'ensemble sur les autres termes ( $T' < 0$  impossible car la pression sanguine est au minimum égale à  $p_{atm}$ ).

- L'artère sous-clavière se divise au niveau du coude en deux artères de l'avant-bras : l'artère radiale et l'artère ulnaire. On les considérera toutes deux de section égale à la moitié de celle de l'artère sous-clavière et de longueur  $L_{cp} = 20 \text{ cm}$  entre le coude et le poignet. Exprimer le débit sanguin  $Q'$ , le rayon  $r'$  de l'une de ces artères. Comparer la vitesse  $v'$  du sang dans l'une de ces artères à la vitesse  $v_b$  dans l'artère sous-clavière.

**Solution:**  $Q' = Q_b/2$

$$\pi r'^2 = \pi r_b^2/2 \Rightarrow r' = r_b/\sqrt{2}$$

$$Q' = Q_b/2 = \pi r_b^2 v_b/2 \text{ et } Q' = \pi r'^2 v' = \pi r_b^2 v'/2 \Rightarrow v' = v_b$$

- Exprimer la résistance équivalente  $R_{cp}$  aux bornes de ces deux artères et la perte de charge  $\Delta p_{cp}$  entre le coude et le poignet.

**Solution:** Résistance hydraulique  $R'$  d'une artère  $R' = \frac{8\eta L_{cp}}{\pi r'^4}$

Les résistances sont en dérivation, on somme donc leurs inverses d'où  $R_{cp} = R'/2$

$$\Delta p_{cp} = R_{cp} Q_b$$

C'est bien le débit total qui arrive en amont et ressort en aval de la résistance équivalente des deux artères en parallèle. Ne pas utiliser le débit moitié qui passe dans l'une des deux artères.

6. On s'intéresse à la différence de pression  $p_p - p_b$  entre le poignet (P) et le point B où l'on voudrait prendre une mesure avec un brassard. Le circuit entre P et B comporte une partie de longueur  $L_1$  de l'artère sous-clavière (non comprimée) et l'artère équivalente unique de longueur  $L_{cp} = 2L_1$  et de résistance  $R_{cp}$  pour la partie coude-poignet. Exprimer la résistance  $R$  totale de ce tronçon en fonction de  $L_1$ ,  $r_b$  et  $\eta$ . Commenter et calculer la valeur de  $R$ .

**Solution:** Deux résistances en série donc  $R = R_b + R_{cp} = \frac{8\eta}{\pi} \left( \frac{L_1}{r_b^4} + \frac{1}{2} \frac{L_{cp}}{r'^4} \right)$  avec  $L_{cp} = 2L_1$  et  $r' = r_B/\sqrt{2}$  on obtient  $R = \frac{8\eta L_1}{\pi r_b^4} (1 + 4)$ .

On voit que la partie coude-poignet est 4 fois plus résistante que la moitié de bras considérée, malgré la mise en dérivation des deux artères qui diminue la résistance équivalente  $R_{cp}$ .  
 $R = 7.86e7 \text{ Pa s m}^{-3}$ .

7. Calculer la différence de tension  $T_P - T_B$  dans le cas d'un bras tendu horizontalement, puis verticalement. Commenter.

**Solution:** Conservation de l'énergie entre les points B (brassard) et P (poignet) :

$p_B + \frac{1}{2}\rho v_b^2 + \rho gh = p_P + RQ_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2$  avec  $h = 0$  à l'horizontale et  $h = L_1 + L_{cp} = 3L_1$  à la verticale.  
D'où  $p_P - p_B = \rho gh - RQ_b = T_P - T_B$ . (différence de pression = différence de tension)

A l'horizontale, la pression au poignet est inférieure à la mesure du brassard à cause des pertes de charge de Poiseuille. On a  $T_P - T_B = -RQ_b = -261.7 \text{ Pa} = 0.2 \text{ cm Hg}$ , ce qui est assez faible pour permettre de prendre la tension au bras ou au poignet.

A la verticale, le gain d'énergie gravitationnelle compense et dépasse les pertes de Poiseuille. D'où  $T_P - T_B = 3\rho g L_1 - RQ_b = 2857.9 \text{ Pa} = 2.2 \text{ cm Hg}$ . Cette augmentation n'est pas négligeable, la prise de tension au poignet est donc faussée si le bras est tendu vers le bas (ou vers le haut, mais c'est rarement le cas quand on prend la tension).

### 3 Bifurcation de la carotide

Les carotides (gauche et droite) sont les plus grosses artères du cou. Ce sont elles qui permettent d'irriguer le cerveau. Chaque artère carotide commune se subdivise en une artère carotide interne et une artère carotide externe. On considère l'artère carotide droite avec les caractéristiques suivantes :

- l'artère carotide commune droite de longueur  $L_c = 7 \text{ cm}$  et de diamètre  $d_c = 7 \text{ mm}$
- l'artère carotide interne de longueur  $L_i = 3.5 \text{ cm}$  et de diamètre  $d_i = 5 \text{ mm}$
- l'artère carotide externe de longueur  $L_e = 2.5 \text{ cm}$  et de diamètre  $d_e = 5 \text{ mm}$

En aval, l'artère carotide interne conduit jusqu'au cerveau qui a une résistance hydraulique équivalente  $R$ , tandis que l'artère carotide externe permet la vascularisation d'une partie de la face et le cuir chevelu et a une résistance équivalente  $R' = 2R$ .

La tension à l'entrée du système vaut  $p_E = 100 \text{ mmHg}$ . On note  $\eta = 5 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$  la viscosité du sang et  $d = 1.06$  la densité du sang.

1. Dans le cerveau, on peut évaluer une perte de charges  $\Delta p = 96 \text{ mmHg}$  entre la pression artérielle et la pression veineuse. Sachant que le débit dans les tissus du cerveau  $Q = 10.8 \text{ ml.s}^{-1}$ , calculer la résistance hydraulique  $R$  du cerveau.

**Solution:** On utilise  $\Delta p = RQ$  soit  $R = \frac{\Delta p}{Q} = 1.17 \cdot 10^9 \text{ Pa.s.m}^{-3}$ .  
Ne pas oublier de convertir le débit en  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

2. Exprimer et calculer les résistances hydrauliques des artères carotides interne et externe.

**Solution:** On applique la formule de Poiseuille qui nous donne :  $R_i = \frac{8\eta L_i}{\pi(d_i/2)^4} = 1.14 \cdot 10^7 \text{ Pa.s.m}^{-3}$ ,  
 $R_e = \frac{8\eta L_e}{\pi(d_e/2)^4} = \frac{L_e}{L_i} R_i = 8.15 \cdot 10^6 \text{ Pa.s.m}^{-3}$ .

3. Calculer la résistance hydraulique  $R_1$  de toute la branche partant de l'artère carotide interne et la résistance  $R_2$  de toute la branche partant de l'artère carotide externe

**Solution:** Résistances en série, on somme les résistances :  $R_1 = R + R_i = 1.19 \cdot 10^9 \text{ Pa.s.m}^{-3}$  et  
 $R_2 = R' + R_e = 2.37 \cdot 10^9 \text{ Pa.s.m}^{-3}$ .

Les pertes sont dominées par les résistances situées en aval des deux carotides (cerveau et tête) qui sont très élevées par rapport à celles des carotides.

4. En déduire la résistance  $R_T$  totale de tout le système en aval du point d'entrée de la carotide commune. Commenter.

**Solution:**  $R_T = R_c + R_{12}$  avec  $R_{12}$  résistance hydraulique des tronçons interne et externe.  
 $R_c = \frac{8\eta L_c}{\pi(d_c/2)^4} = 5.9 \cdot 10^6 \text{ Pa.s.m}^{-3}$ . En parallèle :  $\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  soit  $R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 7.9 \cdot 10^8 \text{ Pa.s.m}^{-3}$ .

On trouve  $R_T \simeq R_{12}$ . La mise en parallèle des deux carotides diminue un peu la résistance en aval de la carotide commune mais celle-ci domine toujours.

5. Sachant que la perte de charge liée à l'écoulement à travers les carotides internes et externes sont respectivement  $\Delta p_i = 0.30 \text{ mm Hg}$  et  $\Delta p_e = 0.15 \text{ mm Hg}$ . Calculer le débit  $Q_c$  dans la carotide commune.

