

**Leçons de Physique Agrégation spéciale docteur,  
option physique  
Agrégation 2022-2023**

<b>1</b>	<b>Leçon 1 : Gravitation</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Leçon 2 : Lois de conservation en dynamique</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Leçon 3 : Notion de viscosité d'un fluide. Écoulement visqueux</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Leçon 4 : Modèle d'un écoulement parfait</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Leçon 5 : Phénomènes interfaciaux dans les fluides</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b>Leçon 06 : Premier principe de la thermodynamique</b>	<b>27</b>
<b>7</b>	<b>Leçon 07 : Transition de phase</b>	<b>31</b>
<b>8</b>	<b>Leçon 08 : Phénomènes de transports</b>	<b>34</b>
<b>9</b>	<b>Leçon 9 : Conversion de puissance électromécanique</b>	<b>38</b>
<b>10</b>	<b>Leçon 10 : Induction électromagnétique</b>	<b>47</b>
<b>11</b>	<b>Leçon 11 : Rétroactions et oscillations</b>	<b>50</b>
<b>12</b>	<b>Leçon 12 : Traitement d'un signal. Étude spectrale</b>	<b>52</b>
<b>13</b>	<b>Leçon 13 : Ondes progressives, ondes stationnaires</b>	<b>56</b>
<b>14</b>	<b>Leçon 14 : Ondes acoustiques</b>	<b>60</b>
<b>15</b>	<b>Leçon 15 : Propagation guidée des ondes</b>	<b>64</b>
<b>16</b>	<b>Leçon 16 : microscopie optique</b>	<b>73</b>
<b>17</b>	<b>Leçon 17 : Interférence à deux ondes</b>	<b>81</b>
<b>18</b>	<b>Leçon 18 : Interféromètre à division d'amplitude</b>	<b>85</b>
<b>19</b>	<b>Leçon 19 : diffraction de Fraunhofer</b>	<b>89</b>
<b>20</b>	<b>Leçon 20 : Diffraction par des structures périodiques</b>	<b>92</b>
<b>21</b>	<b>Leçon 21 : Absorption et émission de la lumière</b>	<b>96</b>
<b>22</b>	<b>Leçon 22 : Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques</b>	<b>99</b>
<b>23</b>	<b>Leçon 23 : Mécanisme de la conduction électrique dans les solides</b>	<b>102</b>
<b>24</b>	<b>Leçon 24 : Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique</b>	<b>107</b>

<b>25 Leçon 25 :Oscillateurs ; portraits de phase et non linéarités</b>	<b>111</b>
<b>26 Leçon 26 : Cinématique relativiste : Expérience de Michelson et Morley</b>	<b>113</b>
<b>27 Leçon 27 : Effet tunnel, application à la réactivité alpha</b>	<b>121</b>

# Chapitre 1

## Leçon 1 : Gravitation

---

### Niveau :

- CPGE

### Pré-requis :

- Cinématique et dynamique d'un point matériel
- référentiels galiléens et non
- Force d'inertie

### Bibliographie :

- BFR Mécanique du point Chap 7&8 ;
  - Perez mécanique Chapitre gravitation.
  - H prepa MPSI PCSI PTSI Hachette 2010
- 

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Interaction gravitationnelle</b>	<b>4</b>
1.2.1	Force de gravitation(BFR)	4
1.2.2	Analogie avec la loi de Coulomb (BFR)	4
1.2.3	Propriétés du champ de gravitation	4
1.2.4	Champ de pesanteur terrestre	5
<b>1.3</b>	<b>Dynamique dans un référentiel non galiléen (BFR)</b>	<b>5</b>
1.3.1	Terme de Marées (BFR)	5
1.3.2	Discussion - limite de Roche H prepa exercices p95	6
<b>1.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>6</b>

---

## 1.1 Introduction

C'est au XVII<sup>eme</sup>, en se basant sur les lois expérimentales du mouvement des planètes que Newton découvrit la loi de force qui explique ces mouvements. Nous étudierons ici le problème inverse qui consiste à à décrire le mouvement lorsque la loi de force est admise. Le caractère universel de la loi de Newton fait qu'il est possible de connaître le champ d'accélération en tout point de l'espace, ce qui permet notamment d'étudier le champ de pesanteur dû à un astre sphérique tel que la Tere. (repris du BFR)

## 1.2 Interaction gravitationnelle

### 1.2.1 Force de gravitation(BFR)

#### a. Loi de Newton

Dessiner un schéma (avec des axes  $\vec{e}_r$ , distance  $r$  entre les corps) avec deux corps numérotés 1 et 2, de masses  $m_1$  et  $m_2$ , la force qu'exerce 2 sur 1 a pour expression :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r \quad (1.1)$$

$G$  c'est la force entre deux masses de 1 kg, aujourd'hui c'est une constante fondamentale  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$  (1798 mesurée par l'expérience de Cavendish). La force est toujours attractive ( $m_i > 0$ ) même si la résultante est peut être de sens opposé (dans l'eau on est moins attiré par le noyau de la Terre que l'eau). Finir avec l'analogie de la force de Coulomb pour deux charges  $q_i$  (discussion sur attractive/ répulsive dans le Pérez).

#### b. Champ gravitationnel

Schéma en prenant un corps de masse  $m$  et une distribution de masse  $M_i$ .

$$\vec{F} = \sum_i^N G \frac{M_i m}{r_i^2} \vec{r}_i = m \sum_i^N G \frac{M_i}{r_i^2} \vec{r}_i = m \vec{G}(M). \quad (1.2)$$

### 1.2.2 Analogie avec la loi de Coulomb (BFR)

La loi de Newton n'est pas sans rappeler la loi de Coulomb exprimant la force qui s'exerce entre deux particules portant des charges  $q_1$  et  $q_2$ . Rappeler la loi de Coulomb en fonction des charges puis en fonction du champ électrostatique créé par l'une des charge. Analogie avec l'expression du champ gravitationnel donné précédemment.

$$\vec{F} = m \vec{G} \quad (1.3)$$

Il est facile de voir en appliquant la deuxième loi de Newton que  $\vec{G}$  représente un champ d'accélération. Comme en électrostatique, le champ est censé exister au point M, même en l'absence de l'observateur ou de la masse qui subit la force. Présenter en powerpoint un tableau qui fait l'analogie complète entre Coulomb et gravitationnelle. Noter les différences ! Ordres de grandeurs (BFR)

En déduire que la gravitation peut être négligée dans le domaine atomique, elle ne donne des effets notables qu'au voisinage de masses importantes comme les astres. De plus les corps célestes sont électriquement neutres : les forces qu'ils exercent entre eux, et qui déterminent leurs mouvement sont essentiellement gravitationnelles.

### 1.2.3 Propriétés du champ de gravitation

#### a. Potentiel gravitationnel

Potentiel électrostatique créé par  $n$  charges ponctuelles. Par analogie donner le potentiel gravitationnel pour  $n$  masses ponctuelles. Chacune des forces  $F_i$  dérive d'un potentiel. Par conséquent  $\vec{G}$  dérive d'un potentiel  $V$ . Pour une masse unique :

$$\vec{\Phi} = -G \sum_i \frac{M_i}{r_i}. \quad (1.4)$$

Du potentiel  $\Phi$  on en déduit le champ  $\vec{G}$  par la relation :

$$\vec{G} = -\vec{\nabla}(\Phi). \quad (1.5)$$

## b. Théorème de Gauss

Définir une surface contenant une distribution de charges. Le flux sortant du champ  $E$  à travers  $S$  est donné par le théorème de Gauss. (Faire un schéma). Par analogie on arrive à écrire que :

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \sum_i M_i. \quad (1.6)$$

### 1.2.4 Champ de pesanteur terrestre

#### a. Champ à l'extérieur

Assimilons la Terre à une sphère homogène de rayon  $R = 6370$  km, et supposons galiléen tout référentiel lié à la Terre (on néglige les effets liés à la rotation terrestre et les influences des autres astres). On se propose de calculer le champ d'accélération  $\vec{g}$  créé par la Terre en tout point de l'espace. Avec les approximations consenties, il s'exerce sur un corps de masse  $m$  la force  $\vec{P} = m\vec{g}$  qui est le poids de ce corps. Le module  $g$  du vecteur  $\vec{g}$  est l'intensité de la pesanteur.

Faire un schéma du problème. On applique le théorème de Gauss, en symétrie sphérique, écrire les symétries et invariances du problème.  $\vec{g}$  ne dépend que de la distance  $r$  entre l'objet et le centre de la Terre. On calcule le flux (**Ici il faut faire preuve de rigueur et de clareté**) :

$$\Phi = -4\pi r^2 g = -4\pi G m_T \quad (1.7)$$

Donc  $g = \frac{G m_T}{r^2} = g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2$ . On peut également exprimer  $g$  en fonction de l'altitude du point (BFR).

#### b. Mesure de $g$

Mesure de  $g$  à l'aide d'un pendule.

## 1.3 Dynamique dans un référentiel non galiléen (BFR)

La Terre tourne sur elle-même par rapport aux étoiles fixes à raison de 1 tour en 1 jour sidéral dont la durée est de 86164 secondes, soit à une vitesse de  $\omega = \frac{2\pi}{86164} = 7.29212E-5$  rad/s. Pour expliquer les marées, on doit tenir compte en outre de l'attraction qu'exercent sur la Terre les autres astres (essentiellement Lune et Soleil).

### 1.3.1 Terme de Marées (BFR)

On considère le système Terre-Lune. Reprendre le schéma du BFR. On décrit les différentes forces à considérer appliquées en un point  $M$  à la surface de la Terre. On souhaite déterminer l'accélération du point  $M$ . Dans le référentiel de la Terre (non galiléen).

$$\gamma_{relative}(M) = \gamma_{absolue}(M) - \gamma_{entraînement} - \gamma_{coriolis} \quad (1.8)$$

$$\vec{\gamma}_r = \frac{\vec{F}}{m} + \underbrace{\vec{g}_0 + \omega^2 \vec{HM}}_{\text{pesanteur ordinaire}} + \underbrace{\gamma_L(M) - \gamma_L(O)}_{\text{accélération de marée}} \quad (1.9)$$

On peut calculer l'accélération du terme de marée en prenant le point M à l'équateur là où il est maximal. (Si le temps le permet)

Commenter sur les effets de marées sur la surface d'équilibre des océans avec un dessin.

### **1.3.2 Discussion - limite de Roche H prepa exercices p95**

## **1.4 Conclusion**

Conclusion sur la généralité de la loi de Newton, analogie électrostatique et gravitation. élargissement sur la rotation des planètes, référentiels non galiléens (BFR).

# Chapitre 2

## Leçon 2 : Lois de conservation en dynamique

---

### Niveau :

- CPGE

### Pré-requis :

- Cinématique et dynamique d'un point matériel
- Force d'inertie

### Bibliographie :

- BFR Mécanique/Mécanique du point ;
  - Dunod MPSI
  - Composition agreg externe 2018
- 

### Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2.2</b>	<b>Les grandeurs conservées</b>	<b>7</b>
2.2.1	La quantité de mouvement	7
2.2.2	Théorème de l'énergie cinétique (BFR)	8
2.2.3	L'énergie mécanique	8
2.2.4	Point mobile sans frottement sur une sphère	8
<b>2.3</b>	<b>Application aux chocs reprendre BFR mécanique du point chapitre 10</b>	<b>8</b>
2.3.1	Conservation de la quantité de mouvement	8
2.3.2	Conservation de l'énergie mécanique : mise en évidence expérimentale	9
<b>2.4</b>	<b>Mouvement à force centrale</b>	<b>9</b>
2.4.1	TMC dans un référentiel galiléen- Loi des aires	9
2.4.2	Conséquences de la conservation de l'énergie - patineur ou satellite	9
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>9</b>

---

## 2.1 Introduction

## 2.2 Les grandeurs conservées

### 2.2.1 La quantité de mouvement

Dans un référentiel galiléen : deuxième loi de Newton. Si le système est isolé : pas de force extérieur. Ou pseudo-isolé : les forces se compensent. Exemple deux corps en interaction (électrostatique ou gravitationnelle). Conservation de  $\vec{p}$  la quantité de mouvement.

### 2.2.2 Théorème de l'énergie cinétique (BFR)

Définition du travail d'une force, théorème de l'énergie cinétique appliqué à un point mobile soumis à une force  $f$ . Le travail de la force qui s'exerce sur un point matériel entre deux instants est égal à la variation de l'énergie cinétique du point entre ces mêmes instants. Ce théorème permet de calculer l'énergie cinétique, i.e. le carré de la vitesse, si la donnée du champ de force suffisait à déterminer le travail. Il faut pour cela un champ de force qui dérive d'un potentiel.

### 2.2.3 L'énergie mécanique

On démontre la conservation de l'énergie mécanique Intégrale première de l'énergie cinétique. Théorème sous la forme différentielle.

$$E_c + E_p = E_m \quad (2.1)$$

Lorsqu'un point matériel se déplace dans un champ de force dérivant d'un potentiel son énergie mécanique reste constante au cours du mouvement. Loi de conservation de l'énergie mécanique. Discussion.

### 2.2.4 Point mobile sans frottement sur une sphère

exemple dans le BFR chap 5 et 6.

## 2.3 Application aux chocs reprendre BFR mécanique du point chapitre 10

Lorsque deux corps en mouvement se rencontrent, il y a choc. Le choc est un processus au cours duquel les vitesses changent brusquement de direction et éventuellement d'amplitude. L'étude expérimentale des chocs entre corps solide montre que la durée du contact entre les deux corps est toujours très brève, de sorte que la position des corps reste pratiquement invariable au cours du choc. Le changement brusque de la vitesse de chaque corps apparaît comme une discontinuité de la vitesse en un point de sa trajectoire. On montre dans un cas simple où une particule de masse  $m$  est animée d'une vitesse  $\vec{v}$  perpendiculaire à une paroi fixe, dirigée vers celle-ci. (Expérimentalement c'est la direction verticale). La symétrie du problème montre qu'après le choc la vitesse  $v'$  est aussi normale à la paroi.

### 2.3.1 Conservation de la quantité de mouvement

conservation de la quantité de mouvement au cours du choc. Bilan d'énergie dépend du type de collision.

#### Choc élastique

hypothèse du choc élastique : conservation de l'énergie cinétique au cours du choc. On ne prend donc pas en compte la dissipation qui pourrait y avoir au cours du choc. Si le choc est élastique nous écrirons :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v')^2 \quad (2.2)$$

On considère que la variation de l'énergie cinétique de la paroi est nulle.



## Choc mou ou inélastique

Cas de la pâte à modeler qui ne rebondit pas. On écrit la conservation de la quantité de mouvement totale. On exprime  $v'$  et on obtient la variation de l'énergie cinétique. Le choc mou s'accompagne d'une perte d'énergie cinétique transformée en énergie interne de déformation et conduisant à des processus de dissipation.

## Coefficient de restitution

On définit le coefficient de restitution  $C_R$  en fonction des variations de vitesse.  $0 < C_R < 1$  si  $C_R = 1$  on retrouve le cas du choc élastique. Si  $C_R = 0$  pâte à modeler qui ne rebondit pas.

### 2.3.2 Conservation de l'énergie mécanique : mise en évidence expérimentale

Manipulation de la balle de ping pong (Poly de Phillipe). Utiliser une balle de golf pour ne pas avoir à prendre en compte la poussée d'Archimède. On montre la conservation de l'énergie mécanique entre deux chocs, la perte d'énergie mécanique lors des chocs, on en déduit le coefficient de restitution.

## 2.4 Mouvement à force centrale

### 2.4.1 TMC dans un référentiel galiléen- Loi des aires

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}(\vec{F}) \quad (2.3)$$

Dans un solide

$$\vec{L} = \int_V \vec{r} \wedge \rho \vec{v} d\tau \quad (2.4)$$

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (2.5)$$

Si le système est isolé ou pseudo-isolé  $\vec{L} = \text{constante}$ .

On calcule le moment cinétique et on en déduit la loi des aires. BFR Chap 12

### 2.4.2 Conséquences de la conservation de l'énergie - patineur ou satellite

On définit un axe de rotation vertical du patineur  $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ ,  $\vec{L} = I_{Oz} \vec{\omega}$   $I$  étant le moment d'inertie du patineur. Si on écarte les masses de l'axe  $I$  devient plus grand et donc  $\omega$  diminue. Au contraire si on rapproche les masses du patineur  $\omega$  augmente. **Remarque de J.Crassous : trop qualitatif comme exemple pour une leçon d'agreg**

Satellite, interaction gravitationnelle. Donner l'énergie potentielle effective ainsi qu'une représentation graphique et discuter des trajectoires du satellite en fonction de la valeur de l'énergie potentielle effective.

## 2.5 Conclusion

Conclure sur la généralité des lois de conservation et leurs applications

# Chapitre 3

## Leçon 3 : Notion de viscosité d'un fluide. Écoulement visqueux

---

### Niveau :

- CPGE

### Pré-requis :

- Hydrostatique
- cinématique des fluides
- mécanique

### Bibliographie :

- Hydrodynamique Physique
  - Dudod PC
  - J'intègre PC
- 

### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>10</b>
<b>3.2</b>	<b>Notion de viscosité</b>	<b>11</b>
3.2.1	Contrainte visqueuse	11
3.2.2	Origine microscopique (pas sur au niveau du temps)	11
3.2.3	ordres de grandeur	11
<b>3.3</b>	<b>Exemple de l'écoulement de Poiseuille</b>	<b>11</b>
3.3.1	Champ de vitesse	11
3.3.2	Mesure de la viscosité	11
3.3.3	dissipation de l'énergie	12
<b>3.4</b>	<b>les différents régimes d'écoulements</b>	<b>12</b>
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>12</b>

---

### 3.1 Introduction

Temps de vidange d'une paille suivant le fluide avec différentes viscosités  $\eta$ . Ou alors expérience avec deux billes identiques dans du glycérol et de l'eau. On se restreint à des liquides Newtonien, incompressibles pour cette leçon.

## 3.2 Notion de viscosité

### 3.2.1 Contrainte visqueuse

On commence par montrer la vidéo [https://www.youtube.com/watch?v=pqWwHxn6LNo&t=220s&ab\\_channel=BarryBelmont](https://www.youtube.com/watch?v=pqWwHxn6LNo&t=220s&ab_channel=BarryBelmont). On remarque que le fluide se met petit à petit en mouvement sur l'ensemble de la largeur. À la fin, on a atteint le régime permanent. Tracer au tableau le profil des vitesses dans le système montré dans la vidéo.

On se limite à un raisonnement scalaire. Schéma d'une particule fluide dans un espace orthonormé. On définit les axes, la particule fluide considérée. On définit un contour et l'extérieur de la particule, vecteur normal  $\vec{n}$ .

$$d^2 \vec{F} = \vec{T}(\vec{n}) d^2 S \quad (3.1)$$

On a un écoulement  $\vec{v} = v_x(z) \vec{e}_x$ . On décrit les actions de contact de part et d'autre de la particule fluide (tangentielle et normale). On écrit la différence de vitesse entre les deux couches séparées par  $dy$ .

$$\begin{cases} \vec{T}(\vec{e}_x) = -P(M) \vec{e}_x \\ \vec{T}(\vec{e}_y) = -P(M) \vec{e}_y \\ \vec{T}(\vec{e}_z) = -P(M) \vec{e}_z + \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \vec{e}_x \end{cases} \quad (3.2)$$

On mène le calcul jusqu'à arriver à l'expression de la force de viscosité.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule fluide de volume  $d\tau$  s'écrit :

$$\begin{cases} \rho \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_x \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \Delta v_x + \rho g_x \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Origine microscopique (pas sur au niveau du temps)

### 3.2.3 ordres de grandeur

Viscosité de l'eau  $\eta_{\text{eau}} \in [1.7E-3, 0.3E-3]$  Pa · s entre 0 et 100 degrés celsius. Viscosité du miel.

## 3.3 Exemple de l'écoulement de Poiseuille

### 3.3.1 Champ de vitesse

**C'est l'occasion de faire preuve de rigueur et bien expliqué par étape la résolution du problème** Faire un schéma très simple d'une conduite droite de section circulaire pour un tuyau. Décrire les invariance du champ de vitesse et les symétries. Donner les conditions aux limites. Puis résoudre Navier-Stokes. On le fait pour une configuration rectangulaire ou cylindrique. Donner un ordre de grandeur attendu pour le débit et ou la vitesse de l'écoulement en prenant les conditions opératoire de l'expérience à suivre.

### 3.3.2 Mesure de la viscosité

On reprend le poly de Phillipe d'hydrodynamique sur l'écroulement dans un tube fin. (On discutera du nombre de Reynolds dans la section suivante.)

### 3.3.3 dissipation de l'énergie

On peut discuter de la dissipation d'énergie. La puissance donnée au système pour une variation de pression donnée. À partir du débit donner l'expression de la puissance fournie. La puissance est dissipée sous forme de chaleur imperceptible car la capacité calorifique de l'eau est très grande

## 3.4 les différents régimes d'écoulements

Donner un cadre plus général. On introduit le nombre de Reynolds. On discute des différents régimes d'écoulement possible à partir du nombre de Reynolds. On peut alors donner la valeur du Reynolds dans lequel notre expérience se place. En déduire que c'est un écoulement de Stokes visqueux.

On peut donner des illustrations de différents écoulements à différents nombres de Reynolds (Poisuille par exemple ou jet d'air en sortie d'une buse).

L'étude que l'on a réalisée est valable en régime stationnaire. Si le nombre de Reynolds devient très grand : écoulement instable. Parler de l'expérience et du Reynolds critique.

## 3.5 Conclusion

On peut faire une ouverture sur les écoulements parfaits : superfluides où la viscosité est nulle.

# Chapitre 4

## Leçon 4 : Modèle d'un écoulement parfait

---

### Niveau :

- CPGE

### Pré-requis :

- hydrostatique
- Mécanique

### Bibliographie :

- Hydrodynamique
  - Dunod PC
- 

### Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>4.2</b>	<b>Modèle de l'écoulement Parfait</b>	<b>13</b>
4.2.1	Qu'est-ce qu'un écoulement parfait	13
4.2.2	Équation d'Euler	14
4.2.3	Conditions aux limites	14
4.2.4	Conséquences	14
<b>4.3</b>	<b>Le théorème de Bernoulli</b>	<b>14</b>
4.3.1	Énoncé	14
4.3.2	Application	14
<b>4.4</b>	<b>Limite du modèle : écoulement réel</b>	<b>15</b>
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>15</b>

---

## 4.1 Introduction

On cherche dans cette leçon à relier le mouvement d'un fluide à ses causes. Dans un fluide en mouvement les actions de contact ne se réduisent pas qu'aux forces de pression comme en statique des fluides. On va s'intéresser ici à décrire un modèle d'écoulement décrivant un fluide qui s'écoule sans viscosité, sans frottement.

## 4.2 Modèle de l'écoulement Parfait

### 4.2.1 Qu'est-ce qu'un écoulement parfait

Il s'agit d'un fluide de viscosité nulle. C'est le cas de l'Hélium 4 lorsqu'il est refroidi à  $T = 2.17$  K. C'est surtout une approximation dans le cas où les perturbations de vitesse dues à la viscosité n'ont pas le temps de diffuser par viscosité dans le temps de passage du fluide (temps courts) = processus adiabatique.

### 4.2.2 Équation d'Euler

On considère une particule fluide dans un référentiel  $R$  supposé galiléen. Cette particule fluide est soumise aux forces de pression, ainsi qu'à d'autres forces d'interaction. On supposera la viscosité négligeable. On écrit le bilan de quantité de mouvement :

$$\delta m \vec{a} = -\nabla p d\tau + d\vec{F} \quad (4.1)$$

On développe le terme de variation de la vitesse et on parvient à l'équation d'Euler. On peut détailler le cas où la particule est soumise uniquement au champ de pesanteur. Remarque : On a pas eu besoin d'écrire l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement. On a une équation à 4 inconnues  $v_x, v_y, v_z$  et  $p$ . Il faut ajouter les conditions aux limites ainsi que l'équation de conservation de la masse pour pouvoir résoudre le problème.

### 4.2.3 Conditions aux limites

Dans tout écoulement le fluide ne pénètre pas les parois imperméables.

$$\vec{v} \cdot d\vec{S} = 0, \vec{v} \cdot d\vec{S} = \vec{v}_e \cdot d\vec{S} \quad (4.2)$$

Comme l'écoulement est parfait pas de frottement entre le fluide et la paroi. Si on a un écoulement visqueux  $\vec{v}_{\parallel} = \vec{v}_p$ .

Transition : Ce modèle peut-il décrire de vrais écoulements ?

### 4.2.4 Conséquences

On peut montrer des illustrations présentes dans l'hydrodynamique Physique.

On peut montrer la vidéo [https://www.youtube.com/watch?v=2Z6UJbwxBZI&ab\\_channel=ryanhaart](https://www.youtube.com/watch?v=2Z6UJbwxBZI&ab_channel=ryanhaart) et commenter.

## 4.3 Le théorème de Bernoulli

### 4.3.1 Énoncé

On se place dans le cas d'une particule fluide soumise à la pesanteur. Écoulement stationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène. On parvient à l'équation de Bernoulli.

### 4.3.2 Application

#### Effet Venturi

Notamment utilisé pour la voile par les skippers. On peut montrer une expérience qualitative pour introduire le tube de Pitot ensuite.

#### Mise en pratique avec le tube de Pitot.

On décrit le système et les équations. On décrit bien les lignes de courant appliquées. Conservation du débit.

On réalise l'étalonnage d'un appareil de mesure utilisé sur les avions : le tube de Pitot. Décrire l'appareil et le principe. Bien savoir expliquer la mesure de la vitesse par l'anémomètre à fil chaud. Expliquer le principe. Faire quelques mesures devant le jury en montrant la variation du niveau de liquide dans le tuyau et le relier à la vitesse sur regressi. Concernant les incertitudes. On prendra les incertitudes constructeur pour les valeurs de vitesses données par l'anémomètre et pour le relevé de la pression sur la lecture de la différence de niveau à la règle et sur l'inclinaison du niveau.

## 4.4 Limite du modèle : écoulement réel

Notion de couche limite. En pratique il existe une couche limite dans laquelle la viscosité a un effet :

$$\delta = \frac{L}{Re} \quad (4.3)$$

Lorsque  $Re$  est grand  $\delta$  devient petit mais non nul. On peut parler des ailes d'avion, on préfère éviter le décollement des couches limites, turbulences ...

## 4.5 Conclusion

Conclure sur le modèle présenté et les applications qui en découlent puis énoncé les limites. Modèle efficace pour traiter des écoulements loins des parois ou d'obstacles. En revanche l'analyse des fluides au voisinage d'un obstacle doit être traitée avec Navier Stokes ou du moins en s'intéressant aux comportements au voisinage des parois.

# Chapitre 5

## Leçon 5 : Phénomènes interfaciaux dans les fluides

### Niveau :

- CPGE

### Pré-requis :

- Description des fluides en mouvement
- Actions de contact
- Interactions moléculaires
- Mécanique
- Thermodynamique

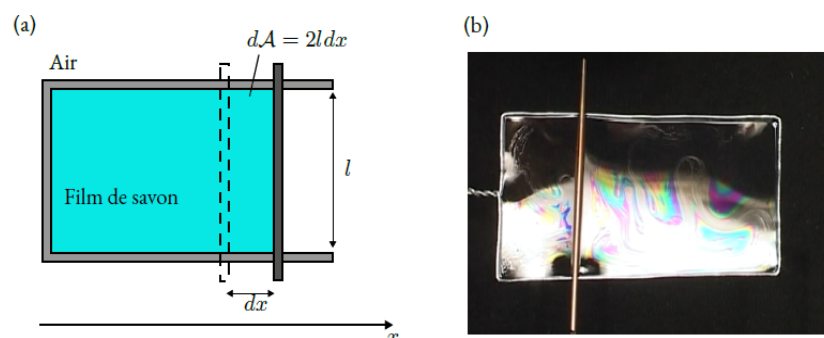
### Bibliographie :

- Hydrodynamique Physique
- Gouttes, bulles, perles et ondes
- Cours de Marc Rabaud

## 5.1 Introduction

Un liquide coule et pourtant il peut adopter des formes géométriques remarquables très stables naturellement. Goutte d'eau de la rosée du matin, lentille d'huile sur la surface de l'eau, les formes ondulées des vagues, les formes géométriques des bulles de savons.

La surface d'un liquide semble se comporter comme une membrane tendue, dont la tension est caractérisée par une force qui s'oppose à ses déformations : c'est la tension superficielle. Dans cette leçon nous nous intéresserons à son origine et à ses conséquences.



**Fig. 5.1** – (a) - Schéma du dispositif expérimental. (b) - Expérience de démonstration réalisée par Jean- Marie Blondeau à l'Université de Lille <https://youtu.be/DZOB5GVAXJg>.



## 5.2 Tension superficielle

### Manipulation :

On fabrique un film de savon dans un cadre métallique sur lequel on pose une tige métallique au milieu. Le film savonneux doit mouiller la tige métallique. On perce le film de savon d'un côté, la tige se met à rouler dans la direction où le film de savon existe encore. Le film de savon exerce une force de tension sur la tige métallique.

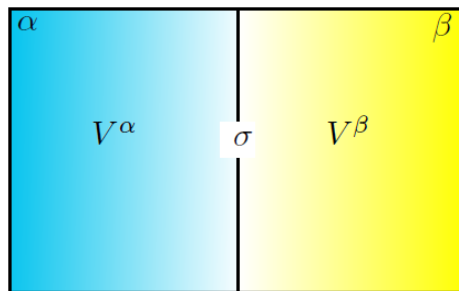
### 5.2.1 Approche microscopique

Un liquide est composé de molécules qui sont proches les unes des autres : c'est ce que nous appelons un état condensé. Ces molécules tendent à s'attirer entre elles, grâce aux interactions électrostatiques de Van der Waals et grâce aux liaisons hydrogènes. Une molécule est attirée par ses voisines avec la même intensité dans toutes les directions de l'espace, mais si cette molécule est à la surface du liquide, elle perd la moitié de ses interactions comme l'illustre le schéma I.2. Dans ce cas, les molécules sont dans un état énergétique défavorable.

### 5.2.2 Approche macroscopique

#### Thermodynamique

L'interface entre deux fluides (air et eau par exemple) est un milieu continu à travers lequel on passe d'une phase condensée, l'eau à une phase gazeuse, l'air. Pour simplifier, on suppose que l'on peut réduire cette zone à une ligne infiniment fine séparant les deux phases  $\alpha$  et  $\beta$ .



**Fig. 5.2** – Définition du système thermodynamique

Cette ligne définit l'interface  $\sigma$  entre les deux milieux tel que

$$V = V^\alpha + V^\beta \text{ avec } V_\sigma = 0. \quad (5.1)$$

Dans ce contexte, on peut exprimer l'énergie du système, à partir de l'énergie libre  $F$ . En général l'énergie libre s'écrit :

$$dF = -SdT - PdV + \sum_i \mu_i dn_i + dW \quad (5.2)$$

$SdT$  tient compte de la variation de la température du système,  $PdV$  de l'expansion du système, les  $\mu_i dn_i$  de la composition chimique et  $dW$  est le travail sans l'expansion du volume, il correspond à la variation du travail à fournir lorsque la surface change de  $dA$ .

$$dW = \gamma dA \quad (5.3)$$

Si on écrit l'énergie totale du système :

$$dF_{\text{tot}} = dF^\alpha + dF^\beta + dF^\sigma \quad (5.4)$$

il vient :

$$dF_{\text{tot}} = -SdT - P^\alpha dV - (P^\beta - P^\alpha)dV^\beta + \sum_i \left( \mu_i^\alpha dn_i^\alpha + \mu_i^\beta dn_i^\beta + \mu_i^\sigma dn_i^\sigma \right) + \gamma dA \quad (5.5)$$

### Définition thermodynamique de la tension de surface

À volume constant, température constante et nombre de constituants constants, on obtient :

$$\left. \frac{\partial F_{\text{tot}}}{\partial A} \right|_{V, V^\beta, T, n_i} = \gamma. \quad (5.6)$$

L'existence de la surface coûte de l'énergie au système. Cette énergie est proportionnelle à la surface séparant les deux fluides. Le facteur de proportionnalité est noté  $\gamma$ , c'est la tension de surface. Il s'agit d'une énergie par unité de surface. Les fluides cherchent à minimiser l'énergie que coûte la présence de cette interface. Hors pour un volume donnée la forme qui minimise la surface c'est la sphère. C'est pourquoi les gouttes à petite échelle préfèrent adopter une forme parfaitement sphérique.

### Force de tension superficielle

On peut aussi voir la tension superficielle comme une force par unité de longueur. Dans la première manipulation, pour accroître la surface du film de savon d'une quantité  $dS = Ldl$  il faut fournir une énergie :

$$dW = Fdl = 2\gamma Ldl = 2\gamma dS \quad (5.7)$$

$\gamma$  est une force par unité de longueur dirigée suivant la normale à l'interface et dirigée vers le liquide.

#### Manipulation :

Boucle de fil attachée en deux endroits à un cadre. On forme un film de savon dans le cadre, le film prend une forme quelconque. Lorsqu'on perce le film de savon au centre du fil, le fil se tend tirer par la force de tension exercée par la film de savon sur la corde.

