LP23: Traitement d'un signal. Etude spectrale

Alexandre Fafin

07/05/18

Références

[1] R. Duffait. *Expériences d'électronique : agrégation de sciences physiques.* Bréal, 1999.

[2] J. Pérez, E. Bellanger, X. Ducros, V. Renvoizé, and P. Roux. *Physique MPSI-PCSI-PTSI, Cap prépa.* Pearson, 2009.

[3] V. Renvoizé, E. Bellanger, R. Girardi, S. Paulin, B. Portelli, and E. Saudrais. *Physique PSI-PSI*, Cap prépa.* Pearson, 2014.

[4] M.-N. Sanz. *Physique tout-en-un, PSI, PSI*.* Dunod, 2014.

Niveau

L2

Prè-requis

— Signaux harmoniques
— Electrocinétique
— Régime sinusoïdal forcé

Objectifs

— Série de Fourier
— Filtrer un signal
— Modulation d'amplitude

Table des matières

Introduction

1 Décomposition en série de Fourier

1.1 Série de Fourier

Un signal $s(t)$ est périodique s'il reprend identiquement la même valeur à intervalles de temps égaux : $s(t+T) = s(t)$ où T est la période du signal.

Tout signal périodique peut se décomposer en une somme de signaux sinusoidaux. Ainsi toute fonction réelle peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie de fonctions sinusoidales :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \tag{1}$$

avec $\omega = 2\pi/T$. Pour tout $n \geq 0$,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt \tag{2}$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt \tag{3}$$

Remarques

Il faut toujours étudier la parité de la fonction :

— Si s est paire sa décomposition en série de Fourier ne comportera que des fonction en cosinus. Pour tout $n \geq 1$, $b_n = 0$.

— Si s est paire sa décomposition en série de Fourier ne comportera que des fonction en sinus. Pour tout $n \geq 1$, $a_n = 0$.

Cette somme peut également s'écrire, en regroupant les termes de même pulsation $n\omega$:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n) \tag{4}$$

Formule très pratique car elle fait apparaitre l'amplique et la phase du signal. Le terme constant a_0 est la valeur moyenne du signal $< s(t) >$. Les termes en n sont les harmoniques, avec $n = 1$ l'harmonique fondamentale.

1.2 Exemple du signal créneau

Pour un signal créneau, qui est une fonction impaire, $a_n = 0$. De plus on choisi que ce signal soit centré en 0, donc $a_0 = 0$. Ainsi, il ne reste à calculer que les coefficients b_n.

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(n\omega t)dt \tag{5}$$
$$= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} s(t)\sin(n\omega t)dt \tag{6}$$
$$= -\frac{4A}{2\pi n}(\cos(n\pi) - 1) \tag{7}$$

Deux cas :

— n est pair $\rightarrow b_n = 0$

— n est impair $\rightarrow b_n = \frac{4A}{n\pi}$

Ainsi on peut réécrire le signal s :

$$s(t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\sin((2n+1)\omega t) \tag{8}$$

On peut tracer le spectre de fourier (coefficient c_n en fontcion de $n\omega$), ce qui permet de connaître l'amplitude associée à chaque harmonique (figure 1.2)

Manip Python : montrer le signal créneau et le développement en série de Fourier associé

Phénomène de Gibbs

Pour la fonction créneau on voir que la solution ne converge pas uniformément. Il existe toujours une crête près de la discontinuité. On peut montrer que :

— Cette crête est de plus en plus étroite

— Elle se rapproche du point de discontinuité

— Sa hauteur est constante (environ 8% du saut de discontinuité)

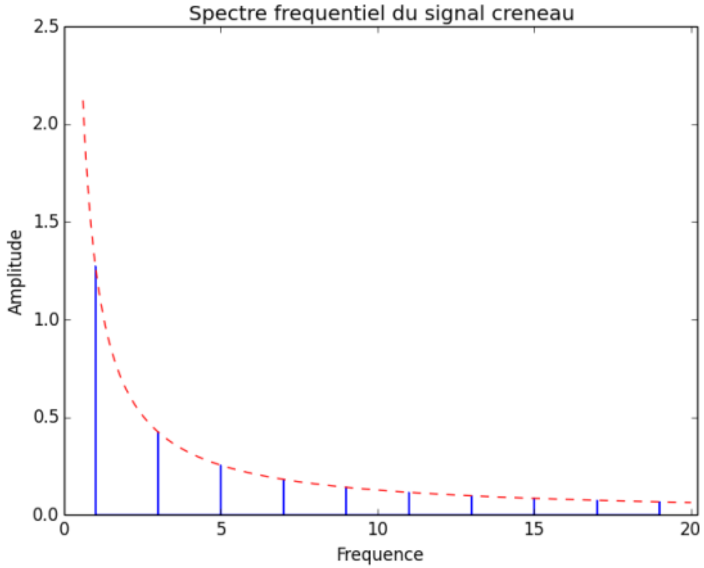


FIGURE 1 – Spectre de Fourier d'un signal créneau

Pour un signal triangulaire on trouve :

$$s(t) = -\frac{8A}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)\omega t)}{2(n+1)^2} \tag{9}$$

