

Transport linéaire et irréversibilité

Pour une approche unifiée

par **Nicolas CHOIMET**

Lycée Gustave Eiffel - 33000 Bordeaux

nicolas.choimet@live.fr

site web : physiteiffel.fr

LE PROGRAMME de physique des filières PSI (physique et sciences de l'ingénieur) et BCPST (biologie, chimie, physique et sciences de la Terre) comportent un enseignement transversal intitulé « Phénomènes de transport ». Y sont abordés les phénomènes de conduction électrique et thermique, de diffusion de particules et de viscosité (diffusion de quantité de mouvement). Ces phénomènes sont également abordés dans les filières PC (physique-chimie) et TPC (technologie, physique et chimie), et à un degré moindre dans les filières PT (physique-technologie), TSI (technologie et sciences industrielles), MP (maths et physique) et ATS (adaptation technicien supérieur). Ils sont souvent désignés comme les sources locales de l'irréversibilité thermodynamique. Cet article propose une synthèse sur le sujet, assortie d'un approfondissement de certaines lois de transport linéaire (exprimées sous forme locale ou intégrale), ainsi qu'une évaluation de l'entropie créée pour des cas de géométrie simple.

1. LOIS DE CONSERVATION ET LOIS DE TRANSPORT LINÉAIRES

1.1. Lois de conservation

1.1.1. Forme générale

Soit un domaine de l'espace, de volume V , délimité par une surface fermée S . Soit une grandeur extensive A : pour nous, A pourra désigner la charge q , l'énergie E (ou plutôt, l'enthalpie H comme nous le verrons), le nombre de particules N ou une des trois composantes de la quantité de mouvement $P_i (i \in \{x, y, z\})$.

$A(t)$ est la quantité de A contenue dans le volume V à l'instant t . Soit $\Phi_A(t)$, le flux sortant de A à travers la surface S (c'est-à-dire la quantité de A traversant la surface S vers l'extérieur, par unité de temps). Nous supposons qu'il n'y a pas de sources internes de A au sein du volume V .

L'équation intégrale traduisant la conservation de A s'écrit alors simplement :

$$\frac{dA}{dt} + \Phi_A(t) = 0. \quad (1)$$

Cette équation de conservation intégrale peut bien sûr être reformulée sous forme locale :

$$\frac{\partial}{\partial t} (a(\mathbf{r}, t)) + \text{div}(\mathbf{j}_A(\mathbf{r}, t)) = 0 \quad (2)$$

où $a(\mathbf{r}, t)$ est la densité volumique de A , définie par $A(t) = \iiint_V a(\mathbf{r}, t) dV$, et $\mathbf{j}_A(\mathbf{r}, t)$ est le vecteur densité de courant de A , défini par $\Phi_A(t) = \iint_S \mathbf{j}_A(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}^{ext} dS$.

1.1.2. Conservation de la charge et du nombre de particules

Ces deux cas ne présentant aucune difficulté, nous les présentons succinctement. Pour $A(t) = q(t)$, la conservation de la charge s'écrit, avec les notations usuelles :

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} + \Phi_q(t) = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{j}_q) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Le débit de charge $\Phi_q(t)$ sortant de la surface S n'est autre que le courant traversant S . Pour $A(t) = N(t)$, la conservation du nombre de particules s'écrit, avec les notations usuelles :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} + \Phi_N(t) = 0 \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{j}_N) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

La densité volumique de particules $n(\mathbf{r}, t)$ s'exprime en m^{-3}

1.1.3. Conservation de l'énergie

On considère ici un milieu exempt de convection : il n'y a par conséquent aucun mouvement macroscopique du milieu support. On considère par ailleurs que le milieu évolue à pression constante. La loi de conservation de l'énergie est traduite par le premier principe de la thermodynamique appliqué au système fermé délimité par le volume V , qui s'écrit ainsi, dans ce contexte :

$$\Delta H = Q^{ext}$$

où H désigne l'enthalpie du système et Q^{ext} est le transfert thermique algébrique échangé avec l'extérieur du système *via* la surface S (on rappelle que $Q^{ext} > 0$ si le système reçoit effectivement de la chaleur de la part de l'extérieur). Par unité de temps, cela donne :

$$\frac{dH}{dt} = P_{th}^{ext}$$

où P_{th}^{ext} est la puissance thermique algébrique échangée avec l'extérieur *via* la surface S . Si on introduit le flux thermique sortant $\Phi_{th}(t)$ de la surface S , comme $\Phi_{th}(t) = -P_{th}^{ext}$, il vient :

$$\frac{dH}{dt} + \Phi_{th}(t) = 0. \quad (5)$$

Il apparaît donc que dans ces conditions, c'est plutôt l'enthalpie H qui est la grandeur extensive transportée, plutôt que l'énergie. Dans ces conditions, le flux thermique $\Phi_{th}(t)$ est un flux d'enthalpie : $\Phi_{th}(t) = \Phi_H(t)$. L'équation (5) se réécrit dès lors :

$$\frac{dH}{dt} + \Phi_H(t) = 0. \quad (6)$$

En introduisant l'enthalpie volumique $h(\mathbf{r}, t)$ et le vecteur densité de courant thermique, ou vecteur densité de courant d'enthalpie $\mathbf{j}_H(\mathbf{r}, t)$ défini par $\Phi_H(t) = \iint_S \mathbf{j}_H(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}^{ext} dS$, on obtient l'équation locale de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{j}_H) = 0 \quad (7)$$

\mathbf{j}_H s'exprime en $W \cdot m^{-2}$ et est donc bien homogène à une énergie par unité de temps et par unité de surface.

1.1.4. Conservation de la quantité de mouvement

Pour la quantité de mouvement, les choses sont un peu plus délicates, du fait du caractère vectoriel de cette grandeur. Nous allons donc nous restreindre à une géométrie particulièrement simple : nous nous limitons à un écoulement incompressible unidirectionnel dont le champ des vitesses est de la forme : $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = v_x(y, t) \mathbf{u}_x$. Il s'agit donc d'un écoulement plan, invariant par translation parallèlement à \mathbf{u}_z .

Considérons un volume particulière V de fluide, entraîné par l'écoulement, et constituant un système fermé. La conservation de la composante P_x de la quantité de mouvement est traduite par la seconde loi de Newton : $\frac{dP_x}{dt} = F_x^{ext}$ où F_x^{ext} est la résultante des forces extérieures subies par le système fermé, en projection sur \mathbf{u}_x . On peut reformuler cela sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dP_x}{dt} + \Phi_{P_x}(t) = 0 \\ \Phi_{P_x}(t) = -F_x^{ext}(t) \end{cases} \quad (8)$$

Pour écrire la forme locale de cette loi de conservation, considérons une particule de fluide parallélépipédique mésoscopique de longueur dx , de hauteur dy et de largeur L_z arbitraire, située à l'instant t entre les abscisses x et $x + dx$ et entre les cotes y et $y + dy$.