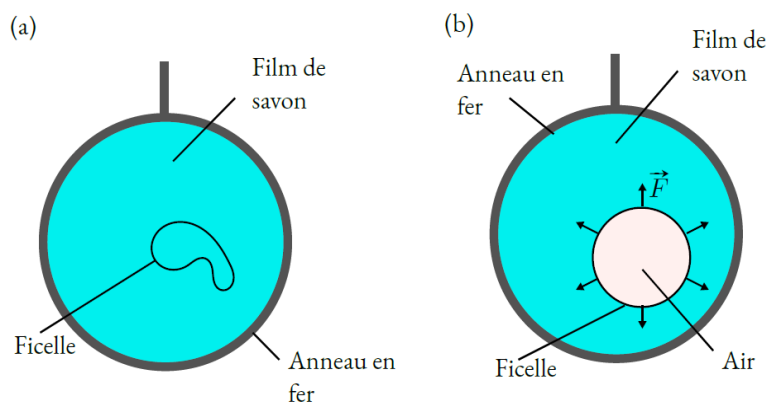


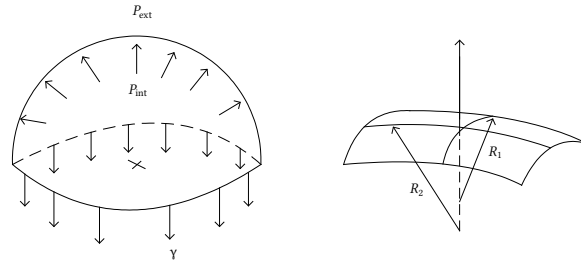
Fig. 5.3 – Fil tendu par la tension superficielle

## 5.3 Lois d'équilibre des interfaces

### 5.3.1 Loi de Laplace

Lorsque l'on observe une mousse ou une émulsion, on peut voir que les plus petites bulles disparaissent au profit des plus grosses. C'est la tension de surface qui est responsable de la suppression dans les petites bulles par rapport aux grandes gouttes.

Si une surface est courbée, les contraintes de traction existant sur la surface ont une composante non nulle dans la direction normale à la surface et orientée vers le centre de courbure, c'est à dire du côté concave de la surface. À l'équilibre, cette force normale est compensée par une pression plus forte du côté intérieur que du côté extérieur. Prenons l'exemple d'une goutte sphérique que nous allons couper en deux par la pensée. La force dirigée vers le haut due à la surpression à l'intérieur de la goutte,  $\Delta P \pi R^2$ , doit être égale à la somme des forces de tension de surface sur l'équateur  $\gamma 2\pi R$ .



**Fig. 5.4** – Bulle séparée en deux par la pensée et surface courbe avec deux rayons de courbure

Donc pour une goutte sphérique :

$$\Delta P = P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} = \frac{2\gamma}{R}. \quad (5.8)$$

### Loi de Laplace

Dans le cas général, on montre que la loi de Laplace, formulée pour la première fois en 1806 par Pierre-Simon de Laplace, s'écrit en chaque point d'une surface courbée :

$$P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} = \gamma C. \quad (5.9)$$

Avec  $C$  la courbure de la surface courbée.

Où  $R_1$  et  $R_2$  sont les deux rayons de courbure de la surface en ce point, comptés positivement lorsque leur centre de courbure se trouve du côté. En effet, pour tout point d'une surface on peut définir la normale et donc les plans contenant cette normale. Chacun de ces plans coupe la surface selon une courbe dont on peut déterminer le centre de courbure et le rayon de courbure.

### Conséquences

En conséquence de la loi de Laplace, plus une goutte est petite plus le fluide à l'intérieur est à une pression élevée. Les petites bulles sont donc bien sphériques et peu déformables. Cette surpression dans les petites bulles a de nombreuses conséquences, par exemple pour le vieillissement d'une mousse liquide, l'initiation de la cavitation ou de l'ébullition ou pour la formation de brouillards.

### Démonstration : (démonstration au choix suivant le temps on peut pas tout faire)

La force de tension superficielle en  $M$  vaut par élément de longueur  $dz$  dans la direction transverse :

$$\vec{F}(s) = \gamma dz \vec{t} \quad (5.10)$$

À l'équilibre cette force à le même volume en  $s + ds$  mais pas la même direction :

$$\vec{F}(s + ds) = \vec{F}(s) + \gamma dz d\vec{t} \quad (5.11)$$

Or  $\frac{d\vec{t}}{ds} = -\vec{n}$  et  $ds = R'd\theta$ , où  $R' = OM$  est le rayon de courbure en  $M$ . Donc  $d\vec{F} = -\gamma dz \frac{ds}{R'} \vec{n}$ . S'il existe aussi un rayon de courbure  $R'$  dans le plan perpendiculaire à  $Oxy$  et contenant  $\vec{n}$ , il

existe une deuxième contribution à la force normale  $d\vec{F} = -\gamma dz \frac{ds}{R} \vec{n}$ . À l'équilibre cette force est compensée par une force de surpression  $\Delta P(dz ds) \vec{n}$  ce qui donne finalement l'équation 5.9.

Pour une courbe  $y = f(x)$ , la courbure  $C$  qui caractérise la rotation du vecteur tangent lorsqu'on se déplace sur la courbe est donnée par la relation :

$$C' = \frac{1}{R} = \frac{y'}{(1 + y'')^{3/2}} \quad (5.12)$$

### 5.3.2 Mouillage, loi d'Young Dupré

Dans de nombreuses situations trois phases (solide, liquide et vapeur) sont présentes et leur frontière est une ligne nommée **ligne triple**. C'est le cas par exemple lorsque l'on dépose une goutte sur une surface solide indéformable. Comprendre le mouillage c'est expliquer pourquoi l'eau s'étale sur du verre propre mais pas sur du plastique. Contrôler le mouillage c'est modifier la surface. Il est essentiel de comprendre les mécanismes du mouillage pour un très grand nombre d'applications très techniques comme le traitement des verres (de lunettes par exemple ou pour des optiques d'appareil de photos), fabrication de miroirs pour les télescopes, gonflements des poumons à la naissance, adhésion de parasites, montée de la sève, langue des colibris.

On peut distinguer deux régimes de mouillages différenciés par le paramètre d'étalement :

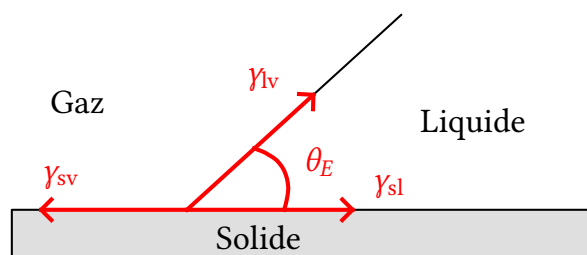
$$\begin{aligned} S &= E_{\text{sec}}^{\text{substrat}} - E_{\text{mouille}}^{\text{substrat}} \\ &= \gamma_{\text{sv}} - (\gamma_{\text{sl}} - \gamma_{\text{lv}}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

#### Loi d'Young Dupré (1805) :

Pour une surface solide indéformable, on projette les forces capillaires suivant la direction horizontale, à l'équilibre il vient :

$$\gamma_{\text{lv}} \cos \theta_E = \gamma_{\text{sv}} - \gamma_{\text{sl}} \quad (5.14)$$

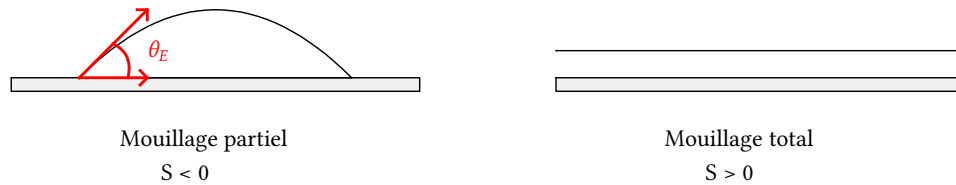
Verticalement les forces capillaires sont compensées par la réaction du substrat, indéformable.



**Fig. 5.5** – Schéma de la ligne triple d'une goutte posée sur un substrat indéformable

**Remarques :** En pratique les mesures de  $\gamma_{\text{sl}}$  et  $\gamma_{\text{sv}}$  sont difficiles. On mesure plutôt  $\gamma_{\text{lv}}$  et  $\theta_E$

- $S > 0$ ,  $\theta_E = 0$ , c'est l'état final où le film est d'épaisseur macroscopique, ce qui résulte d'une compétition entre forces moléculaires et capillaires.
- $S < 0$ , on parle de mouillage partiel, c'est à dire que la goutte ne s'étale pas et forme une calotte sphérique qui s'appuie sur le substrat avec un angle  $\theta_E$  non nul. Si  $\theta_E \geq \frac{\pi}{2}$  le substrat est non mouillant, si  $\theta_E \leq \frac{\pi}{2}$  il est plutôt mouillant.



**Fig. 5.6** – Schéma d’une goutte posée sur un solide indéformable en mouillage partiel et total.



**Fig. 5.7** – Hydrophile et hydrophobe

et  $\theta_E$  puis on en déduit les valeurs des autres paramètres. Les mesures peuvent être réalisées par mesures d’interférences ou à l’aide d’une nappe Laser.

#### Matériaux hydrophiles / hydrophobes :

On s’attend à ce que la goutte glisse dès que  $\theta = \theta_E$  mais en pratique elle reste coincée dû aux effets de viscosité sur le support. Le glissement d’une goutte sur une paroi a un comportement hystérétique. On a un angle d’avancée et de récession. Il faudrait rajouter un schéma mais pas le temps et je ne pense pas en parler pendant la leçon mais à garder en tête en cas de questions.

### 5.3.3 Longueur capillaire et nombre de Bond

On peut caractériser l’importance relative des effets de gravité et ceux de capillarité par le rapport des différences de pression correspondantes, soit :

$$Bo = \frac{\rho g h}{\gamma/R} = \frac{\rho g h R}{\gamma} \quad (5.15)$$

Ce rapport est appelé **nombre de Bond**. Une grande valeur de  $Bo$  correspond à des effets de gravité dominants ceux de tension superficielle. Lorsque  $Bo = 1$  on peut définir une longueur caractéristique, la longueur capillaire :

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (5.16)$$

Dans le cas de l’eau pure avec une tension de surface de 70 mN/m,  $l_c = 2.7$  mm. Pour déterminer l’importance relative de la tension superficielle pour un écoulement donné, on compare  $l_c$  aux dimensions caractéristiques de l’écoulement.

### 5.3.4 Mesure de la tension de surface par la loi de Jurin

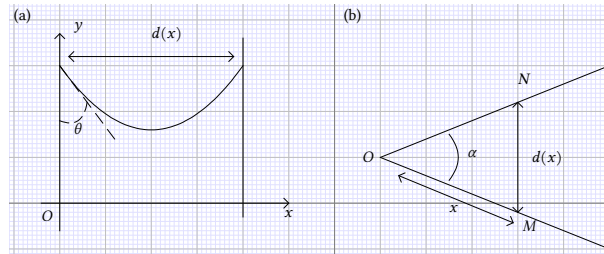
#### Ascension du ménisque dans un coin entre deux plaques :

Quelle est la hauteur d’ascension du liquide au voisinage d’une paroi ?

Hypothèses de travail :

On néglige le film d’épaisseur de quelques Angstrom qui peut précéder la montée capillaire du liquide. On a une paroi sur laquelle le liquide monte suivant la verticale  $y = f(x)$ . À l’extérieur du liquide la pression est celle de l’atmosphère  $P = P_0 = 1$  bar. On note  $\theta$  l’angle entre la verticale et la surface du liquide grimpant. D’après la loi de Laplace que nous avons énoncé précédemment :

$$P_{\text{int}}(x) - P_{\text{ext}} = -\gamma \frac{1}{R(x)} \quad (5.17)$$



**Fig. 5.8** – (a) Vue de côté du dispositif (b) Vue de haut du dispositif

$P_{\text{int}}$  est la pression sous la surface du liquide,  $P_{\text{ext}}$  est la pression juste au-dessus de la surface du liquide,  $\gamma$  est la tension de surface du liquide ( $\gamma = 70 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$  pour de l'eau très pure),  $R$  est le rayon de courbure de la surface :

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{2 \cos(\theta)}{d(x)} = \frac{2 \cos(\theta)}{\alpha x} \approx \frac{2}{\alpha x} \quad (5.18)$$

D'après la pression hydrostatique, il vient que :

$$P_{\text{int}} = P_0 - \rho_{\text{liq}} g y(x). \quad (5.19)$$

Lorsque le système revient à l'équilibre, on doit avoir égalité des pressions ( $P_{\text{int}} - P_0 = 0$ ) dans ce cas on a l'égalité suivante :

#### Loi de Jurin

Il vient directement, la loi de montée capillaire, la loi de Jurin :

$$y(x) = \frac{2\gamma}{\rho g \alpha x}. \quad (5.20)$$

#### Manipulation :

On réalise la montée capillaire dans un coin entre deux lames. On en prend une photo, à l'aide d'ImageJ on repère la position du ménisque que l'on peut ainsi retracer à l'aide de regressi ou de tout autre logiciel. On ajuste la courbe à partir de l'expression théorique de la montée capillaire. Pour un coin :

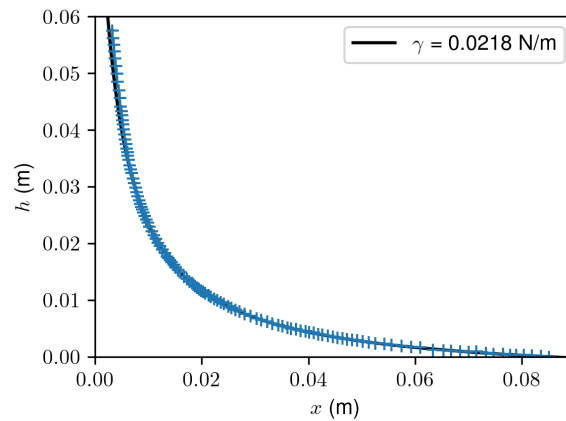
$$y(x) = \frac{2\gamma}{\rho g \alpha x} \quad (5.21)$$

Pour l'éthanol, on trouve une tension de surface de  $\gamma = 21.8 \text{ mN/m}$  à  $17^\circ\text{C}$ , la valeur attendue est de  $22.6 \text{ mN/m}$  d'après le Handbook. L'erreur peut s'expliquer par plusieurs raisons, le mouillage du liquide avec les plaques en verre n'est pas parfait. Mesure de l'angle  $\alpha = 1.53 \times 10^{-2} \text{ rad}$  pourrait être amélioré en prenant un objet pointu comme pour les mesures des diamètres des anneaux. L'incertitude peut être estimée à partir de la largeur du ménisque observé à partir de la photo.

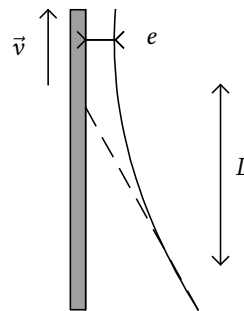
## 5.4 Phénomènes interfaciaux en régime dynamique (faire un choix ou en parler dans un élargissement)

### 5.4.1 Ménisque Dynamique (Landau Levitch)

Dans le cas où la plaque sur laquelle le ménisque est formée est mise en mouvement la description du système se complique un peu. On a initialement une plaque immobile immergée  $v = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  à  $t < 0$ . Si  $S > 0$ ,  $\theta = 0$  le liquide mouillant monte jusqu'à une hauteur  $h = \sqrt{2} l_c$ . Puis à  $t > 0$ , on tire la plaque à une vitesse  $v$  constante.



**Fig. 5.9** – Profil du ménisque dans le coin.



**Fig. 5.10** – Schéma du ménisque dynamique (Landau Levitch)

Le haut du ménisque statique est emporté par la plaque (ménisque dynamique),  $L$  est la distance de raccord entre le ménisque statique et dynamique. Au voisinage de la plaque, le liquide se déplace à la vitesse du solide (c'est la viscosité qui entre en jeu). Tandis l'interface liquide/vapeur est déformée par l'entraînement ce à quoi s'oppose la tension superficielle  $\gamma$ . On peut ajouter l'effet de la gravité qui s'oppose au mouvement en tirant le liquide vers le bas.

À des échelles où la gravité peut être considérée négligeable, deux forces s'opposent, les forces visqueuses et de tension de surface. On peut comparer ces deux grandeurs à travers le nombre capillaire  $Ca$ .

#### ombre Capillaire

**Nombre capillaire :**

$$Ca = \frac{\eta v}{\gamma} \quad (5.22)$$

### 5.4.2 Instabilité de Rayleigh Taylor (démonstration trop longue pas le temps)

Un exemple de compétition entre les effets de la tension superficielle et ceux de la gravité est l'instabilité de Rayleigh Taylor. La tension de surface tend à minimiser la surface de l'interface entre deux fluides. Dans le cas où l'on a deux liquides, l'un sur l'autre, le plus lourd étant au dessus du plus léger. Une telle situation est très instable. Toute déformation de l'interface crée un déséquilibre de pression qui tend à l'amplifier.

On désigne deux points  $M$  et  $M'$  infiniment voisins situés de part et d'autre de l'interface dans chacun des deux fluides. Si  $R(x)$  désigne le rayon de courbure de l'interface au niveau de

ces deux points, on peut écrire d'après la loi de Laplace :

$$p_{M'} - p_M = \frac{\gamma}{R(x)}. \quad (5.23)$$

Le principe fondamental de l'hydrostatique appliqué à l'intérieur de chacun des deux fluides permet d'écrire :

$$p_{M'} = p_{M_0} + \rho' g \epsilon \quad (5.24)$$

et

$$p_M = p_{M_0} + \rho g \epsilon \quad (5.25)$$

Au point  $M_0$  le rayon de courbure de l'interface est nul et la pression a la même valeur de part et d'autre de l'interface. De cette façon on peut éliminer les pressions  $p_{M'}$ ,  $p_M$  et  $p_{M_0}$  entre les trois équations, il vient donc :

$$\Delta \rho g \epsilon(x) = \gamma \frac{1}{R(x)} \quad (5.26)$$

Hors

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{\epsilon''}{(1 + \epsilon'^2)^{3/2}} \quad (5.27)$$

On a fait l'hypothèse que l'interface est peu déformée de sorte que  $\epsilon \approx 0$ , par conséquent il vient :

$$\Delta \rho g \epsilon(x) = \gamma \frac{d^2 \epsilon}{dx^2}. \quad (5.28)$$

Cette équation a pour solution générale :

$$\epsilon(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad (5.29)$$

avec :

$$k = \sqrt{\frac{\Delta \rho g}{\gamma}} \quad (5.30)$$

On suppose que l'interface est fixe aux parois latérales, c'est à dire :  $\epsilon(x=0) = \epsilon(x=L) = 0$ . Par conséquent :

$$\epsilon(x,t) = B \sin(kx) \quad (5.31)$$

avec  $k = \frac{2n\pi}{L}$  où  $n$  est un entier. Le seuil est obtenu pour la plus petite valeur de  $k$  satisfaisant cette condition ( $n = 1$ ) avec  $\frac{2\pi}{L} = \sqrt{\frac{\Delta \rho g}{\gamma}}$  ou encore :

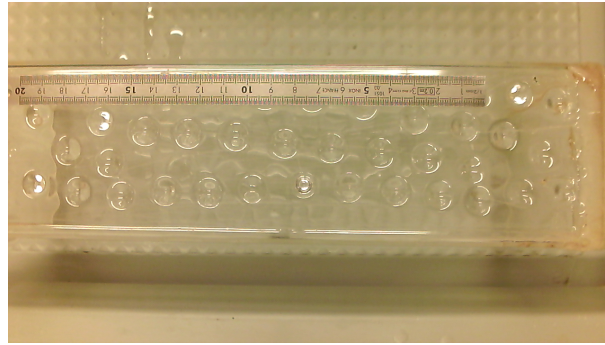
$$\frac{\Delta \rho g}{\gamma} L^2 = 4\pi^2. \quad (5.32)$$

Un calcul d'ordre de grandeur avec une interface eau-air donne une valeur seuil :

$$L_c = \sqrt{\frac{4\pi^2 \gamma}{\Delta \rho g}} \approx 1.7 \cdot 10^{-2} m. \quad (5.33)$$

En général on se retrouve dans un cas où l'interface est instable ( $L \gg L_c$ ). Dans le cas de l'huile où  $\gamma = 32 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$  :  $\lambda \approx 1.2 \text{ cm}$ .





**Fig. 5.11** – Instabilité de Rayleigh Taylor

### 5.4.3 Effet Marangoni

Les gradients de tension superficielle dus à des variations de température ou de concentration de solutés peuvent créer des contraintes en surface. Les écoulements induits par de telles contraintes constituent **l'effet Marangoni** : on parle aussi d'effets thermocapillaires lorsqu'ils sont causés par des gradients de température.

#### Nombre de Marangoni

##### Nombre de Marangoni solutocapillaire :

$$Ma = \frac{\partial \gamma}{\partial c} \frac{Q}{2\pi \nu \eta D} \quad (5.34)$$

$c$  la concentration,  $Q$  est le débit molaire de tensioactifs,  $\nu$  la viscosité cinématique,  $\eta$  la viscosité dynamique,  $D$  le coefficient de diffusion des tensioactifs.

##### Nombre de Marangoni thermocapillaire :

$$Ma = \frac{\partial \gamma}{\partial T} \frac{Q}{2\pi \nu \eta \kappa} \quad (5.35)$$

$T$  la température,  $Q$  est le débit de chaleur,  $\nu$  la viscosité cinématique,  $\eta$  la viscosité dynamique,  $\kappa$  le coefficient de diffusion de la chaleur.

Si une couche d'eau est posée sur une surface et qu'un point de la surface est touché par un morceau de savon, on voit cette partie de la surface s'assécher : la tension de surface est réduite localement et les forces de tension superficielles sont déséquilibrées. On a donc un écoulement vers les parties voisines où la tension de surface reste inchangée.

#### Manipulation : Effet marangoni solutocapillaire

Déposer une goutte de liquide vaisselle à la surface de l'eau sur laquelle on a déposé des particules inertes (non tensioactives comme le poivre même si le poivre est un peu tensioactif). On verra le poivre s'éloigner rapidement de la zone d'injection.

## Conclusion

Conclure sur la définition de la tension de surface comme le rapport d'une énergie par unité de surface. Loi qui se retrouve dans le comportement des fluides aux échelles où la gravité devient négligeable par rapport à la tension de surface. Ouvrir sur des applications des phénomènes mettant en jeu les forces de tension de surface : médicaments (poumons chez les

nouveaux nés, administration de médicaments par effet Marangoni) / déplacement des insectes sur l'eau, problème de pollution dans les rivières /dans un cadre plus industriel stabilité de film liquide / traitements de surface déperlante , mouillante etc

# Chapitre 6

## Leçon 06 : Premier principe de la thermodynamique

---

### Niveau :

- CPGE

### Pré-requis :

- Gaz parfait ;
- travail mécanique ;
- notion de système et d'équilibre thermodynamique ;
- transformations classiques en thermodynamique.

### Bibliographie :

- Dunod PCSI ;
- 

### Sommaire

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>27</b>
<b>6.2</b>	<b>Les transformations dans un système thermodynamique (Dunod)</b>	<b>28</b>
6.2.1	Système thermodynamique	28
6.2.2	Énergie interne	28
6.2.3	Le travail	28
6.2.4	La chaleur	29
<b>6.3</b>	<b>Principe de conservation de l'énergie</b>	<b>29</b>
6.3.1	Premier principe de la thermodynamique	29
6.3.2	L'enthalpie	29
6.3.3	Capacité thermique	29
<b>6.4</b>	<b>Applications expérimentales</b>	<b>30</b>
6.4.1	Détermination d'une capacité thermique massique (Dunod PCSI p756 Chap 26 2021)	30
6.4.2	Mesure de la chaleur latente	30
<b>6.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>30</b>

---

### 6.1 Introduction

La thermodynamique est l'étude des propriétés macroscopique d'un système ( $P, V, T, \dots$ ) sans se préoccuper des processus microscopiques sous-jacents. Elle s'applique donc aux systèmes contenant suffisamment de particules pour que les fluctuations microscopiques puissent être négligées.

## 6.2 Les transformations dans un système thermodynamique (Dunod)

### 6.2.1 Système thermodynamique

On appelle système thermodynamique tout système constitué d'un très grand nombre de particules microscopiques. Choisir un système c'est partager le monde en deux : d'une part le système choisi qui occupe un certain volume  $V$  constitué de  $N$  particules et d'autre part le reste de l'univers que l'on dénomme **extérieur**. Le système peut être fermé (pas d'échange de matière), isolé (pas d'échange de matière et d'énergie), ou ouvert.

L'état du système est défini par des variables d'état. Ce sont des grandeurs macroscopiques tels que la température, la pression et le volume,... On distingue deux types de variables. Les variables **extensives** (dont la valeur est la somme de chaque sous-système comme la masse, elle dépend de la taille du système) et **intensives** (si elle est la même dans chaque sous-système alors c'est la même pour le système total comme la température, ne dépend pas de la taille du système).

### 6.2.2 Énergie interne

On peut distinguer deux types d'énergie lors de la description d'un système :

1. l'énergie interne (microscopique) : C'est la somme des énergies de toutes les particules qui composent le système dans le référentiel du centre de masse du système. **énergie cinétique** (translation, rotation, vibrations); **énergie potentielle d'interactions entre particules** (liaison covalents, VdW, liaisons ioniques, liaisons métalliques...); **énergie de masse** ( $mc^2$ ); **énergie potentielle des particules soumises à une force extérieure**.
2. énergie macroscopique :  
C'est l'énergie cinétique de l'ensemble du système lorsque son centre de masse n'est pas immobile.

En général, en thermodynamique, on se place dans le référentiel du centre de masse, de sorte que l'on peut éliminer des équations l'énergie cinétique macroscopique. Par contre, si le système est soumis à des forces extérieures, on ne peut pas a priori les éliminer, et elles se manifestent via l'énergie potentielle des particules individuelles. Cependant si le système est suffisamment petit par rapport à la distance sur laquelle la force considérée varie, alors toutes les particules subissent approximativement la même force et le même potentiel :

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{cin}}^M + E_{\text{pot}}^M + U \quad (6.1)$$

### 6.2.3 Le travail

C'est une quantité d'énergie échangée entre le milieu considéré et le milieu extérieur. On note le travail  $W$ . Si  $W > 0$ , le système reçoit de l'énergie. Si  $W < 0$  il cède de l'énergie. Le travail mécanique s'écrit :  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

**exemple** : les travail des forces de pression. Faire un schéma, d'un volume de gaz séparé du milieu extérieur par un piston.

$$\delta W = -P_{\text{ext}} d\vec{S} \cdot \vec{dr} = -PdV. \quad (6.2)$$

On peut commenter différents cas, pression constante, volume constant...

### 6.2.4 La chaleur

Un système thermo peut recevoir de l'énergie sans l'intervention d'une action mécanique mesurable à l'échelle macroscopique. Ce transfert d'énergie complémentaire du travail mécanique s'appelle transfert thermique. La chaleur se transfère spontanément du corps chaud au corps froid. La conversion de chaleur en travail mécanique a permis la rev industrielle par la machine à vapeur.

## 6.3 Principe de conservation de l'énergie

### 6.3.1 Premier principe de la thermodynamique

La variation de l'énergie interne  $U$  d'un système est égale à l'énergie qu'il a reçu sous la forme de travail et de chaleur.

$$dU + dE_{\text{cin}} + dE_{\text{pot}} = \delta W + \delta Q \quad (6.3)$$

Dans le référentiel du centre de masse :

$$dU = \delta W + \delta Q \leftrightarrow \Delta U = W + Q. \quad (6.4)$$

### 6.3.2 L'enthalpie

On peut définir une autre fonction d'état du système thermodynamique : l'enthalpie.

$$H = U + PV \quad (6.5)$$

### 6.3.3 Capacité thermique

On appelle capacité thermique à volume constant d'un système fermé  $\sigma$  la grandeur  $C_v$  telle que la variation  $U$  de l'énergie interne du système lorsque la température varie de  $dT$ , le volume restant constant, est :

$$dU = C_v dT. \quad (6.6)$$

$C_v$  se mesure en  $J \cdot K^{-1}$ . Il s'agit d'une grandeur extensive et additive. Pour un échantillon de corps pur, dont la taille est donnée par la quantité de matière  $n$  se calcule par :

$$C_v = nC_{vm} \quad (6.7)$$

où  $C_{vm}$  est la capacité thermique molaire à volume constant.

**cas du gaz parfait :**  $U = \frac{3}{2}nRT$ , donc  $C_v = \frac{3}{2}nR$ .

Dans le cas d'un système fermé à pression constante :

$$dH = C_p dT \quad (6.8)$$

Dans le cas d'un gaz parfait :

$$C_p - C_v = nR, \quad C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}, \quad C_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \quad (6.9)$$

## 6.4 Applications expérimentales

### 6.4.1 Détermination d'une capacité thermique massique (Dunod PCSI p756 Chap 26 2021)

On verse dans le calorimètre ( $m_c$ ), une masse  $m_e f$  d'eau très froide et on mesure la température qui se stabilise après quelques instants. On trouve une température  $\theta_0$ . On introduit dans le calorimètre l'échantillon de fer, que l'on a pesé ( $m_f$ ) et qui est initialement à la température d'une étuve thermostatée à une température  $\theta_c$ . On attend que la température se stabilise et on mesure la température finale  $\theta_f$ .

$$\Delta H = 0 = \Delta H_{eau} + \Delta H_{cal} + \Delta H_{fer} \quad (6.10)$$

$$m_{eau}c_{eau}\Delta\theta + m_{cal}c_{eau}\Delta\theta + m_{fer}c_{fer}\Delta\theta \quad (6.11)$$

On en tire la mesure de  $c_{fer}$  que l'on peut comparer aux tables.  $c_{fer} = 452 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$

### 6.4.2 Mesure de la chaleur latente

Définition de l'enthalpie de changement d'état, justifier pourquoi c'est une enthalpie. Mesure d'une enthalpie de vaporisation du diazote avec le poly de Philippe.

## 6.5 Conclusion

# Chapitre 7

## Leçon 07 : Transition de phase

---

### Niveau :

- CPGE

### Pré-requis :

- notion de système et d'équilibre thermodynamique ;
- transformations classiques en thermodynamique ;
- premier et second principe.

### Bibliographie :

- Thermodynamique de Diu ;
- Thermodynamique de Pérez ;
- thermodynamique BFR.
- Tout en un ancien programme N. Choimet. Thermodynamique. PC-PSI. Bréal, 2001
- J.-M. Donnini and L. Quaranta. Dictionnaire de physique expérimentale. Tome 2 : thermodynamique et applications. Pierron, 1997

---

### Sommaire

<b>7.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>31</b>
<b>7.2</b>	<b>Une transition du premier ordre solide/liquide</b>	<b>32</b>
7.2.1	Manipulation : Mono-variance de l'équilibre liquide solide de l'étain	32
7.2.2	Diagramme des variables d'états	32
7.2.3	Description thermodynamique de l'équilibre	32
7.2.4	Retard à la transition de phase : métastabilité	33
<b>7.3</b>	<b>Transition ferro para, transition du second ordre (Diu</b>	<b>33</b>
7.3.1	Description expérimentale	33
7.3.2	Potentiel thermodynamique	33
7.3.3	Transition du second ordre	33
<b>7.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>33</b>

## 7.1 Introduction

Un corps peut suivant les conditions qui lui sont imposées se présenter sous différentes phases (états) tel que solide, liquide ou vapeur. Dans les chapitres précédents, nous avons abordé les corps purs dans une phase unique. Dans cette leçon, je vous propose d'analyser le passage d'une phase à une autre appelée changement d'état et d'examiner les conditions de coexistence entre plusieurs phases.

## 7.2 Une transition du premier ordre solide/liquide

### 7.2.1 Manipulation : Mono-variance de l'équilibre liquide solide de l'étain

On réalise la manipulation dans le poly de philippe, on mesure la température de fusion de l'étain. On observe le palier de température caractéristique d'une transition de phase du premier ordre.

### 7.2.2 Diagramme des variables d'états

#### Calcul de la variance (Diu p373)

Les variables intensives jouent un rôle essentiel elles caractérisent les propriétés intrinsèques du mélange indépendamment de la masse dans les différentes phases. En thermodynamique on définit la variance ou le nombre de degrés de liberté tel que :

$$v = \text{nb de facteurs d'équilibre} - \text{nb de relations} \quad (7.1)$$

Les facteurs d'équilibres sont : la température, la pression ainsi que le nombre  $n$  d'espèces chimiques dans les  $\phi$  phases. On a donc

$$\text{nb de facteurs d'équilibre} = 2 + n\phi$$

Le nombre de relations est donnée par :

- pour chaque phase  $\sum_i x_i^\phi = 1$ , on a donc  $\phi$  relations
- à l'équilibre  $\mu_i^\alpha = \mu_i^\beta = \dots = \mu_i^\phi$  ce qui donne  $\phi - 1$  relations, soit pour  $n$  espèces  $n(\phi - 1)$
- Si relation chimique :  $\sum_i \pm \nu_i \mu_i = 0$

$$v = 2 + n\phi - (\phi + n(\phi - 1) + r) = 2 + n - \phi - r \quad (7.2)$$

Pour un corps pur, dans le cas de la transition liquide solide. Au cours de la transition où les phases liquide et solide coexistent. On suppose l'équilibre entre les deux phases établies. Dans ce cas  $r = 0$ ,  $\phi = 2$ ,  $n = 1$ . On a donc  $v = 1$ . À  $P$  fixé, la température ne peut pas varier.

#### Interprétation sur un diagramme (P,T)

On montre le diagramme (P,T) dans le Diu, on lit sur le diagramme la transition liquide solide. On a l'impression que lorsque  $T$  augmente que l'on passe d'un coup de solide à liquide (On peut illustrer avec l'expérience du Bouillant de Franklin). Mais ce n'est pas le cas la transition est continue. On a une évolution du volume qui permet le passage continue d'une phase à l'autre. Montrer le diagramme de Clapeyron (P,V) et les isothermes.