Manip Python : montrer le signal triangulaire et le développement en série de Fourier associé

On peut remarquer que pour le signal triangulaire avec un nombre d'harmonique pas très élevé on reproduit bien le signal.

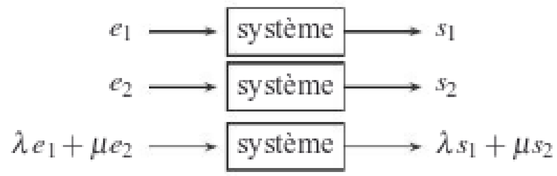
1.3 Application à l'étude spectrale

Manip Extraire l'information d'un signal inconnu. Avec deux diapasons et un micro faire la transformée de Fourier à l'oscilloscope.

2 Filtrage linéaire[2]

2.1 Système linéaire invariant par translation temporelle

Système linéaire

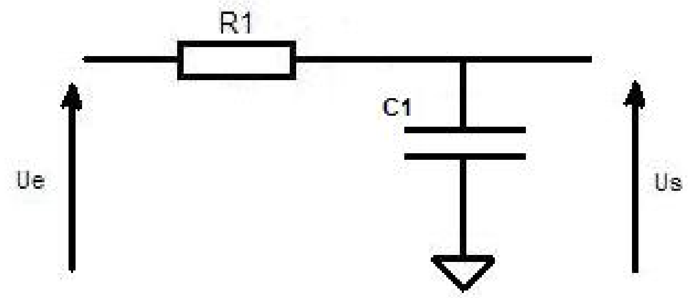


Exemple du téléphone portable [4]

Invariance temporelle : schéma [3]. Résultat indépendant de la date à laquelle l'expérience commence.

Critère de stabilité : on va étudier des systèmes stables : un système linéaire invariant est stable si le signal de sortie s tend vers 0 lorsque le signal d'entrée e est supprimé.

2.2 Filtres du premier ordre : exemple du RC



On peut étudier rapidement ce filtre :

— A basse fréquence ($\omega \to 0$), le condensateur est équivalent à un circuit ouvert $u_s = u_e$

— A haute fréquence ($\omega \to \infty$), le condensateur est équivalent à un circuit fermé $u_s = 0$

On voit que l'on voit avoir un filtre passe-bas, qui ne va laisser passer que les basses fréquences.

On a un pont diviseur de tension :

$$\underline{U_s} = \underline{U_e}\frac{\underline{Z_c}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_c}} = \underline{U_e}\frac{1}{1+jx} \tag{10}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$. La fonction de transfert d'un quadripole, est en régime sinusoidale forcé défini par :

$$\underline{H} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{1+jx} \tag{11}$$

Comme H est complexe, on peut étudier son module et son argument. Ainsi on définit le gain G du filtre par :

$$G = |H(\omega)| \tag{12}$$

et la phase ϕ par :

$$\phi = arg(H(\omega)) = -\arctan x \tag{13}$$

avec $\phi \in [-\pi, 0]$.

Diagramme de Bode

Comme la plage en fréquence est très large, on va utiliser l'échelle logarithmique. De plus le gain va lui aussi varier sur plusieurs ordre de grandeurs, ainsi on l'exprime en décibel :

$$G_{dB} = 20\log G(\omega) \tag{14}$$

Le gain est un nombre sans dimensions. Augmenter le gain de 20 dB revient à multiplier le gain par 10.

Pulsation de coupure

On définit la pulsation de coupure du filtre ω_c (au-dela on considère que les fréquences ne passent pas) par :

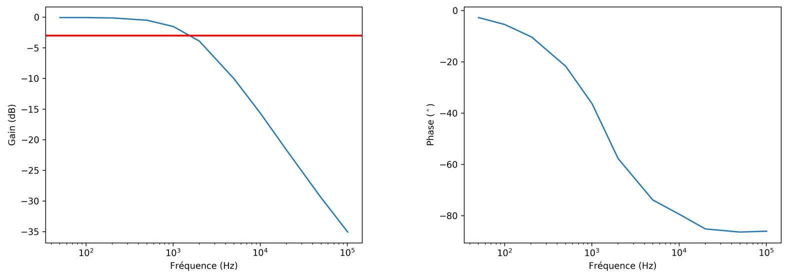
$$G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \tag{15}$$

Ainsi en dB il vient :

$$G_{dB}(\omega_c) = G_{max} - 3dB \tag{16}$$

Pour un filtre du premier ordre $\omega_c = \omega_0$.