On note μ la masse volumique du fluide en écoulement, supposée uni-

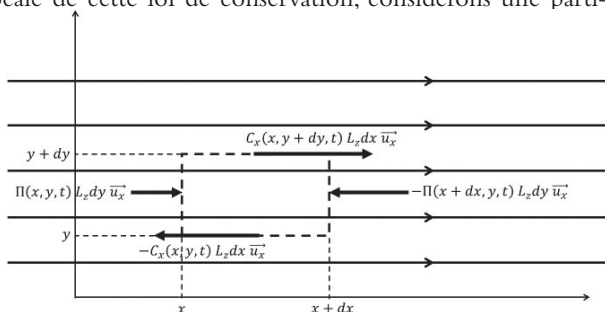


Figure 1 - Écoulement plan unidirectionnel.

forme et constante. La seconde loi de Newton appliquée à la particule de fluide s'écrit, en projection sur \mathbf{u}_x :

$$\mu \left[\frac{\partial}{\partial t} (v_x(y, t)) + v_x(y, t) \frac{\partial}{\partial x} (v_x(y, t)) \right] dx dy L_z = \delta F_x^{ext}$$

où

$\delta F_x^{ext} = \Pi(x, y, t) L_z dy - \Pi(x + dx, y, t) L_z dy + C_x(x, y + dy, t) L_z dx - C_x(x, y, t) L_z dx$ avec $\Pi(x, y, t)$, pression régnant dans le fluide en (x, y, t) et $C_x(x, y, t)$, contrainte tangentielle (ou de cisaillement) en (x, y, t) . On en déduit l'équation locale :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mu v_x(y, t)) = - \frac{\partial}{\partial x} (\Pi(x, y, t)) + \frac{\partial}{\partial y} (C_x(x, y, t)).$$

En introduisant la densité volumique de quantité de mouvement p_x et le vecteur densité de courant de quantité de mouvement \mathbf{j}_{p_x} définis par :

$$\begin{cases} p_x(x, y, t) = \mu v_x(y, t) \\ \mathbf{j}_{p_x}(\mathbf{r}, t) = \Pi(x, y, t) \mathbf{u}_x - C_x(x, y, t) \mathbf{u}_y \end{cases} \quad (9)$$

On obtient l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement P_x :

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{j}_{p_x}) = 0 \quad (10)$$

\mathbf{j}_{p_x} s'exprime en Pa et est donc bien homogène à une quantité de mouvement par unité de surface et par unité de temps.

1.2. Lois de transport phénoménologiques

1.2.1. Position du problème et hypothèses fondamentales

Une première idée fondamentale est qu'une grandeur extensive A conservée doit pouvoir être transportée d'un point à un autre : nous avons en effet mis en évidence l'existence d'un vecteur densité de courant \mathbf{j}_A traduisant cette idée de transport, et indispensable à la formulation de l'équation de conservation de A .

Deux questions se posent ensuite naturellement : quelle est la cause du transport de A ? Comment exprimer le vecteur densité de courant \mathbf{j}_A ?

La réponse à ces questions, et en particulier à la deuxième, va nécessiter des hypothèses supplémentaires, à savoir [1] :

- ♦ L'hypothèse de l'Équilibre thermodynamique local (ETL) : en tout point du système macroscopique, un sous-système de taille mésoscopique est supposé constamment et instantanément à l'équilibre thermodynamique, alors que le système macroscopique n'est pas en équilibre. Cela suppose que le temps typique $\tau_{\text{évo}}$ d'évolution du système macroscopique et le temps typique $\tau_{\text{éq}}$ de mise à l'équilibre d'un sous-système

mésoscopique vérifient la condition :

$$\tau_{\text{évo}} \gg \tau_{\text{eq}}.$$

Cette hypothèse fondamentale nous assure notamment que toutes les grandeurs intensives sont bien définies en tout point \mathbf{r} et à tout instant t (notamment : la température $T(\mathbf{r}, t)$, la pression $\Pi(\mathbf{r}, t)$, le potentiel chimique $\mu(\mathbf{r}, t)$, la densité particulaire $n(\mathbf{r}, t) \dots$).

♦ Le système est suffisamment proche de l'équilibre pour que les lois de transport donnant les différents vecteurs densité de courant \mathbf{j}_A soient linéaires par rapport à leur cause.

Les milieux que nous considérons sont supposés homogènes et isotropes à l'équilibre. Comme on est proche de l'équilibre, les courants seront faibles et ne briseront pas l'invariance par translation et par rotation de ces milieux : on les considérera toujours comme homogènes et isotropes.

Par ailleurs, il importe de bien noter que les différentes lois de transport linéaires sont fondamentalement des lois phénoménologiques (c'est-à-dire, tirées de l'expérience), dont le domaine de validité est limité (contrairement aux lois de conservation qui, elles, ont une portée universelle).

1.2.2. Transport linéaire de charge, de particules, d'enthalpie : les lois d'Ohm, de Fick et de Fourier

De manière générale, le transport d'une grandeur extensive A d'un point à un autre est due à la non-uniformité d'une grandeur intensive $\psi_A(\mathbf{r}, t)$ associée à A . Dans le cadre d'un transport linéaire de la grandeur A , le vecteur densité de courant $\mathbf{j}_A(\mathbf{r}, t)$ est simplement proportionnel au gradient de $\psi_A(\mathbf{r}, t)$ qui mesure son inhomogénéité. On formule cette idée sous la forme d'une loi phénoménologique de la forme :

$$\mathbf{j}_A = -\alpha_A \mathbf{grad}(\psi_A) \quad (11)$$

où le coefficient α_A est le coefficient de transport de A , positif comme nous allons le voir.

1.2.2.1. Transport linéaire de charge ou conduction électrique : la loi d'Ohm

Pour le transport de charge, la loi linéaire (11) n'est autre que la loi d'Ohm locale, à condition de se limiter au régime stationnaire. Dans ce cas, le champ électrique \mathbf{E} responsable du transport des charges s'écrit : $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}(V)$, $V(\mathbf{r})$ étant le potentiel électrostatique. La loi d'Ohm locale s'écrit, en régime stationnaire :

$$\mathbf{j}_q = -\sigma \mathbf{grad}(V). \quad (12)$$

Le coefficient de transport est la conductivité électrique σ du milieu.

1.2.2.2. Transport linéaire de particules ou diffusion de particules : la loi de Fick

Considérons un milieu présentant deux espèces chimiques différentes, ne réagissant pas entre elles (par exemple, un soluté dans un solvant, une impureté dans un cristal...). Le milieu est supposé exempt de convection, et il est maintenu à température et pression constantes. La loi linéaire régissant le transport du soluté dans le solvant ou de l'impureté dans le cristal n'est autre que la loi de Fick :

$$\mathbf{j}_N = -D \mathbf{grad}(n). \quad (13)$$

Le coefficient de transport est ici la diffusivité D du soluté dans le solvant ou de l'impureté dans le cristal.