### 7.2.3 Description thermodynamique de l'équilibre

#### Transition ponctuelle dans le diagramme

Afin de décrire la transformation, le potentiel thermodynamique le plus adapté est l'enthalpie libre car :

$$dG = VdP - SdT + \mu dN \quad (7.3)$$

Sur slide on donne le calcul pour arriver à l'expression de l'enthalpie libre que l'on cherche à minimiser. On décrit le cas où  $G_1 = G_2$ . Dans ce cas le potentiel thermo est constant quelque soit la composition du système thermodynamique. Les deux phases coexistent en proportion arbitraires. Un faible apport d'énergie permet de basculer de l'un à l'autre. Il s'agit d'une transformation du premier ordre. Continuité de  $G$ , dérivées premières discontinue.



## Relation de Clapeyron

Pendant le changement d'état il y a variation de  $S$  et  $V$ . La chaleur latente de transition est liée à la discontinuité de l'entropie et du volume. C'est la quantité de chaleur que le système doit recevoir pour passer de la basse entropie à la haute entropie en suivant le palier de transition.

$$S_B - S_A = \frac{\partial p_{AB}}{\partial T_{AB}} (V_B - V_A). \quad (7.4)$$

La courbe  $p = p(T)$  est l'équation de la courbe du diagramme (P,T). Cette équation donne le coût énergétique de la transition de phase.

### 7.2.4 Retard à la transition de phase : métastabilité

Phénomène de nucléation (cf Diu p 617)

## 7.3 Transition ferro para, transition du second ordre (Diu)

### 7.3.1 Description expérimentale

Voir poly de philippe

### 7.3.2 Potentiel thermodynamique

On donne l'expression du potentiel thermodynamique en fonction de l'aimantation. On trace  $G$  en fonction de  $M$  pour les différentes températures. Donner l'expression de  $M$  en fonction de la température.

### 7.3.3 Transition du second ordre

$G$  continue, dérivées premières continue. Dérivées secondes discontinues. Donner l'expression de la capacité calorifique et de son évolution. On peut également donner l'évolution de  $\chi$

## 7.4 Conclusion

On a vu deux types de transitions entre phases une du premier ordre dans le cas de la transition solide liquide de l'étain. Retard de la transition dans le cas de l'acide acétique. Et enfin un autre type de transition ferro-para. Il existe d'autres types de transition tel que la transition vers superfluide de l'hélium par exemple qui confère des propriétés très particulière à l'hélium.

# Chapitre 8

## Leçon 08 : Phénomènes de transports

---

### Niveau :

- CPGE

### Pré-requis :

- Gaz parfait ;
- travail mécanique ;
- notion de système et d'équilibre thermodynamique ;
- transformations classiques en thermodynamique ;
- premier et second principe.

### Bibliographie :

- Thermodynamique de Diu (chap 9) ;
  - BUP [https://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/une\\_fiche.php?ID\\_fiche=23265](https://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/une_fiche.php?ID_fiche=23265)
  - thermodynamique BFR.
  - Dunod PC
- 

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>34</b>
<b>8.2</b>	<b>Systèmes hors équilibres</b>	<b>35</b>
8.2.1	évolution des grandeurs conservées (BUP)	35
8.2.2	Nécessité de l'équilibre local	35
<b>8.3</b>	<b>Diffusion de particules</b>	<b>36</b>
8.3.1	Loi de Fick	36
8.3.2	Équation de diffusion	36
8.3.3	Mise en évidence expérimentale : Diffusion du glycerol dans l'eau	36
<b>8.4</b>	<b>Transport de l'énergie sous forme de transfert thermique (Diu p 487)</b>	<b>36</b>
8.4.1	Modes de transports possibles	36
8.4.2	Loi de Fourier	36
8.4.3	Instabilité de Rayleigh Benard	37
8.4.4	Rayonnement Diu 487	37
<b>8.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>37</b>

---

### 8.1 Introduction

Toute évolution irréversible d'un système s'accompagne de l'échange avec l'extérieur d'une ou plusieurs variables d'état ou bien de la redistribution de ces variables entre certains sous-systèmes. Les grandeurs sont conservées car elles sont transportées d'un endroit à un autre sans être créées ou perdues en chemin. C'est pourquoi on parle de phénomènes de transport.

## 8.2 Systèmes hors équilibres

### 8.2.1 évolution des grandeurs conservées (BUP)

On considère un domaine de l'espace de volume  $V$ , délimité par une surface fermée  $S$ . Soit une grandeur extensive  $A$  : pour nous  $A$  pourra désigner  $n$  le nombre de particules, l'énergie  $E$  (ou l'enthalpie  $H$ ), la charge  $q$ , ou la quantité de mouvement.

$A(t)$  est la quantité  $A$  contenue dans le volume  $V$  à l'instant  $t$ . Soit  $\Phi_A(t)$  le flux sortant de  $A$  à travers la surface  $S$ . On supposera qu'il n'y a pas de sources internes de  $A$  au sein du volume considéré. L'équation qui traduit la conservation de  $A$  s'écrit :

$$\frac{dA}{dt} + \Phi_A = 0 \quad (8.1)$$

Cette équation peut bien sûr être reformulée sous forme locale :

$$\frac{\partial}{\partial t} (a(r,t)) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_A(r,t)) = 0 \quad (8.2)$$

où  $a$  est la densité volumique de  $A$ , définie par  $A(t) = \iiint_V a dV$  et  $\vec{j}_A(r,t)$  est le vecteur densité de courant de  $A$ , défini par  $\Phi = \oint_S \vec{j}_A(r,t) \cdot \vec{n} dS$ .

Pour  $A(t) = n(t)$ , la conservation du nombre de particules s'écrit avec les notations usuelles :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} + \Phi_N(t) = 0 \\ \frac{dn}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_N = 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

On peut faire la démonstration en écrivant le bilan de particules à une dimension et généraliser (Dunod)

### 8.2.2 Nécessité de l'équilibre local

La première idée fondamentale est qu'une grandeur extensive  $A$  conservée doit pouvoir être transportée d'un point à un autre : nous avons mis en évidence l'existence d'un vecteur densité de courant traduisant cette idée de transport, et indispensable à la formulation de l'équation de conservation de  $A$ .

Deux questions se posent naturellement : Quelle est la cause du transport ? Comment exprimer le vecteur densité de courant ? On a besoin d'émettre des hypothèses.

1. **hypothèse d'équilibre local** : en tout point du système macroscopique, un sous-système de taille mésoscopique est supposé constamment et instantanément à l'équilibre thermodynamique, alors le système macroscopique n'est pas en équilibre. Cela suppose que le temps typique  $\tau_{ev}$  d'évolution du système macroscopique et le temps typique  $\tau_{eq}$  de mise à l'équilibre d'un sous-système mésoscopique vérifient la condition :

$$\tau_{ev} \gg \tau_{eq} \quad (8.4)$$

Cette hypothèse nous assure notamment que toutes les grandeurs intensives sont bien définies en tout point et à tout instant  $t$  (notamment la température, le potentiel chimique, la densité particulaire,...).

2. Le système est suffisamment proche de l'équilibre pour que les lois de transport donnant les différents vecteurs densité de courant soient linéaires par rapport à leur cause.

On considère des milieux supposés homogènes et isotropes à l'équilibre. Comme on est proche de l'équilibre, les courants seront faibles et ne briseront pas l'invariance par translation et par rotation de ces milieux : on les considérera toujours comme homogènes et isotropes.

## 8.3 Diffusion de particules

### 8.3.1 Loi de Fick

De manière générale, le transport d'une grandeur intensive  $A$  d'un point à un autre est due à la non-uniformité d'une grandeur intensive  $\psi_A(r, t)$  associé à  $A$ . Dans le cadre du transport linéaire de la grandeur  $A$ , le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  est proportionnel au gradient de  $\psi$  qui mesure son inhomogénéité. On formule cette idée sous la forme d'une loi phénoménologique :

$$\vec{j} = -\alpha \vec{\nabla}(\psi) \quad (8.5)$$

Si on considère un milieu présentant deux espèces chimiques différentes, ne réagissant pas entre elles (soluté, solvant, une impureté dans un cristal). le milieu est supposé exempt de convection, et il est maintenu à température et pression constantes. La loi linéaire régissant le transport du soluté dans le solvant ou de l'impureté dans le cristal n'est autre que la loi de Fick :

$$\vec{j}_N = -D \vec{\nabla} n \quad (8.6)$$

Le coefficient de transport est ici la diffusivité  $D$  du soluté dans le solvant ou de l'impureté du cristal.

### 8.3.2 Équation de diffusion

En association la nouvelle loi de transport linéaire et l'équation locale de conservation de  $A$ , on obtient immédiatement l'équation de diffusion de  $A$ , en supposant  $D_A$  uniforme :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = D \Delta a. \quad (8.7)$$

Le coefficient de transport  $D_A$  est en réalité le coefficient de diffusion de  $A$ . Il apparaît comme souvent en physique que des phénomènes différents sont régis par la même équation. Il est donc possible de transposer la solution d'un problème de diffusion thermique à un problème de diffusion de matière. Montrer le tableau de BUP en slide.

### 8.3.3 Mise en évidence expérimentale : Diffusion du glycerol dans l'eau

cf poly de Philippe.

**Transition :** On se propose de prolonger ce raisonnement à l'étude d'une grandeur plus proche du cours de thermodynamique : l'énergie.

## 8.4 Transport de l'énergie sous forme de transfert thermique (Diu p 487)

### 8.4.1 Modes de transports possibles

Rayonnement, convection, conduction. Gradient de température est généralement la cause de la convection naturelle. On peut montrer des images des courants océaniques ou d'une casserole d'eau chauffée.

### 8.4.2 Loi de Fourier

Même principe que pour la loi de Fick, on peut ressortir le tableau en slide.

### 8.4.3 Instabilité de Rayleigh Benard

Instabilité thermo-convective susceptible de se développer dans un milieu fluide soumis à un gradient de température destabilisant. Elle se traduit par la formation de structures convectives appelées cellules de Benard.

programme python ?

### 8.4.4 Rayonnement Diu 487

C'est le chapitre suivant en prepa. On peut parler de transport d'énergie et de flux avec la loi de Stefan Boltzmann. parler de la loi de Wien, flux surfacique.

On peut sortir une camera thermique et expliquer son fonctionnement

## 8.5 Conclusion

Phénomènes de transport = irréversible. Applications : isolation des batiments.

# Chapitre 9

## Leçon 9 : Conversion de puissance électromécanique

---

### Niveau :

- CPGE PSI

### Pré-requis :

- Electromagnetisme
- Mécanique

### Bibliographie :

- Physique expérimentale, Jolidon
  - Cours Naval Conversion électro-magneto-mécanique
  - Dunod PSI
  - Physique Chimie en PSI/PSI\*, chez ellipses par Pascal Olive
- 

### Sommaire

<b>9.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>38</b>
<b>9.2</b>	<b>Contacteur électromagnétique en translation</b>	<b>39</b>
9.2.1	Principe de fonctionnement (Dunod PSI + cours naval)	39
9.2.2	Énergie magnétique emmagasinée	39
9.2.3	Force électromagnétique (PSI Tec & Doc 2014)	40
9.2.4	Généralisation	41
<b>9.3</b>	<b>Machine à courant continu</b>	<b>42</b>
9.3.1	Structure	42
9.3.2	Rôle du collecteur	42
9.3.3	Aproche théorique (Jolidon p 204)	44
9.3.4	Caractéristique de fonctionnement	45
9.3.5	Point de fonctionnement	45
9.3.6	Puissance et rendement (Jolidon)	45
<b>9.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>46</b>

---

### 9.1 Introduction

Le phénomène d'induction électromagnétique a mis en évidence la possibilité de convertir de l'énergie électrique en énergie mécanique et réciproquement. Ce phénomène est souvent illustré par l'exemple du rail de Laplace, où une tige conductrice parcourue par un courant se met en mouvement sous l'action d'un champ magnétique

L'étude d'une machine électromécanique nécessite de connaître l'expression de la force (translation) ou du couple (rotation) s'exerçant sur la partie mobile. Les machines réelles sont

constituées de matériaux ferromagnétique, le calcul direct des actions électromécaniques n'est alors pas envisageable. On choisit une présentation énergétique, plus générale de la conversion électromécanique.

Parler des systèmes mettant en œuvre le couplage entre induction (loi de Faraday) et les forces de Lorentz.

Présenter le contacteur électromagnétique puis Machine synchrone et enfin Moteur à courant continu en suivant le programme qui fait systématiquement l'analogie entre synchrone et MCC pour donner l'expression du couple. C'est ambitieux niveau temps surtout avec la mesure du couple pour le moteur à courant continu...

## 9.2 Contacteur électromagnétique en translation

### 9.2.1 Principe de fonctionnement (Dunod PSI + cours naval)

On considère un noyau ferromagnétique fixe en forme de U, excité par une bobine de  $N$  spires parcourue par un courant d'intensité  $i$ . Deux entrefers d'épaisseur  $x$  variable le séparent d'un bloc ferromagnétique mobile en translation selon  $Ox$ , qu'on appelle « contacteur électromagnétique ». On dessine le schéma du système et on procède par étapes :

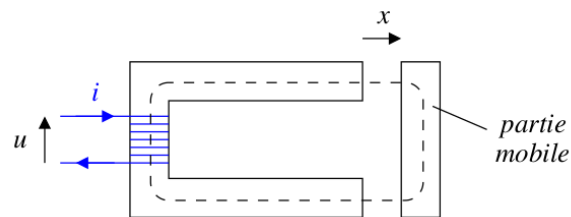


Fig. 9.1 – Contacteur électromagnétique

On considère le matériau ferromagnétique comme linéaire  $\mu_r \ll 1$ . Il canalise les lignes de champ magnétique (on peut montrer une simulation PSI Dunod (2020)). On supposera aussi que la section du noyau est petite de façon à ce que  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  soient uniformes dans une section droite du fer. On note  $l$  la longueur moyenne en l'absence de l'entrefer. Si  $x$  est suffisamment petit devant  $\sqrt{\text{Section}}$ , le tube de champ magnétique est de section constante dans l'entrefer.

### 9.2.2 Énergie magnétique emmagasinée

1. Théorème d'Ampère);

Application du théorème d'Ampère (dans l'ARQS) sur le contour en pointillé :

$$H_{fer} \times l + H_{entrefer} \times 2x = Ni \quad (9.1)$$

2. Conservation du flux du champ magnétique;

$$B_{fer} = B_{entrefer} = B \quad (9.2)$$

3. Expression de  $\vec{B}$  en fonction de l'intensité;

$B_{entrefer} = \mu_0 H_{entrefer}$  et  $B_{fer} = \mu_0 \mu_r H_{fer}$  En combinant les différentes relations, on en déduit :

$$\frac{Bl}{\mu_0 \mu_r} + \frac{B2x}{\mu_0} = Ni \rightarrow B = \frac{\mu_0 Ni}{2x + l/\mu_r} \quad (9.3)$$

4. Induction propre  $\Phi = Li$  à partir du flux dans le bobinage  $\Phi = NBS$ .

On en déduit :  $\Phi = \frac{\mu_0 N^2 S}{2x + l/\mu_r} i$  puis l'expression de  $L$ .

$$L(x) = \frac{\mu_0 N^2 S}{2x + l/\mu_r} \quad (9.4)$$

On remarque que dans un circuit magnétique linéaire déformable, l'inductance dépend de la position de la partie mobile.

5. Énergie magnétique emmagasinée.

$$E_m = \frac{1}{2} L(x) i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{2x + l/\mu_r} i^2. \quad (9.5)$$

Remarque : On peut retrouver ce résultat en utilisant l'expression de l'énergie magnétique volumique :  $u_m = B^2 / (2\mu_0\mu_r)$  dans un matériau LHI.

### 9.2.3 Force électromagnétique (PSI Tec & Doc 2014)

On considère l'ensemble constitué par la bobine, les ferromagnétiques et l'entrefer. On suppose qu'un opérateur extérieur déplace le barreau en exerçant la force  $\vec{F}_{op} = F_{op} \vec{u}_x$ , la bobine étant traversée par un courant  $i$  et soumise à la tension  $u$ .

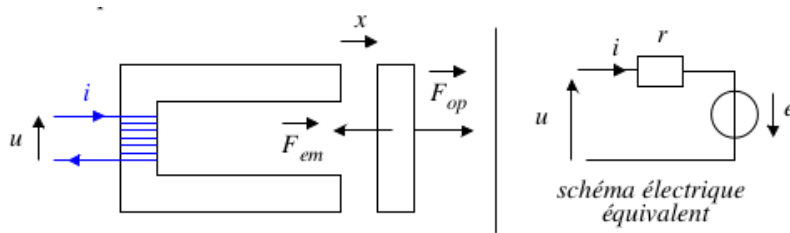


Fig. 9.2 – Schéma équivalent

Équation électrique :

$$u = ri - e = ri + \frac{d\Phi}{dt} \quad (9.6)$$

Premier principe :

Pendant  $dt$ , le système reçoit une énergie électrique ( $uidt$ ) et une énergie mécanique  $F_{op}dx$  sous forme de travail de la force extérieure qui s'applique sur le bloc en translation. Une partie de l'énergie est dissipée par effet Joule ( $Ri^2dt$ ).

$$d(E_m + E_c) = \delta W + \delta Q = (uidt + F_{op}dx) - ri^2dt \quad (9.7)$$

Avec l'équation (9.6) on obtient :

$$d(E_m + E_c) = id\Phi + F_{op}dx \quad (9.8)$$



**Théorème de l'énergie cinétique (appliqué à la partie mobile)**

$$dE_c = F_{op}dx + F_m dx \quad (9.9)$$

On compare les équations (9.8) et (9.9), ce qui donne :

$$dE_m = id\Phi - F_m dx \rightarrow F_m dx = id(Li) - d\left(\frac{1}{2}Li^2\right) \quad (9.10)$$

Si on développe on trouve :  $F_m = \frac{1}{2}i^2 \frac{dL}{dx}$  soit :

$$F_m = -\frac{\mu_0 N^2 S i^2}{(l/\mu_r + 2x)^2} \quad (9.11)$$

Si on prend pour valeur  $\mu_r = 2000$ ,  $N = 500$ ,  $l = 50$  cm,  $S = 16$  cm<sup>2</sup> avec un courant sinusoïdal à 50 Hz et d'amplitude 50 mA. On trouve  $F = 10$  N. On peut lever une masse de 1 kg avec ce dispositif.

**Il faut noter que :**

- $F_m \propto i^2$ , c'est une force de rappel quelque soit le signe de  $i$  et est nulle en moyenne dans le temps pour une excitation sinusoïdale.
- Ce type de dispositif peut servir de contacteur électromagnétique permettant de commander la fermeture et l'ouverture d'un circuit électrique via le déplacement de la partie mobile, qui en l'absence de courant dans la bobine, est ramenée à sa position initiale par l'intermédiaire d'un ressort. (**Discussion et ordre de grandeur** dans le Physique Chimie en PSI/PSI\*, chez ellipses par Pascal Olive)

**9.2.4 Généralisation**

La méthode que l'on a appliqué sera toujours la même (Ampère, conservation du flux, inductance propre, énergie emmagasinée, bilan énergétique global). On peut généraliser l'expression de la Force à partir de l'équation (9.10) tel que :

$$F = \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)_{\Phi} \quad (9.12)$$

Pour un contacteur en rotation autour d'un axe fixe  $Oz$  repéré par un angle  $\theta$ , il suffit de changer les travaux extérieurs  $\vec{F}_{op}$  et électromagnétique  $F_{em}$  en  $\Gamma_{op}d\theta$  et  $\Gamma_{em}d\theta$  où les  $\Gamma$  sont les moments des actions s'exerçant sur le contacteur.

$$\Gamma = \left( \frac{\partial E}{\partial \theta} \right)_{\Phi} \quad (9.13)$$

On peut maintenant traité les différents types de moteur. Au programme de PSI ils traitent les moteurs synchrones puis à courant continu. La manipulation porte sur un moteur à courant continu donc je choisis de commencer par un moteur à courant continu. On garde néanmoins le moteur synchrone sous le coude pour une troisième partie si le temps le permet (j'en doute) ou pour une ouverture.

## 9.3 Machine à courant continu

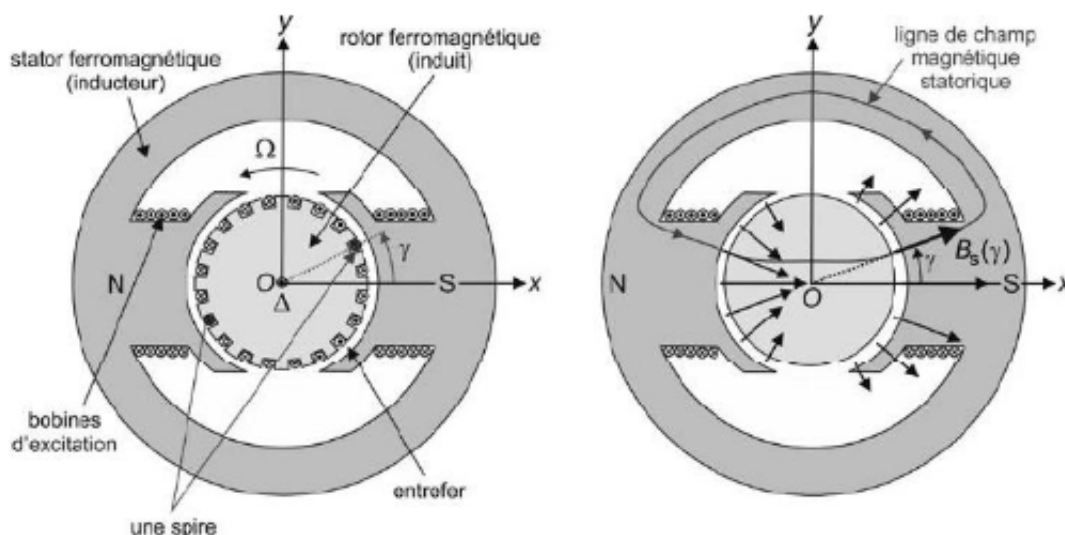
On a vu en première année de PTSI le principe d'action d'un champ magnétique tournant sur un moment magnétique. On réalise la mise en pratique d'un moteur.

Les machines à courant continu font partie des convertisseurs électro-magnéto-mécanique réversibles. Elles sont utilisées massivement dans toutes les gammes de puissance du fait de la simplicité de leur commande de vitesse.

### 9.3.1 Structure

Les éléments qui constituent une machine à courant continu sont :

- Une partie fixe : **le stator**. Ferro. aimantation permanente ou bobinage parcouru par un courant continu  $i_e$ . présenté sur le schéma avec une paire de pôle (N et S). Le stator crée un champ magnétique stationnaire  $\vec{B}_s$  canalisé par le ferro. Le champ statorique est radial dans l'entrefer.
- une partie mobile : **le rotor**. Tourne autour de l'axe  $Oz$ , ferromagnétique. Encoches incrustées dans le rotor dans lesquelles se logent des conducteurs appelés « brins ». Ces conducteurs sont disposés en spires bobinées sur le rotor. Les spires sont en série et sont parcourues par le même courant  $i$ . Le rotor est le siège d'induction de Lorentz.
- L'organisation des courants rotoriques doit être agencée afin de produire un axe polaire fixe, dirigé de préférence selon  $Oy$  pour que le couple soit maximal. Cette propriété est vérifiée si la répartition des courants admet, malgré la rotation du rotor, un plan d'antisymétrie ( $Oyz$ ). Il faut aménager un dispositif qui permet d'imposer un sens de circulation du courant pour la part du bobinage située d'un côté de ce plan et d'inverser ce sens pour celle située de l'autre côté. Ce dispositif se nomme le **collecteur**. Les spires sont connectées au circuit extérieur par l'intermédiaire des lames du collecteur sur lesquelles frottent les balais. On explique plus en détail le fonctionnement dans la section suivante !

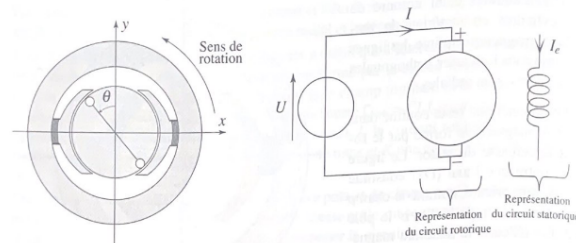


**Fig. 9.3** – Schéma d'une machine à courant continu (MCC). Physique Chimie PSI P.Olive, p721. On peut aussi rajouter la simulation des lignes de champ présente dans le Dunod de PSI.

### 9.3.2 Rôle du collecteur

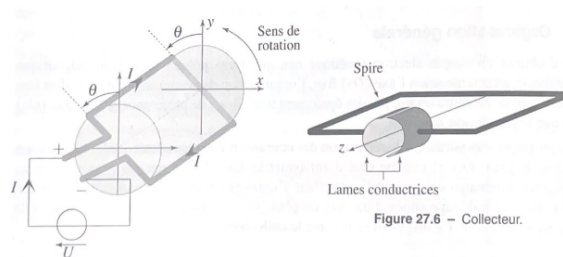
Le circuit induit (rotor) est alimenté par le courant continu  $i$  qui entre dans le circuit par le pôle + de l'alimentation externe. Une des spires est repérée par la position  $\theta$ . La connexion de

cette spire au circuit d'alimentation montre que si cette connexion reste fixe, le sens de circulation du courant pour la partie de la spire située à gauche du plan  $Oyz$  s'inverserait périodiquement en fonction de  $\theta$  avec une période de  $\pi$ . Pour éviter ce changement de sens, on connecte les spires du rotor à l'alimentation par l'intermédiaire d'un collecteur, fixé au sommet du rotor qui permet de raccorder, selon la position de la spire, les bornes de l'alimentation à des extrémités différentes de la spire. Le collecteur comporte un ensemble de lames conductrices, électrique-



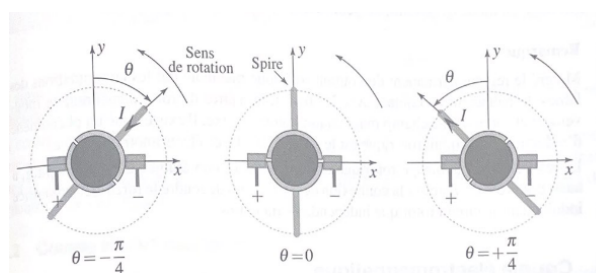
**Fig. 9.4** – Dunod Psi p 784

ment isolées entre elles, situées en tête du rotor. Leur nombre dépend du nombre de spires. L'ensemble de ces lames sont positionnées sur un cylindre posé sur le rotor. Elles tournent donc à la même vitesse que le rotor. Lorsqu'il n'y a qu'une seule spire, le collecteur est composé de deux lames uniquement.



**Fig. 9.5** – Dunod Psi p 784

Le contact entre les lames et le générateur qui alimente le circuit est assuré par deux patins conducteurs fixes (liés au stator), glissant sur les lames du collecteur qui se nomment balais. Lorsque le collecteur tourne avec le rotor, les balais sont au contact de lames différentes.



**Fig. 9.6** – Dunod Psi p 784

Pour une seule spire, la direction de l'axe polaire oscille au cours de la rotation du rotor entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ . Cette oscillation est éliminée dès lors que l'on met un grand nombre de spires. On maintient ainsi la répartition des courants admettant le plan  $(Oyz)$  comme plan d'antisymétrie. Le champ magnétique est permanent et admet  $(Oy)$  comme axe polaire orthogonal à l'axe polaire du stator. Son sens dépend du signe de l'intensité  $i$  et du mode de fonctionnement moteur ou générateur de la machine.

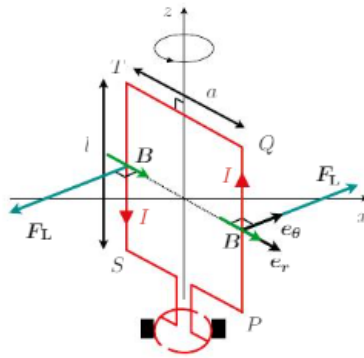
### 9.3.3 Aproxhe théorique (Jolidon p 204)

#### Établissement des équations électromécaniques

La forme du circuit magnétique constitué par le stator et le rotor permet d'établir dans l'entrefer un champ radial. On considère une spire rotorique de hauteur  $l$  selon  $Oz$  et de largeur  $a$ , on note  $I$  le courant y circulant qui parcourt le segment en  $x > 0$  selon les  $z$  croissants. Le rotor est plongé dans le champ magnétique statorique, chaque segment de spire est parcouru par le courant  $I$  subit une force de Laplace :

$$d\vec{F}_L = Idz\vec{e}_z \wedge B\vec{e}_r = IBdz\vec{e}_\theta \quad (9.14)$$

Cette force est égale à celle s'exerçant sur un point de la spire parallèle à l'axe  $Oz$ . Elle génère un couple sur le rotor appelé couple de Laplace. Calculons ce couple.



**Fig. 9.7** – Schéma de principe extrait du Jolidon

#### Couple

le couple s'obtient en ajoutant le moment subit par les deux branches de la spires soumises à la force de Laplace :

$$\mathcal{M} = \int_{M \in [TS]} \vec{OM} \wedge \vec{F}_L(M) + \int_{M \in [PQ]} \vec{OM'} \wedge \vec{F}_L(M') = IalB\vec{e}_z \quad (9.15)$$

Comme le rotor est constitué de  $N$  spires semblables à celle que nous venons de considérer, on obtient :

$$\mathcal{M}_{rotor} = N\mathcal{M} = NialB\vec{e}_z \quad (9.16)$$

Le couple est donc proportionnel au nombre de spires  $N$  d'où l'intérêt d'avoir le plus de spires possibles au rotor.

Le rotor est solidaire d'un arbre de transmission sur lequel on place une charge à entraîner. Le rotor lui applique un couple  $\Gamma$ . Discuter du signe de  $\Gamma$  en suivant le Jolidon, permet de décrire le montage expérimental. On établit l'équation mécanique en supposant le référentiel galiléen, théorème du moment cinétique :

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\Gamma - \Gamma_r + NalBI \quad (9.17)$$

On établit l'équation électrique en utilisant la loi des mailles :

$$U = RI + L \frac{dI}{dt} - e_{\text{ext}} \quad (9.18)$$

En combinant les équations que l'on a décrit on parvient à un système d'équations :

$$\begin{cases} \Phi\omega &= U - RI - L\frac{dI}{dt} \\ \Gamma &= \Phi I - \Gamma_r - J\frac{d\omega}{dt} \end{cases} \quad (9.19)$$

On a deux équations reliant les quatre variables du quadripôle. En fixant deux d'entre elles on peut déterminer entièrement les variables de fonction du système.

### 9.3.4 Caractéristique de fonctionnement

#### Couple et vitesse de rotation

En régime permanent de fonctionnement, c'est à dire à  $U, I, \Gamma$  et  $\omega$  constants le système se réduit à :

$$\begin{cases} \Phi\omega &= U - RI \\ \Gamma &= \Phi I - \Gamma_r \end{cases} \quad (9.20)$$

On voit que les couples de variables mis en jeu sont  $(\omega, U)$  et  $(\Gamma, I)$ . Le couple est proportionnel à l'intensité  $i$  du courant qui circule dans le rotor ( $\Gamma = k\Phi$  dans le poly de Phillipe) alors que la vitesse de rotation est pilotée par la tension. Pour un rotor idéal sans pertes joules  $R = 0$ ,  $\Gamma_r = 0$  on aurait même proportionnalité entre  $\omega$  et  $U$  et  $\Gamma$  et  $I$ .

Si  $i > 0$ ,  $\Gamma > 0$  la machine fonctionne en moteur. Si  $i < 0$ ,  $\Gamma < 0$  la machine fonctionne en génératrice.

#### Mesure expérimentale sur un banc d'essai (Poyl TP rennes)

Poly Phillipe Moteurs - MCC Réaliser en préparation la mesure de la résistance d'induit pour le moteur et pour la génératrice. On mesure d'abord dans une étude à vide le  $\Phi$  dans le moteur avec la génératrice en traçant  $E = f(\omega)$  Deuxièmement : étude de charge. On mesure le couple fourni pour une intensité et on trace  $\Gamma = f(i)$ . Mesure du couple avec une webcam et imageJ.

### 9.3.5 Point de fonctionnement

La donnée du quadruplet  $(U, I, \omega, \Gamma)$  est appelée **point de fonctionnement** de la machine : il faut donc deux équations supplémentaires pour en déterminer un. Il s'agit de la caractéristique de l'alimentation électrique du rotor généralement de la forme  $U = E' - R'I$  ainsi que la caractéristique  $\Gamma_c$  de la charge à entraîner. En pratique ces deux nouvelles équations fixent les valeurs de  $I$  et  $\omega$  vérifiant le système. On peut montrer la caractéristique pour le MCC du Jolidon.