**Solution:**  $Q_i = \frac{\Delta p_i}{R_i} = 3.41 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $Q_e = \frac{\Delta p_e}{R_e} = 2.45 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$   
Conservation du débit :  $Q_c = Q_i + Q_e = 5.86 \text{ ml.s}^{-1}$

6. Calculer la puissance dissipée pour irriguer la tête et le cerveau.

**Solution:**  $P = \Delta p_T Q_c = R_T Q_c^2 \sim R_{12} Q_c^2 = 27 \text{ mW}$

7. Calculer la pression  $p_{Si}$  en sortie de l'artère carotide interne lorsque le patient se tient debout.

**Solution:** On utilise Bernoulli :  $p_E + \frac{1}{2}\rho v_c^2 = p_{Si} + \rho g(L_c + L_i) + \frac{1}{2}\rho v_i^2 + R_c Q_c + R_i Q_i$   
Pour calculer les vitesses, on utilise les débits :  $v = Q/S$ , on trouve  $v_c = 0.15 \text{ m.s}^{-1}$  et  $v_i = 0.17 \text{ m.s}^{-1}$ .

Au final, on trouve  $p_{Si} = 91.6 \text{ mm Hg}$ .

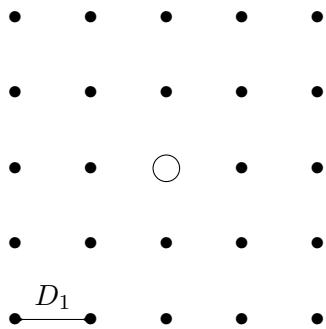
## TD n°4 : Ondes et Acoustique

Dans tous les exercices « exprimer » signifie donner l'expression littérale et « calculer » demande l'expression littérale puis l'application numérique. Les calculettes sont admises en T.D.

### Données utiles pour les exercices

— Intensité sonore de référence :  $I_{\text{ref}} = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$

### 1 Sieste en cours



- • • • •
- • • • • Un étudiant cherche à faire la sieste en cours malgré le bruit ambiant des bavardages. Une conversation à voix basse donne un niveau sonore  $L_0 = 20 \text{ dB}$  à une distance  $D_0 = 1 \text{ m}$ . Le son de la voix est projeté de manière isotrope sur un angle solide  $2\pi \text{ sr}$  vers l'avant. L'étudiant est au centre de la classe disposée comme sur le schéma ci-contre, avec une distance  $D_1$  séparant les étudiants.
- • ○ • •

1. Exprimer l'intensité sonore  $I_0$  d'une conversation à une distance de  $D_0$  et calculer la puissance  $P_0$  de l'onde sonore émise par un bavard.

**Solution:** On a  $I_0 = I_{\text{ref}} 10^{\frac{L_0}{10}} = 10^2 I_{\text{ref}}$   
 $P = 2\pi D_0^2 I_0 = 2\pi 10^{-10} \text{ W}$ .

Bien rappeler l'angle solide  $\Omega = S/D^2$

2. Exprimer le niveau sonore  $L_1$  que reçoit l'étudiant lorsque son voisin lui parle.

**Solution:** onde sphérique donc  $I = \frac{P}{2\pi D^2} \propto D^{-2} \Rightarrow I_1/I_0 = (D_1/D_0)^{-2}$   
 On a  $L_1 - L_0 = 10 \log(\frac{I_1}{I_0}) = -20 \log(\frac{D_1}{D_0})$  d'où  $L_1 = L_0 - 20 \log(\frac{D_1}{D_0})$ .

3. Exprimer le niveau sonore  $L_{\text{tot}}$  que reçoit l'étudiant lorsque tout le monde bavarde dans la classe. On considère pour simplifier que tout le monde le regarde.

**Solution:** A la distance  $D = nD_1$ , on obtient une intensité  $I/I_1 = \left(\frac{nD_1}{D_1}\right)^{-2} = n^{-2} \Rightarrow I = I_1/n^2$   
 On somme les intensités :  $\Sigma I = 4I_1 + 4I_{\sqrt{2}} + 8I_{\sqrt{5}} + 4I_2 + 4I_{\sqrt{8}}$ , avec les indices donnant  $n$   
 $I_{\text{tot}} = 4I_1(1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = 4\frac{91}{40}I_1 = 9.1I_1$   
 D'où :  $L_{\text{tot}} - L_1 = 10 \log \frac{I_{\text{tot}}}{I_1} = 10 \log 9.1 \Rightarrow L_{\text{tot}} = L_0 - 20 * \log(\frac{D_1}{D_0}) + 10 \log 9.1$

4. Calculer ce niveau sonore pour  $D_1 = D_0$  et comparer au niveau de 30 dB d'un environnement calme propice à une sieste.

**Solution:**  $L_{tot} = 29.6$  dB. Ok pour dormir. Ce niveau sera cependant plus important dans la réalité à cause de la réflexion du son sur les murs.

5. Un étudiant et une étudiante parlent à voix basse, chacun délivrant le même niveau sonore  $L_0$  à la distance  $D_0$  du dormeur. Leurs voix ont une octave de différence. Quel est le rapport des amplitudes maximales de surpression sonore reçues par le dormeur ? Même question pour les amplitudes d'oscillation des molécules d'air au niveau du dormeur.

**Solution:** Pour une impédance  $Z$  de l'air on a  $I_0 = \frac{\delta p^2}{2Z}$ . La même intensité parvenant au dormeur des 2 voix, les deux ondes sonores ont la même amplitude de surpression à la distance  $D_0$ .

Pour une fréquence  $f$  et une amplitude  $u_a$  des mouvements d'oscillation, l'intensité vaut  $I_0 = \frac{1}{2}Z\omega^2u_a^2 \propto f^2u_a^2$ . Or la voix féminine a une fréquence  $f_2 = 2f_1$  double de la voix masculine (1 octave). Pour une même intensité  $I_0$  à  $D_0$  on a  $f_1^2u_{a1}^2 = f_2^2u_{a2}^2 \Rightarrow u_{a1}/u_{a2} = f_2/f_1 = 2$ . Les oscillations provoquées par la voix féminine ont une amplitude maximale moitié de celles portées par la voix masculine pour une même intensité locale. En effet, les sons aigus transportent plus d'énergie que les sons graves.

## 2 Ligne à haute tension

Le champ électrique présent à la surface des câbles provoque une myriade de minuscules décharges électriques dans l'air autour d'eux. Le bruit de crémitements qu'elles provoquent se manifeste près des câbles à haute tension. Le Réseau de Transport d'Électricité français indique un niveau sonore  $L_0 = 38$  dB à l'aplomb d'une ligne de 400 kV située à une hauteur  $h = 50$  m au-dessus du sol. On note  $Z$  l'impédance acoustique de l'air.

1. Calculez l'intensité  $I_0$  à l'aplomb de la ligne.

**Solution:** Par définition des décibels  $L_0 = 10 \log_{10} (I_0/I_{ref})$  donc  $I_0 = I_{ref}10^{L_0/10} = 6.3 \times 10^{-9} \text{ W m}^{-2}$ .

2. Dessiner la direction du champ électrique créé par une distribution uniforme de charge disposées sur un fil rectiligne. Dessiner les surfaces équipotentielle. En supposant que les ondes sonores résultant de tous les crémitements suivent la géométrie des équipotentielle, sur quelle surface peut-on considérer l'intensité sonore comme uniforme dans l'environnement de la ligne ?

**Solution:** Dessiner le champ radial perpendiculaire au fil (symétrie cylindrique) et les surfaces équipotentielle perpendiculaires au champ donc cylindriques. Faire ressortir l'analogie de surface équipotentielle ( $E_{pot} = \text{cte}$ ) et de surface d'iso-intensité ( $I = dP/dS = \text{cte}$ ).

Le câble a une longueur de plusieurs kilomètres donc, pour quelqu'un à proximité, il peut être assimilé à une source linéaire uniforme et infinie qui génère des ondes cylindriques.

3. Calculer le rapport d'intensité  $I'/I_0$  et le rapport d'amplitude de surpression  $\delta p'/\delta p_0$  des ondes sonores entre la position située à l'aplomb sous la ligne et une position située à une distance  $d = 2h$  du câble.

**Solution:** Onde cylindrique donc conservation de l'énergie à travers des cylindres concentriques de rayon  $r$  et de longueur  $l$  quelconque, telle que  $2\pi r l I(r) = E_{tot} = \text{cte}$ . D'où  $I(r) \propto 1/r$ .

$$I'/I_0 = h/2h = 1/2$$

$$\text{amplitude de surpression } \delta p = \sqrt{2ZI} \Rightarrow \delta p'/\delta p_0 = 1/\sqrt{2}$$

4. Un pylône de hauteur  $h$  porte deux lignes identiques à la précédente. On néglige la distance qui les séparent. Calculez le niveau sonore  $L_1$  perçu au pied du pylône.