1.2.2.3. Transport linéaire d'enthalpie ou conduction – diffusion thermique : la loi de Fourier

Considérons un milieu homogène exempt de toute convection (un solide, idéalement), maintenu à pression constante. La loi linéaire régissant le transport de l'enthalpie dans ce milieu au repos est la loi de Fourier :

$$\mathbf{j}_H = -\lambda \mathbf{grad}(T). \quad (14)$$

Le coefficient de transport est ici la conductivité thermique λ du milieu.

1.2.3. Transport linéaire de quantité de mouvement ou diffusion visqueuse : la loi de Newton

Nous reprenons l'écoulement modèle envisagé au sous-paragraphe 1.1.4., mais le particularisons encore un peu plus. Nous considérons en effet un écoulement plan de Couette, incompressible et suffisamment mince, limité par deux plans : le plan $y = 0$, qui est fixe ; et le plan $y = d$, entraîné à la vitesse constante $\mathbf{V} = V \mathbf{u}_x$.

Dans un tel écoulement plan de Couette, il n'y a pas de gradient de pression horizontal puisque l'écoulement est uniquement provoqué par le déplacement de la plaque supérieure qui entraîne les couches inférieures de fluide par friction.

Dans ces conditions, le vecteur densité de courant de quantité de mouvement « utile » s'écrit :

$$\mathbf{j}_{p_x}(\mathbf{r}, t) = -C_x(y, t) \mathbf{u}_y \quad (15)$$

Pour un fluide dit « newtonien », il y a proportionnalité entre la contrainte tangentielle (de cisaillement) et le « gradient de vitesse » :

$$C_x = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (16)$$

où η est la viscosité dynamique du fluide en écoulement, qui s'exprime en $\text{Pa} \cdot \text{s}$. C'est naturellement une grandeur positive. On peut vérifier avec un peu de bon sens que le signe est le bon : les couches de fluide supérieures ont une vitesse plus élevée que les

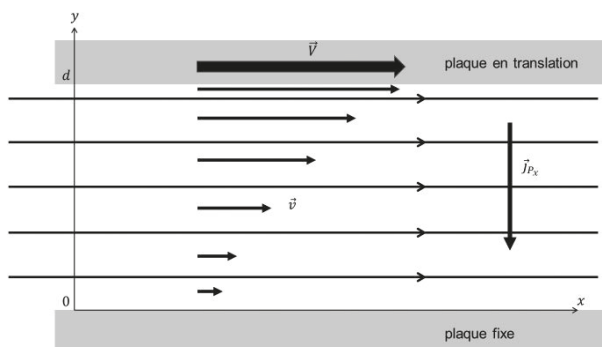


Figure 2 - Vecteur densité de courant de quantité de mouvement dans un écoulement plan de Couette.

couches de fluide inférieures dans l'écoulement étudié, donc $\frac{\partial v_x}{\partial y} > 0$. Les forces de friction introduites au sous-paragraphe 1.1.4. sont donc dirigées dans le bon sens.

Par conséquent, le vecteur densité de courant de la quantité de mouvement s'écrit, dans le cas d'un écoulement plan de Couette :

$$\mathbf{j}_{P_x} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \mathbf{u}_y = -\eta \mathbf{grad}(v_x). \quad (17)$$

Nous avons donc obtenu une loi de transport linéaire de la quantité de mouvement P_x : c'est la loi de Newton. Le coefficient de transport linéaire de la quantité de mouvement est donc la viscosité dynamique η du fluide en écoulement.

1.3. Vue d'ensemble des phénomènes de transport linéaires

Voici un aperçu de l'ensemble des résultats précédents, synthétisés dans le tableau 1 (cf. page ci-après).

1.4. Équations de diffusion

1.4.1. Reformulation des lois de transport linéaires

Pour les transports de particules, d'enthalpie et de quantité de mouvement, la loi de transport linéaire de la grandeur extensive A peut également se mettre sous la forme :

$$\mathbf{j}_A = -D_A \mathbf{grad}(a(\mathbf{r}, t)) \quad (18)$$

où $a(\mathbf{r}, t)$ est la densité volumique de la grandeur extensive A . Le nouveau coefficient de transport D_A s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ comme nous allons le voir dans un instant.

	Ohm	Fick	Fourier	Newton
Grandeur conservée et transportée	Charge q	Particules N	Enthalpie H	Quantité de mouvement P_x
Densité volumique	ρ ($C \cdot m^{-3}$)	n (m^{-3})	h ($J \cdot m^{-3}$)	$p_x = \mu v_x$ ($kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$)
Vecteur densité de courant	\mathbf{j}_q ($A \cdot m^{-2}$)	\mathbf{j}_N ($m^{-2} \cdot s^{-1}$)	\mathbf{j}_H ($W \cdot m^{-2}$)	\mathbf{j}_{p_x} ($N \cdot m^{-2} = Pa$)
Équation locale de conservation	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{j}_q) = 0$	$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{j}_N) = 0$	$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{j}_H) = 0$	$\frac{\partial p_x}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{j}_{p_x}) = 0$
Cause du transport	grad (V) (en régime permanent)	grad (n)	grad (T)	grad (v_x)
Coefficient de transport	σ ($\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$)	D ($m^2 \cdot s^{-1}$)	λ ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)	η ($Pa \cdot s$)
Loi de transport linéaire	$\mathbf{j}_q = -\sigma$ grad (V) (en régime permanent)	$\mathbf{j}_N = -D$ grad (n)	$\mathbf{j}_H = -\lambda$ grad (T)	$\mathbf{j}_{p_x} = -\eta$ grad (v_x) (écoulement plan de Couette)

Tableau 1

- ◆ Pour le transport linéaire de particules, la loi de Fick est déjà sous cette forme :

$$\mathbf{j}_N = -D \mathbf{grad} (n).$$

- ◆ Pour le transport linéaire de quantité de mouvement, la loi de Newton peut se récrire :

$$\mathbf{j}_p = -\nu \mathbf{grad} (p_x) \quad (19)$$

où $\nu = \frac{\eta}{\mu}$ est la viscosité cinématique du fluide en écoulement, qui s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

- ◆ Pour le transport linéaire d'enthalpie, on utilise le fait que $\mathbf{grad} (h) = \mu c_p \mathbf{grad} (T)$, que l'on soit dans le cas d'une phase condensée ou dans le cas d'un gaz (assimilé à un gaz parfait), c_p étant la capacité thermique massique à pression constante. Par conséquent, la loi de Fourier peut se reformuler ainsi :

$$\mathbf{j}_H = -D_{th} \mathbf{grad} (h) \quad (20)$$

où $D_{th} = \frac{\lambda}{\mu c_p}$ est la diffusivité thermique, qui s'exprime également en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

- ◆ Pour ce qui est de la conduction électrique, il n'est pas possible de reformuler la loi d'Ohm sous la forme souhaitée. Par conséquent, la charge n'est pas régie par une équation de diffusion.

