

LP n° 2 : Gravitation.

NIVEAU :

Je choisis de placer cette leçon au niveau Licence car il me paraît utile de discuter de la forme des trajectoires et de leur équation, ce qui sort du programme officiel des classes préparatoires. De plus, on peut voir cette leçon comme le début logique d'un cours sur la relativité qu'il n'est pas cohérent de faire en CPGE.

PRÉREQUIS :

- Mécanique du point (Lois de Newton, aspect énergétique, cinématique en cylindrique, moment cinétique, ...)
- Électrostatique

PLAN :

1. L'interaction gravitationnelle
2. Mouvement dans un champ de gravitation
3. L'interaction gravitationnelle dans le système solaire

BIBLIOGRAPHIE :

- [9] *Mécanique, Tome 1*. Bertin-Faroux-Renault.
- [15] P. Brasselet, *Mécanique*. PCSI-MPSI.
- [57] *Mécanique. Fondements et applications*. J.-P. Pérez.
- [63] *Physique PCSI*, Tout-en-un Dunod, Nouveau programme
- [67] *Physique MPSI*, Tout-en-un Dunod, Ancien programme

IDÉES À FAIRE PASSER :

La gravitation est un problème a priori compliqué à l'échelle du système solaire (tout le monde attire tout le monde) mais ramené au problème à deux corps (ce qui est déjà une bonne approximation), c'est un des rares sujets maximalelement intégrables de la physique.

Introduction : Reprendre efficacement l'aspect historique avec les [slides](#) en parallèle :

- Claude Ptolémée, dans l'antiquité, recueille des données sur les positions des astres dans le ciel, la datation des éclipses etc...
- Nicolas Copernic développe et défend la théorie de l'héliocentrisme.
- Galilée reprend la thèse copernicienne et développe les outils d'observation (lunette astronomique) de précision pour obtenir de meilleures données.

Finalement, les relevés majeurs de l'époque sont surtout dus à l'astronome danois Tycho Brahe (1546 - 1601) et c'est l'allemand Johannes Kepler qui parvient à unifier ces observations sous trois lois majeures - voir [slide](#).

S'appuyant sur ces travaux, Newton postule la loi de la gravitation universelle et parvient à démontrer les résultats de Kepler vers 1687. C'est l'objectif de cette leçon que de retrouver ces démonstrations.

1 L'interaction gravitationnelle

1.1 Force et énergie gravitationnelle

[57], p. 71 - et [63], p. 621-622 - Schéma de la situation étudiée (interaction de deux corps distants de r (penser à mettre les vecteurs \vec{F} et \vec{u}) - Expression de la force - Valeur de la constante de gravitation universelle $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ - Expression en coordonnées sphérique - Travail élémentaire, expression de l'énergie potentielle $E_p(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$.

1.2 Le champ gravitationnel

[57], p. 71 - On procède par analogie avec l'électrostatique. **Il faut s'entraîner à dire cette partie pour la rendre efficace!**

On a la force gravitationnelle et on connaît déjà l'interaction coulombienne : elles ont la même forme - Or à l'interaction coulombienne on a associé le champ électrostatique de sorte que $\vec{F} = q \vec{E}$ - On connaît l'expression de \vec{E} pour une charge ponctuelle - Si on définit le champ de pesanteur par analogie $\vec{\mathcal{G}}(r) = \dots$ - On vérifie que $\vec{F}(r) = m \vec{\mathcal{G}}(r)$. Conclure quand même cette partie en écrivant le champ gravitationnel au tableau!

1.3 Interaction gravitationnelle à l'extérieur d'un corps sphérique

Dans le prolongement de la partie précédente on applique le théorème de gauss gravitationnel :

$$\oint_{\Sigma} \vec{g}(r) \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{intérieure à la surface}}$$

à un corps sphérique de rayon non nul, mais en un point qui lui est extérieur. On trouve l'expression du champ de gravitation en ce point et on reconnaît celui d'une même masse assimilée à un point. Pratique pour la suite et l'étude des astres!

Transition : Quel est alors le mouvement d'une particule massive dans un champ de gravitation ?

2 Mouvement dans un champ de gravitation

2.1 Loi des aires

A priori il faut travailler dans le référentiel barycentrique, mais vu les rapport des masses du soleil et de la terre on va considérer qu'il est confondu au référentiel héliocentrique. (D'ailleurs, c'est encore plus le cas avec terre/satellite!) - Voir [67], p.736 pour une critique de cette modélisation.

