LP n° 23 : Aspects analogique et numérique du traitement d'un signal. Etude spectrale.

NIVEAU :

CPGE - a priori MPSI/MP

PRÉREQUIS :

- Lois de l'électrocinétique
- Écriture complexe des signaux sinusoïdaux
- Réponses des filtres usuels des premier et second ordres à une excitation sinusoïdale de fréquence f

PLAN :

1. Réponse d'un filtre à une excitation périodique quelconque
2. Exemple de filtrages analogiques
3. Contraintes et avantages du filtrage numérique

BIBLIOGRAPHIE :

- [64] Dunod MP, nouveau programme
- [28] F. Cottet, pour quasiment toute la leçon...
- [75] Nouveau précis bréal, PSI/PT

IDÉES À FAIRE PASSER :

Je pense que l'idée de cette leçon est de supposer connu les notions de traitement des signaux sinusoïdaux, notamment les réponses des filtres classiques du premier et du second ordre à ces entrées. On peut alors s'intéresser au traitement d'un signal quelconque (vraiment quelconque ou on garde quand même l'hypothèse périodique ?), qui nécessite de se ramener sur une base de cosinus et sinus, donc la décomposition en série de Fourier et l'analyse spectrale. Après réflexion je pense aussi qu'il ne faut pas restreindre cette leçon au filtrage, ce serait ignoré une partie importante de la notion de traitement du signal.

Introduction : Définir le signal, la notion de traitement et l'aspect analogique ou numérique à partir des premières pages de [14].

1 Réponse d'un filtre à une excitation périodique quelconque

1.1 Décomposition d'un signal en série de Fourier

Pour cette partie, voir [64], p. 111 et suivantes - Affirmer le caractère base de la suite de fonction $(\cos(2\pi n f x+\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ pour les fonctions périodiques de fréquence f. Insister sur le caractère infini de la suite (donc de la décomposition). Écrire une forme générale de fonction sur cette base avec les coefficients et définir la décomposition en série de Fourier, la composante continue, le fondamental et les harmoniques.

> Expérience : Montrer numériquement l'approximation d'un créneau et d'un triangle par le développement en série de Fourier. Montrer que les hautes fréquences permettent d'approximer les variations rapides de la fonction. Remarquer expérimentalement le phénomène de Gibbs. Selon le temps on peut montrer que le bruit blanc est impossible à approximer ! Le programme à utiliser est Decomposition_ spectrale. Un autre programme, permet de mettre en parallèle l'approximation du créneau et du triangle.

1.2 Spectre d'un signal périodique

On s'intéresse généralement au spectre en amplitude : on trace la valeur de chaque coefficient A_n en fonction de la fréquence f_n de l'harmonique. Présenter d'abord le spectre d'un sinus pur, d'une puissance de sinus (à linéariser) et enfin côte à côte les spectres du créneau et du triangle. Faire le lien entre la décroissance du spectre et la qualité de l'approximation.

Remarque sur la modulation : on peut traiter ici le cas du spectre du signal $E_0\cos(\omega_0 t)\cos(\Omega t)$ selon que Ω et ω_0 sont très proches ou au contraire éloignés.

Remarque sur l'éventuelle rencontre avec des pulsations négatives : On peut ramener les coefficient du DSF A_n et φ_n à un unique coefficient c_n à condition d'accepter qu'il soit complexe. Il y a alors dédoublement du spectre et cela fait apparaître des pulsations négatives mais ce ne sont que des artefact du calcul ! ELLES N'ONT AUCUNE RÉALITÉ PHYSIQUE !

1.3 Action d'un filtre sur un signal périodique

[64], p. 120 et suivantes - Prendre en prérequis les filtres niveau MPSI. Comme on a un système linéaire : on peut appliquer sur chaque terme de la somme la fonction de transfert. L'effet du filtre est de multiplier l'amplitude par $G(\omega)$ et de déphaser le signal de $\Phi(\omega)$.

Transition : On a vu comment décrire un signal : on peut le décomposer en série de Fourier, permettant d'obtenir des informations sur celui-ci. Mais le but c'est de le réceptionner et de le transmettre, comment faire ?