1.4.2. Équations de diffusion

En associant la nouvelle loi de transport linéaire (18) et l'équation locale (2) de conservation de A , on obtient immédiatement l'équation de diffusion de A , en supposant D_A uniforme :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = D_A \Delta a. \quad (21)$$

Le coefficient de transport D_A est en réalité le coefficient de diffusion de A . Il s'exprime bien en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Ainsi, il apparaît comme souvent en physique que des phénomènes différents sont régis par la même équation. Il est donc possible de transposer la solution d'un problème de diffusion thermique à un problème de diffusion de matière par exemple, pour une géométrie identique, et pour des conditions aux limites et initiale analogues.

2. RÉSISTANCES

Nous cherchons à obtenir une formulation intégrale des lois locales de transport linéaires, dans le cas du régime stationnaire, et pour un problème unidimensionnel.

2.1. Résistance électrique

Considérons un conducteur ohmique cylindrique de conductivité électrique σ ,

d'axe Ox , de longueur L et de section Σ .

Celui-ci est soumis à une différence de potentiel $V(0) - V(L) = V_1 - V_2$ (supposée positive sur la figure 3).

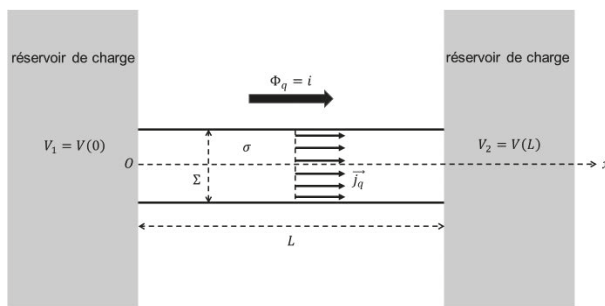


Figure 3 - Résistance électrique.

En régime stationnaire, l'équation locale de conservation de la charge s'écrit :

$$\text{div}(\mathbf{j}_q) = \frac{d j_q}{dx} = 0 \quad (22)$$

\mathbf{j}_q est donc à flux conservatif : $i = \Phi_q = j_q \Sigma$ est une constante le long du conducteur.

L'équation (22) combinée avec la loi d'Ohm (12) donne :

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0. \quad (23)$$

Une intégration élémentaire de cette équation aboutit à :

$$V(0) - V(L) = \frac{L}{\sigma \Sigma} i.$$

On peut donc définir et exprimer la résistance électrique R_{elec} du conducteur ohmique :

$$R_{\text{elec}} \hat{=} \frac{V(0) - V(L)}{i} = \frac{L}{\sigma \Sigma} \quad (24)$$

R_{elec} s'exprime évidemment en Ω , est proportionnelle à la longueur L du conducteur, et inversement proportionnelle à sa section Σ et au coefficient de transport σ .

2.2. Résistance diffusive

Considérons un canal (un tube capillaire par exemple, pour éviter autant que possible la convection) d'axe Ox , de longueur L et de section Σ reliant deux réservoirs contenant deux solutions de concentrations différentes caractérisées par $n(0) = n_1$ et $n(L) = n_2$ (densités volumiques de soluté dans chaque réservoir). Soit D , Le coefficient de diffusion du soluté dans le solvant. Sur la figure 4 (cf. page ci-contre), on a supposé que $n_1 > n_2$.

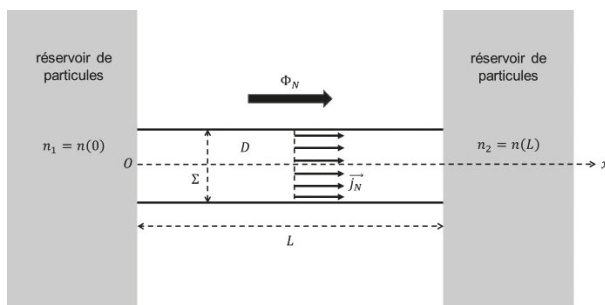


Figure 4 - Résistance diffusive.

En régime stationnaire, l'équation locale de conservation de la matière s'écrit :

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}_N) = \frac{d j_N}{dx} = 0 \quad (25)$$

\mathbf{j}_N est donc à flux conservatif : $\Phi_N = j_N \Sigma$ est une constante le long du canal.

L'équation (25) combinée avec la loi de Fick (13) donne :

$$\Delta n = \frac{d^2 n}{dx^2} = 0. \quad (26)$$

Une intégration élémentaire de cette équation aboutit à :

$$n(0) - n(L) = \frac{L}{D\Sigma} \Phi_N.$$

On peut donc définir et exprimer la résistance diffusive R_{diff} du canal :

$$R_{diff} \hat{=} \frac{n(0) - n(L)}{\Phi_N} = \frac{L}{D\Sigma} \quad (27)$$

R_{diff} s'exprime en $\text{m}^{-3} \cdot \text{s}$, est proportionnelle à la longueur L du canal, et inversement proportionnelle à sa section Σ et au coefficient de transport D .

2.3. Résistance thermique

Considérons un barreau de conductivité thermique λ , d'axe Ox , de longueur L et de section Σ , calorifugé sur sa paroi latérale, en contact thermique parfait avec deux thermostats de températures $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$ (on a supposé $T_1 > T_2$ sur la figure 5).

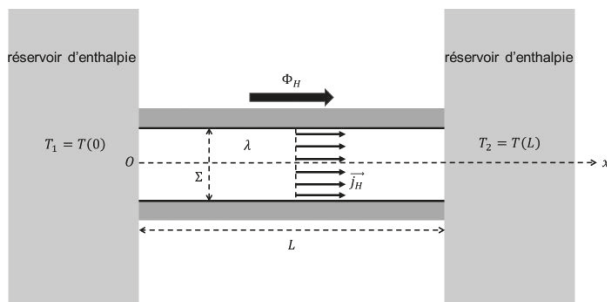


Figure 5 - Résistance thermique.

En régime stationnaire, l'équation locale de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}_H) = \frac{d j_H}{dx} = 0 \quad (28)$$

\mathbf{j}_H est donc à flux conservatif : $\Phi_H = j_H \Sigma$ est une constante le long du barreau.

L'équation (28) combinée avec la loi de Fourier (14) donne :

$$\Delta T = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0. \quad (29)$$

Une intégration élémentaire de cette équation aboutit à :

$$T(0) - T(L) = \frac{L}{\lambda \Sigma} \Phi_H.$$

On peut donc définir et exprimer la résistance thermique R_{th} du canal :

$$R_{th} \triangleq \frac{T(0) - T(L)}{\Phi_H} = \frac{L}{\lambda \Sigma} \quad (30)$$

R_{th} s'exprime en $K \cdot W^{-1}$, est proportionnelle à la longueur L du barreau, et inversement proportionnelle à sa section Σ et au coefficient de transport λ .