**Solution:** On somme les intensités :  $I_1 = 2I_0$  donc  $L_1 = 10 \log_{10} (I_1/I_{ref}) = 10 \log_{10} (2I_0/I_{ref}) = 10 \log_{10} (2) + 10 \log_{10} (I_0/I_{ref}) = 10 \log_{10} (2) + L_0 \approx 3 \text{ dB} + L_0 = 41 \text{ dB}$ .

Bien rappeler qu'on ne somme jamais les niveaux sonores car :

$$10 \log_{10} ((I_a + I_b)/I_{ref}) \neq 10 \log_{10} (I_a/I_{ref}) + 10 \log_{10} (I_b/I_{ref}).$$

5. Une habitation se situe à une distance  $d = 2h$  du pied du pylône. Calculez le niveau sonore  $L_2$  au niveau de l'habitation.

**Solution:** L'habitation se trouve à la distance  $d$  de la base du pylône donc à la distance  $D = \sqrt{h^2 + d^2} = h\sqrt{5} \approx 112 \text{ m}$  des câbles.

L'onde est cylindrique donc  $I_2/I_1 = h/D = 1/\sqrt{5}$ .

$$L_2 - L_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} = -10 \log \sqrt{5} = -5 \log 5 = -3.5 \text{ dB}. \text{ D'où } L_2 = 37.5 \text{ dB}$$

Bruit très faible

6. Les parois et les fenêtres de l'habitation fournissent une atténuation de 40 dB. Il pleut et le bruit de la pluie à l'extérieur de la maison est estimé à  $L_p = 45 \text{ dB}$ . Les gouttelettes d'eau sur les câbles intensifient le bruit de crémitement des lignes électriques dont le niveau sonore à l'aplomb des 2 lignes passe à  $L'_1 = 56 \text{ dB}$ . Calculez le niveau sonore perçu à l'intérieur de la maison dû à la pluie seule ( $L_{3p}$ ) ainsi que le niveau total ( $L_{3t}$ ). Peut-on percevoir le crémitement des lignes à l'intérieur les jours de pluie ?

**Solution:** Pluie à l'intérieur de la maison :  $L_{3p} = L_p - 40 = 5 \text{ dB}$  donc  $I_{3p} = 10^{0.5} I_{ref}$

Ligne à l'aplomb :  $L'_1 = 56 \text{ dB}$  donc  $I'_1 = 10^{5.6} I_{ref}$

Ligne à l'extérieur de la maison :  $I'_2/I'_1 = 1/\sqrt{5} \Rightarrow I'_2 = \frac{10^{5.6}}{\sqrt{5}} I_{ref}$

Pour tout passage à l'intérieur de la maison :  $L_{int} - L_{ext} = -40 = 10 \log \frac{I_{int}}{I_{ext}}$  donc  $\frac{I_{int}}{I_{ext}} = 10^{-4}$

Ligne à l'intérieur de la maison :  $I'_3 = I'_2 = \frac{10^{1.6}}{\sqrt{5}} I_{ref}$

Ligne et pluie dans la maison :  $I_{3t} = I'_3 + I_{3p} = 20.97 I_{ref}$  d'où  $L_{3t} = 10 \log 20.97 = 13.2 \text{ dB}$ .

$I_{2,\text{total}} = I'_2 + I_{\text{pluie}}$  avec  $I'_2 = I_{ref} 10^{(L'_1 - 10 \log_{10} \frac{D}{h})/10} \approx 1.78 \times 10^{-7} \text{ W m}^{-2}$  et  $I_{\text{pluie}} = I_{ref} 10^{L_{\text{pluie}}/10} = 3.16 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}$ , donc  $I_{2,\text{total}} = 2.1 \times 10^{-7} \text{ W m}^{-2}$ .

A l'intérieur on a donc  $I_{3,\text{total}} = T I_{2,\text{total}} \approx 2.7 \times 10^{-11} \text{ W m}^{-2}$ , soit  $L_{3,\text{total}} = 10 \log_{10} (I_{3,\text{total}}/I_{ref}) \approx 14 \text{ dB}$ . Le bruit aigu du crémitement est tout juste audible (voir la courbe de sensibilité) mais la pluie (plus grave) est sans doute inaudible pour la plupart des gens. Une différence de 8 dB entre les deux est perceptible.

### 3 Météore de Tcheliabinsk

Le 15 février 2013, un météore de  $10^4$  tonnes parcourt le ciel au sud de l'Oural à une vitesse de 16.6 km/s. La friction de l'air a vaporisé le bolide avant qu'il n'atteigne le sol, mais cela a entraîné une violente explosion à  $h = 30 \text{ km}$  d'altitude. L'onde de choc générée par l'évènement fut assez puissante pour briser des fenêtres jusqu'à  $D = 90 \text{ km}$  de distance et pour blesser plus d'un millier de personnes par les effets secondaires (bris de verre, blessures de tympans, etc). On se propose d'étudier ce phénomène en faisant l'approximation d'une onde acoustique normale, se propageant de manière isotrope depuis le lieu de l'explosion. La masse volumique de l'air au niveau du sol vaut  $\rho = 1.225 \text{ kg.m}^{-3}$  et la vitesse du son dans l'air vaut  $c = 340 \text{ m/s}$ .

1. Calculer l'énergie cinétique incidente du météore.

**Solution:**  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 1.38 \times 10^{15} \text{ J}$

2. Calculer l'impédance acoustique  $Z$  de l'air.

**Solution:**  $Z = \rho c = 416.5 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$

3. Sachant qu'une fenêtre fragile se brise lorsqu'elle est soumise à une surpression  $\delta p_1 = 5 \text{ kPa}$ , calculer l'intensité sonore  $I_1$  et le niveau sonore  $L_1$  qu'on aurait mesuré à 90 km de l'explosion.

**Solution:**  $I_1 = \frac{\delta p_1^2}{2Z} = 3\text{e}4 \text{ W/m}^2$

$$L_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_{ref}} = 10 \log(3 \times 10^{16}) = 10 \log 3 + 160 = 165 \text{ dB.}$$

Commenter oralement que le réflexe du muscle stapédiien de l'oreille moyenne s'enclenche à partir de 80 dB pour protéger l'oreille interne, fragile, de lésions éventuelles. Cependant, ce muscle se fatigue rapidement, d'où la recommandation de ne pas s'exposer à des sons intenses trop longtemps. Pour une atténuation de 50 à 60 dB des parois d'habitation, on comprend qu'il y a eu des lésions auditives, mais limitées grâce au passage très bref de l'onde de choc (discontinuité en surpression).

4. Une surpression soudaine peut entraîner des lésions corporelles internes. À partir de  $\delta p_2 = 300 \text{ kPa}$ , les organes peuvent subir des dommages irréversibles pouvant être mortels. On s'intéresse au rayon  $R$  de la zone dangereuse autour de l'explosion. Exprimer le rapport d'intensité  $I_2(R)/I_1$  en fonction des distances.

**Solution:** onde isotrope donc sphérique et  $I_2(R)/I_1 = (R/D)^{-2}$

Calculer le rayon  $R$  de dangerosité. Est-ce compatible avec le fait qu'il n'y ait eu aucune victime directe ?

**Solution:**  $I \propto \delta p^2$  donc  $I_2(R)/I_1 = (\delta p_2/\delta p_1)^2$

$$\text{D'où } (D/R)^2 = (\delta p_2/\delta p_1)^2 \Rightarrow R = \left(\frac{\delta p_1}{\delta p_2}\right) D = 1.5 \text{ km}$$

Sachant que le météore a explosé à 30 km d'altitude, aucune habitation n'était dans la zone dangereuse.

## 4 Absorption dans l'air

On considère un petit haut-parleur qu'on assimile à une source sonore ponctuelle isotrope. Il émet une puissance acoustique  $P_e = 0.1 \text{ W}$ . La vitesse du son dans l'air vaut  $c = 340 \text{ m/s}$ . On néglige dans un premier temps l'absorption de l'air.

1. Calculer l'intensité sonore  $I(r)$  et le niveau sonore  $L(r)$  reçus à la distance  $r = 10 \text{ m}$  de la source. Si le son émis est audible, est-il douloureux pour vos oreilles ?