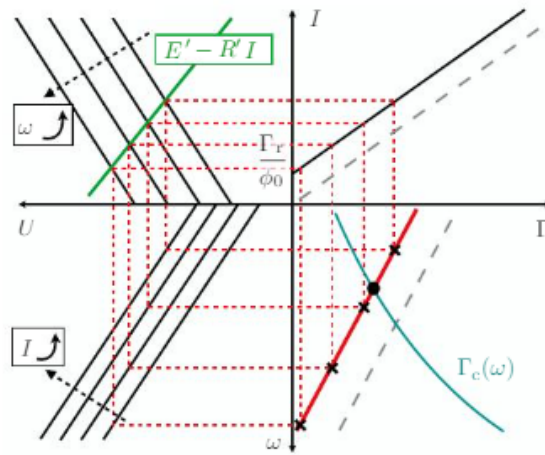
### 9.3.6 Puissance et rendement (Jolidon)

Quelque soit son régime de fonctionnement, la MCC consomme de l'énergie dans le stator, en régime moteur, le rotor consomme également une Puissance électrique. Et l'ensemble fournit à la charge mécanique une puissance utile  $\Gamma\omega$

$$\eta_{MCC} = \frac{P_{meca}}{P_{elec, stator} + P_{elec, rotor}} = \frac{\Gamma\omega}{UI + U_s I_s} \quad (9.21)$$

Le bilan de puissance est déterminé par le système d'équation donné précédemment il suffit de multiplier la première équation par  $I$  et la deuxième par  $\omega$  :

$$UI - \Gamma\omega = RI^2 + \Gamma_r\omega \quad (9.22)$$

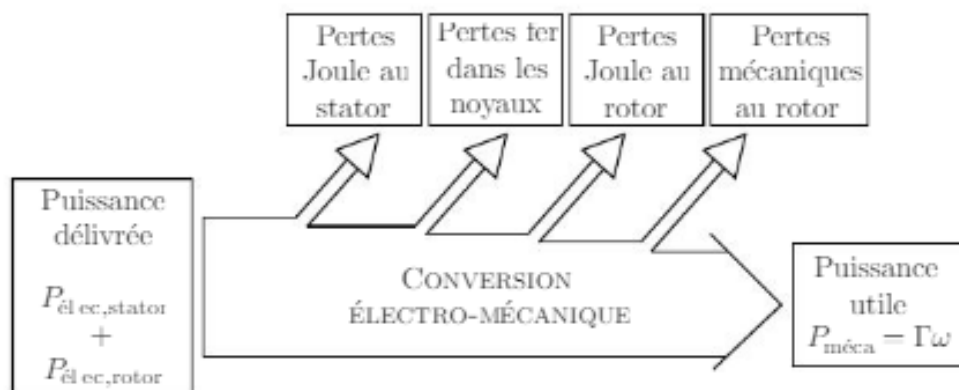


**Fig. 9.8** – Caractéristique MCC, extrait du Jolidon

La puissance est dissipée au niveau du rotor, soit par effet joule soit par les pertes mécaniques ( $\Gamma_r$ ).

Fonctionnement en moteur si  $UI > 0$  ne donne pas intégralement la puissance utile  $\Gamma\omega > 0$  à cause des pertes Joules, mécaniques ainsi que des pertes fer (que l'on a négligé). Fonctionnement en génératrice.

On décrit en suivant le jolidon les différents types de pertes.



**Fig. 9.9** – Bilan de Puissance, extrait jolidon

## 9.4 Conclusion

Recap + Interet du moteur à courant continu + machine synchrone

# Chapitre 10

## Leçon 10 : Induction électromagnétique

---

### Niveau :

- CPGE

### Pré-requis :

- Electromag
- equations de maxwell
- ARQS
- mecanique

### Bibliographie :

- Dunod PC
  - Garing
  - Perez
  - Ellipse PC 2009 chap induction electromagnetique de Lorentz
- 

### Sommaire

---

<b>10.1 Introduction</b>	<b>47</b>
<b>10.2 Lois de l'induction</b>	<b>47</b>
10.2.1 Flux du champ magnétique, induction de Neumann	47
10.2.2 Induction de Neumann, loi de Faraday	48
10.2.3 Loi de Lenz	48
<b>10.3 Circuit fixe dans un champ magnétique variable</b>	<b>48</b>
10.3.1 Auto-induction	48
10.3.2 Cas de deux bobines en interaction	48
10.3.3 Manipulation : Mesure d'une inductance mutuelle	49
<b>10.4 Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire : le haut parleur</b>	<b>49</b>
10.4.1 Présentation du dispositif	49
10.4.2 équation mécanique	49
10.4.3 Équation électrique	49
10.4.4 Bilan énergétique	49
<b>10.5 Conclusion</b>	<b>49</b>

---

## 10.1 Introduction

## 10.2 Lois de l'induction

### 10.2.1 Flux du champ magnétique, induction de Neumann

On prend une bobine en circuit ouvert. On mesure le courant qui passe au travers de la bobine lorsqu'on approche un aimant de la bobine. L'expérience est décrite dans le dunod de

pcsi. Le courant induit qui apparaît dans la bobine est appelé courant induit. On remarque qu'il est d'autant plus fort que l'aimant est déplacé rapidement.  $i$  est proportionnel à  $u$ , s'oppose à la variation du champ  $\vec{B}_{ext}$ . C'est l'induction de Neumann. Si on déplace la bobine au lieu de l'aimant le résultat est le même (induction de Lorentz). (On pourrait faire la même chose avec deux bobine dont une est alimentée en courant).

Ces expériences mettent en évidence le phénomène d'induction électromagnétique qui se manifeste par l'apparition d'un courant dans un circuit fermé sans qu'il y ait de générateur à l'intérieur dans le circuit.

### 10.2.2 Induction de Neumann, loi de Faraday

L'équation régissant le phénomène d'induction est la loi de Faraday. On considère une spire plane de forme quelconque placée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ . On suppose un sens positif conventionnel pour le courant circulant dans la spire. Définition du flux magnétique traversant la spire :

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}. \quad (10.1)$$

$\phi$  quantifie la quantité de champ magnétique qui traverse la spire dans le sens du vecteur surface.

Dans les expériences décrites juste avant, on a fait varier le flux magnétique en déplaçant l'aimant par rapport à la bobine. C'est la variation du flux qui provoque l'apparition du courant dans le circuit de la bobine. En 1831, Faraday en déduit la loi suivante :

$$e = - \frac{d\phi}{dt} \quad (10.2)$$

$e$  est la force électromotrice induite.

### 10.2.3 Loi de Lenz

**Loi de Lenz :** Les phénomènes d'induction s'opposent par leurs effets aux causes qui leur ont donné naissance. Discuter du signe dans la loi de Faraday.

**Transition :** maintenant que l'on a vu les lois pour comprendre les phénomènes de l'induction, on va étudier les deux causes possibles d'apparition de l'induction.

## 10.3 Circuit fixe dans un champ magnétique variable

### 10.3.1 Auto-induction

Coefficient d'auto-induction. On a vu qu'une spire parcourue par un courant  $i$  génère un champ magnétique. Ce champ magnétique a un flux à travers la spire que l'on nomme flux propre. Comme le flux est proportionnel à  $B$  qui est proportionnel à  $i$ , on peut définir un coefficient appelé inductance propre tel que :  $\phi = Li$ . Comme dans le Dunod on explique sur une seule spire. Calcul de l'inductance propre d'un solénoïde (Dunod p 906). Bilan d'énergie (loi des mailles, calcul de la puissance).

Attention ! Le théorème d'Ampère n'apparaît qu'en PC et Biot et Savart est hors programme en prepa.

### 10.3.2 Cas de deux bobines en interaction

On présente un schéma de deux spires l'une dans l'autre. La première est alimentée et génère un champ magnétique qui traverse la deuxième bobine. On définit le coefficient d'induction mutuelle et on écrit le lien entre chaque flux et l'intensité de l'autre bobine.



### 10.3.3 Manipulation : Mesure d'une inductance mutuelle

cf poly de Philippe.

## 10.4 Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire : le haut parleur

### 10.4.1 Présentation du dispositif

### 10.4.2 équation mécanique

Bilan des forces :

1. Force de Lorentz :  $F = \int i(t) \vec{dl} \wedge \vec{B} = i l B$
2. force de frottement  $f = -\alpha v$
3. force de rappel  $f_{rap} = -kz$

Deuxieme loi de Newton :  $ma = ilB - \alpha v - kz$

### 10.4.3 Équation électrique

Schéma équivalent électrique. loi des mailles  $u = L \frac{di}{dt} + Ri - e$  avec  $e = \int \vec{v} \wedge \vec{B} dl = vBl$ .

### 10.4.4 Bilan énergétique

$$ui = \frac{d}{dt} (1/2 Li^2) + Ri^2 - vBl i$$

$$\frac{d}{dt} (1/2 mv^2) = iBlv - \alpha v^2 - \frac{d}{dt} (1/2 kz^2)$$

En utilisant ces deux équations on arrive à :

$$ui = \frac{d}{dt} (Ec + Em + Erappel) + P_j + \alpha v^2$$

Donner la signification de chaque membre du bilan d'énergie

## 10.5 Conclusion

On peut ouvrir sur d'autres applications liés à l'autoinduction Transformateurs, freinage par induction, moteurs...

# Chapitre 11

## Leçon 11 : Rétroactions et oscillations

---

### Niveau :

- CPGE

### Pré-requis :

- Programme de première année
- Stabilité des système linéaires
- transformée de Laplace

### Bibliographie :

- Dunod PSI/PCSI
  - poly Jeremy Neveu
  - Poly de philippe
- 

### Sommaire

<b>11.1 Introduction</b>	<b>50</b>
<b>11.2 Rétroaction</b>	<b>50</b>
11.2.1 Amplificateur linéaire	51
11.2.2 Amplificateur non inverseur	51
<b>11.3 Oscillateurs quasi sinusoïdaux</b>	<b>51</b>
11.3.1 Définition	51
11.3.2 Oscillateur à pont de Wien	51
11.3.3 Manipulation	51
<b>11.4 Conclusion</b>	<b>51</b>

---

## 11.1 Introduction

On suit le programme de PSI ...

## 11.2 Rétroaction

On peut réaliser une manipulation introductive à l'aide d'un MCC avec une alimentation et une génératrice avec une charge. On sait qu'à vide, il y a proportionnalité entre la tension appliquée et la rotation du moteur. Si on varie la charge, la vitesse de rotation varie alors que la fem est constante. Il y a donc un problème. Pour que le système continue à tourner à la même vitesse le système doit avoir l'information de ce qui sort et adapter. En réalisant un système bouclé où l'on compare la valeur en sortie avec la valeur en commande.

Dessiner un schéma bloc du principe (E la commande, S la sortie, T la perturbation, K la régulation, G l'additionneur et B le capteur.) On s'intéresse au point de vue de l'électronique. Les systèmes mécaniques seront traités en SI.

### 11.2.1 Amplificateur linéaire

Le système électrique permettant de réaliser le comparateur est un ALI ou AOP. On présente un schéma du dispositif et des composantes importantes (tensions de polarisation, entrées inverseuse et non inverseuse et la sortie.)

Donner la fonction de transfert de l'AOP, commenter, système passe bas du premier ordre. Saturation entre les deux tensions de polarisation, résistance d'entrée et courant d'entrée, vitesse de balayage

### 11.2.2 Amplificateur non inverseur

L'amplificateur non inverseur est conçu pour amplifier la tension d'entrée. On suit le Dunod de PCSI ou PSI. On présente le schéma électrique. Cahier des charges. Rétroaction pour assurer le régime linéaire. On peut faire des observations expérimentales. Calcul de la fonction de transfert, noté l'impédance d'entrée infinie.

Stabilité (Dunod p 35 et 38) On reste dans les mêmes conditions (système 1er ordre). Le système est dit stable si le signal de sortie  $s(t)$  reste fini pour un signal d'entrée fini. Pour obtenir un critère de stabilité : réponse du système à un échelon de tension. PWP. Intégration de l'équation différentielle pour arriver au critère :  $1 + \beta\mu_0 > 0$ . Si la condition de stabilité n'est pas respectée dans le système bouclé, des oscillations peuvent apparaître : comment les rendre utiles ? Comment les maintenir ?

## 11.3 Oscillateurs quasi sinusoïdaux

### 11.3.1 Définition

Système bouclé auto-oscillant, pas de signal d'entrée, retour sur la stabilité vue juste avant.

### 11.3.2 Oscillateur à pont de Wien

Constitué d'un amplificateur non inverseur et d'un filtre à bande passante. Schéma électrique sur transparent, schéma bloc au tableau.

**Pont de Wien :** Pont diviseur de tension d'où la FT.

### 11.3.3 Manipulation

On présente bien les composants au fur et à mesure de l'explication. On donne les conditions d'auto-oscillation. On écrit le rapport  $v/s$  et on arrive à la condition que le produit des deux FT est 1. On a alors deux équations : une pour la partie réelle et une pour la partie imaginaire, d'où une condition sur  $\omega$  et une condition sur le gain. On réalise l'oscillateur et on choisit une boîte à décades pour la résistance  $R_2$  et on cherche sa valeur pour obtenir les oscillations. On vérifie que l'on obtient bien la condition d'auto-oscillation déterminée précédemment. On peut discuter de l'amplitude et de la pureté spectrale des oscillations.

## 11.4 Conclusion

On s'est intéressé à la stabilité des systèmes bouclés permettant de discuter des oscillateurs, mais il existe aussi d'autres propriétés comme la rapidité, la précision. Autres types d'oscillateurs (Quartz)

# Chapitre 12

## Leçon 12 : Traitement d'un signal. Étude spectrale

---

### Niveau :

- CPGE

### Pré-requis :

- Diagrammes de Bodes
- Électronique, RC, RLC
- Fonctions de transfert

### Bibliographie :

- Dunod PC, MP, PTSI
- 

### Sommaire

---

<b>12.1 Introduction</b>	<b>52</b>
<b>12.2 Contenu spectral d'un signal périodique</b>	<b>53</b>
12.2.1 Signal périodique non sinusoïdal	53
12.2.2 Exemple avec un signal créneau	53
12.2.3 Spectre d'un signal périodique	54
12.2.4 Action d'un filtre sur un signal périodique	54
<b>12.3 Électronique numérique</b>	<b>54</b>
12.3.1 Signal réel, signal numérique	54
12.3.2 Quantification du signal	54
12.3.3 Analyse spectrale	54
12.3.4 Mise en pratique	55
12.3.5 Filtrage numérique	55
<b>12.4 Traitement non-linéaire d'un signal : modulation-démodulation</b>	<b>55</b>
12.4.1 Modulation	55
12.4.2 Démodulation	55
12.4.3 Autres types de modulation	55
<b>12.5 Conclusion</b>	<b>55</b>

---

## 12.1 Introduction

Qu'est-ce qu'un signal ?

## 12.2 Contenu spectral d'un signal périodique

### 12.2.1 Signal périodique non sinusoïdal

On suit le dunod de MP. On donne la définition d'un signal périodique et sa décomposition en série de Fourier (sur tranparets). On donne la formule de la somme et le calcul de chacun des termes.

Un signal  $s(t)$  est périodique s'il reprend identiquement la même valeur à intervalles de temps égaux :  $s(t+T) = s(t)$  où  $T$  est la période du signal. Tout signal périodique de fréquence  $f_s$  de forme quelconque est constitué de la superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de  $f_s$ . Ainsi toute fonction réelle peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie de fonctions sinusoïdales :

$$s(t) = s_0 + \sum [a_n \cos 2\pi n f_s t + b_n \sin 2\pi n f_s t] \quad (12.1)$$

Les coefficients complexes  $c_n$  sont sous la forme de :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(2\pi n f_s t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(2\pi n f_s t) dt$$

Remarques : il faut toujours étudier la parité de la fonction :

- si  $s$  est paire, la décomposition ne comporte que des fonctions cosinus  $b_n = 0$
- si  $s$  est impaire elle ne comporte que des fonctions sinus  $a_n = 0$

On peut réécrire cette somme en regroupant les termes de même fréquence :

$$s(t) = s_0 + \sum a_n \cos 2\pi n f_s t + \phi_n \quad (12.2)$$

Cette écriture est très pratique, car elle fait apparaître l'amplitude et la phase du signal. Le terme constant  $a_0$  est la valeur moyenne du signal notée  $\langle s(t) \rangle$ . Les termes en  $n$  sont les harmoniques.  $n = 1$  correspond au fondamental. On décrit la composante continue, i.e. la moyenne du signal. La composante sinusoïdale du fondamental et les harmoniques.

### 12.2.2 Exemple avec un signal créneau

On donne un exemple à l'aide d'un code python. On prend un signal créneau de période  $T = 2$  ms, d'amplitude crête à crête  $s_{cc} = 2$  V. Donc de valeur moyenne  $\langle s \rangle = 1$ . Ce signal admet un développement en série de Fourier. Avec  $f = 1/T$  la fréquence du signal. Pour un signal créneau, qui est une fonction impaire. Donc  $a_n = 0$ . On choisit un signal centré en 0. Donc  $s_0 = 0$ . Il nous reste qu'à calculer les coefficients  $b_n$  :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \sin n\omega t dt = \frac{-4}{n\pi} (\cos(n\pi) - \cos(0))$$

Deux cas :

- si  $n$  est pair  $b_n = 0$
- si  $n$  est impair  $b_n = \frac{4}{n\pi}$

On peut alors réécrire le signal  $s$  tel que :

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)\omega t \quad (12.3)$$

On peut montrer numériquement l'approximation d'un créneau et ou d'un triangle par le développement en série de Fourier, On montre que les hautes fréquences permettent d'approximer les variations rapides de la fonction. Et montrer que ça ne marche pas pour un bruit blanc.

### 12.2.3 Spectre d'un signal périodique

On s'intéresse à un spectre en amplitude, on trace la valeur de chaque coefficient  $a_n$  en fonction de la fréquence  $f_n$  de l'harmonique. On peut commencer par présenter le spectre d'un sinus pur, et à côté les spectres du signal triangulaire et créneau.

### 12.2.4 Action d'un filtre sur un signal périodique

On rappelle la définition de la fonction de transfert d'un système linéaire :

$$H(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{S}{E} e^{j(\phi_s - \phi_e)} \quad (12.4)$$

Ainsi que les définitions du gain et de la phase associée à la fonction de transfert. On peut montrer un diagramme de Bode d'un filtre passe bas comme dans le dunod de pti et en déduire l'effet du filtre sur un sinus. Puis sur un signal périodique comme le signal carré.

**Manipulation :** On peut caractériser un filtre par exemple passe bas d'ordre 1. On réalise un filtre passif avec un RC qui donne un gain de 1 avant la coupure. On fait la manipulation avec la boîte à décades pour la résistance. Faire l'analyse en préparation. On prend un point ou deux en direct pour aller vite (sur regressi).

On superpose le filtre et la décomposition de Fourier du signal et on fait varier la fréquence de coupure du passe bande dans le programme python. On montre sur le filtre d'avant qu'en envoyant un signal carré, il est modifié et que selon la valeur de la résistance du filtre, le signal est modifié. On compare à ce que l'on a vu en première partie.

## 12.3 Électronique numérique

### 12.3.1 Signal réel, signal numérique

On décrit le processus d'acquisition d'un signal numérique. Acquisition, valeurs continues contre valeurs discrètes. Une acquisition se déroule en deux phases. On prélève des échantillons du signal qu'on convertit ensuite en données numériques. Le principe de base de l'échantillonnage consiste à utiliser un interrupteur commandé par un signal d'horloge. La quantification conduit par nature à des écarts entre le signal réel et le signal équivalent aux valeurs numériques obtenues à l'issue du processus.

### 12.3.2 Quantification du signal

Entre le signal numérisé est la superposition du signal réel et d'un signal d'erreur lié au processus de quantification. Ce bruit d'erreur parasite le signal réel et empêche de voir les détails les plus fins du signal réel. (voir poly de Philippe sur le traitement du signal) On peut utiliser le programme python Quantification\_filtrage.py.

### 12.3.3 Analyse spectrale

Transformée de Fourier, critère de Shannon. Démonstration rapide basée sur le Dunod MP/MP\*. Montrer le critère de Shannon sur l'oscilloscope. Durée d'acquisition sur la résolution etc. Voir poly de Philippe.

### 12.3.4 Mise en pratique

Lire le complément "pratique de l'analyse spectrale" dans le dunod. À compléter avec le PSI/PSI\* qui présente un autre aspect, notamment sur une partie à l'oscilloscope. **Manipulation :** Diapason avec microphone, FFT à l'oscilloscope, mesure via une carte d'acquisition et latispro. On envoie sur le programme python pour analyse. Attention sur le programme python il peut y avoir un problème. Il faut cliquer deux fois pour s'assurer de la prise en compte de la fréquence d'échantillonnage.

### 12.3.5 Filtrage numérique

On écrit la discrétisation du filtre d'après la FT : de  $H$  on passe à la relation entre  $s$  et  $e$ , on remplace  $j\omega$  par la dérivation. On en arrive après calcul à une relation de récurrence entre l'entrée et la sortie (Dunod MP). On montre pour la dérivation, on évoque l'intégration à l'oral en montrant que sur le programme python ça marche mieux. On revient sur le programme python `quantification_filtre.textbf`

## 12.4 Traitement non-linéaire d'un signal : modulation-démodulation

On bascule sur le programme de PSI.

### 12.4.1 Modulation

On explique le principe, on montre la modulation d'un point de vue mathématique (p151) en détaillant l'impact sur la fréquence. Montrer le spectre en illustration. **Réaliser la modulation en amplitude avec un multiplieur poly de philippe telecommunications**

### 12.4.2 Démodulation

Principe de la détection synchrone, il faudrait réaliser une détection synchrone.

### 12.4.3 Autres types de modulation

Modulation en fréquence, et démodulation de phase.

## 12.5 Conclusion

On peut ouvrir sur d'autres formes de filtrage

# Chapitre 13

## Leçon 13 : Ondes progressives, ondes stationnaires

---

### Niveau :

- CPGE

### Pré-requis :

- Mécanique de première année
- résolution d'équation différentielles
- Phénomènes ondulatoire, voc longueur d'onde ...

### Bibliographie :

- Dunod PC
  - Dunod PSI
  - H prepa Ondes 2 eme année pour les calculs
  - Garing ondes mécaniques.
  - BUP Ondes <https://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/resultats.php>
- 

### Sommaire

<b>13.1 Introduction</b>	<b>56</b>
<b>13.2 Propagation des ondes</b>	<b>57</b>
13.2.1 Définition de phénomènes ondulatoires	57
13.2.2 Corde vibrante (Dunod, Garing)	57
13.2.3 Mise en équations	57
13.2.4 Généralisation	57
<b>13.3 Solutions générales de l'équation de d'Alembert : ondes progressives</b>	<b>58</b>
13.3.1 Ondes progressives	58
13.3.2 Ondes progressives harmoniques	58
13.3.3 Relation de dispersion	58
<b>13.4 Une autre famille de solutions : ondes stationnaires</b>	<b>58</b>
13.4.1 Solution de l'équation de d'Alembert	59
13.4.2 Corde de Melde	59
13.4.3 Ondes stationnaire ou onde propagative	59
<b>13.5 Conclusion</b>	<b>59</b>

---

### 13.1 Introduction

On peut introduire en parlant de la diversité d'ondes que l'on peut trouver. Ondes électromagnétiques (lumière), ondes mécanique (vagues, acoustiques, corde vibrante). On peut montrer la cuve à onde, la corde de melde. Montrer que l'on peut observe une déformation qui se propage de proche en proche dans le milieu continu dans les deux cas.



## 13.2 Propagation des ondes

### 13.2.1 Définition de phénomènes ondulatoires

Définition floue à cause de la diversité des phénomènes concernés. On donne la définition sur slide. On met les points importants au tableau : Une onde correspond à la modification des propriétés physiques d'un milieu matériel ou immatériel engendrée par une action locale qui se répercute/ se propage d'un point à un autre du milieu avec une vitesse finie déterminée par les caractéristiques du milieu. Au passage de l'onde, chaque point du milieu reproduit, avec un décalage temporel et une éventuelle atténuation, la perturbation originelle engendrée par une source fournissant de l'énergie au milieu. La propagation résulte généralement du couplage entre deux champs appelés grandeurs couplées.

### 13.2.2 Corde vibrante (Dunod, Garing)

#### Modèle et hypothèses

On considère une corde de longueur  $L$ , homogène sans raideur, de masse  $m$  donc de masse linéique  $\mu_l = m/l$ . La corde est tendue par une tension  $\vec{T}_0$ . On suppose la corde horizontale, ce qui revient à négliger l'effet de pesanteur devant la tension. Faire un schéma montrant ce que l'on observe.

On s'intéresse aux petits mouvements transversaux, orthogonaux à la direction de propagation. On suppose les perturbations engendrées par le mouvement de la corde, par rapport à son état de repos au premier ordre.

### 13.2.3 Mise en équations

On écrit le bilan des forces sur un élément  $dx$  de la corde. On projette selon  $x$  et  $y$  puis on prend le premier ordre pour la projection suivant  $y$ . On arrive alors à l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (13.1)$$

avec  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ . On remarque que nous avons propagation d'une onde, car il y a deux grandeurs couplées. Ici les deux grandeurs couplées sont la composante  $\vec{T}$  selon  $O_y$  et la vitesse de la corde  $v_y = \partial y / \partial t$ . En effet si on pose  $\vec{F} = -T \sin \alpha \approx -T \partial y / \partial x$  on a alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial t} = -T \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{cases} \quad (13.2)$$

(H-prepa p 32) Une déformation de la corde entraîne l'apparition d'une force qui peut elle-même entraîner une vitesse de déplacement, etc. Nous retrouvons ici un couplage semblable à celui qui entraîne la propagation d'une déformation dans la chaîne de masses couplées par des ressorts.

### 13.2.4 Généralisation

On peut insister ici sur la généralité de l'équation de d'Alembert qui régit la propagation des ondes. On démontre l'équation de d'Alembert rapidement sur transparents pour l'électromagnétisme. On peut évoquer que dans l'année de PC on verra d'autres types d'équations de propagation (diélectriques, plasmas, etc). Noter que la célérité de l'onde dépend des paramètres/

caractéristiques du milieu et de l'onde qui se propage. On peut peut être présenter un tableau qui récapitule les différents cas.

## 13.3 Solutions générales de l'équation de d'Alembert : ondes progressives

On reprend le Dunod de PC p 892.

### 13.3.1 Ondes progressives

Onde se propageant avec une vitesse  $c$  dans la direction de l'axe  $Ox$  et dans le sens positif de cet axe. On montre sur transparents la forme de l'onde qui se propage dans une direction, amplitude. Rapidement (programme de première année). Démonstration que c'est une solution générale (On la trouve dans le PSI p870).

### 13.3.2 Ondes progressives harmoniques

(Dunod PSI, PC, Hprepa) Faire appel à la leçon sur le traitement d'un signal. On peut décomposer les solutions de l'équation de d'Alembert en une somme de sinusoides (c'est permis par la linéarité de l'équation de d'Alembert). On cherche donc des solutions de la forme :

$$s(x, t) = s_0 \cos \omega t - kx + \phi. \quad (13.3)$$

On peut rappeler la signification des différentes grandeurs associées à l'onde : pulsation  $\omega$ , vecteur d'onde  $\vec{k} = \omega/c$  dans le vide,  $\phi$  phase à l'origine, période  $T = 2\pi/\omega$ , fréquence, longueur d'onde.

### 13.3.3 Relation de dispersion

Il faut alors déterminer les caractéristiques propagatives de chaque OPPH. Pour ça il faut établir le lien entre  $k$  et  $\omega$  appelée relation de dispersion. La déterminer pour d'Alembert, déterminer et définir la vitesse de phase (pour une opph la vitesse de phase ne dépend pas de  $\omega$  donc non dispersive). On peut évoquer un exemple d'ondes non dispesives, le cas des ondes de surfaces dans la cuve à ondes mais que l'on ne va pas s'intéresser à ce cas. On peut toutefois montrer un graphique python pour montrer comment serait modifiée la relation de dispersion dans le cas des ondes de surface ?

## 13.4 Une autre famille de solutions : ondes stationnaires

**Manipulation introductive** La corde de Melde.

Montrer un schéma de la corde de Melde, dire que ça correspond au cas étudié déjà en début de leçon. Faire vibrer la corde à une fréquence permettant de bien voir l'aspect stationnaire sans stroboscope. On rappelle ce qu'est une onde stationnaire.

Rappeller ce qu'est une onde stationnaire : solution de l'équation de D'Alembert. Elle s'écrit :

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx) + s_0 \cos(\omega t + kx) = 2s_0 \cos(\omega t) \cos(kx). \quad (13.4)$$

### 13.4.1 Solution de l'équation de d'Alembert

On a vu expérimentalement un régime stationnaire, les deux variables ( $x$  et  $t$ ) ne semblent plus couplées, on cherche une solution de la forme :  $s(x, t) = f(x)g(t)$ . Méthode des variables séparées que l'on obtient deux équations différentielles. On résout le système (Hprepa ou Dunod PSI/PC). On représente graphiquement la solution. On rappelle la notion de mode propre, de ventre et de noeuds à l'aide d'un schéma (Dunod PSI).

### 13.4.2 Corde de Melde

On mène le calcul du régime harmonique forcé (si le temps le permet sinon on donne le résultat ou on s'aide de transparents). Évoquer la divergence et donc le fait qu'il faudrait prendre en compte la dissipation énergétique.

**Manipulation** Poly de Philippe. Mesure de fréquences. On se met à une fréquence proche de la résonance sur l'excitateur et on mesure la fréquence à l'aide du stroboscope. On compte les noeuds, on vérifie que le premier noeud n'est pas trop loin du bout, sinon, on corrige en cohérence avec que l'on observe. On note la fréquence, on connaît la masse, donc la tension, on peut donc calculer  $c$ , on en déduit  $\lambda$ . À partir du nombre de noeuds et de la longueur de l'expérience, on remonte au fait qu'entre deux noeuds on trouve  $\lambda/2$ . En préparation on le fait pour différentes masses. Pour avoir une jeu de donné assez grand.

### 13.4.3 Ondes stationnaire ou onde propagative

Faire le lien avec la partie précédente : On avait affirmé que les ondes progressives constituent une base des solutions. Les ondes stationnaires doivent pouvoir s'exprimer en somme d'ondes progressives. Le faire et interpréter l'onde stationnaire comme superposition d'une onde progressive et de son image réfléchie à une extrémité.

## 13.5 Conclusion

Conclure sur les deux bases de solutions que l'on a trouvé. La question est laquelle choisir face à un problème ? La réponse : Ça dépend. SI on cherche des modes de résonance on cherche des ondes stationnaires, sinon on cherche des ondes progressives. On peut ouvrir sur les paquets d'onde transmission de l'information, enjeu capital dans notre société.

# Chapitre 14

## Leçon 14 : Ondes acoustiques

---

### Niveau :

- CPGE

### Pré-requis :

- Thermodynamique
- Écoulement parfait, diffusion thermique
- Ondes électromagnétiques dans le vide

### Bibliographie :

- Dunod PC/PSI
  - H-prepa
  - TD Pass
- 

### Sommaire

---

<b>14.1 Introduction</b>	<b>60</b>
<b>14.2 Équation de propagation d'une onde de pression</b>	<b>61</b>
14.2.1 Approximation acoustique	61
14.2.2 équations locales	61
14.2.3 Effet Doppler (application à la médecine effet doppler carotidien)	61
<b>14.3 OPPH</b>	<b>62</b>
14.3.1 Notations complexes	62
14.3.2 Notion d'impédance acoustique	62
14.3.3 Aspect énergétique	62
14.3.4 Intensité sonore	62
<b>14.4 Production, transmission et détection d'une onde sonore</b>	<b>62</b>
14.4.1 Ondes sphériques	62
14.4.2 Réflexion, transmission application à l'échographie médicale : adaptation d'impédance	62
<b>14.5 Conclusion</b>	<b>63</b>

---

## 14.1 Introduction

Les ondes acoustiques font partie des domaines de la physique que les savants ont étudiés pour expliquer les sens humains. D'abord pour l'aspect musical, puis pour l'aspect ondulatoire. Dans cette leçon nous allons nous attarder à comprendre ce que sont physiquement les ondes acoustiques, et s'attacher à expliquer comment le son se propage et comment on peut le détecter. (On peut différencier ondes acoustique et sonore (20Hz- 20kHz))

## 14.2 Équation de propagation d'une onde de pression

### 14.2.1 Approximation acoustique

On considère un milieu de propagation qui est un fluide parfait où on néglige l'effet de la pesanteur.

- Au repos pression uniforme  $P_0$  ;
- masse volumique  $\mu_0$  ;
- vitesse particulaire nulle

L'onde sonore est une perturbation par rapport à cet état d'équilibre. Lorsque l'onde sonore est émise, l'état du fluide est décrit par :

- $P(M, t) = P_0 + p_1$  avec  $p_1$  est une perturbation infinitésimal de  $P_0 \gg p_1$
- $\mu(M, t) = \mu_0 + \mu_1$
- $\vec{v}(M, t) = \vec{v}_1$

Les grandeurs  $p_1/P_0, \mu_1/\mu_0$  seront traités comme des infiniments petits du premier ordre, comme toutes les autres perturbations que pourra engendrer l'onde sonore dans le milieu.

### 14.2.2 équations locales

On écrit comme dans H-prepa p.95 l'équation locale de conservation de la masse, l'équation de Navier-Stokes que l'on simplifie avec les hypothèses énoncées plus haut (fluide parfait,...) on arrive à l'équation d'Euler. On linéarise et on explicite le coefficient de compressibilité. On arrive aux trois équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p \\ \mu = \rho_0 \chi_s p. \end{cases} \quad (14.1)$$

En éliminant  $\mu$  on parvient à deux équations couplées pour la vitesse et la pression. On arrive à l'équation de d'Alembert en dérivant par rapport au temps l'équation sur la pression. Expliciter la célérité du son dans l'air. Faire l'analogie à l'équation de D'Alembert en électromagnétisme, mais attention relevé les différences entre les deux !!

Pour la célérité du son on peut donner des ordres de grandeur (H-prepa) pour les différents types de fluides.

### 14.2.3 Effet Doppler (application à la médecine effet doppler carotidien)

Mesure de vitesse d'un mobile par effet Doppler. On utilise le principe que l'onde sonore se déplace dans l'air à une vitesse constante (cf d'Alembert) Le déplacement de l'objet par rapport à l'onde entraîne un décalage en fréquence entre l'onde émise et l'onde reçue par le récepteur :

$$v' = v \frac{c - v_{obs}}{c - v_{source}} \quad (14.2)$$

Si on utilise des ultrasons, la différence de fréquence est donnée dans les deux cas par la relation approchée :

$$\Delta v = |v_R - v_E| \approx \frac{2v_E V}{c} \quad (14.3)$$

## 14.3 OPPH

### 14.3.1 Notations complexes

On repart directement de l'équation de d'Alembert, on montre la relation de dispersion. Montrer que la vitesse de phase est indépendante de la pulsation. Propagation non dispersive. C'est cool, car on peut donc les utiliser pour les télécommunications. Ondes longitudinales.