2.4. Résistance hydraulique

2.4.1. Résistance hydraulique de Couette

Considérons un écoulement plan de Couette analogue à celui du sous-paragraphe 1.2.3., mais compris entre deux plans (1) et (2) en mouvement de translation rectiligne et uniforme : le plan $y = 0$ est animé de la vitesse $\mathbf{V}_2 = V_2 \mathbf{u}_x$ tandis que le plan $y = d$ est quant à lui animé de la vitesse $\mathbf{V}_1 = V_1 \mathbf{u}_x$. Nous supposons le régime stationnaire atteint, et le champ des vitesses est donc de la forme : $\mathbf{v} = v_x(y) \mathbf{u}_x$.

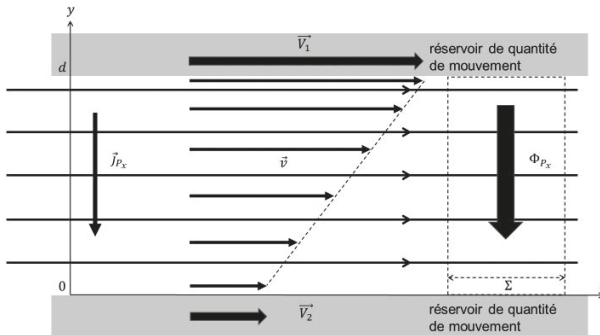


Figure 6 - Résistance hydraulique de Couette.

Comme au sous-paragraphe 1.2.3., le moteur de l'écoulement n'est pas une surpression qui serait appliquée en amont, mais bien le mouvement de translation des deux plaques qui entraîne les couches de fluide par friction (ou diffusion de quantité de mouvement).

Par conséquent, le vecteur densité de courant de quantité de mouvement utile s'écrit encore:

$$\mathbf{j}_{p_x} = -C_x(y) \mathbf{u}_y. \quad (31)$$

En régime stationnaire, l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\text{div}(\mathbf{j}_{p_x}) = -\frac{dC_x}{dy} = 0 \quad (32)$$

\mathbf{j}_{p_x} est à flux conservatif et porté par le vecteur \mathbf{u}_y . On peut donc définir un flux de quantité de mouvement Φ_{p_x} de la plaque (1) vers la plaque (2) à travers une section Σ orientée selon $-\mathbf{u}_y$:

$$\Phi_{p_x} = -j_{p_x} \Sigma = C_x \Sigma \quad (33)$$

Ce flux est constant.

L'équation (32) combinée avec la loi de Newton (16) donne :

$$\Delta v_x = \frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0. \quad (34)$$

On en déduit : $v_x(y) = V_2 + (V_1 - V_2) \frac{y}{d}$. Par conséquent :

$$C_x = \eta \frac{V_1 - V_2}{d}. \quad (35)$$

Le flux de quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\Phi_{p_x} = \frac{\eta \Sigma}{d} (V_1 - V_2). \quad (36)$$

On peut donc définir la résistance hydraulique de Couette par :

$$R_{hyd, C} \widehat{=} \frac{v_x(0) - v_x(d)}{\Phi_{p_x}} = \frac{d}{\eta \Sigma} \quad (37)$$

$R_{hyd, C}$ s'exprime en $\text{Pa}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, est proportionnelle à la distance d entre les plaques, et inversement proportionnelle à la section Σ et au coefficient de transport η .

2.4.2. Résistance hydraulique de Poiseuille

Considérons pour finir un tuyau horizontal et mince, cylindrique d'axe Ox , de longueur L et de section $\Sigma = \pi a^2$, rempli d'un fluide newtonien de viscosité dynamique η . On applique aux bornes du tuyau une différence de pression $\Pi(0) - \Pi(L) = \Pi_1 - \Pi_2 > 0$ ce qui provoque un écoulement stationnaire et incompressible, supposé laminaire dont le champ des vitesses est de la forme $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_x(r) \mathbf{u}_x$ dans la base des coordonnées cylindriques d'axe Ox : c'est un écoulement cylindrique de Poiseuille.

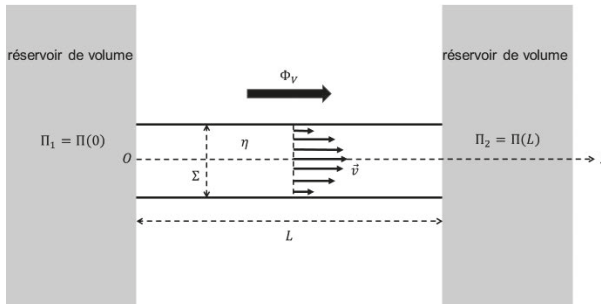


Figure 7 - Résistance hydraulique de Poiseuille.

Dans cette géométrie et l'écoulement étant stationnaire, le vecteur densité de courant de quantité de mouvement s'écrit, dans la base des coordonnées cylindriques d'axe Ox :

$$\mathbf{j}_{p_x}(\mathbf{r}) = \Pi(x) \mathbf{u}_x - C_x(r) \mathbf{u}_r. \quad (38)$$

En régime stationnaire, l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\text{div}(\mathbf{j}_{p_x}) = \frac{d\Pi}{dx} - \frac{1}{r} \frac{d(rC_x)}{dr} = 0.$$

La contrainte tangentielle s'écrit ici : $C_x(r) = \eta \frac{dv_x}{dr}$. On en déduit l'équation locale vérifiée par $v_x(r)$:

$$\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_x}{dr} \right) = \frac{d\Pi}{dx}. \quad (39)$$

On intègre cette équation différentielle en tenant compte de la condition de non-glissement du fluide sur la paroi, et on obtient :

$$v_x(r) = \frac{r^2 - a^2}{4\eta} \frac{d\Pi}{dx}. \quad (40)$$

Remarquons au passage, pour établir un parallèle strict avec les trois cas précédents, que la condition d'incompressibilité de l'écoulement s'écrit :

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (41)$$

\mathbf{v} est donc à flux conservatif : le débit de volume $\Phi_V = \iint_{\Sigma} v_x(r) d\Sigma$ est une constante le long du tuyau. D'autre part, l'équation (39) implique évidemment :

$$\Delta \Pi = \frac{d^2 \Pi}{dx^2} = 0. \quad (42)$$

Nous avons donc une analogie complète avec les trois cas précédents.