---

2 Chaîne de traitement du signal

2.1 Étape de transmission

On prend [28], chapitre 3 (p. 43) - La transmission est étudiée en comparant la sortie à l'entrée, par exemple avec le gain en puissance (la puissance est un des enjeux principaux !). Il faut regarder les propriétés de transmission par exemple en fonction de la fréquence (diagramme de Bode). Parler des systèmes linéaire (illustrer expérimentalement ?) et stationnaire. Aboutir au filtrage.

2.2 Filtrage

Je pense pas que ce soit utile de revenir sur les filtre de base. On peut proposer une application ciblée du filtrage, par exemple sur le bruit ?

Expérience : Généré analogiquement un signal bruité (par exemple du 50 Hz additioné au signal à transmettre, et s'en débarasser par filtrage... passe bas ou passe haut, voire passe bande ?

2.3 Modulation et démodulation

On prend [28], chapitre 5 (p. 79) - Nécessité ou non d'une modulation et avantage de la modulation (voir [28], p. 80). Différents modes de modulation. On choisit de parler de la modulation en amplitude (c'est raisonnable vu le temps à consacrer...) On traite le cas le plus simple de la porteuse conservée, évoquer les principes de démodulation et regarder l'influence sur le spectre.

Transition :

---

3 Contraintes et avantages du filtrage numérique

[64], p. 159 - On utilise de plus en plus, à la place de l'électronique analogique, l'électronique numérique. Au lieu de traiter des signaux électriques en fonction du temps, on manipule des signaux numérisés, listes de nombres provenant de l'échantillonnage des signaux analogiques.

3.1 Conversion vers le numérique, contrainte sur l'échantillonnage

Présenter le principe de la conversion analogique-numérique [28], p. 141 : on relève la valeur du signal analogique à une certaine fréquence $f_e = 1/T_e$ dite fréquence d'échantillonnage et sur une durée $\tau = NT_e$. Comment cela modifie-t-il le spectre ? Voir [28], p. 135 : En fait on est entrain de multiplier le signal temporel par un peigne de dirac donc on périodise le spectre dans l'espace des fréquence avec une période f_e (PÉRIODE DANS L'ESPACE DES FRÉQUENCES = FRÉQUENCE DANS L'ESPACE TEMPOREL !). On voit donc apparaître naturellement le théorème de Shannon, et le repliement de spectre s'il n'est pas respecté.

Expérience : On peut mettre en évidence le critère de Shannon en calculant le spectre à l'oscilloscope et augmentant progressivement la fréquence du sinus : on voit le repliement de spectre en arrivant à $f_e/2$. Penser à utiliser le module pour projeter l'oscilloscope sur l'écran.

Remarque : On a supposé que le signal étudié est à spectre borné. Ça peut être le cas naturellement (cas de la voix notamment) ou résulter d'un filtrage préalable.

3.2 Transformée de Fourier discrète

Faire un bref rappel sur les transformées de Fourier adaptées aux différents types de siganux (cf. [28], p. 165) - Dans notre cas c'est nécessairement la transformée de Fourier discrète qui convient puisque le signal est intrinsèquement discrétisé par l'échantillonnage. Pour la suite tout est sur le graphe de la page 167 : la fréquence la plus grande qu'on peut voir apparaître est forcément la fréquence d'échantillonnage f_e, et la plus courte est limitée par la fenêtre, c'est $\Delta f = f_e/N$

> Expérience : Calculer la transformée de Fourier d'un sinus parfait mais de longueur finie en porte simple. Constater l'effet du fenêtrage temporel.

Distinguer les différents raffinement de fenêtrage expérimentalement et faire un petit bilan au tableau.

3.3 Simplicité du traitement numérique

Reprendre le problème du bruit précédent et le traiter numériquement.

Conclusion : On peut ouvrir sur le filtrage spatial en optique (image = signal 2D).

BONUS :

1. Non linéaires & bruit ?
2. Il est crucial de géré correctement le temps pendant cette leçon, parce que la toute dernière sous partie consistant à réaliser un traitement numérique de signal ne peut pas être mise de côté.
3. L'ordinateur utilise l'algorithme de FFT pour faire le calcul. Il est discuté dans le Cottet, chapitre 8.
4. Mettre le théorème de Plancherel en prérequis ?
5. Pour éviter le repliement on peut utiliser un filtre anti-repliement ([2] p.140)
6. Transformée de Fourier non exigible en prépa, on doit la redéfinir et définir le DSF et la FFT et FTD