**Solution:** Onde sphérique donc  $I(r) = \frac{P_e}{4\pi r^2} = 7.96\text{e}-5 \text{ W/m}^2$

$$L(r) = 10 \log \frac{I(r)}{I_{ref}} = 79 \text{ dB, son fort mais non douloureux.}$$

2. L'onde émise par le haut-parleur est de la forme  $p(r, t) - p_{atm} = \delta p(r, t) = \delta p_a(r) \cos(2000\pi t - 2\pi r/\lambda)$  où le temps  $t$  est exprimé en secondes. Exprimer l'intensité moyenne en fonction de la surpression  $\delta p(r, t)$  et de l'impédance  $Z = 440 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$  de l'air. En déduire l'amplitude de surpression  $\delta p_a(r)$  à  $r = 10 \text{ m}$  et à  $r' = 1 \text{ m}$  du haut-parleur.

**Solution:**  $I(r) = \frac{\delta p_a^2(r)}{2Z} \Rightarrow \delta p_a(r) = \sqrt{2ZI(r)} = 0.26 \text{ Pa} = 2.6 \text{e-6 atm (infime !)}$   
 $I(r) \propto r^{-2} \Rightarrow \delta p_a(r) \propto r^{-1} \Rightarrow \delta p_a(r')/\delta p_a(r) = r/r' = 10$ , d'où  $\delta p_a(r') = 2.6 \text{ Pa}$ . Toujours infime même si le son est extrêmement fort à cet endroit.

3. Calculer la fréquence  $f$  et la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde sonore. Le son est-il audible ?

**Solution:** pulsation  $\omega = 2000\pi \text{ rad/s}$  or  $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = 10^3 \text{ Hz}$  audible.  
 $\lambda = c/f = 0.34 \text{ m}$

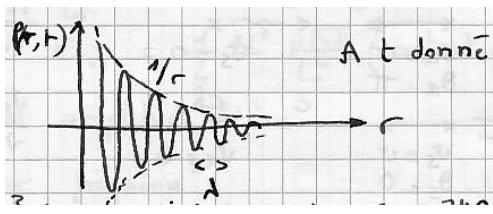
On considère maintenant qu'il y a absorption par l'air et qu'on perd une puissance acoustique  $dP$  sur une distance infinitésimale  $dr$  telle que  $dP = -2aP(r)dr$ , avec  $a = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ .

4. Exprimer la puissance sonore  $P(r)$  à la distance  $r$ .

**Solution:**  $\int_{P_e}^{P(r)} dP/P = -2a \int_0^r dr \Rightarrow \ln P(r) - \ln P_e = -2ar = \ln \frac{P(r)}{P_e} \Rightarrow P(r) = P_e e^{-2ar}$   
 On a bien  $a \propto \text{longueur}^{-1}$  pour avoir un nombre pur dans l'exponentielle.

5. Tracer l'évolution de la surpression en fonction de la distance  $r$  à un instant donné.

**Solution:**



6. Exprimer la nouvelle intensité  $I'(r)$  à la distance  $r$  avec absorption.

**Solution:** Onde toujours sphérique donc  $I'(r) = \frac{P(r)}{4\pi r^2} = \frac{P_e e^{-2ar}}{4\pi r^2} = I(r)e^{-2ar}$

7. Calculer la différence de niveau sonore  $L'(r) - L(r)$  à la distance  $r$  avec et sans absorption. Conclure.

**Solution:**  $L'(r) - L(r) = 10 \log \frac{I'(r)}{I(r)} = 10 \log e^{-2ar} = -\frac{10}{\ln 10} 2ar = -\frac{20ar}{\ln 10} = -0.43 \text{ dB}$  qui correspond à un rapport d'intensité de  $10^{-0.043} = 0.91$  avec et sans absorption. Il y a donc très peu d'absorption dans l'air.

## TD n°5 : Ultrasons et Echographie

Dans tous les exercices « exprimer » signifie donner l'expression littérale et « calculer » demande l'expression littérale puis l'application numérique. Les calculettes sont admises en T.D.

### Données utiles pour les exercices

- Intensité sonore de référence :  $I_{\text{ref}} = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$
- formule Doppler sonore :  $\frac{f_R}{f_S} = \frac{1 - \frac{v_R}{c} \cos \theta_R}{1 - \frac{v_S}{c} \cos \theta_S}$
- $(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$  pour  $\epsilon \ll 1$
- $\ln(1 + \epsilon) \approx \epsilon$  pour  $\epsilon \ll 1$

### 1 Evolution de la densité des os

Pour caractériser l'évolution de la densité minérale des os, on fait des mesures quantitatives ultrasonores (QUS) à travers le calcanéum (talon) à une fréquence  $f = 500 \text{ kHz}$ . On compare les vitesses du son et les coefficients d'absorption des ultrasons mesurés au travers du calcanéum pour deux classes d'âge de garçons : des enfants de 6-7 ans (1) et des jeunes de 16-20 ans (2). Les largeurs moyennes des calcanéums des deux groupes valent  $d_1 = 4.9 \text{ cm}$  et  $d_2 = 5.8 \text{ cm}$ .



La mesure du temps de propagation  $\tau$  des ultrasons à travers l'os donne des valeurs moyennes  $\tau_1 = 32.45 \mu\text{s}$  pour les enfants et  $\tau_2 = 38.15 \mu\text{s}$  pour les jeunes. Les mesures d'atténuation donnent un coefficient d'absorption  $A_1 = 8.1 \text{ dB/MHz/cm}$  pour les enfants et  $A_2 = 14.5 \text{ dB/MHz/cm}$ . On précise que la vitesse du son et le coefficient d'atténuation sont tous deux proportionnels à la masse volumique  $\rho$  de l'os, d'où leur utilité clinique.

1. Calculer les vitesses du son dans les os des deux groupes et les longueurs d'ondes correspondantes.

**Solution:**  $c = d/\tau \Rightarrow c_1 = 1510 \text{ m/s}$  et  $c_2 = 1520 \text{ m/s}$   
 $\lambda = c/f \Rightarrow \lambda_1 \approx \lambda_2 = 3 \text{ mm}$

2. On note  $I_0$  l'intensité incidente qui pénètre dans l'os d'un côté du calcanéum. Elle est identique pour les deux groupes. Calculer le rapport  $I_2/I_1$  des intensités qui sont respectivement détectées pour chaque groupe sur la face osseuse opposée (les ultrasons ont traversé la largeur du calcanéum). Commenter.

**Solution:** Les niveaux sonores émergents sont  $L_1 = L_0 - A_1 d_1 f$  et  $L_2 = L_0 - A_2 d_2 f$ , donc  $L_2 - L_1 = A_1 d_1 f - A_2 d_2 f = 10 \log(I_2/I_1) \Rightarrow I_2/I_1 = 10^{\frac{f}{10}(A_1 d_1 - A_2 d_2)} = 6e-3$ .  
 Les os plus robustes des adolescents absorbent beaucoup plus les ultrasons, ils sont donc plus denses.

3. Calculer le rapport  $\rho_2/\rho_1$  des masses volumiques des os des deux groupes. Que conclure sur la sensibilité des deux types de mesure (vitesse et atténuation) si une autre mesure physique donne un rapport  $\rho_2/\rho_1 = 1.7$  ?

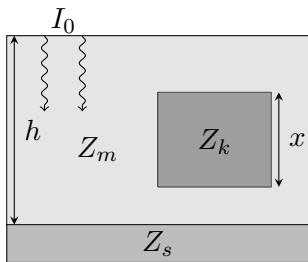
**Solution:**  $A \propto \rho \Rightarrow \rho_2/\rho_1 = A_2/A_1 = 1.79$

$c \propto \rho \Rightarrow \rho_2/\rho_1 = c_2/c_1 = 1.01$

La mesure de  $A$  est plus sensible à la variation de masse volumique de l'os. La vitesse augmente bien avec  $\rho$  mais la mesure n'est pas assez fiable et sensible pour avoir une valeur clinique nette. Dans la réalité, on combine les valeurs de  $A$  et  $c$  dans des indices différents selon les publications et on les compare à des mesures d'absorption en rayons X.

## 2 Impact d'un kyste

Une structure échogène d'impédance acoustique  $Z_s = 1.7 \times 10^6$  rayls (ou  $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ) est située à une profondeur  $h = 4$  cm dans des tissus mous d'impédance  $Z_m = 1.5 \times 10^6$  rayls. Elle présente une frontière supérieure parallèle à la peau. On l'observe en échographie à une fréquence  $f = 5$  MHz, soit directement à travers les tissus mous, soit à travers un kyste d'impédance  $Z_k = 1.5 \times 10^6$  rayls et d'épaisseur  $x = 2$  cm. A cette fréquence, les tissus mous ont un coefficient d'absorption des ultrasons  $A = 5$  dB/cm qu'on compense en augmentant le gain électronique pour renforcer le signal de l'écho. Le kyste n'absorbe pas les ultrasons.



