

Niveau: CPGE 2^e année

Principaux: Physique ondulatoire

Notion de fonction d'onde, équation de Schrödinger, cas d'une particule libre
Puits de potentiel, courant de probabilité

Introduction

Programme python puits carré fini:

=> Profondeur de pénétration

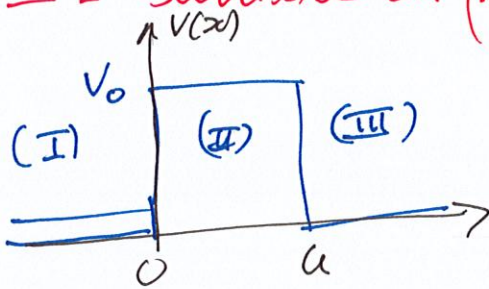
$$\Psi_n(x) = A_n \exp(-q_n |x|)$$

$$\Rightarrow \delta_n = \frac{1}{q_n} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E_n)}}$$

Rq: plus $E_n \nearrow$, plus $\delta_n \nearrow$
 $V_0 \searrow$

Barrière possible même en CPGE
=> plus cohérent a priori

I - Barrière de potentiel: effet tunnel



$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 & \text{(I)} \\ V_0 & \text{si } 0 \leq x \leq a & \text{(II)} \\ 0 & \text{si } x > a & \text{(III)} \end{cases}$$

1. Fonctions d'onde propre

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} = E \psi_1 \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} = (E - V_0) \psi_2 \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_3}{dx^2} = E \psi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = A_1 \exp(ikx) + B_1 \exp(-ikx) \\ \psi_2 = A_2 \exp(qx) + B_2 \exp(-qx) \\ \psi_3 = A_3 \exp(ikx) + B_3 \exp(-ikx) \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \end{cases}$$

Ondes incidente et réfléchie
=> Onde transmise
Ondes évanescente et anti-évanescente.

2 - Réflexion et transmission: effet tunnel

① Onde incidente: $\Psi_i(x,t) = A_1 \exp[i(kx - \omega t)] \Rightarrow \vec{j}_i = \frac{\hbar k}{m} |\Psi_i(x,t)|^2 = A_1^2 \frac{\hbar k}{m}$
réfléchie: $\Psi_r(x,t) = B_1 \exp[-i(kx + \omega t)] \Rightarrow \vec{j}_r = \frac{\hbar k}{m} |\Psi_r(x,t)|^2 = B_1^2 \frac{\hbar k}{m}$
transmise: $\Psi_t(x,t) = A_3 \exp[i(kx - \omega t)] \Rightarrow \vec{j}_t = \frac{\hbar k}{m} |\Psi_t(x,t)|^2 = A_3^2 \frac{\hbar k}{m}$

Coefficients de probabilité de réflexion et de transmission

$$R = \frac{\|\vec{J}_r\|}{\|\vec{J}_i\|} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} \text{ et } T = \frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|} = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$$

Pour déterminer les coeff : CL sur ψ et $\frac{d\psi}{dx}$ en 0 et en a :

$$\text{en } 0 \begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 & (1) \\ q(A_1 - B_1) = q(A_2 - B_2) & (2) \end{cases} \text{ et en } a \begin{cases} A_2 e^{qa} + B_2 e^{-qa} = A_3 e^{i k_3 a} & (3) \\ q(A_2 e^{qa} - B_2 e^{-qa}) = i k_3 e^{i k_3 a} & (4) \end{cases}$$

Rq: 5 constantes, 4 eq \Rightarrow pas de quantification sur l'énergie

On peut déterminer A_3 et B_2 et A_1 et A_3 .

$$\Rightarrow T = \frac{1}{1 + \frac{(q^2 + k^2)^2}{4k^2 q^2} \sinh^2(qa)} \quad \text{or } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \text{ et } q^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$$

$$\text{alors: } T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(qa)} \quad \left. \begin{array}{l} T \text{ n'a j'aurais nul} \\ R + T = 1. \end{array} \right\}$$

3 - Approximation d'une barrière épaisse

$$a \gg \sigma \Rightarrow qa \gg 1$$

$$\sinh^2(qa) = \frac{1}{4} (e^{qa} - e^{-qa})^2 \simeq \frac{e^{2qa}}{4} \gg 1$$