Dans ce cadre on applique le TMC pour montrer que le moment cinétique est conservé : le mouvement est plan et la vitesse aréolaire est constante (faire la démonstration en exprimant l'aire balayée par le produit vectoriel : $A(t) = |\overrightarrow{OM}(t) \wedge \overrightarrow{OM}(t + dt)|$, voir [63], p.751).

2.2 Étude qualitative du mouvement

$r^2 \dot{\theta}$ étant constante, on isole le mouvement radial dans l'énergie mécanique. On fait apparaître l'énergie potentielle efficace sous la forme

$$E_{p,eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - G \frac{Mm}{r}$$

On présente sur [slide](#) les états liés, et de diffusion.

2.3 Équation de la trajectoire

Introduction du vecteur de Runge-Lenz, conservation, et établissement de la trajectoire. Voir [67].

Transition : On a retrouvé deux des trois lois de Kepler dans le cas très général de corps en interaction gravitationnelle. Pour obtenir la troisième, propre au système solaire, il nous faut entrer un peu plus dans le détail du système.

3 L'interaction gravitationnelle dans le système solaire

3.1 Mouvement des planètes autour du soleil

Il reste à démontrer la troisième loi de Kepler. Le faire ([67], p. 738), et faire l'ajustement (linéaire, en log-log) des données de [15], p.238 déjà mises sur [slides](#) pour montrer que ça marche effectivement! Retrouver la valeur de G .

3.2 Influence de la gravitation sur le lancement d'un satellite

Cette partie peut aisément sauter si besoin!

On calcule ([67], p.745) la première vitesse cosmique, vitesse de satellisation, sur la trajectoire circulaire de rayon R_T ; puis la deuxième vitesse cosmique, vitesse de libération, vitesse minimale pour annuler E_m et sortir de l'influence gravitationnelle de la terre.

Conclusion : Cette leçon nous a permis de redéfinir proprement les grandeurs et phénomènes associés à celle des quatre interactions fondamentales qui régit les grandes échelles : la gravitation. Nous avons pu décrire efficacement l'évolution des systèmes stellaires mais c'est en fait plutôt surprenant : nous n'avons jamais posé la question de la vectorisation de cette force! Quelle est la particule vecteur de la gravitation? Comment se propage-t-elle dans le temps et l'espace? Autant de questions qui nécessitent la théorie de la relativité générale pour être résolues.

BONUS : _____

1. **Quelques mots de RG :** La relativité générale est une théorie non linéaire. Elle repose sur l'identification (Einstein, 1905) des masses inertielle (la masse du terme ma) et grave (celle du mg). Cette identification n'a rien d'évident (même si elle nous semble évidente du fait qu'on l'a toujours conçue comme telle), et est aujourd'hui vérifiée expérimentalement à une très bonne précision (10^{-12} près, d'après Wikipédia...). C'est ce principe d'équivalence « force = accélération » qui mène à l'établissement de la RG. Une correction classique est l'apparition d'un terme en $1/r^3$ dans l'énergie potentielle effective qui permet d'ailleurs de démontrer la précession du périhélie de mercure. La linéarisation de cette théorie mène à l'équation de propagation des ondes gravitationnelles (Prix Nobel 2017).
2. **Sur l'analogie électrostatique et ses limites :**
 - Comme la charge est positive ou négative, l'interaction Coulombienne peut être attractive ou répulsive, là où l'interaction gravitationnelle est systématiquement attractive du fait de $m > 0$. D'ailleurs, deux charges de même signe se repoussent!
 - Différence importante d'échelle : l'électrostatique régit l'échelle atomique, alors que la gravitation régit le mouvement des corps célestes.
 - \vec{E} dépendant du temps engendre \vec{B} , mais pas d'équivalent pour le champ de gravitation. D'ailleurs, l'électromagnétisme est à l'électrostatique ce que la relativité générale est à la gravitation : l'élargissement de la théorie aux particules en mouvement.
 - L'appendice 1 de [9] fait exactement le raisonnement inverse, partant des lois de Kepler pour remonter aux propriétés de la gravitation.
3. On trouve dans [15], p.30 une définition détaillée de la masse.