On note  $I_0$  l'intensité des ondes planes ultrasonores qui pénètrent dans les tissus mous. La vitesse du son dans les tissus mous vaut  $c = 1540$  m/s. La sonde émettrice d'ultrasons fait aussi office de récepteur des échos.

1. Calculer la durée de retour de l'écho d'une brève impulsion réfléchi sur la structure.

**Solution:**  $\Delta t = 2h/c = 51.9 \mu\text{s}$

2. Calculer les coefficients de réflexion et de transmission en intensité aux interfaces structure-tissu mou et kyste-tissus mou.

**Solution:**  $R_{ms} = \left( \frac{Z_m - Z_s}{Z_m + Z_s} \right)^2 = \left( \frac{0.2}{3.2} \right)^2 = 3.9\text{e-}3 = 0.39\%$  donc  $T_{ms} = 1 - R_{ms} = 0.996$   
 $R_{mk} = 0$  car  $Z_m = Z_k$  et  $T_{mk} = 1$

3. Exprimer l'intensité  $I_1$  atteignant la structure en évitant le kyste.

**Solution:** Absorption dans les tissus mous donc

$$L_1 = L_0 - Ah \Rightarrow \log \frac{I_1}{I_{ref}} = \log \frac{I_0}{I_{ref}} - \frac{Ah}{10} \Rightarrow I_1 = I_0 10^{-Ah/10}$$

4. Exprimer l'intensité  $I_{r1}$  de l'écho reçu par la sonde à travers les tissus mous.

**Solution:** L'intensité réfléchie sur la structure a pour intensité  $R_{ms}I_1$ . Elle diminue ensuite par absorption sur le chemin du retour, de la même quantité qu'à l'aller, donc  
 $I_{r1} = R_{ms}I_0 10^{-2Ah/10} = R_{ms}I_0 10^{-Ah/5}$

5. Exprimer l'intensité  $I_{r2}$  de l'écho reçu par la sonde à travers le kyste pour la même intensité  $I_0$  émise.

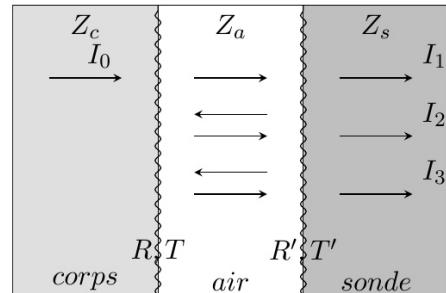
**Solution:** Il y a transmission totale et pas d'absorption dans le kyste, donc absorption seulement sur la longueur  $2 \times (h - x)$  pour l'aller-retour. D'où  
 $I_{r2} = R_{ms} I_0 10^{-2A(h-x)/10} = R_{ms} I_0 10^{-A(h-x)/5}$

6. Montrer que la structure apparaît sous la forme de deux zones juxtaposées, donnant sur l'image échographique des brillances d'intensités différentes dont on calculera le rapport.

**Solution:**  $I_{r2}/I_{r1} = 10^{\frac{A}{5}(h-x+h)} = 10^{Ax/5} = 10^2$ . Bien penser à garder  $x$  en cm car A en dB/cm. La partie de l'image interceptant le kyste est 100 fois plus brillante que celle ne revenant qu'à travers les tissus mous.

### 3 Gel d'adaptation d'impédance

L'écho d'ultrasons réfléchi sur un organe ressort du corps pour pénétrer dans le détecteur via une très mince couche d'air. Les impédances acoustiques des différents milieux valent  $Z_c = 1.5 \times 10^6 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$  pour le corps,  $Z_a = 430 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$  pour l'air et  $Z_s = 1.72 \times 10^7 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$  pour la sonde qui sert d'émetteur et de récepteur des ondes planes ultrasonores. On néglige l'absorption dans les différents milieux. On donne la relation  $a = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = 1/(1-x)$  pour  $n \rightarrow \infty$ .



1. Calculer les coefficients de réflexion et de transmission en intensité des interfaces corps-air ( $R$  et  $T$ ) et air-sonde ( $R'$  et  $T'$ ).

**Solution:** air-corps :  $R = \left( \frac{Z_c - Z_a}{Z_c + Z_a} \right)^2 = \left( \frac{1 - Z_a/Z_c}{1 + Z_a/Z_c} \right)^2 \approx (1 - 2\frac{Z_a}{Z_c})^2 \approx 1 - 4\frac{Z_a}{Z_c} = 1 - 1.15 \cdot 10^{-3}$   
d'où  $T = 1 - R = 1.15 \cdot 10^{-3}$  air-sonde :  $R' = \left( \frac{Z_s - Z_a}{Z_s + Z_a} \right)^2 = \left( \frac{1 - Z_a/Z_s}{1 + Z_a/Z_s} \right)^2 \approx (1 - 2\frac{Z_a}{Z_s})^2 \approx 1 - 4\frac{Z_a}{Z_s} = 1 - 10^{-4}$   
d'où  $T' = 1 - R' = 10^{-4}$   
Presque toute l'intensité se réfléchit à chaque interface. Les ondes qui passent dans l'air ricochetent surtout dans la couche d'air.

2. Exprimer l'intensité  $I_1$  émergeant directement dans la sonde en fonction de l'intensité incidente  $I_0$  de l'écho.

**Solution:** Transmission directe avec  $T$  puis  $T'$  :  $I_1 = TT'I_0 \approx 10^{-7}I_0$  !

3. Exprimer (en fonction de l'intensité incidente  $I_0$  puis de l'intensité  $I_1$ ) l'intensité  $I_2$  émergeant dans la sonde après une double réflexion dans la couche d'air (voir le schéma).

**Solution:**  $I_2 = (TI_0)R'RT' = RR'I_1$

4. Ajouter des cycles de double réflexion, puis exprimer l'intensité totale  $I_d$  reçue par le détecteur en fonction de  $I_0$ . La somme des intensités est valable car les ondes se construisent avec des phases aléatoires à cause des petites fluctuations d'épaisseur de la couche d'air.

**Solution:**  $I_2 = (TI_0)R'RR'RT' = RR'I_2 = (RR')^2I_1$  d'où  $I_n/I_{n-1} = RR'$  pour  $n \geq 2$

On somme les intensités pour avoir le total

$$I_d = [1 + RR' + (RR')^2 + \dots (RR')^n + \dots] I_1 = \left(\frac{1}{1-RR'}\right) I_1 = \left(\frac{1}{1-RR'}\right) TT'I_0$$

5. Calculer l'atténuation  $L_d - L_0$  des niveaux sonores entre l'écho incident et l'intensité reçue par la sonde.

**Solution:**  $L_d - L_0 = 10 \log \frac{I_d}{I_0} = 10 \log \frac{TT'}{1-RR'}$

On note que  $R = 1 - T$  et  $R' = 1 - T'$ , donc  $RR' = (1 - T)(1 - T') \approx 1 - T - T'$  d'où  $1 - RR' \approx T + T' = T(1 + T'/T)$

$\frac{TT'}{1-RR'} \approx \frac{T'}{1+T'/T}$  et  $L_d - L_0 = 10 \log T' - 10 \log(1 + T'/T)$ . Or  $T'/T \approx 0.1$

avec  $\log(1 + \epsilon) \approx \epsilon / \ln(10)$  on obtient  $L_d - L_0 = 10 \log T' - \frac{10}{\ln 10} \frac{T'}{T} = -40 - \frac{1}{\ln 10} = -40.4$  dB !

6. Calculer la même atténuation  $L_d - L_0$  après avoir badigeonné le patient avec un gel d'impédance  $Z_g = 1.4 \times 10^6$  kg m<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup> qui remplace la couche d'air.

**Solution:** On remplace  $Z_a$  par  $Z_g$  et on reprend les calculs numériques pour trouver  $R = 1.19e-3$  et  $T = 0.9988$ , ainsi que  $R' = 0.7216$  et  $T' = 0.2784$ . Il n'y a presque plus d'intensité réfléchie dans le gel. D'où

$I_d/I_0 = TT'/(1 - RR') \approx T' = 0.278$  et  $L_d - L_0 = -5.6$  dB. La sonde reçoit une grande partie de l'intensité de l'écho émergeant de l'organe.