### 14.3.2 Notion d'impédance acoustique

Du système couplé on en déduit la relation  $p = \rho_0 c v_1$ . On définit l'impédance  $Z$  qui quantifie le couplage entre les deux grandeurs. Donner des ordres de grandeurs. On peut insister sur l'importance de l'impédance, ne dépend que du milieu et permet de connaître la perturbation en  $\mu$  en fonction de celle  $v$ . Elle va nous permettre de traduire le comportement des ondes aux interfaces entre différents milieux. Ce qui nous intéresse ce n'est pas la perturbation en soit mais l'énergie transportée par l'onde acoustique. On peut proposer un exercice d'adaptation d'impédance dans les échographie.

### 14.3.3 Aspect énergétique

#### Puissance transférée à travers une surface

On admet les expression de densité d'énergie volumique, on démontre l'équation de continuité :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = 0. \quad (14.4)$$

### 14.3.4 Intensité sonore

Une fois le vecteur de Poynting explicité, on donne la signification de l'intensité sonore à partir du vecteur de Poynting ainsi qu'en décibels.

## 14.4 Production, transmission et détection d'une onde sonore

### 14.4.1 Ondes sphériques

Ondes sonores à symétrie sphérique produite par une sphère dont le rayon varie. On applique de l'équation de D'Alembert en sphérique. On montre que l'amplitude de l'onde décroît en  $1/r$  et l'intensité en  $1/r^2$ . On suit le Dunod de PC, jusqu'à trouver l'intensité sonore en décibels en fonction des grandeurs  $I = \log \left( \frac{a^2 \omega^4 r_0^4}{2cr^2 I_0} \right)$  On peut changer  $a$  et  $\omega$ . hautes fréquences *agrand*. Pour les hautes fréquences  $a$  varie beaucoup. mais on peut changer le rayon de la sphère pulsante pour obtenir une variation d'amplitude  $a$  plus faible : Application aux Hauts parleurs présents sur les chaîne Hifi.

### 14.4.2 Réflexion, transmission application à l'échographie médicale : adaptation d'impédance

On suppose On résout l'exercice du TD de PASS, on complète avec l'étude documentaire du TOUT en Un de PSI. 2020.

## 14.5 Conclusion

Les ondes acoustiques sont des solutions de l'équation de d'Alembert comme EM. Mais différentes ce sont des ondes longitudinales qui nécessitent d'un milieu pour se propager. Elles sont très importantes pour notre société lié à la palette d'application : télécom, imagerie médicale etc.

# Chapitre 15

## Leçon 15 : Propagation guidée des ondes

---

### Niveau :

L1/L2

### Prérequis :

- Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs
- Réflexion sur un conducteur parfait
- Ondes acoustiques
- Fibre optique à saut d'indice

### Références :

- Cours d'Etienne Thibierge sur les ondes pour la prépa Agreg de Lyon.
  - BUP 742
  - Dunod PC
  - Sujet Agreg 2009/2004
- 

### Sommaire

---

<b>15.1 Propagation guidée d'ondes acoustiques . . . . .</b>	<b>64</b>
15.1.1 Intérêt du guide d'onde . . . . .	64
15.1.2 Mise en équations . . . . .	65
15.1.3 Recherche de l'onde sonore . . . . .	66
15.1.4 Structure des ondes dans les guides d'onde . . . . .	67
15.1.5 Vitesse de phase et de groupe . . . . .	68
<b>15.2 Propagation guidée d'une onde électromagnétique . . . . .</b>	<b>69</b>
15.2.1 Fibre optique à saut d'indice . . . . .	69
15.2.2 Guide d'une onde électromagnétique . . . . .	70
15.2.3 Étude d'un mode transverse électrique . . . . .	71
15.2.4 Relation de dispersion . . . . .	72
15.2.5 Vitesses de groupe et de phase . . . . .	72
<b>15.3 Conclusion . . . . .</b>	<b>72</b>

---

### Introduction

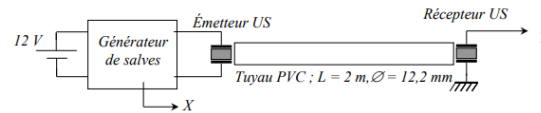
#### 15.1 Propagation guidée d'ondes acoustiques

##### 15.1.1 Intérêt du guide d'onde

*On règle le générateur de salves pour produire 5 à 10 pulses et on observe l'amplitude du signal transmis Y avec et sans le tube. On doit récupérer un signal plus fort avec le tube*



(intérêt du guidage) et constater la présence d'au moins deux trains d'ondes si on augmente la sensibilité de la voie Y



**Fig. 15.1** – Manipulation-guidage d'une onde acoustique

### Observations :

- On observe à l'oscilloscope le signal émis par l'émetteur et le signal reçu par le récepteur ;
- On note l'amplitude du signal émis par rapport au signal reçu par l'émetteur. Signal reçu nettement plus faible que le signal reçu.
- On peut vérifier que  $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}$
- Mesurer l'amplitude à deux distances différents (*ex* :  $L = 15 \text{ cm}$  et  $L = 41 \text{ cm}$ )
- Comparer avec la prédiction donnée par la conservation de l'énergie.
- Mettre le guide d'onde. Mesurer l'amplitude du signal. Et montrer que l'amplitude est beaucoup plus grande.
- Remarquons l'apparition de signaux supplémentaires derrière le fondamental.

Transition : Le signal de l'onde sonore est transmis avec moins de pertes d'amplitudes grâce au guide d'onde. En revanche pour faire cela, nous avons dû imposer des conditions strictes sur l'onde. Il en résulte un signal plus fort certes mais dispersé.

## 15.1.2 Mise en équations

On se propose de faire l'étude analytique de la propagation d'une onde sonore dans un guide rectangulaire.

### Approximation des ondes sonores

Pour réaliser cette étude, nous allons considérer que l'onde acoustique est une petite perturbation par rapport à l'état d'équilibre :

- Fluide considéré comme parfait ;
- La pesanteur est négligée ;
- $\frac{p_1}{p_0} \ll 1$  ;

On peut comparer l'état d'équilibre  $P_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$  au seuil de douleur qui est de l'ordre de  $20 \text{ Pa}$ , et l'autre limite le seuil minimum de l'audible  $2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ .

- $\frac{v_1}{c} \ll 1$  avec  $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}$  ;
- $\frac{\mu_1}{\mu_0} \ll 0$ .

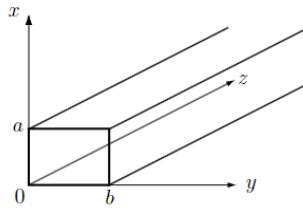
### Mise en équation

#### Équation de d'Alembert

$$\Delta p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \quad (15.1)$$

La démonstration sera dans les pré-requis. La noter quand même pendant la préparation pour se préparer aux questions éventuelles. Notamment pour les hypothèses que l'on met en jeu pour parvenir au résultat !

## Position du problème



**Fig. 15.2** – Schéma du guide Onde acoustique (Agreg 2009)

- $a \ll \lambda$  et  $b \ll \lambda$ .
- Les parois imposent la condition aux limites tel que  $\vec{v} \cdot \vec{n}$

### 15.1.3 Recherche de l'onde sonore

#### Solution de l'équation de d'Alembert

On cherche une solution stationnaire à l'équation de propagation des ondes acoustiques appliquée à ce guide d'onde. Pour ce faire on cherche une solution du type :

$$p_1(x, y, z, t) = F(x)G(y)H(z)e^{j\omega t} \quad (15.2)$$

On remplace cette expression dans l'équation de d'Alembert et il vient :

$$F''(x)G(y)H(z)e^{j\omega t} + F(x)G''(y)H(z)e^{j\omega t} + F(x)G(y)H''(z)e^{j\omega t} = -\frac{\omega^2}{c^2}F(x)G(y)H(z)e^{j\omega t}. \quad (15.3)$$

On divise par  $p_1$  :

$$\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} + \frac{H''}{H} = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

Étant donné que les variables  $x, y$  et  $z$  sont indépendantes les unes des autres, alors  $\frac{F''}{F}, \frac{G''}{G}, \frac{H''}{H}$  sont égales à des constantes. Dans ce cas on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{F(x)} \frac{d^2 F}{dx^2} = -k_x^2 \\ \frac{1}{G(y)} \frac{d^2 G}{dy^2} = -k_y^2 \\ \frac{1}{H(z)} \frac{d^2 H}{dz^2} = -k_z^2 \end{cases} \quad (15.4)$$

avec

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

1111 Pour résoudre ces équations nous avons besoin des conditions aux limites qui imposent que  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ . La vitesse est tangente à la paroi, par conséquent  $v_x$  et  $v_y$  sont nuls et  $\partial p / \partial n = 0$  ( $\mu_0 c \vec{v}_1 = p_1$ ) soit :

$$F'(x=0) = F'(x=a) = 0 \text{ et } G'(y=0) = G'(y=b) = 0$$

- Si  $k_x^2 < 0$  le discriminant est positif et les solutions sont de la forme d'une somme d'exponentielles réelles. Cette solution ne peut pas s'annuler deux fois donc la solution est nulle.

- Si  $k_x^2$  est positif le discriminant est négatif et donc les solutions de l'équation sont des solutions sous la forme d'une somme de cosinus et de sinus ou d'exponentielles complexes.

$$F(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \quad (15.5)$$

En vue des conditions aux limites il vient :

$$F(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{a}\right) \text{ avec } n \in \mathbb{N} \quad (15.6)$$

En suivant le même raisonnement il vient pour  $G(y)$  :

$$G(y) = \cos\left(\frac{m\pi}{b}\right) \text{ avec } m \in \mathbb{N} \quad (15.7)$$

Enfin on écrira  $H(z)$  sous la forme :

$$H(z) = A_{m,n} e^{jk_z z} + B_{m,n} e^{-jk_z z} \quad (15.8)$$

avec

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2$$

On en déduit  $p_{m,n}$  tel que :

$$p_{m,n} = \cos\left(\frac{n\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}\right) \left[ A_{m,n} e^{j(\omega t + k_z z)} + B_{m,n} e^{j(\omega t - k_z z)} \right] \quad (15.9)$$

Et la solution  $p_1$  :

$$p_1(x, y, z, t) = \sum_n \sum_m p_{m,n}. \quad (15.10)$$

### 15.1.4 Structure des ondes dans les guides d'onde

#### Relation de dispersion

À une fréquence donnée  $\omega = 2\pi f$  nous trouvons donc plusieurs modes de propagation, caractérisés par  $n$ . La relation entre  $\omega, k$  et  $n$  est donnée par la **relation de dispersion**.

#### Relation de dispersion

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

$$k_z^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \quad (15.11)$$

ou encore :

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2} \quad (15.12)$$

Chacun des termes de la relation de dispersion est positif, ce qui contraint les valeurs permises de  $n$  pour un  $\omega$  donné. Donc une onde de fréquence donnée ne peut se propager que dans un nombre fini de modes.

Il faut commenter le fait que cette relation de dispersion est très générale. Valable pour les ondes électromagnétiques, notamment cas du guide d'onde rectangulaire. Étudions le cas tel que  $m = 0$ . Exprimer la relation de coupure et la calculer. Place les différentes pulsations de coupure sur le graphique au fur et à mesure.

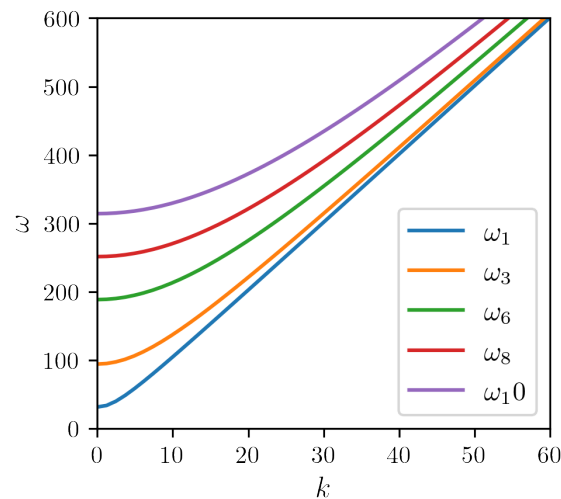


Fig. 15.3 – Relation de dispersion

### 15.1.5 Vitesse de phase et de groupe

#### Vitesse de phase et de groupe

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_z} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_n^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2}} > c \quad (15.13)$$

L'information n'est pas contenue dans la phase c'est l'enveloppe qui code l'information.

$$v_\phi = \frac{d\omega}{dk_z} = c \frac{\lambda}{\lambda_g} < c \quad (15.14)$$

$$k_z^2 < \frac{\omega^2}{c^2} \text{ donc } \lambda_g > \lambda$$

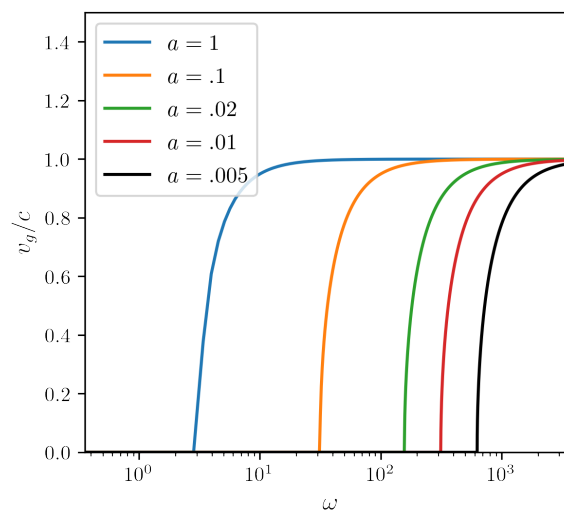


Fig. 15.4 – Vitesse de groupe en fonction de l'espacement entre les deux plans conducteurs.

## Cas du guide d'onde circulaire

Voir poly de Philippe ou BUP 742

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left( \frac{\mu_{nm}}{2\pi a} \right)^2 \quad (15.15)$$

Pour que l'onde se propage dans ce guide d'onde il faut que  $\omega > \omega_c$  soit  $\lambda_c > \lambda$  :

$$\frac{\pi d}{\mu_{m,n}} > \lambda$$

Ce qui donne

$$d > \frac{\mu_{n,m}}{\pi} \lambda$$

Dans le tube le mode supérieur au mode fondamentale est le mode  $\mu_{1,1} = 1.84$ . Ce qui nous donne :

$$d > 0.59\lambda = 5\text{mm} \quad (15.16)$$

- tube de diamètre 4.5 mm : monomode
- tube de 17 mm plusieurs modes sont visibles.
- On mesure les différentes vitesses observées et on essaye de les relier aux vitesses calculées pour le guide d'onde circulaire à l'aide du BUP 742

Ordre n de la fonction	$\mu_{01}$	$\mu_{02}$	$\mu_{03}$	$\mu_{04}$
0	0	3,83	7,01	10,2
1	1,84	5,33	8,54	
2	3,05	6,71	9,97	
3	4,20	8,01		
4	5,32	9,28		
5	6,42			
6	7,50			

**Fig. 15.5** – tableau des  $\mu_{m,n}$

du coefficient  $\mu_{n,m}$  on en déduit  $\lambda_c$  qui nous permet de calculer  $\lambda_g$  et enfin la vitesse correspondante. Pour le tuyau de diamètre 17 mm on peut trouver 6 modes différents :

1. 02 :  $v = 270$  m/s
2. 11 :  $v = 324.7$  m/s
3. 12 :  $v = 179/5$  m/s
4. 21 :  $v = 297.3$  m/s
5. 31 :  $v = 253.5$  m/s
6. 41 :  $v = 180.5$  m/s

## 15.2 Propagation guidée d'une onde électromagnétique

S'il nous reste du temps on peut parler de la fibre optique à gradient d'indice. Application majeure dans notre société, télécommunications... On explique au moins le principe de guidage de la lumière à l'aide d'un schéma. Si plus de temps disponible j'en doute. On peut parler des modes de propagation de l'onde électromagnétique.

### 15.2.1 Fibre optique à saut d'indice

On parlera de la fibre à saut d'indice. Pour que le guidage dans le cœur de la fibre soit efficace il ne faut pas que l'amplitude de l'onde soit diminuée par la partie réfractée : on doit se placer dans les conditions de **réflexion totale** :  $n_2 > n_1$  et l'angle  $\theta$  tel que :  $\cos \theta > \frac{n_2}{n_1}$ .

**Schéma de la fibre optique à saut d'indice à placer ici**

Les angles d'incidence permettant la propagation dans la fibre prennent des valeurs discrètes. Chaque valeur de l'indice  $n$  définit **un mode de propagation** dans la fibre optique.

### 15.2.2 Guide d'onde électromagnétique

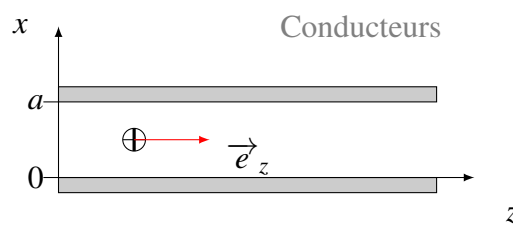
On pourrait étudier directement le problème précédent à l'aide de l'électromagnétisme mais calculs compliqués.

#### Position du problème

1. On considère que les deux plans conducteurs sont parfaits. Il n'y a pas de perte d'énergie lorsque l'onde se réfléchit sur la paroi (=absence d'onde évanescente).
2. On suppose que le milieu où se propage l'onde est vide  $n = 1$ .

**O**

n étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide limité par deux plans conducteurs parfaits.



**Fig. 15.6** – Schéma du guide d'onde électromagnétique

Équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (15.17)$$

valable aussi pour le champ  $\vec{B}$

**C**

e démontre à partir des équations de Maxwell en prenant le rotationnel du rotationnel de  $\vec{E}$ . On intervertit les symboles opératoires.

#### Conditions aux limites

Ces ondes, pour se propager dans le guide, doivent être compatibles avec les conditions aux limites imposées par les relations de passage entre le vide et les conducteurs parfaits.

**Relation de passage :**

- Continuité de la composante normale de  $\vec{B}$  (en  $x = 0$  et en  $x = a$ )

$$\vec{B}(x=a) \cdot (-\vec{e}_x) = 0 = \vec{B}(x=0) \cdot (+\vec{e}_x)$$

- Continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  (en  $x = 0$  et en  $x = a$ )

$$\vec{E}(x=a) \wedge (-\vec{e}_x) = 0 = \vec{E}(x=0) \wedge (+\vec{e}_x)$$

On suppose que l'on a invariance par translation suivant  $(Oy)$ , et donc les champs ne dépendent pas de la variable  $y$ .

## Modes Transverses Électriques et Magnétiques

On peut mettre en évidence deux groupes d'ondes les ondes Transverses Électriques et Magnétiques.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \dots$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \dots$$

On voit apparaître deux groupes ( $E_y, B_x, B_z$ ) que l'on appellera le mode transverse électrique TE. Et le groupe ( $B_y, E_x, E_z$ ) le groupe transverse magnétique. On dit que le champ électrique du groupe TE est transverse à la direction de propagation.

### 15.2.3 Étude d'un mode transverse électrique

La linéarité des équations de d'Alembert et les conditions aux limites permettent d'étudier séparément les ondes TE et TM. On cherche une solution de l'équation de propagation sous la forme d'une onde progressive qui se propage dans la direction  $\vec{e}_z$  sous la forme :

$$\vec{E}_y = E(x)e^{j(\omega t - kx)}\vec{e}_y \quad (15.18)$$

Pour trouver la forme de  $E(x)$ , on remplace la forme de la solution dans l'équation de propagation. Il vient :

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E(x) = 0.$$

On remarque que la nature des solutions de cette équation dépend du signe de  $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ .

1. si  $K < 0$ , dans ce cas la solution est de la forme :

$$E(x) = \alpha e^{Kx} + \beta e^{-Kx}$$

Cette solution ne peut pas s'annuler en  $x = 0$  et en  $x = a$ , donc cette solution est nulle.

2. si  $K = 0$ , alors la solution est affine :

$$E(x) = \alpha x + \beta$$

Même conclusion

3. si  $K > 0$ , Dans ce cas la solution s'écrit comme suit :

$$E(x) = \alpha \cos(Kx) + \beta \sin(Kx).$$

Les conditions aux limites :  $E(x=0) = E(x=a) = 0$ , imposent des solutions telles que  $A = 0$  et  $Ka = n\pi$   $n \in \mathbb{N}$ . Par conséquent, une solution de l'équation de d'Alembert est :

$$\vec{E} = E_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{j(\omega t - kx)}\vec{e}_y \quad (15.19)$$

On peut déterminer le champ  $\vec{B}$  en calculant :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

On trouve :

$$\vec{B} = jE_{0,n} \frac{n\pi}{a} \cos(Kx)e^{j(\omega t - kx)}\vec{e}_x + \frac{k}{\omega} E_{0,n} \sin(Kx)e^{j(\omega t - kx)}\vec{e}_z \quad (15.20)$$

Les conditions aux limites nous donnent la structure de l'onde. Il n'y a pas que le milieu de propagation qui influe mais aussi les conditions aux bords.

### 15.2.4 Relation de dispersion

On retrouve la même relation de dispersion que précédemment.

**Relation de dispersion :**

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2. \quad (15.21)$$

$TE_n$  ne peuvent se propager que si

$$\omega \geq n \frac{n\pi c}{a}$$

Aucune onde de  $\omega < \frac{\pi c}{a}$  ne peut se propager.

**Remarque :**

le cas où  $k^2 < 0$  correspond au cas des ondes évanescentes.

### 15.2.5 Vitesses de groupe et de phase

Un paquet d'ondes est constitué du produit d'une onde **porteuse** modulée par une **enveloppe**. L'onde porteuse se propage à la **vitesse de phase**, tandis que l'enveloppe se propage à la **vitesse de groupe**.

Schéma porteuse / enveloppe

On peut réécrire la relation de dispersion tel que :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{\omega_n^2}{c^2}$$

De sorte que :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_n^2}{c^2} \quad (15.22)$$

**Vitesse de phase  $v_\phi$  :**

Par définition La vitesse de phase s'écrit :

$$v_{\phi,n} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2}} \quad (15.23)$$

**Vitesse de groupe  $v_g$  :**

Par définition la vitesse de groupe s'écrit :

$$v_{g,n} = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2}. \quad (15.24)$$

## 15.3 Conclusion

On a vu comment guider une onde, quelles étaient les caractéristiques de la propagation : différents modes, et que le confinement provoquait une dispersion. On a ici considéré des conducteurs parfaits mais en réalité, il y a tjrs un phénomène de transmission de l'onde.



# Chapitre 16

## Leçon 16 : microscopie optique

---

### Niveau :

- Première année CPGE

### Pré-requis :

- Optique géométrique

### Références :

- Optique, une approche expérimentale et pratique, S.Houard.
  - La microscopie optique moderne, G.Wastiaux, Tec & Doc, Lavoisier, 1994
  - J.Ph. Pérez. Optique : fondements et applications. Dunod, 2011.
  - Sextant. Optique expérimentale. Hermann, 1997.
  - L. Aigouy. Les nouvelles microscopies : à la découverte du nanomonde. Belin, 2006.
  - À la découverte de l'univers Comins, De Boeck(photo)
  - Les instruments d'optique, étude théorique, expérimentale et pratique Luc Dettwiller
- 

### Sommaire

---

<b>16.1 Introduction</b>	<b>74</b>
<b>16.2 Lois de l'optique géométrique</b>	<b>74</b>
16.2.1 Lois de Snell-Descartes	74
16.2.2 Lentille mince	74
<b>16.3 Microscope optique (à deux lentilles)</b>	<b>75</b>
16.3.1 Description, schéma, montage	75
16.3.2 Grossissement, Grandissement, Puissance et profondeur de champ	75
16.3.3 Ouverture numérique	77
<b>16.4 Limites et Aberrations</b>	<b>77</b>
16.4.1 Limite du pouvoir de résolution, critère de Rayleigh	77
16.4.2 Aberration sphériques, chromatiques et profondeur de champ	77
<b>16.5 Observation d'objets transparents</b>	<b>78</b>
16.5.1 Microscopie en champ sombre	78
16.5.2 Contraste de phase	78
16.5.3 Microscopie confocale	79
<b>16.6 Microscope en champ proche</b>	<b>79</b>
16.6.1 Diffraction d'une onde plane	80
16.6.2 Ondes évanescente	80
16.6.3 Réalisation pratique	80
<b>16.7 Conclusion</b>	<b>80</b>

---

## 16.1 Introduction

Comment peut-on voir le monde microscopique (micro petit en grec)? C'est une question importante pour de nombreux secteurs de la recherche, en particulier en biologie, mais pas que ! Informatique, géologie, métallurgie etc...

1. image grossie d'un petit objet, exemple cheveux ?
2. détails de l'image

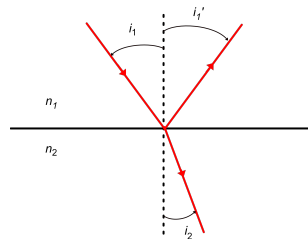
Introduction historique :

1. 1665, Hooke, microscope composé mais de mauvaise qualité
2. 1830, Banks, microscope simple mais grand pouvoir de résolution.
3. etc ...

L'objet de cette leçon n'est pas de présenter une liste exhaustive des techniques de microscopies optiques mais plutôt de s'attarder sur le dispositif classique du microscope à deux lentilles pour en comprendre les enjeux et les limites, et d'étudier les réponses modernes aux différents problèmes posés, notamment les questions de résolution et de contraste.

## 16.2 Lois de l'optique géométrique

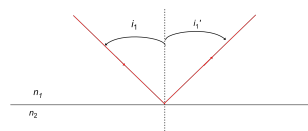
### 16.2.1 Lois de Snell-Descartes



#### Lois de Snell-Descartes :

1. Les rayons, incidents, réfléchis et réfractés sont coplanaires ;
2.  $i_1 = -i_1'$  ;
3.  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ .

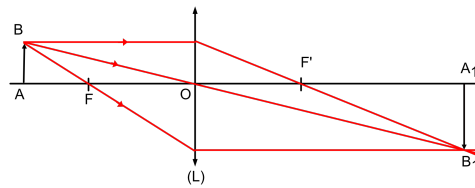
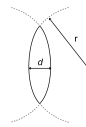
Il est possible d'obtenir une réflexion totale à l'interface si l'angle d'incidence  $i_1 > i_{lim}$  lorsque  $n_2 > n_1$  :



### 16.2.2 Lentille mince

#### lentille mince :

Une lentille mince est une lentille pour laquelle  $d \ll r$ .



- Donner d'autres exemples de lentilles convergentes et divergentes.

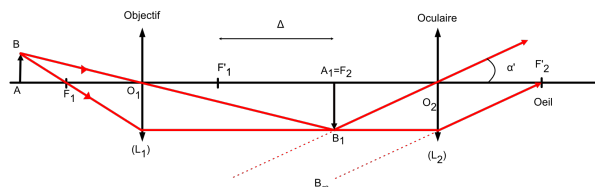
### Relations de conjugaison pour une lentille mince :

Dans les **conditions de Gauss** on a :

- $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$  ;
- $\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -f'^2$  ;

## 16.3 Microscope optique (à deux lentilles)

### 16.3.1 Description, schéma, montage



But : exagérer les angles sous lesquels les différents points de l'objets sont vus pour que l'image de l'objet sur la rétine soit la plus grande.

### 16.3.2 Grossissement, Grandissement, Puissance et profondeur de champ

#### Grandissement :

Le Grandissement  $\gamma$  de l'objectif est défini par la relation suivante :

$$\gamma = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{A_1B_1}{O_1I} = -\frac{\Delta}{f'_1}$$

.

Manips : Étude d'un objectif et détermination de la distance focale.

**Grossissement commercial :**

Pour l'oculaire l'image est à l' $\infty$ . On définit le grossissement comme le rapport de l'angle sous lequel on voit l'objet à travers l'instrument  $\alpha'$  et l'angle sous lequel on voit l'objet à l'oeil nu  $\alpha$  à une distance de 25 cm.

$$G_{c,oc} = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

$d_m$  étant la distance limite d'accommodation.

**Puissance intrinsèque :** La puissance intrinsèque d'un microscope est la valeur absolue du rapport entre l'angle sous lequel on voit l'objet à travers le microscope et la taille de l'objet

$$P_i = \frac{\alpha'}{AB}$$

Pour le microscope étudié ici, dans le triangle ( $O_2A_1AB_1$ ) on a :

$$\tan \alpha' \approx \alpha' = \frac{A_1B_1}{f'_{oc}}.$$

Donc

$$G_{c,oc} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\frac{A_1B_1}{f'_{oc}}}{\frac{A_1B_1}{dm}} = \frac{dm}{f'_{oc}}$$

où  $dm$  est la distance minimale d'accommodation de l'oeil ( $dm = 25$  cm). De plus :

$$P_i = \frac{\alpha'}{AB} = \frac{A_1B_1}{AB} \frac{\alpha'}{A_1B_1} = |\gamma| \frac{1}{f'_{oc}} = |\gamma| P_{oc}$$

Par conséquent la puissance du microscope est mesurée par le produit du grossissement de l'objectif par la puissance de l'oculaire.

Pour le grossissement du microscope dans le cas où l'oeil observe l'objet à l'infini à travers l'oculaire. C'est à dire que  $A_1 = F_2$ .

$$G_{com,mic} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\frac{A_1B_1}{f'_{oc}}}{\frac{AB}{dm}} = \frac{A_1B_1}{AB} \frac{dm}{f'_{oc}} = \frac{F'_1 F_2}{O_1 F'_1} \frac{dm}{f'_{oc}} = \frac{\Delta dm}{f'_{ob} f'_{oc}}$$

**Grossissement du microscope :**

On la relation suivante pour le grossissement du microscope :

$$G_{com,mic} = |\gamma_{ob}| G_{c,oc}$$

, de la même façon on obtient :

$$P_i = \frac{\Delta}{f'_{ob} f'_{oc}}$$

Manips : (faire schéma) Mesure du grossissement commercial à l'aide d'une mire micrométrique :  $G_c = \frac{D \times 0.25(m)}{d}$

### 16.3.3 Ouverture numérique

L'objectif est la pièce maîtresse du microscope. L'objectif contribue au grossissement mais surtout détermine le pouvoir de résolution du microscope c'est-à-dire sa capacité à distinguer 2 objets. Le pouvoir de résolution est directement lié à l'ouverture numérique définie par :

**Ouverture numérique :**

$$O.N = n \sin \theta$$

Avec  $n$  l'indice optique du milieu et  $\theta$  l'angle maximum par rapport à l'axe optique.

Manip : Détermination expérimentale de l'ouverture numérique.

## 16.4 Limites et Aberrations

### 16.4.1 Limite du pouvoir de résolution, critère de Rayleigh

la lumière n'est pas géométrique mais ondulatoire. L'image d'un point obtenue à travers un instrument optique n'est pas un point mais une tâche appelée tâche d'Airy.

**Critère de Rayleigh :**

Deux points A et B sont résolus si les tâches d'Airy entourant  $A'$  et  $B'$  ne se recouvrent pas à plus de leur demi largeur. On peut montrer que :

$$AB = 1.22 \frac{\lambda}{2O.N} = 1.22 \frac{\lambda}{2n \sin \theta}.$$

Deux points A et B peuvent être vu séparés à travers le microscope, à condition que l'angle sous lequel est vue l'image des deux points soit supérieur à  $3 \cdot 10^{-4}$  rad. C'est le pouvoir de résolution du microscope. Pour un microscope dont le grossissement  $G = 400$ .

$$G_c = \frac{\alpha'}{\alpha} \text{ avec } \alpha = \frac{AB}{0.25}.$$

Dans ce cas  $AB = \frac{\alpha' \times 0.25}{400} = 0.2 \text{ } \mu\text{m}$  Le pouvoir de résolution du microscope ne dépend que du grossissement commercial. Cependant, on ne peut pas augmenter le pouvoir de résolution du microscope en augmentant le grossissement commercial. A partir d'un certain grossissement (de l'ordre de 1500), les phénomènes de diffraction ne sont plus négligeables et ils limitent le pouvoir de résolution des microscopes.

Par conséquent, pour diminuer AB, on peut soit :

1. diminuer  $\lambda$  ;
2. augmenter O.N. ( $n$  ou  $\theta$ ).

Conclusion : Même dans les meilleures conditions, la résolution optique reste limitée à la demi longueur d'onde. On ne peut donc pas avoir des microscopes optiques infiniment grossissant avec des lentilles classiques.

### 16.4.2 Aberration sphériques, chromatiques et profondeur de champ

**Aberration sphérique :** Si l'on envoie de la lumière monochromatique sur une lentille convexe de forme sphérique, tous les rayons provenant d'un point ne se concentrent pas en un point. Ils convergent en un point différent suivant que le rayon passe plus ou moins proche du centre de la lentille. Il faut bien noter que ces aberrations ne sont pas intrinsèques au système : elles sont liées au fait qu'on ne travaille pas vraiment dans les conditions de Gauss !

**Aberrations chromatiques :** (longitudinale/connaitre la transversale) : On utilise sur les microscopes modernes de la lumière blanche (polychromatique). Or chaque longueur d'onde est plus ou moins réfractée lors de son passage au travers de la lentille (la plus réfractée est la bleue, d'après la loi de Cauchy). Elles sont corrigées en faisant des doublets achromates comme le doublet de Fraunhofer. Cela corrige à l'ordre un, les microscopes dits **apochromats** réalisent la superposition des plans focaux pour trois longueurs d'onde distinctes.