Le débit de volume s'obtient par une simple intégration de (40) :

$$\Phi_V = - \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{d\Pi}{dx}.$$

Ce résultat peut se reformuler sous la forme :

$$\Phi_V = \frac{\Sigma^2}{8\pi\eta L} (\Pi(0) - \Pi(L)).$$

On peut donc définir et exprimer la résistance hydraulique de Poiseuille $R_{hyd, P}$ du tuyau :

$$R_{hyd, P} \triangleq \frac{\Pi(0) - \Pi(L)}{\Phi_V} = \frac{8\pi\eta L}{\Sigma^2} \quad (43)$$

$R_{hyd, P}$ s'exprime en $\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ et est proportionnelle à la longueur L du tuyau. Mais contrairement aux quatre cas précédents, elle est *proportionnelle* au coefficient de transport η et *inversement* proportionnelle au *carré* de sa section Σ . Ce dernier résultat est bien sûr dû à la non-uniformité du champ des vitesses sur une section de l'écoulement.

L'examen des écoulements de Couette et de Poiseuille montre bien la grande diversité des situations permise par le caractère *vectoriel* de la quantité de mouvement.

3. TRANSPORT LINÉAIRE ET IRRÉVERSIBILITÉ : CRÉATION D'ENTROPIE EN RÉGIME STATIONNAIRE.

Nous arrivons maintenant au but de cet article, qui est de mettre en évidence, avec les notions figurant au programme de la filière PSI et des autres filières de CPGE (Classes préparatoires aux grandes écoles), le lien profond entre les phénomènes de transport linéaire étudiés précédemment et l'irréversibilité des processus mis en jeu.

Nous n'aborderons par ici la théorie générale du transport linéaire, impliquant les notions de courant d'entropie, d'affinités et de coefficients cinétiques, et renvoyons aux références [1] et [2] pour un traitement de ce sujet.

Nous nous contenterons ici d'évaluer le taux de création d'entropie dans les cinq situations étudiées précédemment, en nous limitant au cas du régime stationnaire dans une géométrie unidimensionnelle.

3.1. Création d'entropie et conduction électrique

Nous reprenons la situation et les notations introduites au sous-paragraphe 2.1. Nous noterons ici : $V(0) = V_1$ et $V(L) = V_2$. Appliquons successivement les deux principes de la thermodynamique au conducteur tout entier.

3.1.1. Premier principe

Pour une évolution élémentaire du conducteur entre les instants t et $t + dt$, celui-ci s'écrit, en régime stationnaire :

$$dU = 0 = \delta W^{ext} + \delta Q^{ext}.$$

Or, le travail électrique reçu par le conducteur de la part du générateur s'écrit :

$$\delta W^{\text{ext}} = R_{\text{elec}} i^2 dt = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R_{\text{elec}}} dt.$$

On en déduit le transfert thermique algébrique échangé par le conducteur avec l'extérieur :

$$\delta Q^{\text{ext}} = -\delta W^{\text{ext}} = -\frac{(V_1 - V_2)^2}{R_{\text{elec}}} dt < 0. \quad (44)$$

L'effet Joule s'accompagne bien d'un dégagement de chaleur.

3.1.2. Second principe

Pour la même évolution, le second principe s'écrit, avec les notations usuelles :

$$dS = 0 = \delta S_e + \delta S_c.$$

Or, l'entropie échangée au cours de cette évolution (supposée monotherme) s'écrit :

$$\delta S_e = \frac{\delta Q^{\text{ext}}}{T^{\text{ext}}} = -\frac{(V_1 - V_2)^2}{R_{\text{elec}} T^{\text{ext}}} dt. \quad (45)$$

Par conséquent, le taux de création d'entropie $\dot{S}_c = \frac{\delta S_c}{dt}$ (c'est-à-dire l'entropie créée par unité de temps) s'écrit :

$$\dot{S}_c = +\frac{(V_1 - V_2)^2}{R_{\text{elec}} T^{\text{ext}}} > 0. \quad (46)$$

Cette grandeur est strictement positive quel que soit le signe de la tension $V_1 - V_2$. La conduction électrique est donc un phénomène fondamentalement irréversible. Par ailleurs, cette irréversibilité impose le signe (positif) de la résistance R_{elec} et donc du coefficient de transport σ .

3.2. Création d'entropie et conduction thermique

Nous reprenons la situation et les notations introduites au sous-paragraphe 2.3. Nous noterons ici : $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$. Appliquons le second principe de la thermodynamique au barreau tout entier :

$$dS = 0 = \delta S_e + \delta S_c.$$

Ici, il y a deux transferts thermiques avec l'extérieur du barreau :

- ♦ $\delta Q^{\text{ext}}(0) = j_H(0) \Sigma dt$;
- ♦ $\delta Q^{\text{ext}}(L) = -j_H(L) \Sigma dt$.

Or, on est en régime stationnaire donc $\text{div}(\mathbf{j}_H) = \frac{dj_H}{dx} = 0$. Par conséquent :

$$\delta S_e = \frac{\delta Q^{\text{ext}}(0)}{T_1} + \frac{\delta Q^{\text{ext}}(L)}{T_2} = j_H \Sigma \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) dt.$$

Or, $j_H = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L}$ (car on est en régime stationnaire). On en déduit :

$$\delta S_e = \frac{\lambda \Sigma}{L} (T_1 - T_2) \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) dt = -\frac{1}{R_{th}} \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2} dt. \quad (47)$$

Par conséquent, le taux de création d'entropie \dot{S}_e s'écrit :

$$\dot{S}_e = + \frac{1}{R_{th}} \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2} > 0. \quad (48)$$

Cette grandeur est strictement positive quel que soit le signe de l'écart de température $T_1 - T_2$. La conduction thermique est donc un phénomène fondamentalement irréversible. Par ailleurs, cette irréversibilité impose le signe (positif) de la résistance R_{th} et donc du coefficient de transport λ .

3.3. Création d'entropie et diffusion de particules

Nous reprenons la situation et les notations introduites au sous-paragraphe 2.2. Nous noterons ici : $n(0) = n_1$ et $n(L) = n_2$. Nous développons ici un argument limité au cas d'une solution idéale, mais le résultat obtenu a une portée très générale. Appliquons le second principe de la thermodynamique au contenu du canal tout entier :

$$dS = 0 = \delta S_e + \delta S_i.$$

L'évaluation de l'entropie échangée δS_e est ici un peu moins classique. L'idée est que cette entropie échangée est liée au flux de particules entrant dans le canal en $x = 0$ et au flux de particules sortant du canal en $x = L$.

3.3.1. Calcul de l'entropie par particule de soluté

Il nous faut tout d'abord calculer « l'entropie $s_{\text{soluté}}$ par particule de soluté ». Or, cette entropie par particule de soluté est liée à l'entropie molaire partielle S_m du soluté dans le mélange par la relation :

$$s_{\text{soluté}} = \frac{S_{m, \text{soluté}}}{N_A}$$

où N_A est la constante d'Avogadro.