7. L'écho provient du diaphragme qui monte et s'abaisse au cours du cycle respiratoire. Il émerge du diaphragme à la fréquence  $f_0$ . On oriente la sonde parallèlement au vecteur vitesse du diaphragme dans la région d'où provient l'écho. On utilise le gel d'adaptation d'impédance. Comparer sans calcul la fréquence  $f_1$  reçue directement par la sonde (d'intensité  $I_1$  ci-dessus) à la fréquence émise  $f_0$  dans les deux cas où le diaphragme monte et descend vers la sonde. Même question pour la fréquence de l'écho reçu après une double réflexion dans le gel (intensité  $I_2$  ci-dessus).

**Solution:** Montée  $I_1$  : L'onde est émise par une source qui vient au devant de la sonde, donc elle est reçue à une fréquence  $f_1$  plus élevée (son plus aigu) que  $f_0$ .

Descente  $I_1$  : L'onde est émise par une source qui s'éloigne de la sonde, donc elle est reçue à une fréquence  $f_1$  moins élevée (son plus grave) que  $f_0$ .

L'onde se réfléchit sur des interfaces corps-gel et gel-sonde immobiles, donc les échos dans le gel ont la même fréquence  $f_1$  que l'écho émergeant directement.

8. On mesure une variation relative de fréquence  $(f_1 - f'_1)/f_0 = 1.3 \times 10^{-5}$  entre la montée et la descente du diaphragme. Calculer la vitesse  $v$  de ce dernier.

**Solution:** Faire des dessins pour trouver les angles  $(\vec{c}, \vec{v}_S)$  et  $(\vec{c}, \vec{v}_R)$  avec le sens des vecteurs  $\vec{c}$  qui s'inverse à l'aller et au retour. Puis appliquer la formule Doppler sonore avec

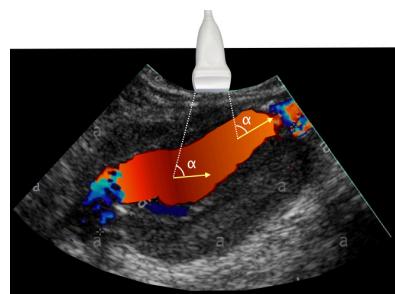
à la montée :  $v_R = 0$  car le récepteur est la sonde immobile, et l'émetteur diaphragme mobile avec  $v_S = v$  et  $\theta_S = 0$  d'où  $f_1/f_0 = (1 - v/c)^{-1} \approx 1 + v/c$  qui est bien  $> 1$  (+aigu)

à la descente :  $v_R = 0$  car sonde immobile, et diaphragme mobile  $v_S = v$  et  $\theta_S = \pi$  d'où  $f'_1/f_0 = (1 + v/c)^{-1} \approx 1 - v/c$  qui est bien  $< 1$  (+grave)

D'où  $\Delta f/f_0 = (f_1 - f'_1)/f_0 = f_1/f_0 - f'_1/f_0 = 2v/c \Rightarrow v = \frac{c \Delta f}{2 f_0} = 0.01$  m/s = 1 cm/s

## 4 Anévrisme de l'aorte

On prend une image échographique d'un anévrisme de l'aorte abdominale avec un faisceau d'ondes ultrasonores planes, de fréquence  $f_0 = 4.5$  MHz. La sonde émet un niveau sonore  $L_0$ . On considère qu'il y a une bonne adaptation d'impédance entre la sonde, la peau et les tissus sous-jacents. Le coefficient de réflexion en intensité des ultrasons à l'interface tissus-sang vaut  $R = 10^{-3}$ . On mesure directement sur l'image le rapport  $D_2/D_1 = 1.5$  des diamètres de l'artère dans sa partie renflée (point 2) et dans la partie normale supérieure (point 1).



Les points d'échos aortiques sont situés à des profondeurs respectives  $h_1 = 3$  cm et  $h_2 = 5$  cm sous les points d'entrée des faisceaux. La vitesse moyenne du son dans les tissus traversés vaut  $c = 1540$  m/s et le coefficient d'absorption de ces tissus vaut  $A = 0.9$  dB/cm/MHz. On mesure également en ces deux points une variation relative de fréquence  $\Delta f/f_0$  des échos réfléchis sur le sang aortique par rapport à la fréquence incidente  $f_0$ . Le rapport de ces deux variations relatives vaut  $\frac{\Delta f_1/f_0}{\Delta f_2/f_0} = 2.45$ . On mesure enfin l'angle  $\alpha = 70^\circ$  entre la direction d'observation et le vecteur vitesse du sang en ces deux points.

1. Indiquer sans calcul en quel point le sang est ralenti et en quel point les pertes de charge par unité de longueur sont plus faibles. Calculer le rapport  $v_1/v_2$  attendu des mesures de vitesse dans l'artère.

**Solution:** conservation du débit donc le sang va moins vite dans la partie renflée (point 2).

Les pertes de charge par unité de longueur varient comme  $D^{-4}$ , donc elles sont plus faibles dans l'anévrisme.

$$\pi \frac{D_1^2}{4} v_1 = \pi \frac{D_2^2}{4} v_2 \Rightarrow v_1/v_2 = \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 = 2.25$$

2. Expliquer sans calcul en quel point l'effet Doppler est plus important. Exprimer la variation relative de fréquence entre l'écho et l'onde émise par la sonde pour l'un des points.

**Solution:** La vitesse  $v$  sanguine étant plus grande au point 1, le décalage Doppler en fréquence des échos sera plus important (effet en  $v/c$ ).

Faire des dessins avec le sens des vecteurs  $\vec{c}$  qui s'inverse à l'aller et au retour.

Aller : sonde immobile ( $v_S = 0$  et récepteur sang mobile avec  $v_R = v$  et angle  $\theta_R = (\vec{c}, \vec{v}) = \pi - \alpha$ .

On applique la formule donc  $f'/f_0 = 1 - \frac{v}{c} \cos(\pi - \alpha) = 1 + \frac{v}{c} \cos \alpha$

Retour : émetteur sang mobile avec  $v_S = v$  et angle  $\theta_S = (\vec{c}, \vec{v}) = \alpha$  et récepteur sonde immobile avec  $v_R = 0$ . On applique la formule donc  $f''/f' = (1 - \frac{v}{c} \cos \alpha)^{-1} \approx 1 + \frac{v}{c} \cos \alpha$

D'où  $\Delta f/f_0 = \frac{f'' - f_0}{f_0} = \frac{f''}{f'} \frac{f'}{f_0} - 1 = (1 + \frac{v}{c} \cos \alpha)^2 - 1 \approx 1 + 2 \frac{v}{c} \cos \alpha - 1 = +2 \frac{v}{c} \cos \alpha$

On vérifie le 2 pour double effet Doppler, effet en  $v/c$  et le signe positif (le sang se rapproche de la sonde donc les échos sont plus aigus).

3. Calculer le rapport  $v_1/v_2$  estimé à partir des mesures Doppler. Commenter par rapport au résultat géométrique et à leurs précisions relatives.

**Solution:**  $\frac{\Delta f_1/f_0}{\Delta f_2/f_0} = v_1/v_2 = 2.45$  en bon accord le rapport issu des mesures de taille. Les deux types de mesure ont des incertitudes importantes à cause de la mauvaise résolution spatiale de l'image pour les mesures géométriques (augmenter la fréquence augmente la résolution mais aussi l'absorption) et à cause des problèmes de projection angulaire ( $\cos \alpha$ ) dans les mesures Doppler.

4. Calculer la différence de niveau sonore  $L_1 - L_2$  entre les échos reçus par la sonde depuis ces deux points.

**Solution:** Ondes planes dont conservation de l'intensité avec la distance dans un milieu parfait, mais absorption des tissus donc :

Le niveau  $L' = L_0 - Af_0 h$  arrive sur l'interface aortique. L'intensité  $I'' = RI'$  repart dans l'écho, donc  $L'' - L' = 10 \log \frac{I''}{I'} = 10 \log R$ . Puis on reprend par absorption au retour, donc  $L = L'' - Af_0 h$  revient à la sonde. On obtient donc :

$L_1 = L_0 + 10 \log R - 2Af_0 h_1$  et  $L_2 = L_0 + 10 \log R - 2Af_0 h_2$ , d'où  $L_1 - L_2 = 2Af_0(h_2 - h_1) = 16.2$  dB. C'est énorme. Les récepteurs doivent répondre sur une grande plage d'intensité sans saturer, ni perdre le signal. Bien laisser  $h$  en cm car  $A$  en dB/MHz/cm.