En pratique, il est difficile d'obtenir des valeurs d'ouverture numérique supérieures à 0,95 avec des objectifs secs (cf. MicroscopyU). Des ouvertures numériques plus élevées peuvent être obtenues en augmentant l'indice  $n$  de réfraction du support de formation d'image entre l'échantillon et la lentille frontale de l'objectif. Il existe désormais des objectifs de microscope permettant d'imager sur d'autres supports, tels que l'eau (indice de réfraction  $n = 1.33$ ), la glycérine (indice de réfraction  $n = 1.47$ ) et l'huile d'immersion (indice de réfraction  $n = 1.51$ ). slide Noter d'ailleurs la remarque le fait que c'est bien sûr l'objectif qui limite la résolution du microscope : si il n'est pas bon l'oculaire ne rattrapera pas les défauts ! On peut aussi insister sur la subjectivité du critère de Rayleigh : on fait aujourd'hui des détecteurs qui ont une bien meilleure résolution que cela !

Limite de résolution verticale Lien entre profondeur de champ et ouverture numérique.

#### Transition :

Transition : Il y a une question qu'on ne s'est pas posée du tout dans le microscope précédent, c'est celle du contraste. Pourtant, la plupart des objets que l'on veut observer sont transparents et a priori sans effet sur l'intensité lumineuse. Il faut alors travailler avec le seul élément optique modifié à la traversée de l'échantillon par l'onde lumineuse : la phase !

## 16.5 Observation d'objets transparents

### 16.5.1 Microscopie en champ sombre

La microscopie en champ sombre est une variante de la microscopie optique connue déjà depuis plus de 250 ans. Elle conduit à un arrière-plan sombre de l'image, sur lequel les structures à observer se détachent en clair. On peut ainsi obtenir d'échantillons transparents, avec un faible contraste, des images bien résolues, contrastées, sans nécessiter une coloration préalable de l'objet.

Le principe de la microscopie à fond sombre repose sur le fait que les objets ne font pas qu'absorber la lumière, mais aussi qu'ils en dévient une partie. Si l'éclairage est disposé de façon que les rayons directs, non déviés, n'atteignent pas l'objectif, l'observateur ne voit que des rayons déviés.

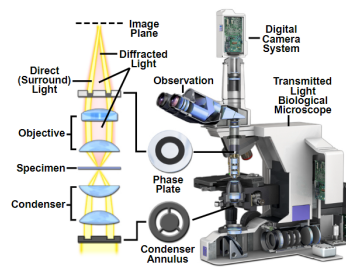
### 16.5.2 Contraste de phase

Il faut prendre l'image du microscope et voir qui est l'image de qui, comment les rayons progressent sans échantillon, interpréter l'influence de l'échantillon et ensuite parler de la phase, de comment on la gère et de son influence sur l'intensité. Si l'objet est transparent il ne modifie pas l'intensité du signal mais sa phase seulement et du coup ça se voit pas ! [77], p. 191 - Intro historique, puis TD de Sayrin : on explique le principe de l'expérience d'Abbe et du filtrage sur slide. On peut utiliser cette méthode en plaçant un objet de phase PWP (ex : lame de polarisation), pour modifier les contrastes. Calculs de Clément Sayrin avec la vibration lumineuse directe et diffractée : effet d'une  $\pi/4$  : l'intensité dépend de la phase, on y a directement accès. L'image qu'on observe à l'écran a un contraste proportionnel à la phase

La microscopie à contraste de phase a été décrite par Frits Zernike en 1934. Cette technique permet de produire des images très contrastées d'échantillons transparents comme des cellules.

Technique utilisée dans une très large gamme d'applications en biologie et médecine. Pour

Figure 1 - Phase Contrast Microscope Configuration



**Fig. 16.1** – Une lampe a tungsten-halogen produit une lumière presque cohérente, dirigée vers une lentille qui va condensé la lumière sur un anneau placé sur le plan focal de la lentille. La lumière traverse le spécimen à observer. Soit la lumière passe ou est diffractée et retardée en phase par les structures présentes dans le spécimen. Les rayons sont collectés par l'objectif ; objectif sont séparés à l'arrière du plan focal par une plaque de phase et dirigés vers le plan focal image pour former l'image finale de contraste de phase qui sera observée.

visualiser des cellules vivantes, des tissus, et des microorganismes transparents. Les différents constituants des organismes peuvent être distingués et observés grâce à cette méthode. Grâce à cet outil on peut également détecter et suivre l'évolution d'une tumeur.

Cette technique permet de traduire des minuscules variations de la phase de l'onde lumineuse en des variations d'amplitudes. Les différents objets sont alors visualisés par différence de contraste. Ceci permet de visualiser des objets microscopiques comme les cellules dans leur environnement naturel sans avoir à les tuer ou les colorer.

### 16.5.3 Microscopie confocale

Le microscope à fluorescence permet de détecter la présence et la localisation de molécules fluorescentes dans un échantillon. Le microscope confocal est une variante permettant de détecter et de réaliser des images de l'échantillon à trois dimensions avec une bonne résolution.

Dans ces microscopes, l'échantillon contient des molécules fluorescentes. Celles-ci sont excitées par un faisceau lumineux et leur fluorescence est alors détectée. Dans le microscope confocal, l'excitation est focalisée en un point précis de l'échantillon puis balayée dans tout le volume, permettant ainsi la reconstruction d'une image à trois dimensions.

agit comme un couteau optique : examiner l'intérieur des structures épaisses + découper l'échantillon dans plusieurs directions : image 3D. Video du principe : <https://toutestquantique.fr/fluorescent-et-confocal/Principe> général : reproduction point par point d'un fin diaphragme dans le plan de l'objet. Pour obtenir une image totale, le point lumineux balaie la surface de l'objet au moyen de miroirs. Seules les informations du plan focal parviennent au détecteur : microscope confocal.

Ça marche super bien en fluorescence car la lumière diffusée est pratiquement éliminée. PWP Vidéo de la mitose d'une cellule : plus de destruction de l'échantillon, suivre l'évolution et en plus avec chaque couleur on sait qui est qui.

## 16.6 Microscope en champ proche

<http://ressources.agreg.phys.ens.fr/media/ressources/RessourceFichiers/14-Forum2011.pdf>

**16.6.1 Diffraction d'une onde plane****16.6.2 Ondes évanescente****16.6.3 Réalisation pratique****16.7 Conclusion**

Recap + limites + nouvelles techniques : microscopies non optiques



# Chapitre 17

## Leçon 17 : Interférence à deux ondes

---

Niveau :

- CPGE

Pré-requis :

- Electromagnetisme
- Optique

Bibliographie :

- BFR *Optique, Chap 10*
  - Pérez *Optique*
  - Dunod PC
  - [https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/lumiere/interference\\_lumiere.php](https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/lumiere/interference_lumiere.php)
- 

### Sommaire

---

<b>17.1 Introduction</b>	<b>81</b>
<b>17.2 Interférences lumineuses</b>	<b>81</b>
17.2.1 Superposition de deux ondes lumineuses	81
17.2.2 Notion de cohérence, conditions d'interférences	82
17.2.3 Formule de Fresnel	82
17.2.4 Observations des interférences : hyperboloïdes de révolution	82
<b>17.3 Mise en œuvre expérimentale : Fentes d'Young</b>	<b>82</b>
17.3.1 Dispositif expérimental	82
17.3.2 Figures d'interférences	83
17.3.3 Interfrange	83
<b>17.4 Notion de cohérence</b>	<b>84</b>
17.4.1 Influence de l'étendue spectrale	84
17.4.2 Étendue spatiale	84
17.4.3 Analyse en terme de cohérence	84
<b>17.5 Conclusion</b>	<b>84</b>

---

### 17.1 Introduction

### 17.2 Interférences lumineuses

#### 17.2.1 Superposition de deux ondes lumineuses

Faire le schéma de deux sources distinctes qui rayonnent jusqu'en un point M. Les ondes se propagent depuis chaque source. Expliciter l'équation de l'onde avec la phase, chemin optique. Superposition des deux ondes. On prend l'intensité vibratoire au point M. C'est le produit

des cosinus i.e. le terme d'interférence. On garde pour l'instant les termes temporels qui est traité juste après

### 17.2.2 Notion de cohérence, conditions d'interférences

On applique les formules de trigonométrie. Discuter des temps de réponse des capteurs en fonction du temps de réponse des détecteurs versus fréquence de vibration des ondes. Moyenne sur un grand nombre de périodes.

**Première condition d'interférence :** Les deux sources doivent avoir la même pulsation sinon par d'interférences et leurs intensités s'additionnent.

**Deuxième condition d'interférence :** Les deux sources doivent avoir un déphasage constant ou variant très lentement pour que celui-ci puisse être considéré constant par le détecteur.

#### notion de cohérence

Deux ondes sont cohérentes si leur superposition conduit à un terme d'interférence non nul, même pulsation,  $\Delta\phi = \text{constante}$ . Si ces deux conditions ne sont pas remplies alors incohérences et sommes des intensités.

**RQ :** Il y a une troisième condition d'interférence sur la polarisation de l'onde (à garder pour les questions)

### 17.2.3 Formule de Fresnel

On suppose deux sources lumineuses cohérentes, on définit  $\Delta\phi$ . On calcule l'intensité vibratoire et on encadre ! Parler d'interférences constructives et destructives, représentation graphique en python.

### 17.2.4 Observations des interférences : hyperboloïdes de révolution

voir animation en biblio

## 17.3 Mise en œuvre expérimentale : Fentes d'Young

### 17.3.1 Dispositif expérimental

On considère une source  $S$  de très petite dimension éclaire un écran opaque percé de deux fentes dont les dimensions sont très faibles. D'après les lois de l'optique géométrique on devrait obtenir sur cet écran les traces de  $M_1$  et  $M_2$  des deux rayons  $SS_1$  et  $SS_2$ . Cependant la diffraction intervient du fait des faibles dimensions de  $S_1$  et  $S_2$  et l'on obtient des faisceaux qui se recouvrent. C'est dans cette zone que l'on peut observer des interférences appelée **zone interférentielle**.

$S_1$  et  $S_2$  sont des sources **cohérentes dont les rayons interfèrent** et de même intensité  $I_0$ . Dans le plan de l'écran, on obtient une intensité donnée par :

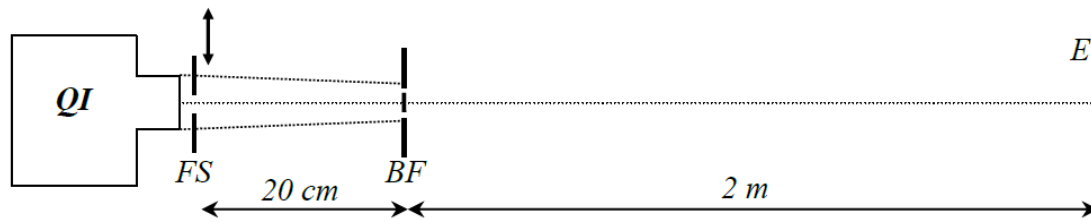
$$I = 2I_0(1 + \cos\phi), \text{ avec } \phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}(S_2M - S_1M). \quad (17.1)$$

On peut calculer la différence de marche entre les deux sources  $\delta$  qui est donnée par :

$$\delta = \frac{ax}{d_2} \quad (17.2)$$

$x$  étant la position verticale sur l'écran. Les franges obtenues sont donc des franges d'interférences rectilignes parallèles à  $Oy$  (perpendiculaire à la direction de  $S_1S_2$ ).

**Manipulation :** Expérience des fentes d'Young avec une lampe spectrale, ou une lumière blanche avec un filtre interférentiel (penser au filtre anti-calorique). On observe des interférences.



**Fig. 17.1** – Schéma du montage des fentes d'Young, poly TP Rennes

### 17.3.2 Figures d'interférences

On cherche à calculer l'éclairement et à le comparer à la figure obtenue.

### 17.3.3 Interfrange

Calcul de l'interfrange. On peut aussi utiliser un spectrophotomètre pour mesurer  $\lambda$ .

Dans ce cas où la fente est éclairée par une source de lumière monochromatique  $\lambda_0$ . Pour  $\delta = p\lambda_0$  on obtient des franges brillantes. Leur position est définie pour  $\frac{ax}{d_2} = p\lambda$  soit :

$$x = p \left( \frac{\lambda_0 d_2}{a} \right)$$

Pour  $p = 0$  et  $x = 0$  on a une frange brillante centrale qui correspond à un ordre d'interférence nul. Les franges brillantes sont séparées par un intervalle régulier :

#### Définition de l'interfrange

$$i = \frac{\lambda_0 d_2}{a} \quad (17.3)$$

#### Mesures

- Interfrange  $i = \pm \text{ mm}$
- Distance fentes-écran  $d_2 = \pm \text{ mm}$

On calcule

$$\lambda = \frac{ia}{d_2}$$

Mesure de l'écartement des deux fentes ou de la longueur d'onde :

$$\lambda_{\text{mes}} = \pm \text{ nm}$$

**Écart normalisé :**

$$E.N. = \frac{\lambda_{\text{mes}} - \lambda_{\text{att}}}{\sqrt{(\Delta\lambda_{\text{mes}}^2 + \Delta\lambda_{\text{att}}^2)}} =$$

## 17.4 Notion de cohérence

### 17.4.1 Influence de l'étendue spectrale

1. Changer le filtre pour un filtre coloré ;
2. Modification de la figure d'interférence

### 17.4.2 Étendue spatiale

On élargit le diaphragme, figure d'interférence modifiée, commenter.

### 17.4.3 Analyse en terme de cohérence

Si la source est une lumière étendue spatialement et/ou spectralement. On obtient dans le plan de l'écran une superposition de phénomènes correspondants aux différentes longueur d'ondes. On obtient alors des phénomènes colorés. Au centre une frange brillante achromatique. Quand on s'éloigne du centre, les phénomènes correspondants aux différentes longueurs d'onde se décalent de plus en plus : les bords des franges se colorent puis les phénomènes se brouillent lorsque les franges brillantes d'autres longueurs d'onde occupent la même place. On obtient du **blanc d'ordre supérieur**.

## 17.5 Conclusion

L'interféromètre des fentes d'Young se prête mal aux expériences en lumière blanche mais est facile à réaliser avec l'interféromètre de Michelson.

# Chapitre 18

## Leçon 18 : Interféromètre à division d'amplitude

---

### Niveau :

- CPGE

### Pré-requis :

- Electromagnetisme
- Optique géométrique
- Optique ondulatoire
- notion de cohérences

### Bibliographie :

- BFR *Optique, Chap 10*
  - Pérez *Optique chap 25*
  - Dunod PC
  - Optique approche experimentale et pratique, Houard, De Boeck
  - Les instruments d'optique, étude théorique, expérimentale et pratique Luc Dettwiller
- 

## Sommaire

---

<b>18.1 Introduction</b>	<b>85</b>
<b>18.2 Principe de l'interférométrie</b>	<b>86</b>
18.2.1 Avantages et inconvénients de la division d'amplitude	86
18.2.2 Franges d'égales inclinaison (BFR,Perez)	86
18.2.3 Frange d'égale épaisseur (franges de Fizeau Perez) (Perez)	86
<b>18.3 Interféromètre de Michelson</b>	<b>86</b>
18.3.1 Présentation du dispositif	86
18.3.2 Configuration en lame d'air	87
18.3.3 Configuration en coin d'air	87
<b>18.4 Fabry pérot</b>	<b>87</b>
<b>18.5 Conclusion</b>	<b>88</b>

---

## 18.1 Introduction

L'obtention d'interférences en optique est délicate et fait apparaître la notion de cohérence entre les vibrations qui doivent interférer. Plusieurs dispositifs permettent de mettre en évidence les interférences : division de front d'onde et division d'amplitude. On présente l'expérience des fentes d'Young. Inconvénients : Sensible à la perte de cohérence spatiale et contraint l'expérimentateur à utiliser des sources de taille réduite, peu de luminosité. On verra que l'on peut pallier à ce problème avec les dispositifs à division d'amplitude.

## 18.2 Principe de l'interférométrie

### 18.2.1 Avantages et inconvénients de la division d'amplitude

Un train d'onde donne deux trains d'onde images. C'est à dire que la surface des deux fronts n'est pas modifiée mais l'intensité est divisée par deux, Comme les deux rayons sont issus de la même source, l'élargissement de la source n'altère pas les interférences. Frange localisée à l'intersection des couples de rayons.

### 18.2.2 Franges d'égales inclinaison (BFR,Perez)

Une source  $S_0$  illumine un système de deux lames de verre, parallèle entre elles distantes de  $e$ , d'épaisseur négligeable devant  $e$ , d'indice  $n$ . On néglige ici les réflexions multiples sur les lames de verre. La lame est éclairée par un rayon incident  $i$ . On cherche à calculer la différence de marche  $\delta$  entre les rayons émergents en  $I$  et  $K$ . Dans la lame le rayon marqué de deux flèches parcourt le trajet supplémentaire  $IJ + JK$ . Dans l'air le rayon marqué d'une flèche parcourt le trajet supplémentaire  $IH$  où  $H$  est la projection de  $K$  sur le rayon marqué d'une flèche. En effet les deux rayons font partie d'un faisceau parallèle d'après le théorème de Malus, la surface d'onde est perpendiculaire à ces rayons.  $H$  et  $K$  appartiennent à la même surface d'onde et la différence de marche dans l'air est représentée par  $IH$ . Finalement :

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = n(IJ + JK) - IH$$

On mène le calcul et on parvient à l'expression de  $\delta$  :

$$\delta = 2ne \cos(\theta) \quad (18.1)$$

On remarque que la différence de marche ne dépend pas de l'angle d'incidence, on parle d'anneaux d'égale inclinaison.

### 18.2.3 Frange d'égale épaisseur (franges de Fizeau Perez) (Perez)

On présente le schéma et on calcule la différence de marche en prenant un rayon incident provenant d'une source ponctuelle. On arrive à la relation :

$$\delta = 2e = 2\alpha x \quad (18.2)$$

Transition : Ce système de lames permet d'observer des interférences mais totalement fixe, on ne peut pas jouer ni sur l'angle ni sur leur écartement. On doit donc passer à un dispositif concret de division d'amplitude : L'interféromètre de Michelson.

## 18.3 Interféromètre de Michelson

Réglage de l'interféromètre sera étudié longuement en TP. Instrument créé par Michelson et amélioré par Morley pour vérifier que la célérité de la lumière se propage à une vitesse soumise aux lois de composition des vitesses. Le résultat fut négatif et amena à repenser la mécanique classique.

### 18.3.1 Présentation du dispositif

**La séparatrice** permet la division d'amplitude, nécessite d'une compensatrice pour que les rayons parcourent le même chemin. **Deux miroirs**  $M_1$  et  $M_2$  qui permettent de rediriger les rayons vers la séparatrice. Présenter le chemin parcouru par les rayons grâce aux slides. Dans le cas général on voit une coupe des hyperboloïdes de révolution.

### 18.3.2 Configuration en lame d'air

Explication du nom, on réduit le système à deux sources secondaires. On montre la ressemblance aux franges d'égalé inclinaison. La différence est la même sauf qu'ici on a une lame d'air  $\delta = 2e$ . Dans le cas d'une source ponctuelle : deux sources ponctuelles cohérentes entre elles = système équivalent aux trous d'Young. Si la source est étendue, la source étant incohérente spatialement, on additionne les figures d'interférences générées par chaque point de la source : somme d'anneaux = brouillage. Il existe cependant un point de l'écran où il n'y a pas de brouillage : l'infini. Seule l'inclinaison des rayons compte : un déplacement de la source ne changera pas la figure d'interférence. Les interférences sont localisées à l'infini.

**Manipulation :** Calcul de la largeur du doublet du sodium, calcul de  $\Delta\lambda$ .

Dans le cas d'une source **polychromatique**, les diverses sources spectrales sont incohérentes entre elles. On somme les figures d'interférences et on obtient sur l'écran la superposition des plusieurs systèmes d'anneaux, associés à chaque longueur d'onde dont le rayon dépend de  $\lambda$ . Dans le cas du sodium, la source émet à deux longueurs d'ondes  $\lambda_1 = 589.00$  nm et  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = 589.59$  nm.

$$\begin{aligned} I(e) &= \frac{I_0}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1}\right) \right] + \frac{I_0}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2}\right) \right] \\ &= I_0 \left[ 1 + \cos\left(2\pi e \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\right) \cos\left(2\pi e \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (18.3)$$

$$I(e) = 2I_0 \left[ \underbrace{1 + \cos\left(\frac{4\pi e}{\bar{\lambda}}\right)}_{\text{interférences}} \underbrace{\cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda_1 \lambda_2} \Delta\lambda\right)}_{\text{Contraste}} \right] \quad (18.4)$$

En faisant varier  $e$ , on observe la variation d'éclairement dite des battements entre les deux longueurs d'onde. On peut mesurer  $\bar{\lambda}$  en mesurant la période rapide et  $\Delta\lambda$  en mesurant les battements lents. Le contraste s'annule lorsque :

$$\frac{2\pi e}{\lambda_1^2} \Delta\lambda = \frac{\pi}{2} + n\pi. \quad (18.5)$$

Avec  $n \in \mathbb{Z}$  Entre deux annulations on a charioté de  $\frac{2\pi\Delta e\Delta\lambda}{\lambda_1^2} = \pi$  on en déduit alors  $\Delta\lambda$ .

### 18.3.3 Configuration en coin d'air

Représentation schématique+construction des rayons lumineux, calcul de la différence de marche et de l'ordre d'interférence. Commenter la figure et leur localisation Comparaison aux franges de Fizeau.

**Manipulation :** passage en coin d'air.

## 18.4 Fabry péro

Il faut considérer tous les faisceaux en sortie de l'interféromètre et non plus seulement 2. On parle alors d'interférences à ondes multiples. Si le temps le permet on peut mener le raisonnement (TD de Sayrin jusqu'à l'expression de la finesse et des épaisseurs des interférences). Ou alors on donne l'expression de l'intensité et trace le profil des interférences. Donner la relation de la finesse. Plus la Finesse est grande plus la résolution sera bonne. Éventuellement préparer le montage pour observer le doublet du sodium.

## 18.5 Conclusion

On a vu le principe des interféromètres à division d'amplitude, on a détaillé un dispositif en core utilisé aujourd'hui expérimentalement, par exemple le Ligo est un interféromètre de plusieurs kilomètre qui permet aujourd'hui de détecter les ondes gravitationnelles.



# Chapitre 19

## Leçon 19 : diffraction de Fraunhofer

---

### Niveau :

- Licence 3

### **Pré-requis :**

- Optique géométrique

### **Références :**

- Perez optique chapitre 21
  - BFR Optique
  - TD de CS
- 

### **Sommaire**

---

<b>19.1 Introduction</b>	<b>89</b>
<b>19.2 Diffraction à l'infini, approximation de Fraunhofer</b>	<b>89</b>
19.2.1 Principe d'Huyghens-Fresnel	90
19.2.2 Énoncé du principe	90
19.2.3 Expression mathématique du principe	90
19.2.4 Transmittance d'un objet diffractant	90
19.2.5 Approximation de Fraunhofer	90
<b>19.3 Application à la formation des images</b>	<b>91</b>
19.3.1 Diffraction par une ouverture rectangulaire	91
19.3.2 Diffraction d'une pupille : Tâche d'Airy	91
<b>19.4 Conclusion</b>	<b>91</b>

---

## 19.1 Introduction

Lorsqu'un faisceau lumineux rencontre un ou plusieurs diaphragmes de petites dimensions des phénomènes optiques surgissent : la répartition de la lumière derrière l'objet diffractant n'est pas celle attendue lorsque l'on pense à une propagation rectiligne de la lumière. On peut faire une expérience introductive en prenant un laser et un objet diffractant sur sa trajectoire : On observe un éclairage non homogène.

## 19.2 Diffraction à l'infini, approximation de Fraunhofer

L'interprétation des phénomènes de diffraction repose sur le principe d'Huyghens-Fresnel qui ramène l'étude de la diffraction à un problème d'interférences. Ils jouent un rôle primordial dans la formation des images.

### 19.2.1 Principe d'Huyghens-Fresnel

Faire un schéma au tableau montrant la source lumineuse (une bougie par exemple), les axes  $(X, Y)$ , l'objet diffractant quelconque, l'écran dans le plan  $(x, y)$  ainsi que l'axe  $z$ . Représenter le point  $M$  sur l'axe de l'objet diffractant. Le point  $P$  où arrivent deux rayons lumineux sur l'écran. On peut reprendre le schéma dans le BFR p220 par exemple. Pour gagner du temps le dessiner pendant la préparation sur le tableau.

### 19.2.2 Énoncé du principe

Sur transparent affiché l'énoncé du principe d'Huyghens :

1. Huyghens (1678) : Chaque élément de surface se comporte comme une source ponctuelle fictive émettant une ondelette dont l'amplitude complexe instantanée en  $P$  est proportionnelle à l'amplitude complexe instantanée  $a_s(P, t)$  de l'onde émise par  $S$  en  $P$  et à l'élément de surface  $d\sigma(P)$ .
2. Fresnel (1818) : L'amplitude complexe de la vibration lumineuse en un point est la somme des amplitudes complexes des vibrations produites par toutes les sources secondaires, considérées comme cohérentes. On dit que toutes ces vibrations interfèrent pour former la vibration au point considéré.

### 19.2.3 Expression mathématique du principe

On peut suivre le raisonnement dans le BFR p214-217 pour arriver à l'expression mathématique entre l'objet diffractant et le point d'observation :

$$\underline{a}(M) = K \iint_{\sigma} \underline{a}_0 \frac{e^{-ikPM}}{PM} d\sigma \quad (19.1)$$

On s'aide du schéma pour montrer ce que l'on intègre au fur et à mesure.

### 19.2.4 Transmittance d'un objet diffractant

Dans certains cas l'ouverture peut être caractérisée en chaque point par un coefficient de transmission pour l'amplitude de l'onde :

$$t(P) = \frac{\underline{a}_+}{\underline{a}_-} \quad (19.2)$$

En reprenant le raisonnement précédent on en déduit une autre expression de  $\underline{a}$  :

$$\underline{a} = K \iint \underline{a}_0 t(P) \frac{e^{-ikPM}}{PM} d\sigma(P). \quad (19.3)$$

Mathématiquement, cette relation exprime que  $a$  est proportionnelle à la transformée de Fourier du coefficient de transmission  $t$  dans le plan de l'écran.

### 19.2.5 Approximation de Fraunhofer

Sur transparents. Cas où  $S$  et  $M$  sont à l'infini. C'est le moment de faire preuve de rigueur. On mène le calcul pour déterminer la valeur de  $PM$ . Développement à l'ordre 1. On retrouve ici l'approximation introduite dans le programme de PSI. On explicite  $a_0(P)$  pour faire apparaître les angles d'entrée. On introduit les vecteurs  $k$  et  $k'$  vecteurs d'ondes incidents et transmis. On calcule la différence de marche et on arrive à l'expression modifiée :

$$\underline{a} = KA_0 \underbrace{e^{-il_0(SOM)}}_{\text{constantel'ordre1}} \iint \underline{t}(P) e^{-ik(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{OP}} d\sigma. \quad (19.4)$$

Montrer au tableau la réalisation pratique de Fraunhofer. Manipulation Réalisation de la diffraction de Fraunhofer dans un montage à deux lentilles, passer au montage à une lentille, justifier que l'on a le même résultat dans les deux cas si pour le montage à une lentille, on fait l'image de la source sur l'écran et l'oon colle l'objet à la lentille.

## 19.3 Application à la formation des images

### 19.3.1 Diffraction par une ouverture rectangulaire

Schéma sur transparents pour indiquer les grandeurs  $(X, Y, a, b)$  qui vont intervenir dans le calcul. On mène le calcul intégralement au tableau à partir de l'expression de la diffraction dans l'approximation de Fraunhofer. Expliciter l'expression de la transmittance pour une fente rectangulaire. On dessine au tableau le sinus cardinal. On cherche les annulations de la fonction pour obtenir la tâche centrale notamment.

**Manipulation (polyde Philippe Diffraction) :** On cherche à retrouver la taille de l'ouverture par diffraction. On prend une fente de largeur variable, barette CCD. On observe la figure de diffraction pour différentes largeur. On ajuste la figure de diffraction par l'expression calculée. On voit que ça fonctionne et ça permet d'obtenir la largeur de la fente. On refait l'expérience pour différentes fentes et on valide le modèle. On montre que la taille de la tâche centrale est inversement proportionnelle à la largeur de la fente

### 19.3.2 Diffraction d'une pupille : Tâche d'Airy

On présente sur transparents l'expression de  $I$  pour la figure de diffraction par une ouverture circulaire. On peut détailler le raisonnement à l'oral. Calcul détailler dans le Perez p419.

Pouvoir de résolution des instruments d'optique, pouvoir séparateur, critère de Ralyleih. Exemple en observation astronomiques avec les lentilles (diaphragmes circulaires). Comment exploiter la diffraction pour modifier les images ?

## 19.4 Conclusion

On a définit la diffraction comme des interférences avec le principe d'HF, ce qui permet d'expliquer les figures de diffraction de différents objets. La diffraction joue un rôle essentiel dans la formation des images.

# Chapitre 20

## Leçon 20 : Diffraction par des structures périodiques

---

### Niveau :

- Licence 3

### **Pré-requis :**

- Optique géométrique
- Diffraction de Fraunhofer
- Physique du solide

### **Références :**

- Perez optique chapitre 21
  - BFR Optique
  - TD de CS
  - Physique du Solide Ashcroft
- 

### **Sommaire**

---

<b>20.1 Introduction</b>	<b>92</b>
<b>20.2 Diffraction par un objet périodique</b>	<b>93</b>
20.2.1 Cas général	93
20.2.2 Caractéristique d'un réseau plan	93
20.2.3 Application aux réseaux	93
<b>20.3 Mesure de structures périodiques, manipulation</b>	<b>94</b>
20.3.1 Experience qualitative	94
20.3.2 Mesure de la taille des lycopodes	94
<b>20.4 Étude des cristaux par diffraction des rayons X</b>	<b>94</b>
20.4.1 Position du problème	94
20.4.2 Réseau cristallin et réseau réciproque	94
20.4.3 Méthodes expérimentales	95

---

## 20.1 Introduction

On combine deux phénomènes de l'optique ondulatoire : la diffraction (de Fraunhofer) interférences à  $N$  ondes. On s'intéressera à l'application des phénomènes de diffraction à d'autres domaines de la physique.

## 20.2 Diffraction par un objet périodique

### 20.2.1 Cas général

On applique le principe d'Huyghens Fresnel dans l'approximation de Fraunhofer.

$$s(M) = As_0 \iint_{\sigma} t(P) \frac{e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{OP}}}{PM} dx dy \quad (20.1)$$

À chaque élément diffractant  $j$  on lui associe une transmittance  $t_j(P)$  et une position  $O_j$ . On a alors :

$$t(P) = \sum_j t_j(P) \quad (20.2)$$

$$\vec{OP} = \vec{OO_j} + \vec{O_jP} = \vec{R_j} + \vec{O_jP}$$

En notant  $\Delta \vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0$ , on obtient :

$$s(M) = \frac{As_0}{D} \sum_j e^{-i\Delta \vec{k} \cdot \vec{R_j}} \underbrace{\iint_{\sigma} t_j(P) e^{-i\Delta \vec{k} \cdot \vec{O_jP}} d\sigma}_{\text{indépendant de } j} \quad (20.3)$$

$$s(M) = s'_0 \underbrace{\left( \sum_j e^{-i\Delta \vec{k} \cdot \vec{R_j}} \right)}_{\text{Facteur de structure}} \underbrace{\iint t(\delta \vec{r}) e^{-i\Delta \vec{k} \cdot \delta \vec{r}}}_{\text{Facteur de forme}} \quad (20.4)$$

La figure de diffraction est le produit d'un facteur de structure qui ne dépend que de la répartition des structures sur l'écran diffractant et d'un facteur de forme qui ne dépend que de la forme d'une structure unique.

Dans le cas d'une structure répartie de façon aléatoire (spores de lycopes) :

$$I = N \times \text{facteur de forme}$$

Si on a N motifs répartis aléatoirement, on obtient la figure de diffraction d'un seul motif N fois plus intense.

### 20.2.2 Caractéristique d'un réseau plan

Structure périodique qui transmet (réseau par transmission) ou réfléchit (réseau par réflexion) la lumière. Un réseau d'amplitude est caractérisé par l'indice d'extinction qui varie périodiquement ; on joue sur la transparence du milieu. C'est le réseau que l'on va étudier. Dans un réseau de phase, c'est l'indice de réfraction qui varie périodiquement. Définition du pas du réseau : distance entre deux fentes voisines. On le note  $a$ . Un réseau est une structure périodique qui diffracte une lumière incidente. Un réseau est caractérisé par : — Sa période  $a$ , que l'on caractérise souvent en nombre de traits par mm — La largeur des motifs élémentaires  $\varepsilon$  — La longueur totale  $L$  éclairée, c'est à dire le nombre de traits éclairés ( $L = aN$ ). Un réseau simple est constitué par un ensemble de fentes parallèles. La transmittance est égale à 1 au niveau des fentes et 0 ailleurs. Eclairement parallèle. Diffraction par chacune des fentes du réseaux puis interférences entre les rayons issus de toutes les fentes On va s'intéresser à un réseau en transmission.

### 20.2.3 Application aux réseaux

Si les motifs sont répartis de manière ordonnée, une relation de phase déterminée est établie entre chacun d'eux. On prend le cas du réseau plan 1D. Les positions  $\vec{R_j}$  sont données par

$\vec{R}_j = j\vec{a}$  où  $a$  est le vecteur caractéristique du réseau. Faire un schéma au tableau du réseau avec des rayons incidents et diffractés.