Manip : Filtre RC avec $R = 9,86.10^3$ ω et $C = 1,03.10^{-8}$ F. On trace les diagrammes de Bode



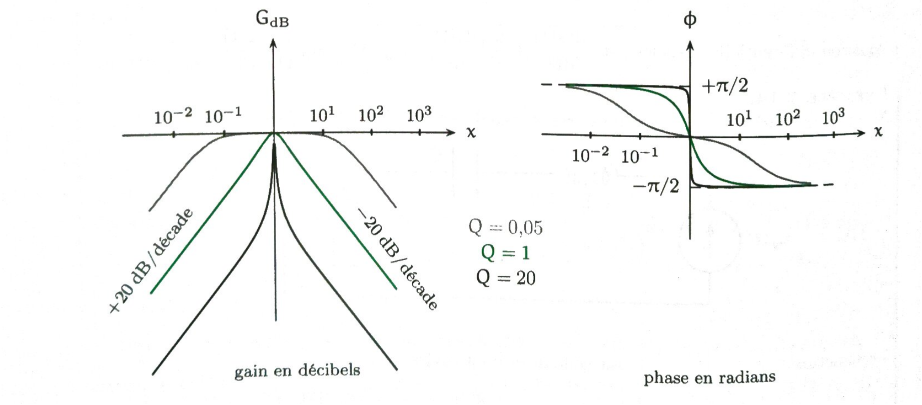
Pour un filtre du premier ordre, au-delà de la pulsation de coupure, le gain diminue de 20 dB/ décade. (Une décade est la multiplication de la fréquence par 10).

Manip : Envoyer un signal créneau sur le filtre RC et montrer l'opération d'intégration lorsque $x >> 1$. On retrouve un signal triangulaire [3]. *Parler de l'appauvrissement du spectre.*

2.3 Filtres du second ordre

Présenter rapidement un filtre passe haut du second ordre. La différence entre un filtre du premier et du second est que le dénominateur de la fonction de transfert est un polynome d'ordre 2. Pour les filtres passe-haut et passe-bas, l'intérêt d'un filtre du second ordre est qu'il est plus sélectif car le gain varie de 40 dB/décade.

Avec un filtre du second ordre il est possible de réaliser un filtre passe-bande (tension de sortie aux bornes de la résistance pour le circuit RLC série). Plus le facteur de qualité du filtre est élevé, plus la largeur de la bande passante est étroite ($Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$)



3 Opérations non linéaires : exemple de la modulation d'amplitude[4]

3.1 Principe et intérêt

La modulation d'amplitude a été mise au point au XXe siècle. But : transmettre la voix à l'aide d'onde électromagnétique. On doit alors moduler car :

— La voix a une fréquence entre 20Hz et 20kHz. Prenons une fréquence de 1kHz, la longueur d'onde associée est de 300 km. Une antenne doit avoir une longueur de l'ordre de la longueur d'onde. Pour réduire la longueur de l'antenne il faut donc augmenter la fréquence.

— On veut pouvoir transmettre l'information sur un même support. Les signaux occupent la même plage spectrale.

On va donc moduler un signal à l'aide d'une porteuse :

$$s_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t + \phi_p) \tag{17}$$

Il y a donc trois paramètres sur lesquels on peut jouer :