Or, l'entropie molaire partielle $S_{m, \text{soluté}}$ est liée au potentiel chimique $\mu_{\text{soluté}}$ du soluté dans le mélange par la relation :

$$S_{m, \text{soluté}} = - \frac{\partial \mu_{\text{soluté}}}{\partial T}.$$

Par ailleurs, si nous considérons la solution comme idéale, le potentiel chimique du soluté s'écrit :

$$\mu_{\text{soluté}} = \mu_{\text{soluté}}^\circ(T) + RT \ln(x_{\text{soluté}}).$$

La fraction molaire de soluté s'écrit : $x_{\text{soluté}} = \frac{N_{\text{soluté}}}{N_{\text{soluté}} + N_{\text{solvant}}} \approx \frac{N_{\text{soluté}}}{N_{\text{solvant}}}$ en solution di-

luée. En introduisant les densités volumiques $n_{\text{soluté}}$ et n_{solvant} (en m^{-3} !), nous obtenons :

$$x_{\text{soluté}} \approx \frac{n_{\text{soluté}}}{n_{\text{solvant}}}.$$

Par conséquent, $\mu_{\text{soluté}} \approx \mu_{\text{soluté}}^{\circ}(T) + RT \ln \left(\frac{n_{\text{soluté}}}{n_{\text{solvant}}} \right)$ et donc :

$$s_{\text{soluté}} \approx \frac{S_{m,\text{soluté}}^{\circ}}{N_A} - \frac{R}{N_A} \ln \left(\frac{n_{\text{soluté}}}{n_{\text{solvant}}} \right) = s_{m,\text{soluté}}^{\circ} + k_B \ln \left(\frac{n_{\text{solvant}}}{n_{\text{soluté}}} \right). \quad (49)$$

On pourra remarquer au passage que cette expression n'est pas sans évoquer l'entropie statistique $S = k_B \ln \Omega^{(1)} \dots$

3.3.2. Calcul de l'entropie échangée

Écrivons maintenant l'entropie échangée par le contenu du canal entre les instants t et $t + dt$. Pour cela, nous notons $s_1 = k_B \ln \left(\frac{n_{\text{solvant}}}{n_1} \right)$ et $s_2 = k_B \ln \left(\frac{n_{\text{solvant}}}{n_2} \right)$ les entropies par particule de soluté en $x = 0$ et $x = L$, respectivement. Nous avons fait l'approximation que la densité volumique n_{solvant} est uniforme, compte tenu du caractère très dilué de la solution.

Rappelons-nous par ailleurs que nous sommes en régime stationnaire. Par conséquent, les flux de particules de soluté sont les mêmes en $x = 0$ et $x = L$. On peut donc écrire :

$$\delta S_e = \Phi_N dt s_1 - \Phi_N dt s_2 = k_B \Phi_N \ln \left(\frac{n_2}{n_1} \right) dt.$$

Or, $\Phi_N = j_N \Sigma = -D \frac{dn}{dx} \Sigma = D \left(\frac{n_1 - n_2}{L} \right) \Sigma$ car nous sommes en régime stationnaire. On en conclut :

$$\delta S_e = \frac{k_B D \Sigma}{L} (n_1 - n_2) \ln \left(\frac{n_2}{n_1} \right) dt. \quad (50)$$

3.3.3. Taux de création d'entropie

Finalement, nous obtenons le taux de création d'entropie \dot{S}_c :

$$\dot{S}_c = \frac{k_B}{R_{\text{diff}}} (n_1 - n_2) \ln \left(\frac{n_1}{n_2} \right) > 0. \quad (51)$$

Cette grandeur est strictement positive quel que soit le signe de l'écart de densité

(1) En effet, dans une unité de volume, il y a $n_{\text{soluté}}$ particules de soluté et n_{solvant} particules de solvant. Le nombre de manières de choisir $n_{\text{soluté}}$ particules parmi $n_{\text{tot}} = n_{\text{soluté}} + n_{\text{solvant}}$ vaut :

$$\Omega = \frac{(n_{\text{tot}})!}{(n_{\text{soluté}})! (n_{\text{solvant}})!}.$$

À l'aide de la formule de Stirling, on obtient, vu que $n_{\text{solvant}} \gg n_{\text{soluté}}$:

$$\ln \Omega \approx n_{\text{soluté}} \ln \left(\frac{n_{\text{solvant}}}{n_{\text{soluté}}} \right).$$

volumique $n_1 - n_2$. La diffusion de matière est donc un phénomène fondamentalement irréversible. Par ailleurs, cette irréversibilité impose le signe (positif) de la résistance R_{diff} et donc du coefficient de transport D .

3.4. Création d'entropie et viscosité

3.4.1. Écoulement plan de Couette

Nous reprenons la situation et les notations introduites au sous-paragraphe 2.4.1. Nous noterons ici : $v_x(0) = V_2$ et $v_x(d) = V_1$.

Appliquons successivement le théorème de l'énergie cinétique, puis les deux principes de la thermodynamique au volume particulière de fluide contenu entre les plaques, en écoulement stationnaire, incompressible et laminaire. Ce volume particulière délimite un système fermé, en mouvement global de translation rectiligne et uniforme.

3.4.1.1. Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit, dans ce contexte :

$$dE_c = 0 = \delta W_{viscosité}^{ext} + \delta W_{viscosité}^{int} = \delta W_{viscosité}^{ext} + \delta W_{viscosité}^{int}.$$

En effet, du fait de l'absence de gradient de pression dans la direction de l'écoulement, il n'y a pas de travail des forces extérieures de pression. Par ailleurs, l'écoulement étant incompressible, il n'y a pas non plus de travail des forces intérieures de pression.

Or, $\delta W_{viscosité}^{ext} = C_x(d) \Sigma V_1 dt - C_x(0) \Sigma V_2 dt$. Mais $C_x = \eta \frac{V_1 - V_2}{d}$ est constante. Par conséquent :

$$\delta W_{viscosité}^{ext} = C_x \Sigma (V_1 - V_2) dt = \frac{\eta \Sigma}{d} (V_1 - V_2)^2 dt.$$

Finalement, on obtient donc :

$$\delta W_{viscosité}^{int} = -\delta W_{viscosité}^{ext} = -\frac{(V_1 - V_2)^2}{R_{hyd, C}} dt. \quad (52)$$

On remarque au passage que $\delta W_{viscosité}^{ext} > 0$ tandis que $\delta W_{viscosité}^{int} < 0$: les forces extérieures de viscosité (exercées par les plaques sur le fluide) sont motrices tandis que les forces intérieures de viscosité sont résistantes.

3.4.1.2. Premier principe

Le premier principe s'écrit ainsi :

$$dU + dE_c = 0 = \delta W_{viscosité}^{ext} + \delta Q^{ext} = \delta W_{viscosité}^{ext} + \delta Q^{ext}.$$

On en déduit : $\delta Q^{ext} = -\delta W_{viscosité}^{ext} = \delta W_{viscosité}^{int} = -\frac{(V_1 - V_2)^2}{R_{hyd, C}} dt < 0$. (53)

Les phénomènes visqueux s'accompagnent d'un dégagement de chaleur.