## TD n°6 : Lumière et imagerie

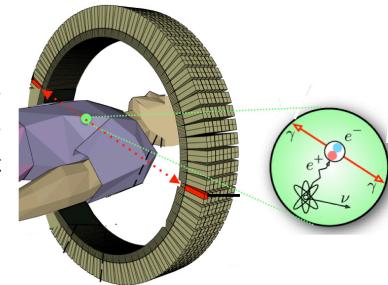
Dans tous les exercices « exprimer » signifie donner l'expression littérale et « calculer » demande l'expression littérale puis l'application numérique. Les calculettes sont admises en T.D.

### Données utiles pour les exercices

- charge électrique élémentaire  $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
- constante de Planck  $h = 6.625 \times 10^{-34} \text{ J s}$
- masse volumique de l'eau  $\rho_e = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

### 1 Tomographie par émission de positons

Un patient est ausculté par tomographie par émission de positons (TEP) après une injection de fluorodésoxyglucose, c'est-à-dire d'un glucose portant un isotope radioactif du fluor qui se désintègre en émettant un positon ( $^{18}\text{F} \rightarrow ^{18}\text{O} + e^+ + \nu_e$ ). Chaque positon émis s'annihile rapidement avec un électron ambiant ( $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ ). On donne l'énergie de masse,  $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$ , d'un électron et d'un positon.



- En considérant la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement de la réaction d'annihilation, expliquer la direction de la paire de photons  $\gamma$  émergents et calculer l'énergie d'un photon.

**Solution:** Les quantités de mouvement  $m_e |\vec{v}|$  de l'électron et du positon sont très petites. On peut considérer que leur résultante est proche de  $\vec{0}$ . Chaque photon a une quantité de mouvement de norme  $h\nu/c$  non nulle. En partant dans des directions opposées, la résultante de leurs quantités de mouvement peut s'annuler (ou s'approcher de  $\vec{0}$  pour des directions quasi-opposées) pour égaler la résultante des quantités de mouvement de l'électron et du positon parent.

L'énergie totale est conservée lors de l'annihilation donc  $2m_e c^2 = 2h\nu$ . Donc chaque photon reçoit l'énergie  $E_\gamma = h\nu = m_e c^2 = 511 \text{ keV}$ .

- Si un photon  $\gamma$  est absorbé par une cellule, son énergie est convertie en chaleur (énergie cinétique d'agitation thermique des atomes de la cellule). Calculer l'augmentation de température  $\Delta T$  d'une cellule de masse  $m = 10^{-11} \text{ kg}$  si sa capacité à accumuler de l'énergie par unité de masse et par degré vaut  $C = \frac{dE}{dm dT} = 4000 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . La quantité  $C$  s'appelle une chaleur massique.

**Solution:**  $E_\gamma = mC\Delta T \Rightarrow \Delta T = E_\gamma/(mC) = 2\text{e-}6 \text{ K}$ , élévation heureusement infime.

On compare l'intensité  $\gamma$  détectée lors de l'examen d'un patient par rapport à l'intensité  $I_0$  émise par ses lésions à la colonne vertébrale. Pour simplifier, on assimile son abdomen à un cylindre homogène de rayon

$R = 13$  cm, axé sur la colonne vertébrale de rayon  $R_0 = 3$  cm dans la région d'étude. On considère que les photons sont émis radialement autour de la colonne (symétrie cylindrique). On note  $L_{1/2} = 8$  cm la longueur de demi-atténuation des photons  $\gamma$ , c'est-à-dire l'épaisseur de tissus nécessaire pour atténuer d'un facteur 2 un nombre initial de photons. On néglige l'absorption dans l'air.

3. On considère tout d'abord un faisceau de photons parallèles. Relier l'intensité lumineuse  $I$  en un point et le flux  $F = \frac{dN_\gamma}{dS dt}$  de photons (par unité de surface et de temps) en ce point. En déduire la loi d'atténuation du flux de photons en fonction de la distance  $r$  à la source et de la longueur  $L$  d'atténuation. Exprimer  $L$  en fonction de  $L_{1/2}$ .

**Solution:** intensité = puissance par unité de surface  $I = \frac{dE}{dS dt}$ . Or tous les photons ont la même énergie  $E_\gamma = h\nu$ , donc  $I = E_\gamma \frac{dN_\gamma}{dS dt} = E_\gamma F$   
 L'atténuation exponentielle de l'intensité se traduit aussi en diminution exponentielle du flux de photons :  $F(r) = F_0 e^{-r/L}$ .  
 $F(L_{1/2}) = F_0/2 = F_0 e^{-L_{1/2}/L} \Rightarrow -\ln 2 = -L_{1/2}/L \Rightarrow L = L_{1/2} / \ln 2$

4. Exprimer le flux  $F(r)$  reçu par le détecteur à la distance  $r$  de l'axe du patient en l'absence d'absorption. On notera  $F_0 = F(R_0)$  le flux émis au niveau de la colonne.

**Solution:** Le taux de photons  $dN_\gamma/dt$  émis doit être conservé à travers des surfaces cylindriques centrées sur la colonne, donc pour une longueur  $l$  quelconque de colonne,  $dN_\gamma/dt = F_0 2\pi R_0 l = F(r) 2\pi r l \Rightarrow F(r) = F_0 \frac{R_0}{r} \propto r^{-1}$

5. Exprimer le flux  $F(r)$  reçu par le détecteur à la distance  $r$  de la colonne du patient avec absorption. Calculer le rapport  $F(R)/F_0$  en sortie d'abdomen, puis le rapport  $F(R_d)/F_0$  qui atteint le bord interne du détecteur au rayon  $R_d = 40$  cm.

**Solution:**  $F(r) = F_0 \frac{R_0}{r} e^{-(r-R_0) \ln 2 / L_{1/2}}$ .  
 Attention à l'absorption sur  $r - R_0$  et non sur  $r$  pour avoir  $F(R_0) = F_0$  à la sortie de l'abdomen :  $F(R)/F_0 = \frac{R_0}{R} e^{-(R-R_0) \ln 2 / L_{1/2}} = 0.1$   
 Pas d'absorption dans l'air et onde cylindrique donc  
 $F(R)R = F(R_d)R_d \Rightarrow F(R_d)/F_0 = \frac{R_0}{R_d} e^{-(R-R_0) \ln 2 / L_{1/2}} = 0.03$

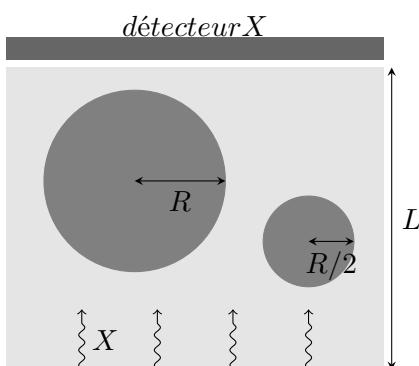
6. La position de la source sur la droite reliant les directions de détection d'une paire de photons est estimée grâce au petit décalage temporel entre les deux détections. Calculer ce délai  $\Delta t$  pour une annihilation ayant lieu en un point au bord de la colonne.

**Solution:** Un photon parcourt  $R_d - R_0$  et l'autre parcourt  $R_d + R_0$ , tous deux à la vitesse  $c$  de la lumière. Donc  $\Delta t = 2R_0/c = 2e-10$  s = 0.2 ns !  
 C'est pourquoi la résolution spatiale des caméras TEP est supérieure au cm.

## 2 Radiographie du tibia et du péroné

1. Exprimer les contrastes maximaux du tibia et du péroné. Ces contrastes sont-ils forts (proches de 1) ou faibles (proches de 0) ?

**Solution:** Tibia :  $I_c = I_0 e^{-\mu_o 2R} e^{-\mu_m (L-2R)}$  et  $I_b = I_0 e^{-\mu_m L}$   
 $C_t = 1 - \frac{I_c}{I_b} = 1 - e^{-(\mu_o - \mu_m) 2R}$



On étudie l'image en rayons X des deux os cylindriques de la jambe, le tibia de rayon  $R = 1.5$  cm et le péroné de rayon  $R' = R/2$ , à travers une jambe d'épaisseur totale  $L$  selon la disposition ci-contre. On éclaire avec un faisceau de rayons X de 20 keV parallèles, d'intensité incidente  $I_0$ . Les coefficients d'atténuation du rayonnement X valent  $\mu_o = 4 \text{ cm}^{-1}$  dans les os et  $\mu_m = 0.7 \text{ cm}^{-1}$  en moyenne dans les muscles. On néglige l'absorption dans les autres tissus. On définit le contraste maximum de chaque os comme la variation relative d'intensité  $C = (I_b - I_c)/I_b$  entre les intensités détectées vers le centre de l'os ( $I_c$ ) et à l'extérieur du bord de l'os ( $I_b$ ).

$$\text{Péroné : } I'_c = I_0 e^{-\mu_o R} e^{-\mu_m(L-R)} \text{ et } I'_b = I_b$$

$$C_p = 1 - \frac{I'_c}{I'_b} = 1 - e^{-(\mu_o - \mu_m)R}$$

Les termes exponentiels sont  $\ll 1$  donc les contrastes des deux os sont excellents  $C \sim 1$

2. Calculer le rapport des intensités reçues vers le centre des deux os. Dans les faits on observe un rapport plus faible. Commenter.

$$\text{Solution: } I'_c/I_c = \frac{I'_c}{I_b} \frac{I_b}{I'_c} = e^{-(\mu_o - \mu_m)R} e^{(\mu_o - \mu_m)2R} = e^{(\mu_o - \mu_m)R} = 141$$

Les os ne sont pas pleins mais remplis de moëlle avec un coefficient d'absorption plus proche de  $\mu_m$  que de  $\mu_o$ .