— La fréquence f_p

— La phase ϕ_p

— L'amplitude A_p

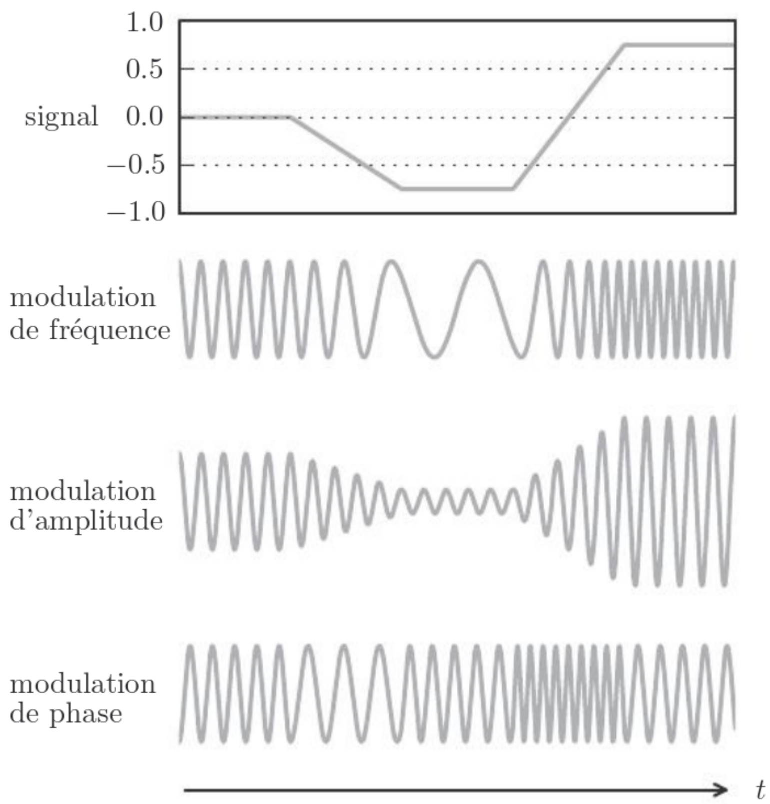


Figure 6.1 – Les trois modulations.

Remarques :

— AM : amplitude modulation $f = 150 - 300$ kHz

— FM : frequency modulation $f = 87 - 108$ MHz. L'intéret de la modulation de fréquence est qu'il y a moins de bruit.
— Téléphonie mobile 900 MHz - 2,4 GHz

3.2 Modulation d'amplitude

On considère la porteuse ($\phi_p = 0$) et le signal que l'on veut transmettre (appelé signal modulant s_m) :

$$s_m(t) = A_0 + A_m \cos(\omega_m t) \tag{18}$$

La modulation d'amplitude consiste à multiplier le signal modulant et la porteuse. Ainsi le signal modulé s'écrit (avec k un facteur de proportionnalité) :

$$s_{am}(t) = k s_m s_p = k A_p A_0 \cos(\omega_p t)(1 + \frac{A_m}{A_0} \cos(\omega_m t)) \tag{19}$$

Le rapport $m = \frac{A_m}{A_0}$ est appelé taux de modulation. Il mesure la perturbation apportée à la porteuse. Si $m > 1$ on parle de surmodulation. Quand $m < 1$, on peut trouver le taux de modulation par :

$$m = \frac{s_{am,max} - s_{am,min}}{s_{am,max} + s_{am,min}} \tag{20}$$

Le signal modulé en amplitude peut se mettre sous la forme :

$$s_{am}(t) k A_p A_0 (\cos(\omega_p t) + \frac{m}{2} \cos(\omega_p - \omega_p)t + \frac{m}{2} \cos(\omega_p + \omega_p)t)) \tag{21}$$

Manip [1] Montrer la multiplication avec $f_p = 10kHz$ et $f_m = 1kHz$. Faire le spectre de Fourier à l'oscillo. On remarque que l'on a de nouvelles fréquences ($f_p - f_m$ et $f_p + f_m$). Insister sur la non-linéarité et parler de l'enrichissement du spectre.

3.3 Démodulation par détection synchrone

La démodulation synchrone est l'inverse de la modulation. La démodulation consiste à translater le spectre du signal en haute fréquence afin de pouvoir l'émettre. La démodulation consiste en la translation inverse.

On peut ramener le signal modulé en basse fréquence par un signal de même fréquence que la porteuse :

$$s'_p(t) = A'_p \cos(\omega_p t) \tag{22}$$

A la sortie multiplieur :

$$u_s(t) = k s_{am} s'_p \tag{23}$$

On peut linéariser u_s et on voit les fréquences suivantes apparaître : 0, f_m, $2f_p - f_m$, $2f_p$, $2f_p + f_m$. On peut donc récupérer notre signal de départ en utilisant un filtre passe-bande pour récupérer uniquement f_m.

Manip Montrer la démodulation, le spectre de Fourier et le signal filtré

Il est facile sur une table de labo d'effectuer une démodulation synchrone car on a le GBF de la porteuse à coté. En réalité émetteur et récepteur sont éloignés. Il faut récupérer la porteuse (fréquence et phase).

Conclusion

Enrichissement et appauvrissement du spectre.

Questions

— Montrer qu'un filtre passe-bas peut se comporter comme un pseudo-intégrateur
— Pourquoi utiliser des filtres actifs (avec AO) ? Permet d'avoir un gain supérieur à 1 (mais aussi possible avec un filtre d'ordre 2), mais surtout pour l'adaptation d'impédance. Si on met plusieurs filtres en cascades, on est sûr que la réponse d'un filtre ne va pas changer.
— Critére de Shannon : $f_e > 2f_s$. Critère qui doit être respecté.