Le facteur de structure s'exprime :

$$S = \left| \sum e^{ij\vec{a} \cdot \Delta \vec{k}} \right|^2 = \left| \sum e^{ija(\sin\theta_0 - \sin\theta)} \right|^2 \quad (20.5)$$

On donne l'expression exacte du facteur de structure en fonction de  $\phi = \frac{2\pi a}{\lambda}(\sin\theta_0 - \sin\theta)$  déphasage entre deux rayons issus de deux fentes successives du réseau i.e. la différence de marche. Si les fentes sont extrêmement fines. On rappelle le facteur de forme pour une fente dans les prérequis de la diffraction de Fraunhofer. Écrire la démonstration en préparation au cas où pour les questions.

On donne la fonction de l'intensité

$$I = |ss^*|^2 = N^2 I_0 \text{sinc}\left(\phi \frac{e}{2a}\right)^2 \left( \frac{\sin(\phi N/2)}{N \sin(\phi/2)} \right)^2 \quad (20.6)$$

On réalise une étude de la fonction sur Python. On donne les points d'annulation du facteur de forme. Les longueurs caractéristiques doivent apparaître sur la figure.

## 20.3 Mesure de structures périodiques, manipulation

### 20.3.1 Experience qualitative

Réseau éclairée en lumière parallèle, figure diffractée avec un laser, on regarde la figure de diffraction à l'infini pour être dans les conditions de Fraunhofer. On montre la structure pour différents réseaux. On montre les différents pics et on montre les différents motifs du réseau.

### 20.3.2 Mesure de la taille des lycopodes

On montre la figure de diffraction par un trou : tâche d'Airy. Puis on met les pores de Lycopodes à la place on décrit ce que l'on voit. Mesure de la taille des lycopodes au microscope au préalable. Puis par la tâche de diffraction.

## 20.4 Étude des cristaux par diffraction des rayons X

<http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/Diffraction-rayons-X-technique.xml> ou Ashcroft

### 20.4.1 Position du problème

Un cristal peut être vu comme la répétition périodique tridimensionnelle d'éléments appelés noeuds (Montre une figure). L'angle  $\theta$  détermine l'incidence d'un faisceau parallèle de rayons X sur ces plans réticulaires. La différence entre les deux rayons lumineux particuliers représentés vaut  $AC + CB = 2d \sin \theta$ . Ils interfèrent de manière constructive lorsque la différence de marche est égale à un nombre entier  $p$  de longueur d'onde. C'est la loi de Bragg :

$$2d \sin \theta = p\lambda \quad (20.7)$$

### 20.4.2 Réseau cristallin et réseau réciproque

Une maille élémentaire d'un cristal est déterminée par un trièdre formé par trois vecteurs de base  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  faisant entre eux les angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . (montrer un transparent). Le pavage des

noeuds dans l'espace est représenté par les vecteurs rangés définis par :

$$\vec{n} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c} \quad (20.8)$$

À ce réseau direct correspond un réseau réciproque :

$$\vec{n}^* = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^* \quad (20.9)$$

Un vecteur rangé du réseau réciproque est normal à un plan réticulaire direct.

Dans le cas général on détermine un rayon incident arrivant sur un noeud par son vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Le rayon diffusé par ce noeud dans la direction d'observation a un vecteur d'onde  $\vec{k}' = ||k||\vec{u}$ . Comme l'interaction entre un photon X et la particule du noeud est élastique, les photons diffusés sont de même énergie que les photons incidents et les vecteurs d'onde  $k'$  et  $k$  ont la même norme. Le vecteur diffusion est défini par  $K = k' - k$ .

La différence de chemin optique entre deux rayons X émergents après diffusion sur deux noeuds différents localisés en  $r_1$  et  $r_2$  est égale à  $\vec{K} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ . En remarquant que tous les vecteurs qui ont des noeuds aux deux extrémités  $r_1$  et  $r_2$  constituent justement l'ensemble des vecteurs  $n$  du réseau direct, on traduit la condition d'interférences constructives en écrivant que le produit scalaire  $K \cdot n$  est un entier.

Commentaire essentiel : on a une condition sur les trois composantes de  $k$ , et plus seulement sur une seule. Observer des pics dans les cristaux est donc beaucoup plus dur.

Autrement dit, il faut que  $K$  soit un vecteur  $n^*$  du réseau réciproque :  $K = ha^* + kb^* + lc^*$ .

C'est ce qu'expriment les conditions de diffraction de Laue :

$$\vec{K} \cdot \vec{a} = h, \quad \vec{K} \cdot \vec{b} = k, \quad \vec{K} \cdot \vec{c} = l. \quad (20.10)$$

Expérimentalement, la position des pics de diffraction observés nous permet de déterminer les vecteurs du réseau réciproque et donc de décrire la maille cristalline.

### 20.4.3 Méthodes expérimentales

Nous allons maintenant montrer en détail la mise en œuvre expérimentale par deux méthodes différentes, selon la nature de l'échantillon à analyser : soit un monocristal (dimension de l'ordre de 0,1 mm), soit une poudre cristalline (ensemble de cristaux microscopiques). L'exposition d'un monocristal à un faisceau de rayons X produit une image constituée de taches de diffraction bien définies (fig. 6). Les nombreuses orientations des petits cristaux d'une poudre produisent un très grand nombre de taches groupées en cercles concentriques autour du point  $\theta = 0$ , du fait de la symétrie de révolution autour de la direction du faisceau incident.

L'analyse des taches de diffraction permet de déterminer la nature du système cristallin. De l'intensité on en déduit le facteur de structure et de remonter à la structure du motif de diffraction. On peut dans certains cas (molécules petites) associer aux figures de diffraction, la nature des atomes présents dans la maille.

En résumé, les étapes de résolution complète d'une structure sont les suivantes : Sélectionner un cristal de bonne qualité ; Centrer le cristal pour pouvoir explorer toutes les directions de l'espace ; Déterminer la maille élémentaire en enregistrant environ 10 images ; Acquérir les données complètes ; Traiter numériquement les mesures ; Générer le fichier des informations cristallines (Crystallographic Information File, appelé fichier CIF).

# Chapitre 21

## Leçon 21 : Absorption et émission de la lumière

---

### Niveau :

- Licence 3

### **Pré-requis :**

- Rayonnement du corps noir
- notion de photon
- optique géométrique
- modèle scalaire des ondes lumineuses

### **Références :**

- Dunod de PC 2014
  - Cagnac Physique atomique
  - Taillet Optique physique
- 

### **Sommaire**

---

<b>21.1 Introduction</b>	<b>97</b>
<b>21.2 Spectre d'une lumière émise</b>	<b>97</b>
21.2.1 Loi de Planck	97
21.2.2 Émission par une lampe à Mercure BP	97
<b>21.3 Interaction lumière matière (Dunod chap 30 Oscillateur optique)</b>	<b>97</b>
21.3.1 Hypothèse de Planck et approche d'Einstein Dunod p1116	97
21.3.2 Retour sur le spectre de la lampe de Mercure	97
21.3.3 Probabilité d'absorption et d'émission.	97
21.3.4 Largeur de la raie spectrale	97
<b>21.4 Émission induite</b>	<b>98</b>
21.4.1 Émission stimulée et bilan de population	98
21.4.2 Équilibre avec le rayonnement	98
<b>21.5 Le Laser</b>	<b>98</b>
21.5.1 Fonctionnement	98
21.5.2 Amplification de l'onde lumineuse	98
21.5.3 Pompage	98
21.5.4 Cavity résonante : Fabry Pérot	98
<b>21.6 Conclusion</b>	<b>98</b>

---



## 21.1 Introduction

On peut distinguer deux types de sources : sources thermiques et sources spectrales. Le spectre du corps noir a déjà été étudié. On a vu qu'il s'agit d'un spectre continu où le  $\lambda_{\max}$  dépend de la température. Son énergie est répartie de manière continue en fonction de la fréquence des ondes EM. Dans cette leçon on montre que les échanges d'énergie entre matière et rayonnement sont quantifiés.

## 21.2 Spectre d'une lumière émise

### 21.2.1 Loi de Planck

On fait des rappels sur la loi de Planck (p173 Dunod PC) **On peut montrer le spectre obtenu en lumière blanche par déviation d'un prisme** On a un spectre continu. Faire le rapport avec la courbe de la densité spectrale d'émission'.

### 21.2.2 Émission par une lampe à Mercure BP

**Manipulation :** On montre que cette fois le spectre obtenu est discontinu. On a juste des raies !

## 21.3 Interaction lumière matière (Dunod chap 30 Oscillateur optique)

### 21.3.1 Hypothèse de Planck et approche d'Einstein Dunod p1116

On introduit historiquement les différentes approches. Introduction du modèle de l'électron élastiquement lié. Interaction classique de l'électron avec le champ électromagnétique de l'onde lumineuse. Problèmes majeurs : structure discontinue du spectre, rayonnement thermique. On introduit le modèle de Planck  $E = h\nu$  le quantum d'énergie. Modèle d'Einstein et notion de Photon.

### 21.3.2 Retour sur le spectre de la lampe de Mercure

On donne l'expression de  $\Delta E$  en fonction de la longueur d'onde. **idée de manipulation :** On calcule l'énergie de transition pour les raies observées pour la lampe de Mercure.

### 21.3.3 Probabilité d'absorption et d'émission.

On suit le Dunod, on présente les probabilités de transition pour l'absorption et l'émission spontanée. On définit les coefficients d'Einstein.

### 21.3.4 Largeur de la raie spectrale

Toujours le Dunod. On donne les causes de l'élargissement spectral. Inégalité d'Heisenberg.  $E = \hbar\omega \leftrightarrow \Delta t \Delta E \approx \hbar$ . Effet Doppler, élargissement par chocs (raison pour laquelle on utilise une basse pression). On peut faire une analogie avec les phénomènes ondulatoires accompagnés d'un petit graphe en transparent pour illustrer les propos.

En effet les phénomènes ondulatoires concernent tout aussi bien un rayonnement que des corpuscules matériels selon L.de Broglie. Or, une onde représentant un rayonnement et utilisée

dans sa version idéale d'onde plane, possède une extension infinie aussi bien spatiale que temporelle. Pour une telle onde, la transformée de Fourier qui donne le spectre en vecteurs d'onde ou pulsation consiste en une distribution de Dirac. Ceci correspond à une absence de dispersion sur la valeur de la pulsation  $\Delta\omega = 0$ . Si on utilise une onde tronquée dont la durée temporelle est finie, le spectre en pulsation présente une dispersion de largeur finie. Ainsi, la durée temporelle de l'onde et la dispersion de sa pulsation varient en sens inverse et le traitement mathématique de la transformée de Fourier établit une relation du type :  $\Delta t \Delta\omega \approx 1$ .

**Manipulation** Au lieu de tracer au tableau un graphique on peut montrer avec un spectro fibrer la largeur spectrale d'une des raies de la lampe à l'aide du spectro fibré.

## 21.4 Émission induite

### 21.4.1 Émission stimulée et bilan de population

On reprend le Dunod sur les coefficients d'Einstein. Bilan de population et relation entre les coefficients.

### 21.4.2 Équilibre avec le rayonnement

Condition d'amplification

## 21.5 Le Laser

### 21.5.1 Fonctionnement

Comparaison avec une lampe spectrale : le Laser est monochromatique, directif, cohérent. Expliquer le principe en dégagant le rôle de la cavité. Nécessité d'une inversion de la population et du pompage. On peut l'illustrer via l'animation <https://phet.colorado.edu/sims/cheerpj/lasers/latest/lasers.html?simulation=lasers&locale=fr>.

### 21.5.2 Amplification de l'onde lumineuse

On reprend le bilan de puissance dans le Dunod PC.

### 21.5.3 Pompage

Population à l'équilibre thermique, nécessité d'une inversion de population. Système à 3 niveaux. Mener le calcul dans le Cagnac p 116.

### 21.5.4 Cavité résonante : Fabry Pérot

Fabry Pérot, fréquences propres de la cavité, affinement des raies, aller-retours plus nombreux donc plus grande amplification.

Cette partie devra être réalisée succinctement en pratique car temps limité. On peut peut être mettre les calculs sur transparents pour aller plus vite.

## 21.6 Conclusion

Recap de la leçon, fonctionnement du Laser, ouvrir sur les applications du LASER.

# Chapitre 22

## Leçon 22 : Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques

---

### Niveau :

- Licence 3

### Pré-requis :

- Électromagnétisme
- équations de Maxwell
- ARQS

### Références :

- Dunod de PSI
  - Garing milieux magnétiques
  - BFR Electromagnetisme 4
  - Perez
- 

### Sommaire

---

<b>22.1 Introduction</b>	<b>99</b>
<b>22.2 Mise en équations</b>	<b>100</b>
22.2.1 Les équations de Maxwell dans un milieu matériel	100
22.2.2 Théorème d'Ampère dans les milieux magnétiques	100
<b>22.3 Caractérisation des milieux magnétiques</b>	<b>100</b>
22.3.1 Les différentes formes de magnétisme	100
22.3.2 Courbe de première aimantation	100
22.3.3 Cycle d'hystérésis	101
22.3.4 Champ rémanent	101
22.3.5 Champ coercitif : matériaux doux et durs	101
22.3.6 Effets dissipatifs	101
22.3.7 Désaimantation	101
22.3.8 Application électroaimant, pince ampèremétrique	101

---

## 22.1 Introduction

Il existe des matériaux qualifiés de ferromagnétiques qui conduisent le champ magnétique. Ils permettent de construire de véritables circuits magnétiques très largement utilisés pour changer l'énergie électrique, notamment grâce à des transformateurs.

## 22.2 Mise en équations

### 22.2.1 Les équations de Maxwell dans un milieu matériel

Rappel des équations de Maxwell dans le vide. On modifie ces équations en tenant compte de l'existence du milieu matériel : les densités volumiques de charge et de courant sont séparées en deux catégories, des densités liées au milieu matériel et des densités libres dues au déplacement des porteurs de charge. On peut alors définir deux nouveaux vecteurs : le vecteur polarisation  $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{\text{lie}}$  et le vecteur aimantation  $\vec{\nabla} \wedge \vec{M} = \vec{j}_{\text{lie}}$ . Les équations Maxwell Flux et Faraday restent inchangées mais les équations liées aux sources s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_{\text{lib}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \text{ et } \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j}_{\text{lib}} + \vec{\nabla} \wedge \vec{M} \right). \quad (22.1)$$

Dans la suite on ne s'intéresse qu'à l'équation de Maxwell-Faraday liant le champ magnétique aux sources de porteurs de charges. On peut définir un nouveau champ, le champ d'excitation magnétique tel que l'équation de Maxwell-Faraday devienne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_{\text{lib}} \text{ où } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (22.2)$$

### 22.2.2 Théorème d'Ampère dans les milieux magnétiques

On a démontré précédemment que l'on retrouvait le théorème d'Ampère dans le vide à partir de l'équation de Maxwell-Faraday dans le vide. On retrouve par le même moyen une version du théorème d'Ampère dans la matière en remplaçant le champ magnétique par le champ d'excitation magnétique :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_{\text{enlac}} \quad (22.3)$$

## 22.3 Caractérisation des milieux magnétiques

### 22.3.1 Les différentes formes de magnétisme

Pour certains corps, il est possible d'écrire une relation entre le champ d'excitation magnétique et l'aimantation :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (22.4)$$

$\chi_m$  est la susceptibilité magnétique, grandeur sans dimension représentant la faculté d'un matériau à s'aimanter. En fonction du signe de  $\chi_m$  on définit deux types de matériaux :

- les milieux diamagnétiques pour lesquels  $\chi_m < 0$  avec  $|\chi_m| \approx 1 \cdot 10^{-5}$ .
- les milieux paramagnétiques pour lesquels  $\chi_m > 0$  avec  $|\chi_m| \approx 1 \cdot 10^{-3}$ .

Pour ces milieux, la relation entre  $\vec{M}$  et  $\vec{H}$  est linéaire. Pour d'autres corps, cette linéarité n'est valable que si le champ magnétique est faible. C'est le cas des ferromagnétiques pour lesquels, lorsque le champ devient plus fort, la relation entre le champ  $\vec{H}$  et le champ  $\vec{M}$  devient fortement non linéaire jusqu'à saturation.

### 22.3.2 Courbe de première aimantation

On considère initialement un matériau ferromagnétique non aimanté et on augmente progressivement la valeur de l'excitation magnétique. On trace l'évolution du champ magnétique dans le matériau en fonction de l'excitation magnétique. On remarque trois domaines :

- Pour une excitation faible la relation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  est linéaire. Elle correspond à des phénomènes réversibles au sein du milieu.
- Le champ magnétique augmente ensuite plus fortement de façon non-linéaire.

**Manipulation :** Transformateur : poly de Philippe sur le magnétisme.

### 22.3.3 Cycle d'hystérésis

On applique le théorème d'Ampère, on en déduit la relation entre  $H$  et  $U$  la tension dans le primaire. On écrit l'induction dans le secondaire et on en déduit la tension aux bornes de la résistance. On peut alors tracer  $B$  et  $H$ . On fait l'expérience et on observe l'hysteresis.

### 22.3.4 Champ rémanent

Définition et transparents

### 22.3.5 Champ coercitif : matériaux doux et durs

Définitions, placer  $H_c$  sur le graphe. Applications aux différents matériaux.

### 22.3.6 Effets dissipatifs

Bilan énergétique, identifier les pertes, notamment les pertes fer.

### 22.3.7 Désaimantation

Voir poly de Philippe

### 22.3.8 Application électroaimant, pince ampèremétrique

Sur slide décrire le principe.

# Chapitre 23

## Leçon 23 : Mécanisme de la conduction électrique dans les solides

---

### Niveau :

- Deuxième année CPGE

### Pré-requis :

- Électrocinétique
- Électromagnétisme
- équations de Maxwell
- Théorie cinétique des gaz

### Références :

- Dunod de PC
  - Ashcroft
  - Kittel chap 7
  - Cours de Mendels chap : 1,2,3.
  - BUP [https://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/une\\_fiche.php?ID\\_fiche=15244](https://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/une_fiche.php?ID_fiche=15244)
- 

### Sommaire

---

<b>23.1 Introduction</b>	<b>103</b>
<b>23.2 Modèle de Drude (Dunod de PC)</b>	<b>103</b>
23.2.1 Hypothèse du modèle	103
23.2.2 Loi d'Ohm locale	103
23.2.3 Résistance électrique	103
23.2.4 Critique du modèle	103
<b>23.3 Vision quantique de la conduction électrique</b>	<b>104</b>
23.3.1 Distribution de Fermi Dirac (Ashcroft ou cours de Mendels)	104
23.3.2 Niveaux de Fermi	104
23.3.3 Comment relier ce modèle à la conductivité électrique ? (Kittel)	105
<b>23.4 Matériaux Isolants/conducteurs/semi-conducteurs BUP et Kittel</b>	<b>105</b>
23.4.1 Notions de Bandes d'énergie permises et interdit	105
23.4.2 Remplissage des bandes	105
23.4.3 schéma des structures de bandes pour conducteur, semi-conducteur et isolant	106
<b>23.5 Conclusion</b>	<b>106</b>

---

## 23.1 Introduction

Dans notre quotidien nous sommes entourés d'appareils qui conduisent le courant. L'objet de cette leçon est de comprendre quels types de matériaux conduisent le courant et quels en sont les mécanismes. Dans un premier temps, nous allons étudier la théorie de la conduction avancée par Drude en 1900.

## 23.2 Modèle de Drude (Dunod de PC)

En 1900 Paul Drude développe une théorie de la conduction électrique dans le but d'expliquer la conductivité mesurée dans les métaux. Il fonde sa théorie sur des éléments de théorie cinétique des gaz.

### 23.2.1 Hypothèse du modèle

- les électrons sont traités de façon indépendante, le comportement du milieu résulte de la somme des comportements individuels des électrons ;
- les électrons subissent des collisions : elles sont instantanées, après chaque collision la vitesse d'un électron donné est aléatoire ;
- les électrons sont en équilibre thermodynamique avec le milieu environnant par le biais des collisions (processus de thermalisation qui répartit en moyenne l'énergie parmi les différents électrons).

### 23.2.2 Loi d'Ohm locale

On considère un conducteur dans lequel règne un champ électrostatique  $\vec{E}$  susceptible de drainer les électrons. Considérons un électron donné qui a subi une collision à l'instant  $t = 0$ , sa vitesse après collision  $\vec{v}_0$ . On applique la deuxième loi de Newton :

$$\vec{j}(M) = \gamma_0 \vec{E}(M) \text{ avec } \gamma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{m} \quad (23.1)$$

### 23.2.3 Résistance électrique

Quel est le lien entre la loi d'Ohm locale que l'on vient de voir et la loi d'Ohm à laquelle on est habitué ( $U = RI$ ) ? On considère le conducteur filiforme cylindrique de longueur  $l$ , de section  $S$ , parcouru par la densité volumique de courant  $\vec{j}$  uniforme. On doit le Dunod pour montrer qu'en intégrant l'équation locale on retrouve  $U = RI$ .

**Manipulation :** Mesure de la résistance avec le fil de cuivre long de la prépa de Rennes pour obtenir la proportionnalité entre  $R$  et  $l$ .

### 23.2.4 Critique du modèle

Les mécanismes de conduction électrique dans ce type de matériau sont assez complexes<sup>17</sup> mais si la dépendance en température de la résistivité d'un métal est due à la variation de la mobilité d'un nombre constant de porteurs de charge, c'est surtout la concentration en porteurs qui est modifiée ici. L'agitation thermique agit de manière similaire au cas des semi-conducteurs classiques en faisant apparaître des porteurs de charges supplémentaires qui participent à la conduction électrique : la résistivité de l'élément diminue lorsque  $T$  augmente. On regarde la dépendance de la conductivité avec la température et on regarde si la prévision du modèle de Drude est cohérente avec l'expérience.

Chaque degré de liberté fournit  $\frac{1}{2}k_B T$  à l'énergie cinétique (Ashcroft 1.5p27). On a donc :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}k_B T \text{ et } v_0 = \frac{l}{\tau} \quad (23.2)$$

On en déduit une expression de  $\tau$  en fonction de la température :  $\tau \propto T^{-1/2}$ .

**Manipulation :** On vérifie l'équation de conductivité du cuivre en fonction de la température avec un long fil (pas le même que celui de la loi d'Ohm) plongé dans un bain marie. On voit que l'on a pas du tout une évolution en  $T^{-1/2}$  mais plutôt en  $T^{-1}$ . On corrige le modèle pour trouver quelque chose de correct. (Lire dans le Ashcroft la loi de Wiedemann Franz p23 en cas de questions)

## 23.3 Vision quantique de la conduction électrique

### 23.3.1 Distribution de Fermi Dirac (Ashcroft ou cours de Mendels)

On prend en compte l'aspect quantique des électrons : ce sont des fermions (redonner le principe de Pauli) sans considérer l'interaction des électrons avec le réseau cristallin du conducteur (mer d'électrons libres). On met cette partie sur transparent. On décrit le gaz d'électrons libres par une fonction d'onde, avec des conditions aux bords périodique. On peut donner l'énergie  $\epsilon$  ainsi que la quantification du vecteur d'onde. On remarque que  $k$  est un état propre de la quantité de mouvement.

On donne la densité d'état dans l'espace des  $k$ . Les électrons sont des fermions, ils ne peuvent pas occuper les mêmes états (principe de Pauli). L'état fondamental est l'état du système à  $N$  électrons au zéro absolu. Si la température augmente le taux d'occupation de états d'énergie est donné par la fonction de distribution de Fermi Dirac. La fonction de fermi Dirac varie dans la bande  $\pm kT$  autour du potentiel chimique. Tracer la fonction en python !  $\mu$  est fixé par le nombre d'électrons par unité de volume du solide.

### 23.3.2 Niveaux de Fermi

D'après l'étude de Fermi Dirac à  $T = 0$  tous les états sont occupés avec certitude jusqu'à une énergie appelée énergie de Fermi  $\epsilon_F$  qui est en fait le potentiel à  $T = 0$ . Cette énergie correspond à un vecteur d'onde  $k_F$ . Les états occupés occupés occupent une sphère appelée sphère de Fermi de rayon  $k_F$ .

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad (23.3)$$

On peut exprimer l'énergie de fermi en fonction du nombre de particules. On calcule le nombre de particules avec l'intégrale puis l'énergie totale 3D.

$$N = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{1/2} d\epsilon = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon_F^{3/2}. \quad (23.4)$$

Avec le programme Python constater qu'à basse Température on se rapproche de la marche. À température  $T$ , cette distribution s'étale sur une largeur d'ordre  $k_B T$  autour de l'énergie de fermi. Les électrons responsables de toutes les propriétés conductrices sont ceux situés au voisinage du niveau de Fermi. Ce sont les seuls qui peuvent prendre une énergie supplémentaire sans que l'état final soit occupé avec certitude. Ce sont les électrons qui nagent dans la mer de Fermi. La différence majeure dans la répartition des électrons sur les états qui leur sont offerts se situe sur une tranche  $kT$  au voisinage du niveau de Fermi.



### 23.3.3 Comment relier ce modèle à la conductivité électrique ? (Kittel)

Dans un champ électrique la force qui s'exerce sur un électron s'écrit en suivant la deuxième loi de Newton. On suppose les collisions négligeables (entre électrons mais aussi avec le réseau cristallin). La sphère de Fermi est déplacée à vitesse constante sous l'effet du champ électrique. On peut alors donner l'expression du déplacement de la sphère de Fermi  $\delta k$ .

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} = \hbar \frac{dk}{dt} \\ -e\vec{E} &= \hbar \frac{dk}{dt}\end{aligned}\quad (23.5)$$

Finalement :

$$\delta \vec{k} = -\frac{e\tau \vec{E}}{\hbar}. \quad (23.6)$$

Effet global, l'ensemble des électrons se déplacent dans le sens opposé au champ électrique ce qui induit un courant macroscopique : Loi d'Ohm.

Donner la résistivité électrique liée à la collision des électrons de conduction avec les phonons et à température très faible aux collisions avec les impuretés, les défauts du réseau.

Ici on a montré comment est décrite la conduction d'un point de vue quantique. Mais nous n'avons pas parlé de résistivité qui permet de différencier des isolants des conducteurs.

## 23.4 Matériaux Isolants/conducteurs/semi-conducteurs BUP et Kittel

On a identifié le comportement des électrons dans un cristal ainsi que l'origine de la conduction. Comment peut-on différencier les isolants des conducteurs ? (BUP p388 Kittel p 156) Il faut prendre en compte les interactions électrostatiques : électrons-ions qui sont faibles mais peuvent être résonantes.

### 23.4.1 Notions de Bandes d'énergie permises et interdit

Les électrons sont soumis au potentiel coulombien du réseau cristallin.  $k = n_x 2\pi/L$  et  $\psi(x+a) = \exp(ika)\psi(x)$  une modulation de la fonction d'onde apparaît qui tient compte de la périodicité du réseau.

$$\epsilon_k = \epsilon_0 - 2t \cos(ka) \quad (23.7)$$

Une bande d'énergie apparaît de largeur  $4t$  centrée sur  $\epsilon_0$ , plus la bande est large plus le recouvrement entre atomes est grand plus les électrons peuvent sauter de l'un à l'autre

### 23.4.2 Remplissage des bandes

Au niveau de Fermi, le degré de remplissage dépend du nombre d'électrons. S'il y a deux électrons par atome, pour une OA considérée, la bande est remplie. On observe deux types de bandes, celles de conduction qui contiennent les états dont l'énergie  $\epsilon < \epsilon_F$  et des bandes de valences dont les états  $\epsilon > \epsilon_F$ . Le remplissage fixe les propriétés du matériau.

### **23.4.3 schéma des structures de bandes pour conducteur, semi-conducteur et isolant**

## **23.5 Conclusion**

La conduction est une manifestation macroscopique de la mécanique quantique. La statistique de fermi-dirac explique la conduction dans les solides conducteurs. Il existe différents types de matériaux qui ont des conductivités différentes et que celles-ci peuvent être expliquées grâce à la structure de bandes.

# Chapitre 24

## Leçon 24 : Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

---

### Niveau :

- Deuxième année CPGE

### Pré-requis :

- Oscillateurs harmoniques
- mécanique
- Électromagnétisme
- électricité, RLC
- Induction, mutuelle
- Différence de marche de la lame d'air

### Références :

- Poly de Philippe sur les résonances
  - Faroux Renault
  - Perez d'optique
  - TD SAyrin
  - Sujet 2004 Mines
- 

## Sommaire

---

<b>24.1 Introduction</b>	<b>108</b>
<b>24.2 Résonance d'un oscillateur à 1 degré de liberté : Quartz d'horlogerie</b>	<b>108</b>
24.2.1 Présentation du dispositif expérimental	108
24.2.2 Caractéristique de l'oscillateur	108
24.2.3 Équations mécaniques et équivalent électrique	108
24.2.4 Étude de l'impédance équivalente du Quartz	109
24.2.5 Étude expérimentale d'un quartz d'horloger	109
<b>24.3 Oscillateurs couplés</b>	<b>110</b>
24.3.1 Couplages d'oscillateurs harmoniques	110
24.3.2 Application à la molécule de dioxyde de carbone	110
<b>24.4 Résonance pour un système avec un très grand nombre de degrés de liberté : cavité résonante de Fabry Péro (Laser)</b>	<b>110</b>
24.4.1 Différence de marche	110
24.4.2 Intensité de l'onde	110
24.4.3 Finesse et pouvoir de résolution	110
<b>24.5 Conclusion</b>	<b>110</b>

---

## 24.1 Introduction

Pour introduire la leçon on commence par définir une résonance. C'est un phénomène qui apparaît dans les systèmes faiblement amortis dotés de modes propres lorsqu'on les excite en régime permanent sinusoïdal. Il se manifeste par une augmentation notable de la réponse lorsque la fréquence d'excitation est proche de celle d'un des modes propres car il y a alors un transfert important d'énergie de l'excitateur vers le système.

Un mode propre est une solution d'oscillation harmonique (sinusoïde non amortie) du système lorsqu'il est soumis à une perturbation et il y a autant de modes propres que de degrés de liberté dans le système. On commencera par étudier la résonance d'un dispositif à un degré de liberté puis on s'intéressera à des systèmes à plusieurs degrés de liberté. Le sujet est vaste donc on fera des choix.

## 24.2 Résonance d'un oscillateur à 1 degré de liberté : Quartz d'horlogerie

On prend la modélisation du sujet des mines de 2004 pour les calculs avec le poly de Philippe.

### 24.2.1 Présentation du dispositif expérimental

### 24.2.2 Caractéristique de l'oscillateur

Les quartz d'horlogerie sont conçus pour réaliser des oscillateurs fonctionnant à une fréquence de  $f = 32768$  Hz qui permettent l'obtention d'un signal à 1 Hz après 15 divisions par 2 de la fréquence. Le composant se présente sous la forme d'un diapason avec des électrodes mécaniques déposées sur chaque bras permettant de sélectionner un mode vibration en flexion par effet piezoelectrique. La rigidité du quartz permet un confinement très efficace de l'énergie acoustique dans les bras et l'encapsulage sous vide du diapason dans un cylindre métallique renforce cet effet en évitant la dissipation visqueuse dans l'air. Cela permet de construire des cellules résonnantes avec un facteur de qualité ( $Q \approx 50000$ ) énorme, donc des oscillateurs qui battent la seconde avec une très grande stabilité. Schéma sur transparents.

### 24.2.3 Équations mécaniques et équivalent électrique

D'un point de vue mécanique, lorsqu'on soumet le disque piézo-électrique à une tension sinusoïdale  $v(t) = V \cos \omega t$ , il va être dans le cadre d'une approximation linéaire, le siège d'une vibration mécanique sinusoïdale sous l'effet d'une force extérieure proportionnelle à cette tension.

#### Modélisation mécanique

- force de rappel (ressort)  $-kx$  (origine : rigidité du matériau)
- frottement fluides  $-h\dot{v}$
- force due à l'effet piezo  $\beta U$
- on négligera la pesanteur

On applique la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + \beta U(t) \quad (24.1)$$

## équivalent électrique

Dessiner le schéma au tableau D'un point de vue électrique la charge totale  $q$  qui apparaît sur les électrodes planes a deux origines :

- les deux faces planes du disque forment un condensateur de capacité  $C$  d'où une charge  $q_1$ .
- l'effet piezoelectrique provoque l'apparition d'une charge  $q_2$  proportionnelle à  $x$  :  $q_2(t) = \gamma x(t)$

$$C_p = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e} = 8 \text{ pF} \quad (24.2)$$

$$q_1 = C_p U(t)$$

On cherche l'équation différentielle pour la charge  $q_2$ . On multiplie l'équation différentielle obtenue pour l'aspect mécanique par  $\gamma$  il vient alors :

$$(m\ddot{x} + kx + h\dot{x} = \beta U(t)) \times \gamma, \text{ soit : } \frac{m}{\beta\gamma}\ddot{q}_2 + \frac{h}{\beta\gamma}\dot{q}_2 + \frac{k}{\beta\gamma}q_2 = U(t) \quad (24.3)$$

Dessiner le schéma au tableau et écrire la loi des mailles donne :

$$L\frac{di}{dt} + RI + \frac{q_2}{C_s} = U(t) \quad (24.4)$$

ce qui donne

$$L\ddot{q}_2 + R\dot{q}_2 + \frac{q_2}{C_s} = U(t) \quad (24.5)$$

On identifie entre les deux Équations

$$L = \frac{m}{\beta\gamma} \quad R = \frac{h}{\beta\gamma} \quad C_s = \frac{\beta\gamma}{k} \quad (24.6)$$

On en déduit les valeurs de, R, L et C équivalents.

On peut ici réécrire l'équation différentielle en faisant apparaître les pulsations propres et le facteur de qualité :  $\ddot{q}_2 + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q}_2 + \omega_0^2 q_2 = U(t)$ . On donne la signification physique du facteur de qualité (mesure du taux d'amortissement de l'oscillateur, plus il est élevé plus les oscillations vont perdurer, revenir sur la valeur du facteur de qualité du quartz)

### 24.2.4 Étude de l'impédance équivalente du Quartz

Charge totale égale à la somme des charges, intensité totale donc somme des intensités. La partie  $p$  et la partie  $s$  sont soumises à la même tension, c'est donc un circuit avec deux branches parallèles. On écrit le schéma électrique équivalent (condensateur parallèle à RLC série) et on calcule l'admittance équivalente.