3. Les os sont en fait remplis de moëlle, de coefficient d'absorption proche de celui de la graisse  $\mu_g = 0.5 \text{ cm}^{-1}$ . Le rayon externe de la moëlle correspond à la moitié du rayon de l'os. Calculer le nouveau rapport des intensités reçues vers le centre des deux os.

$$\text{Solution: Tibia : } I_c = I_0 e^{-\mu_o R} e^{-\mu_g R} e^{-\mu_m(L-2R)}$$

$$\text{Péroné : } I'_c = I_0 e^{-\mu_o R/2} e^{-\mu_g R/2} e^{-\mu_m(L-R)}$$

$$I'_c/I_c = e^{(\mu_o + \mu_g - 2\mu_m)R/2} = 10.2 \text{ ce qui est plus raisonnable.}$$

4. Pour détecter un signal, il faut que l'intensité  $I_b$  transmise en dehors des os soit telle que  $I_b > 10^{-5} I_0$ . Calculer l'épaisseur maximale  $L_m$  de jambe à travers laquelle on peut observer avec ce détecteur. Commenter.

$$\text{Solution: } I_b/I_0 = e^{-\mu_m L} > 10^{-5} \Rightarrow -\mu_m L > \ln 10^{-5} = \ln 10 \log 10^{-5} = -5 \ln 10 \Rightarrow \mu_m L < 5 \ln 10 \Rightarrow L < 5 \ln 10 / \mu_m = 16.4 \text{ cm}$$

Il faut donc des détecteurs X sensibles pour pouvoir explorer des zones plus épaisses comme les cuisses ou l'abdomen.

### 3 Irradiation de cancer cutané par laser

Des recherches portent sur l'irradiation non-ablative de cancers cutanés par laser pour enrayer leur croissance aux premiers stades de développement. L'irradiation utilise un laser infrarouge de longueur d'onde  $\lambda = 1.927 \mu\text{m}$ , déposant une énergie  $E_0 = 70 \text{ mJ}$  dans un faisceau de rayon  $r = 100 \mu\text{m}$  pendant une impulsion de durée  $\Delta t = 7 \text{ ms}$  (le dépôt d'énergie est environ dix fois supérieur aux valeurs pratiquées en dermatologie). Le coefficient de réflexion en intensité de la peau à cette longueur d'onde vaut  $R = 10\%$  et le coefficient d'absorption dans la peau vaut  $\mu = 5 \text{ cm}^{-1}$ . La peau visée a une épaisseur  $h = 250 \mu\text{m}$ , une densité  $d = 1.2$ , une chaleur massique  $C = 3630 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  et une température initiale  $T = 37^\circ\text{C}$ .

1. Calculer l'intensité lumineuse  $I_0$  incidente sur la peau et le flux correspondant de photons  $F_0 = \frac{dN\gamma}{dSdt}$  par unité de surface et de temps.

**Solution:**  $I_0 = \frac{E_0}{\pi r^2 \Delta t} = 3.18 \times 10^8 \text{ W m}^{-2}$  (!!)  
 $I_0 = h\nu F_0 \Rightarrow F_0 = \frac{I_0 \lambda}{hc} = 3.09 \times 10^{27} \text{ photon m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ .

2. Comment varie cette intensité si on recule le laser à une distance double, pour un faisceau laser parfaitement cylindrique et pour un faisceau laser très faiblement conique (d'angle solide  $\Omega = 4 \times 10^{-4} \text{ sr}$ ).

**Solution:** Faisceau de photons parallèles : l'intensité  $I_0$  qui atteint la peau ne varie pas avec la distance de la source.

Faisceau conique : la puissance totale se conserve sur les arcs de sphère interceptés par le faisceau, donc  $\Omega d^2 I(d) = cte \Rightarrow \frac{I(2d_0)}{I_0(d_0)} = \frac{d_0^2}{4d_0^2} = 1/4$ , donc on perdrait un facteur 4 en intensité en reculant au double de distance, quel que soit l'ouverture  $\Omega$ .

3. Exprimer l'intensité absorbée  $I_a$  sur l'épaisseur de la peau en fonction de l'intensité incidente  $I_0$ .

**Solution:** L'intensité  $I'_0 = (1 - R)I_0$  pénètre dans la peau.  
A la profondeur  $h$ , il reste  $I(h) = I'_0 e^{-\mu h}$ ,  
donc l'intensité absorbée vaut  $I_a = I'_0 - I(h) = (1 - R)I_0(1 - e^{-\mu h})$

4. Calculer l'énergie  $E_a$  absorbée et l'accroissement maximum  $\Delta T_m$  de température de peau qu'on en attendrait.

**Solution:**  $E_a = I_a \pi r^2 \Delta t$ . On remplace  $I_a$  et  $I_0$  par leurs expressions et on trouve  
 $E_a = (1 - e^{-\mu h})(1 - R)E_0 = 7.4 \text{ mJ}$  (attention de prendre  $h$  en cm si on utilise  $\mu = 5 \text{ cm}^{-1}$ ).  
 $E_a = mC\Delta T_m$  avec une masse de peau sous le faisceau  $m = \rho \pi r^2 h$  et  $\rho = d \times \rho_{eau}$  d'où  
 $\Delta T_m = \frac{E_a}{d\rho_e \pi r^2 h C} = 216 \text{ K}$ .

5. La conduction de chaleur par le sang et les tissus voisins limite rapidement l'élévation de température. Deux secondes après l'impulsion du laser, une caméra infrarouge voit l'intensité lumineuse du rayonnement thermique de la peau se stabiliser autour d'une valeur 2.6% plus forte qu'avant l'irradiation. Sachant que l'intensité  $I_t$  du rayonnement thermique émis par la peau varie avec la température  $T$  de la peau selon  $I_t \propto T^4$ , calculer l'accroissement  $\Delta T'$  de température de la peau après quelques secondes.

**Solution:** Petite variation donc différentielles :  $\frac{dI_t}{I_t} = 4 \frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{\Delta T'}{T} = \frac{1}{4} \frac{dI_t}{I_t} \Rightarrow \Delta T' = 2 \text{ K}$  pour  $T = 310 \text{ K}$

6. Exprimer la norme de la quantité de mouvement  $|\vec{P}|$  d'un photon du laser, puis la variation  $\Delta P = |\Delta \vec{P}|$  de quantité de mouvement d'un photon lorsqu'il se réfléchit en incidence normale sur la peau.

**Solution:**  $|\vec{P}| = h\nu/c = h/\lambda$   
incident :  $\vec{P}_i = \frac{h}{\lambda} \vec{u}$  et après réflexion  $\vec{P}_r = -\frac{h}{\lambda} \vec{u}$ , donc  
 $\Delta P = |\vec{P}_r - \vec{P}_i| = 2 \frac{h}{\lambda}$

7. Calculer la pression  $p_l$  du laser sur la peau.

**Solution:** D'après la loi de Newton pour une surface  $dS$  donnée la pression s'écrit comme  $p_l = \frac{1}{dS} \frac{dP}{dt}$ . On connaît le flux  $F_0 = \frac{dN_\gamma}{dS dt}$  et l'impulsion  $\Delta P$  que chaque photon réfléchi transmet à la peau. Mais l'intensité réfléchie vaut seulement  $I_r = RI_0$  donc le flux réfléchi vaut  $RF_0$ . On obtient  $p_l = \frac{dN_{reflechi}}{dS dt} 2\frac{h}{\lambda} = RF_0 2\frac{h}{\lambda} = 0.2 \text{ Pa}$