3.4.1.3. Second principe

Écrivons pour terminer le second principe :

$$dS = 0 = \delta S_e + \delta S_c.$$

Nous considérons ici une évolution monotherme, donc l'entropie échangée s'écrit :

$$\delta S_e = \frac{\delta Q^{ext}}{T^{ext}} = - \frac{(V_1 - V_2)^2}{R_{hyd, C} T^{ext}} dt. \quad (54)$$

Par conséquent, le taux de création d'entropie \dot{S}_c s'écrit :

$$\dot{S}_c = + \frac{(V_1 - V_2)^2}{R_{hyd, C} T^{ext}} > 0. \quad (55)$$

Cette grandeur est strictement positive, quel que soit le signe de la différence de vitesse $V_2 - V_1$, et même quel que soit le signe de chacune des deux vitesses V_1 et V_2 . Les phénomènes visqueux sont donc fondamentalement irréversibles. Par ailleurs, cette irréversibilité impose le signe (positif) de la résistance $R_{hyd, C}$ et donc du coefficient de transport η .

3.4.2. Écoulement cylindrique de Poiseuille

Nous reprenons la situation et les notations introduites au sous-paragraphe 2.4.2. Nous noterons ici : $\Pi(0) = \Pi_1$ et $\Pi(L) = \Pi_2$. Appliquons successivement le théorème de l'énergie cinétique, puis les deux principes de la thermodynamique au volume particulière de fluide contenu dans le tuyau tout entier en écoulement stationnaire, incompressible et laminaire. Ce volume particulière délimite un système fermé, en mouvement global de translation rectiligne et uniforme.

3.4.2.1. Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit, dans ce contexte :

$$dE_c = 0 = \delta W^{ext} + \delta W^{int} = \delta W_{pression}^{ext} + \delta W_{viscosité}^{int}.$$

En effet, du fait de la condition de non-glissement du fluide sur la paroi du tuyau, il n'y a pas de travail des forces extérieures de viscosité. Par ailleurs, l'écoulement étant incompressible, il n'y a pas non plus de travail des forces intérieures de pression.

Or, $\delta W_{pression}^{ext} = \iint_{\Sigma_1} \Pi_1 d\Sigma v_x(r) dt - \iint_{\Sigma_2} \Pi_2 d\Sigma v_x(r) dt$ où Σ_1 et Σ_2 sont les sections d'entrée et de sortie, respectivement. On en déduit :

$$\delta W_{pression}^{ext} = (\Pi_1 - \Pi_2) \Phi_V dt,$$

$$\text{soit :} \quad \delta W_{pression}^{ext} = \frac{(\Pi_1 - \Pi_2)^2}{R_{hyd, P}} dt = - \delta W_{viscosité}^{int}. \quad (56)$$

On remarque au passage que $\delta W_{viscosité}^{int} < 0$: les forces intérieures de viscosité sont résistantes.

3.4.2.2. Premier principe

Le premier principe s'écrit ainsi :

$$dU + dE_c = 0 = \delta W^{ext} + \delta Q^{ext} = \delta W_{pression}^{ext} + \delta Q^{ext}.$$

$$\text{On en déduit : } \delta Q^{ext} = -\delta W_{pression}^{ext} = \delta W_{viscosité}^{int} = -\frac{(\Pi_1 - \Pi_2)^2}{R_{hyd, P}} dt < 0. \quad (57)$$

Les phénomènes visqueux s'accompagnent d'un dégagement de chaleur.

3.4.2.3. Second principe

Écrivons pour terminer le second principe :

$$dS = 0 = \delta S_e + \delta S_c.$$

Nous considérons ici une évolution monotherme, donc l'entropie échangée s'écrit :

$$\delta S_e = \frac{\delta Q^{ext}}{T^{ext}} = -\frac{(\Pi_1 - \Pi_2)^2}{R_{hyd, P} T^{ext}} dt. \quad (58)$$

Par conséquent, le taux de création d'entropie \dot{S}_c s'écrit :

$$\dot{S}_c = +\frac{(\Pi_1 - \Pi_2)^2}{R_{hyd, P} T^{ext}} > 0. \quad (59)$$

Cette grandeur est strictement positive, quel que soit le signe de la surpression $\Pi_1 - \Pi_2$ donc quel que soit le sens de l'écoulement. Les phénomènes visqueux sont donc fondamentalement irréversibles. Par ailleurs, cette irréversibilité impose le signe (positif) de la résistance $R_{hyd, P}$ et donc du coefficient de transport η .

3.5. Création d'entropie et résistances

Remarquons pour terminer que dans chacun des cinq cas envisagés, le taux de création d'entropie est inversement proportionnel à la résistance : en effet, à « tension imposée », compte tenu de la relation linéaire qui lie le flux à la tension, le flux est d'autant plus faible que la résistance est plus grande. Par conséquent, plus la résistance est grande, moins il y a de transport, source de l'irréversibilité, et donc plus la création d'entropie est faible.

CONCLUSION

J'ai tenté dans cet article de présenter de manière unifiée les différents phénomènes de transport linéaire au programme des filières PSI, BCPST, PC et TPC et d'autres filières de CPGE, pour certains d'entre eux. L'accent a été mis sur les analogies fortes qui les unissent, pour déboucher sur la mise en évidence relativement simple de leur caractère fondamentalement irréversible. Je renvoie aux références [1] et [2] pour un traitement à un niveau plus élevé de la théorie du transport linéaire. J'espère que ce

travail pourra être utile aux collègues enseignant dans ces filières ou à l'Université, ainsi qu'aux candidats à l'agrégation de physique.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier très chaleureusement mon collègue et ami Olivier Joachim, professeur en PSI* au Lycée Saint-Louis (Paris) pour la très grande qualité de sa relecture et pour ses encouragements enthousiastes. Cet article a été grandement amélioré et enrichi grâce à ses suggestions toujours pertinentes. En particulier, l'idée d'y inclure le calcul de la résistance hydraulique de Couette et de l'entropie créée dans un écoulement de Couette est de lui. De même pour l'identification de l'entropie statistique dans le calcul de l'entropie créée par diffusion. Grâce lui en soient rendues !

Je tiens également à remercier Ludovic Brivady, élève – normalien à l'ENS Ulm (promotion 2019 de la PSI* d'Eiffel) pour sa relecture très attentive et ses nombreuses suggestions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer et B. Roulet, *Thermodynamique*, Paris : Hermann, 2007.
- [2] M. Le Bellac et F. Mortessagne, *Thermodynamique statistique*, Paris : Dunod, 2001.
- [3] A. Bouyssy, M. Davier et B. Gatty, *Physique pour les sciences de la vie – Tome 2 : la matière*, Paris : Belin, 1987.



Nicolas CHOIMET

*Professeur en PSI**

Lycée Gustave Eiffel

Bordeaux (Gironde)