On trace son évolution via un programme python pour faire apparaître la résonance une première fois.

$$\underline{Y}_Q(\omega) = \frac{R}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} + j \left[ C_0\omega - \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \right] \quad (24.7)$$

### 24.2.5 Étude expérimentale d'un quartz d'horloger

On prend le poly de Philippe sur les résonance. On trouve la résonance de l'oscillateur. On calcule le facteur de qualité que l'on aura défini précédemment. On a regardé dans cette expérience la résonance en tension.

## 24.3 Oscillateurs couplés

### 24.3.1 Couplages d'oscillateurs harmoniques

Dans le Faroux Renault de mécanique des fluides p133. Deux systèmes masses ressort reliés par un ressort. je pense qu'on peut le présenter sur une slide en donnant directement l'équation. Système d'équations couplées, deux fréquences propres pour  $x_1 - x_2$  et  $x_1 + x_2$ . (Symétrique et antisymétrique).

Autre possibilité faire l'étude deux circuits RLC couplés (Poly de Philippe Oscillateurs couplés)

### 24.3.2 Application à la molécule de dioxyde de carbone

Mêmes équations que pour deux oscillateurs couplés.

On peut faire l'expérience en prenant deux circuits RLC et montrer les deux modes symétriques et antisymétriques.

## 24.4 Résonance pour un système avec un très grand nombre de degrés de liberté : cavité résonante de Fabry Pérot (Laser)

Exercice 5 du TD de Sayrin et Perez d'optique

### 24.4.1 Différence de marche

Aller vite préparer des transparents pour aller plus vite ou le mettre en pré-requis Et exprimer les vibrations lumineuses des différents rayons en fonction des coefficient de réflexion.

### 24.4.2 Intensité de l'onde

Tracer le résultat avec python.

### 24.4.3 Finesse et pouvoir de résolution

Calcul de la largeur des pics, lien avec le facteur de qualité des résonances. Liens avec d'autres cavités résonantes (tuyaux sonores, corde de Melde)

## 24.5 Conclusion

Il reste des résonances que l'on a pas vu les résonances paramétriques (balancoire, pont). Phénomène non linéaires

# Chapitre 25

## Leçon 25 : Oscillateurs ; portraits de phase et non linéarités

---

### Niveau :

- Deuxième année CPGE

### Pré-requis :

- Oscillateurs harmoniques
- mécanique
- Pendule simple
- régime sinusoïdale forcé

### Références :

- Poly de Philippe sur les résonances
  - BFR Mécanique 1
  - Faroux, Renault, Matray Rosso, mécanique 1 Dunod Chap 15
- 

## Sommaire

---

<b>25.1 Introduction</b>	<b>111</b>
<b>25.2 Oscillateurs non amortis</b>	<b>112</b>
25.2.1 Comportement aux grands angles	112
<b>25.3 Aspect fréquentiel des non linéarités</b>	<b>112</b>
25.3.1 Oscillateur amorti, oscillateur entretenu	112
25.3.2 Cas général	112
25.3.3 Cas de l'oscillateur amorti	112
<b>25.4 Oscillateur entretenu : modèle de Van der Pol (Dans le Faroux Renault toujours)</b>	<b>112</b>

---

## 25.1 Introduction

On commence par définir ce qu'est un oscillateur. Système physique qui réalise de petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable (horloge, cœur qui bat, bille dans une gouttière). Un système non-linéaire est un système pour lequel le principe de superposition ne s'applique pas. Une des propriétés est que la fréquence de sortie est différente de celle de l'entrée.

## 25.2 Oscillateurs non amortis

On présente le système déjà connu rapidement. On peut prendre l'exemple du pendule simple non amorti. On fait rapidement le bilan des forces, application de la deuxième loi de Newton sur transparents. On peut tracer en python le portrait de phase qui va bien.

### 25.2.1 Comportement aux grands angles

On fait le calcul. On montre le portrait de phase avec le programme python pour un angle initial plus grand que ceux pour lesquels on respecte les angles petits. Aspect énergétique. Utiliser le programme python et montrer la différence sur le portrait de phase

## 25.3 Aspect fréquentiel des non linéarités

On reprend le calcul toujours dans le Faroux Renault. On parvient à la formule de Borda.

**Manipulation :** Pendule pesant (on l'assimile à un pendule simple en prenant une masse suffisamment grande) On réalise l'acquisition pour de grands angles initiaux. On utilise ensuite le programme python pour obtenir le lien entre la période et l'angle de l'oscillation.

### 25.3.1 Oscillateur amorti, oscillateur entretenu

### 25.3.2 Cas général

On reprend le pendule pesant en lui ajoutant un coefficient de frottement fluide, puis on généralise pour obtenir une équation avec le terme d'amortissement en  $A(x)$ . Si  $A$  est négatif l'oscillateur est amorti. Si  $A$  est positif il est entretenu voir amplifié.

### 25.3.3 Cas de l'oscillateur amorti

On reprend le code python et on ajoute le terme de l'oscillateur amorti.

## 25.4 Oscillateur entretenu : modèle de Van der Pol (Dans le Faroux Renault toujours)

On donne l'équation générale  $\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$  puis le schéma du circuit sur slide. Intuiter le comportement de l'oscillateur pour  $x$  grand ou petit.

**Manipulation** Suivant le temps, surtout que c'est un montage chaud! . Poly Oscillateur autoentretenu. On peut commencer par voir que si  $x$  est petit les oscillations croissent, si  $x$  grand elles décroissent. On peut faire apparaître en lissajous un cycle attracteur de rayon  $x = 1$ . Les oscillations semblent quasi-sinusoidales si  $\epsilon \ll 1$ . Pour le vérifier il faut regarder le portrait de phase qui doit être un cercle. Tracer le portrait de phase et constater le cycle limite. Bien faire remarquer que le cycle limite ne dépend que de l'oscillateur et pas des conditions initiales.



# Chapitre 26

## Leçon 26 : Cinématique relativiste : Expérience de Michelson et Morley

---

### Niveau :

- Licence 3

### Pré-requis :

- Mécanique
- électromagnétisme
- Optique

### Bibliographie :

- BFR *Mécanique 1*
  - Pérez *Relativité*
  - Purcell and Morin *Electricity and magnetism*
  - [https://fr.wikipedia.org/wiki/Exp%C3%A9rience\\_de\\_Michelson\\_et\\_Morley](https://fr.wikipedia.org/wiki/Exp%C3%A9rience_de_Michelson_et_Morley)
- 

## Sommaire

---

<b>26.1 Introduction : les problèmes de la cinématique galiléenne (classique) . . .</b>	<b>113</b>
26.1.1 Relativité galiléenne . . . . .	113
26.1.2 Qu'en est-il de l'électromagnétisme . . . . .	114
<b>26.2 Expérience de Michelson et Morley . . . . .</b>	<b>114</b>
26.2.1 Dispositif . . . . .	115
26.2.2 Expression de la différence de phase . . . . .	115
26.2.3 Résultats . . . . .	116
<b>26.3 Fondements de la relativité restreinte . . . . .</b>	<b>117</b>
26.3.1 Postulats . . . . .	117
26.3.2 L'espace et le temps . . . . .	118
26.3.3 Conséquences de la relativité restreinte. Application au paradoxe du train et du tunnel (exercice) . . . . .	119
26.3.4 Loi de composition des vitesses . . . . .	120
<b>26.4 Conclusion . . . . .</b>	<b>120</b>

---

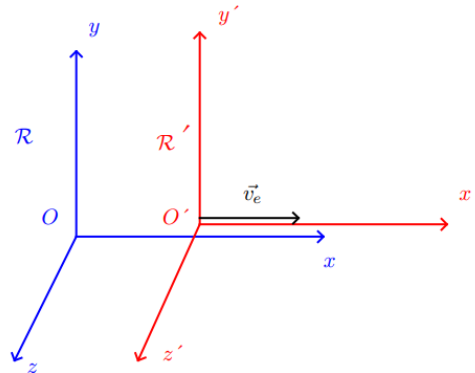
## 26.1 Introduction : les problèmes de la cinématique galiléenne (classique)

### 26.1.1 Relativité galiléenne

Il s'agit d'un premier cours d'introduction à la relativité restreinte. Il s'agit d'une théorie élaborée par Albert Einstein en 1905 dont l'objectif est de tirer toutes les conséquences de la

relativité galiléenne et du principe selon lequel la vitesse de la lumière est un invariant dans tous les référentiels. Il fait connaître cette théorie à travers un article intitulé : "*On the electrodynamics of moving objects*".

Dans le cours de mécanique classique, on décrit des référentiels privilégiés : les référentiels **galiléens**. Ce sont des référentiels en translation rectiligne uniforme par rapport aux autres.



**Fig. 26.1** – Référentiels en translation l'un par rapport à l'autre

Dans ce contexte on définit une transformée pour passer des coordonnées d'un référentiel  $\mathcal{R}$  à un autre  $\mathcal{R}'$ . On prend ces deux référentiels tels que à  $t = 0$ , ils sont confondus, les horloges sont synchronisées.  $t > 0$   $\vec{v}(O') = v_e \vec{e}_x$ . On peut alors décrire la position d'un point M par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  grâce à **la transformée de Galilée** :

$$\begin{cases} x(t) = x' + v_e t \\ y(t) = y' \\ z(t) = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (26.1)$$

#### Loi de composition des vitesses

$$v = v' + v_e \quad (26.2)$$

### 26.1.2 Qu'en est-il de l'électromagnétisme

Les équations de Maxwell prédisent l'existence d'ondes se propageant à la vitesse  $c$  a priori dans un référentiel privilégié (celui où sont définies les équations de Maxwell).

$$\Delta E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (26.3)$$

On peut se demander quel est ce référentiel où des ondes peuvent se propager à une vitesse constante  $c = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Si la vitesse de la lumière est définie dans un référentiel particulier et si elle obéit à la loi de composition des vitesses, on doit pouvoir mesurer une variation de la vitesse dans un autre référentiel. C'est ce que Michelson et Morley ont essayé de faire.

## 26.2 Expérience de Michelson et Morley

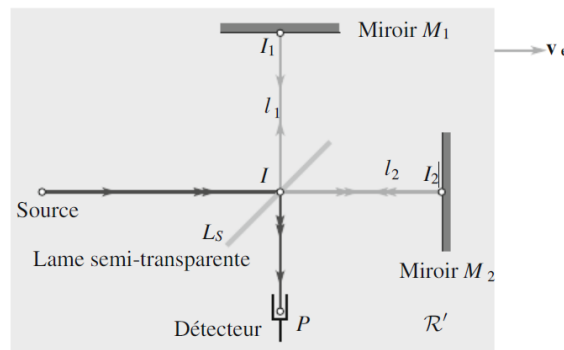
**Objectif** : Mesurer la variation de la célérité de la lumière et vérifier que la lumière suit la loi de composition des vitesses.

### 26.2.1 Dispositif

L'idée de Michelson et Morley est de se placer dans un référentiel qui se déplace par rapport au référentiel absolu dans lequel  $c$  est définie. La planète Terre est en orbite quasi-circulaire de rayon  $r = 1.5 \cdot 10^{11}$  m autour du soleil avec une période de  $T = 365$  jours  $= 3.15 \cdot 10^7$  s. Ce qui donne une vitesse de la Terre autour du soleil de  $v = 3.0 \cdot 10^4$  m  $\cdot$  s $^{-1}$ .

S'il existe un référentiel absolu pour la lumière on devrait pouvoir mesurer la variation de vitesse grâce à un dispositif suffisamment précis. Michelson construit un interféromètre dont l'idée est de faire interférer deux rayons lumineux ayant parcourus deux chemins différents.

**Bien décrire le dispositif expérimental sur transparents** (parcours des rayons, lame séparatrice, miroirs, détecteur)



**Fig. 26.2** – Schéma de l'interféromètre de Michelson (*Pérez, Relativité*)

L'éclairement sur le détecteur **P** dépend de  $\Delta t$  le décalage temporel entre les rayons pour arriver sur le détecteur depuis la source. Les interférences dépendent de la phase :

$$\phi = 2\pi\nu\Delta t. \quad (26.4)$$

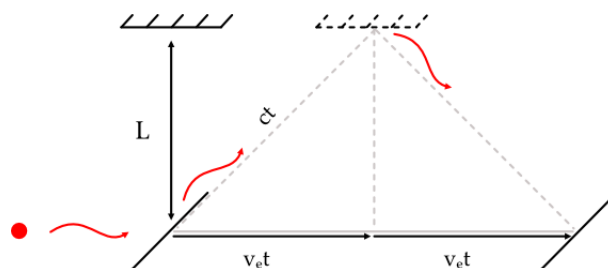
### 26.2.2 Expression de la différence de phase

On souhaite exprimer le retard d'un rayon par rapport à l'autre :

$$\Delta t = T_{\parallel} - T_{\perp} \quad (26.5)$$

On se place dans le référentiel lié au soleil et on suppose la Terre en translation rectiligne uniforme autour du soleil. L'interféromètre est placé sur Terre et se déplace à la vitesse  $v_e = 3 \cdot 10^4$  m  $\cdot$  s $^{-1}$  par rapport au soleil.

**Chemin perpendiculaire :**



**Fig. 26.3** – Schéma chemin n° 1

On applique le théorème de Pythagore au triangle rectangle (ABC) de la figure 3 :

$$(ct)^2 = L^2 + (v_e t)^2$$

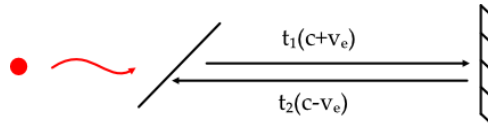
On factorise par le temps, le rayon issu de la lame séparatrice met un temps  $t$  pour aller jusqu'au miroir  $M_2$  :

$$t = \frac{L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}}.$$

En comptant le retour on en déduit  $T_{\perp}$  :

$$T_{\perp} = 2t = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}} \quad (26.6)$$

**Chemin longitudinal :**



**Fig. 26.4** – Schéma chemin n°1

Dans ce cas le dispositif se déplace parallèlement au rayon lumineux dont le rayon doit rattraper le miroir qui s'éloigne en même temps que le rayon avance tandis que le retour sera plus rapide car la lame semi-réfléchissante se rapproche du rayon réfléchi.

$$\text{À l'aller : } t_1 = \frac{L}{c + v_e} \text{ au retour } t_2 = \frac{L}{c - v_e}.$$

On en déduit  $T_{\parallel}$  :

$$T_{\parallel} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}. \quad (26.7)$$

Enfin, on peut exprimer le décalage temporel entre les rayons passant dans chaque bras de l'interféromètre :

$$\Delta t = T_{\parallel} - T_{\perp} = \frac{2L}{c} \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}} \right] \quad (26.8)$$

On fait le développement au premier ordre des fractions avec  $v_e/c \ll 1$ , en simplifiant les expressions il vient :

$$\Delta t = \frac{L}{c} \left(\frac{v_e}{c}\right)^2 \quad (26.9)$$

### 26.2.3 Résultats

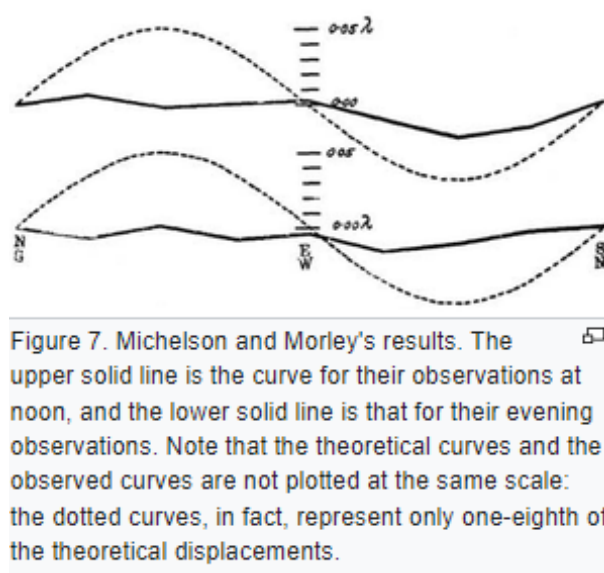
Par conséquent on peut prévoir le déphasage qu'engendre un tel décalage temporel :

$$\phi = 2\pi \frac{Lv}{c} \left(\frac{v_e}{c}\right)^2 = 2\pi \frac{L}{\lambda} \left(\frac{v_e}{c}\right)^2. \quad (26.10)$$

En prenant en compte les améliorations apportées par Morley à l'interféromètre de Michelson. Les bras du Michelson mesurent en comptant les réflexions  $L = 11$  m, la longueur d'onde du Laser est de  $\lambda = 550$  m. On trouve un déphasage

$$\frac{\phi}{2\pi} = 0.2 \quad (26.11)$$

Cela devrait être suffisant pour détecter un déplacement des franges de la figure d'interférence. Cependant le déplacement observé en pratique est nettement plus faible. Michelson et Morley observent un déplacement maximum de l'ordre de 0.02, en moyenne de 0.01.



**Fig. 26.5** – Résultats obtenus par Michelson et Morley (*Wikipedia*)

### Conclusion

On en conclut que l'on ne peut pas vérifier l'hypothèse suivant laquelle  $c$  suit la loi de composition des vitesses. La mesure de la vitesse de la lumière semble indépendante du mouvement de la Terre par rapport au soleil. On peut alors prendre deux positions :

1. Essayer de réparer la théorie du référentiel dans lequel sont définies les équations de Maxwell.
2. Plus courageux, admettre que  $c$  est un invariant qui n'obéit pas aux lois de la cinématique galiléenne. Cela implique une nouvelle cinématique, c'est ce qu'a proposé Einstein en 1905 et que nous allons voir dans la partie suivante.

## 26.3 Fondements de la relativité restreinte

### 26.3.1 Postulats

1. Invariance des lois de la Physique

Toutes les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen. C'est à dire que les mêmes lois se traduisent par des relations qui gardent la même structure au passage à un autre référentiel.

2. Invariance de la vitesse de la lumière

Les équations de Maxwell sont invariantes par changement de référentiel. La célérité de la lumière est un invariant relativiste par changement de référentiel.

**Célérité de la lumière**

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}. \quad (26.12)$$

À ce stade on peut revenir sur l'expérience de Michelson et Morley, car si  $c = \text{constante}$  alors il  $\Delta t = 0$ .

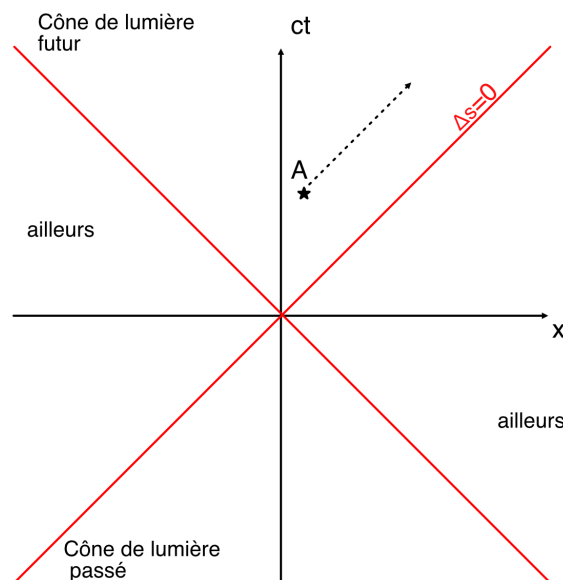
## 3. Transformation de Lorentz poincaré

**Transformée de Lorentz**

$$\begin{cases} ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{cases} \quad (26.13)$$

**26.3.2 L'espace et le temps****Notions d'évènements**

Le temps n'est plus un invariant, on ne peut plus le séparer des coordonnées spatiales. Il faut décrire les expériences en termes d'évènements : "Il s'est passé quelque chose quelque part" comme par exemple allumage d'une lampe sur l'ISS. Les évènements sont indépendants du référentiel.

**Représentation spatiale**

**Fig. 26.6** – Diagramme espace-temps (diagramme de Minkowski)

Deux évènements sont séparés par ce que l'on appelle l'intervalle, notée  $\Delta s$ .

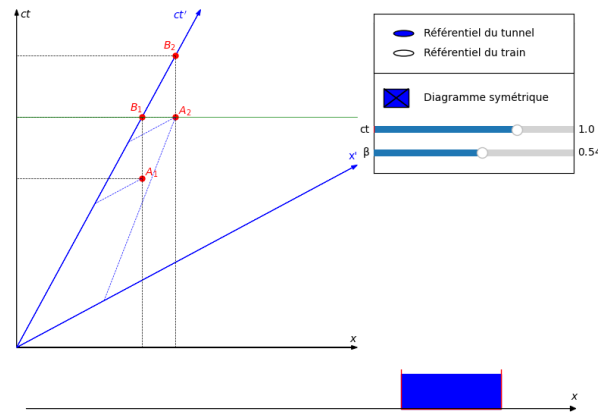
$$\Delta s = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (26.14)$$

L'intervalle est un invariant par changement de référentiel :  $\Delta s = \Delta s'$ . (commenter les valeurs de  $\Delta s$  sur le graphique)

### 26.3.3 Conséquences de la relativité restreinte. Application au paradoxe du train et du tunnel (exercice)

**Énoncé :** On a un train de longueur  $L'$  mesuré dans  $\mathcal{R}'$  (référentiel lié au train) animé d'une vitesse  $\vec{v} = 0.54c \vec{e}_x$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  lié au tunnel (de longueur  $L$  dans  $\mathcal{R}'$ ). Le train rentre dans le tunnel rectiligne lors de l'évènement  $A_1$ . On prendra cet évènement comme origine spatiale et temporelle pour cet exercice où les deux référentiels sont confondus. On définit les évènements suivants :

- $A_1$  : l'avant du train rentre dans le tunnel :  $\begin{pmatrix} x_{A_1} \\ ct_{A_1} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_{A_1} \\ ct'_{A_1} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$
- $A_2$  : l'arrière du train entre dans le tunnel :  $\begin{pmatrix} x_{A_2} \\ ct_{A_2} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$
- $B_1$  : l'avant du train sort du tunnel :  $\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ ct_{B_1} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$
- $B_2$  : l'arrière du train sort du tunnel :  $\begin{pmatrix} x_{B_2} \\ ct_{B_2} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$



**Fig. 26.7** – Simulation du paradoxe du train à discuter avec les calculs suivants

#### Relativité simultanée

Si nous disons que le train à 7h précise du matin sera complètement dans le tunnel, *i.e.*  $ct_{A_2} = ct_{B_1}$  dans le référentiel de l'observateur lié au tunnel. Dans le cadre de la relativité galiléenne où le temps est un invariant, dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  du train on aura aussi  $t = t'$ .

En cinématique relativiste ce n'est pas vrai :

$$\begin{aligned} ct'_{A_2} - ct'_{B_1} &= \gamma(ct_{A_2} - \beta x_{A_2}) - \gamma(ct_{B_1} - \beta x_{B_1}) \\ &= \gamma(ct_{A_2} - ct_{B_1}) - \gamma\beta(x_{A_2} - x_{B_1}) \\ &= \gamma\beta L \end{aligned} \quad (26.15)$$

Les deux évènements simultanés dans  $\mathcal{R}$  ne le sont pas dans  $\mathcal{R}'$ . (Le montrer à l'aide de la simulation).

#### Relativité simultanée

Dans  $\mathcal{R}'$  le train mesure une longueur  $L'$  c'est la longueur propre du train dans son référentiel propre. On peut mesurer sa taille dans le référentiel du tunnel.

$$\begin{aligned}
L' &= x'_{A_2} - x'_{B_1} \\
&= \gamma(x_{A_2} - \beta ct_{A_2}) - \gamma(x_{B_1} - \beta ct_{B_1}) \\
&= \gamma(x_{A_2} - x_{A_1}) - \beta \gamma(ct_{A_2} - ct_{B_1}) \\
L' &= \gamma L
\end{aligned} \tag{26.16}$$

On en déduit que la longueur du train dans  $\mathcal{R}$  est plus petite que dans  $\mathcal{R}'$  (Le montrer à l'aide de la simulation).

### Dilatation du temps

Pour deux évènements, on peut établir la relation entre le temps propre et le temps mesuré dans un autre référentiel à condition que  $x'_2 = x'_1$  comme par exmpe pour les évènements  $A_1$  et  $B_1$ .

On calcule :

$$\begin{aligned}
ct_{B_1} - ct_{A_1} &= \gamma(ct'_{B_1} - ct'_{A_1}) \\
T_{\text{impropre}} &= \gamma T_{\text{propre}}.
\end{aligned} \tag{26.17}$$

### 26.3.4 Loi de composition des vitesses

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} dt = \gamma\left(dt' + \frac{v_e}{c^2} dx'\right) \\ dx = \gamma(dx' + v_e dt') \\ dy = dy' \end{cases}$$

On obtient les vitesses en dérivant les coordonnées spatiales par rapport au temps :

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + v_e}{1 + v_e \frac{v'_x}{c^2}} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{v'_y}{\gamma(1 + v_e \frac{v'_x}{c^2})} \end{cases} \tag{26.18}$$

## 26.4 Conclusion

Pour ce premier cours de relativité restreinte, nous avons établi les bases d'une nouvelle cinématique. Il faut maintenant établir une nouvelle dynamique. Ainsi dans un prochain cours nous mettrons en équation la dynamique relativiste, en particulier nous écrirons les quadri-vecteurs énergie et impulsion pour une particule en mouvement.



# Chapitre 27

## Leçon 27 : Effet tunnel, application à la réactivité alpha

---

### Niveau :

- Deuxième année CPGE

### Pré-requis :

- Physique ondulatoire
- Notion de mécanique quantique (eq de Schrödinger stationnaire, puits de potentiels)
- radioactivité

### Références :

- Dunod PC
  - Berkley quantique
  - 51 leçons pour l'agreg
  - sujet des mines
- 

### Sommaire

---

<b>27.1 Introduction</b>	<b>121</b>
<b>27.2 Barrière de potentiel</b>	<b>122</b>
27.2.1 Fonction d'onde propre	122
27.2.2 Probabilité de réflexion et de transmission. Effet tunnel	122
27.2.3 Approximation d'une barrière épaisse	122
<b>27.3 Radioactivité <math>\alpha</math></b>	<b>123</b>
27.3.1 Description et résultats expérimentaux	123
27.3.2 Théorie de la radioactivité $\alpha$ : Gamow, Gurney et Condon (BUP 734, MINES PC 2016)	123
27.3.3 Détermination du temps de vie	123
<b>27.4 Conclusion</b>	<b>124</b>

---

## 27.1 Introduction

Avec le puit de potentiel et la barrière de potentiel, on a vu que la fonction d'onde pouvait déborder sur des zones où le potentiel est plus grand que son énergie. On peut le montrer via un programme python, par exemple avec la marche que l'on peut trouver en exercice (exo 34.6 Dunod PC 2019 par exemple). Ou comme dans le dunod avec un puit de potentiel carré.

On a vu dans le cours précédent qu'une particule quantique dans un puit de potentiel fini présente des niveaux d'énergie qui sont quantifiés :

$$E_n = n^2 \frac{k^2 \hbar^2}{2m} \quad (27.1)$$

où  $n$  est le  $n - me$  état quantique de la particule tel que  $n = 1$  est le fondamental.  $a$  est la largeur du puit de potentiel.  $\hbar$  la constante de Planck et  $m$  la masse de la particule. La recherche des fonctions d'ondes propres vérifiant Schrödinger stationnaire conduit à la recherche de mode propres de vibration (un peu comme la corde de Melde). Utiliser l'analogie de la corde de Melde que les étudiants connaissent. Dans les deux cas l'écriture des conditions aux limites impose une quantification des vecteurs d'ondes et revient à écrire  $a = n\lambda_n/2$ . On présente alors le programme python Du puit carré. On peut présenter les trois premiers états par exemple.

On pourrait sortir une corde de Melde pour le montrer qualitativement mais ce n'est pas l'objet de la leçon et pas le temps. Noeuds = densité de probabilité nulle, ventres = densité de proba maximale.

Pour une particule classique, les zones pour  $|x| > a/2$  sont interdites. En revanche on remarque que pour une particule quantique, la probabilité d'obtenir une particule au-delà de la barrière est non nulle ! L'expression de la fonction d'onde dans les zones I et III (zone interdite) sont de la forme :

$$\psi(x) = Ae^{\pm qx} \quad (27.2)$$

C'est l'expression d'une onde évanescence, dont on peut définir une profondeur de pénétration de la particule quantique d'énergie  $E < V_0$  dans les régions interdites par la mécanique classique :

$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}} \quad (27.3)$$

Comment peut-on utiliser cette propriété ?

## 27.2 Barrière de potentiel

### 27.2.1 Fonction d'onde propre

On suit le Dunod PC p 1261, on résoud Schrödinger stationnaire dans les trois domaines donnés.

### 27.2.2 Probabilité de réflexion et de transmission. Effet tunnel

Toujours Dunod PC. On donne les fonctions d'ondes incidentes et réfléchies ainsi que les vecteurs densités de proba. Pour arriver à définir les coefficients de réflexion et transmission.

$$R = \frac{\|\vec{j}_r\|}{\|\vec{j}_i\|} \quad \text{et} \quad T = \frac{\|\vec{j}_t\|}{\|\vec{j}_i\|} \quad (27.4)$$

On écrit les conditions aux limites pour déterminer les coefficients. On en déduit  $R$  et  $T$ .

### 27.2.3 Approximation d'une barrière épaisse

On s'intéresse au cas d'une barrière épaisse, c'est à dire que sa largeur  $a$  est très grande devant la profondeur de pénétration  $a \ll \delta$ . Cela correspond à  $a$  grand ou  $V_0 \ll E$ . (particules de faible énergie devant la hauteur de la barrière). On peut alors simplifier l'expression de  $T$  car  $\sinh(qa) \sim e^{2qa}/4 \ll 1$ . Le coefficient de transmission devient :

$$T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2qa} \quad (27.5)$$

On peut donner en transparents différents ordres de grandeurs pour différentes particules. On choisit d'étudier la radioactivité  $\alpha$ .

## 27.3 Radioactivité $\alpha$

### 27.3.1 Description et résultats expérimentaux

Phénomène naturel qui résulte de l'instabilité d'un noyau atomique qui se désintègre (DUNOD PC 2019 p 1271). Rappel que c'est l'émission d'une particule  $\alpha$  par un noyau instable. Il s'agit d'un noyau d'Helium très stable (2 protons et 2 Neutrons). On peut donner en transparents des exemples de désintégration (Uranium ou radium par exemple).

On peut montrer les résultats expérimentaux <https://link.springer.com/article/10.1140/epja/i2019-12804-5>

On constate que le temps de demi-vie est d'autant plus court que l'énergie cinétique de la particule est grande on expliquera ce temps de demi-vie grâce à l'effet tunnel.

### 27.3.2 Théorie de la radioactivité $\alpha$ : Gamow Gurney et Condon (BUP 734, MINES PC 2016)

La radioactivité  $\alpha$  a été interprétée en 1928 par Gamow grâce à l'effet tunnel. Il considère que le noyau X était constitué au préalable de la particule  $\alpha$  et du noyau Y. L'énergie potentielle  $V(x)$  (interaction forte de courte portée et de la répulsion électrostatique) entre les deux particules est une fonction de la distance qui les sépare. À l'extérieur c'est le potentiel de Coulomb qui s'applique à la particule. Dessiner le profil du potentiel.

On mène les calculs comme sur le corrigé des mines. On remarque que la particule  $\alpha$  devrait rester piégée dans le puit. Elle s'explique par l'existence d'un effet tunnel : la particule doit traverser la barrière par effet tunnel sur une distance. On calcule cette distance pour l'énergie indiquée dans le tableau de l'article.

On arrive ensuite à l'expression de  $\ln T$

### 27.3.3 Détermination du temps de vie

On connaît l'expression du coefficient de transmission  $T$ . On approxime la barrière variant continuellement par plusieurs barrières rectangulaires. Le coefficient de transmission global est le produit des coefficients de transmission.

$$\ln(T) = a - \frac{b}{\sqrt{E}} \quad (27.6)$$

On constate que  $T$  décroît lorsque  $E$  augmente ou lorsque la masse décroît. La particule fait des allers-retours dans le noyau et ne cesse de rebondir contre la barrière de potentiel. À chaque collision elle a une proba d'être transmise  $T$ .

Entre deux rebonds sur la barrière, la particule parcourt la distance  $4x_0$ . Donc  $t_m = 4x_0/v$ . Le nombre moyen de rebonds par seconde :

$$N = 1/t_m$$

et la probabilité d'émission  $\alpha$  s'écrit

$$dp = NT dt = \frac{T}{t_m} dt$$

Soit la variation du nombre de noyaux

$$dN = -N dp = -N \frac{T}{t_m} dt$$

Soit

$$N(t) = N_0 e^{-Tt/t_m}$$

La demi-vie est définie comme le temps après lequel la moitié des noyaux s'est désintégré :

$$N(\tau_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$$

Donc

$$\tau_{1/2} = t_m \ln 2 / T$$

$$\ln \tau_{1/2} = \ln \ln 2 + \ln t_m - \ln T = \underbrace{\ln \ln 2 + \ln t_m - a}_{\text{constante}} + \frac{b}{\sqrt{E}}$$

On retrouve la loi expérimentale ! Peut-on tracer les données à partir du tableau ?

## 27.4 Conclusion

Effet tunnel bien utile pour comprendre des phénomènes naturels. On en a pas parlé mais il est également utilisé pour des applications technologiques actuelles : microscope à effet tunnel  
<https://toutestquantique.fr/tunnel/>.