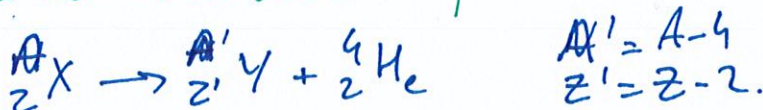
D'où le coefficient de probabilité de transmission :

$$T = \frac{16 E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2qa} = T_0(V_0, E) e^{-2qa}$$

$$T_0(x) = 16(1-x)x \text{ ou } x = \frac{E}{V_0}$$

14 - Radioactivité α - Animer le paquet d'onde face à la barrière

1 - Description et résultats expérimentaux



Def $T_{1/2}$ vie

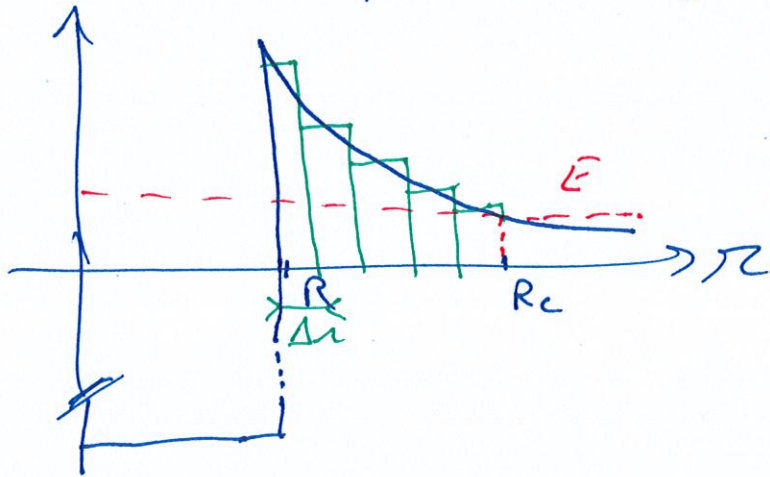
$$\text{Geiger \& Nuttall, 1911 : } \ln T_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{E}}$$

2. - l'énergie de la radioactivité α : l'énergie de Gamow, Gamow et l'ind

Particule alpha formée \Rightarrow Interaction forte ($V \searrow$).

How moyen : attraction coulombienne : $V(r) = \frac{Ze^2 Z'}{4\pi\epsilon_0 r}$ si $r > R$

\Rightarrow Barrière de potentiel \Rightarrow effet tunnel.



3 - Résolution mathématique et comparaison avec résultats expérimentaux

a - Calcul du coefficient de transmission

⚠ Hauteur variable de la barrière

\Rightarrow Succession de barrières supposées épaisses et hauteur constante de largeur Δr supposé qu'elle dure δ .

1^{re} barrière : $T_1 = T_0(V_1, E) e^{-2q_1 \Delta r}$

2^e ——— $T_2 = T_0(V_2, E) e^{-2q_2 \Delta r}$

etc ———

d'où $T_{\text{tot}} = \prod_{i=1}^n T_0(V_i, E) e^{-2q_i \Delta r}$

Ainsi $\ln T = \sum_{i=1}^n (-2q_i \Delta r + \ln(T_0(V_i, E)))$

On a $16(1-x)x$ maximal $x = \frac{1}{2} \Rightarrow T_0(x) \leq 4$ et $2q_i \Delta r \gg 1$

d'où $\ln T \simeq -2 \sum_{i=1}^n \Delta r q_i$

$$\Delta r \rightarrow 0 \Rightarrow dr \text{ et } q_i \Rightarrow q(r) = \frac{\sqrt{2m(V(r)-E)}}{\hbar}$$

$$\text{Ainsi } \ln T = -2 \int_R^{R_c} \frac{\sqrt{2m(V(r)-E)}}{\hbar} dr.$$

Limites : barrière plus raquette épaisse ($\Delta r \rightarrow 0$) et $V(r) \rightarrow E \dots$
mais OK en 1^{ère} approx

$$\text{On } V(R_c) = \frac{Ze^2 Z'}{4\pi\epsilon_0 R_c} = E:$$

$$\begin{aligned} \ln T &= -2 \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{\frac{Ze^2 Z'}{4\pi\epsilon_0}} \int_R^{R_c} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_c}} dr \\ &= -2 \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{\frac{Ze^2 Z'}{4\pi\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{R_c}} \int_R^{R_c} \sqrt{\frac{R_c}{r} - 1} dr. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ln T = a - \frac{b}{\sqrt{E}}$$

b - Déterminer le temps de demi-vie

Avant tunnel : déplacement du noyau d'un côté à l'autre

$$\text{pendant : } t_n = \frac{2R}{v} = 2R \sqrt{\frac{m}{2E}}$$

Chaque contact, proba T de traverser la barrière donc par
temps dt , il vient $dp = T \cdot \frac{dt}{t_n}$

d'où la variation du nombre de noyaux : $dN = -N dp$
d'où $N(t) = N_0 \exp(-dp)$.

$$\Rightarrow N(\tilde{t}_{1/2}) = N_0 \exp\left(-\frac{T}{t_n} \tilde{t}_{1/2}\right) = \frac{N_0}{2}$$

$$\text{Ainsi } \tilde{t}_{1/2} = \ln 2 \frac{t_n}{T} \Rightarrow \ln(\tilde{t}_{1/2}) = \ln(\ln 2) + \ln(t_n) - \ln(T)$$

$$= \ln(\ln 2) + \ln(t_n) - \ln a + \frac{b}{\sqrt{E}}$$

$$= A + \frac{B}{\sqrt{E}}$$

c - Comparaison (diapo)

Conclusion