LP4: Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Alexandre Fafin

31/05/18

Références

[1] S. Candel. *Mécanique des fluids.* Dunod, 1995.

[2] J.-Ph Pérez. *Mécanique : fondements et applications.* Dunod, 2014.

[3] V. Renvoizé, E. Bellanger, R. Girardi, S. Paulin, B. Portelli, and E. Saudrais. *Physique PSI-PSI*, Cap prépa.* Pearson, 2014.

Niveau

L2

Pré-requis

— Cinématique des fluides
— Equation de Navier-Stokes
— Mécanique

Objectifs

— Intérêt de l'hypothèse d'un écoulement parfait
— Démontrer et interpréter l'équation de Bernouilli
— Conséquences et application d'un écoulement parfait

Table des matières

Introduction

Aux chapitres précédents nous avons établis les actions surfaciques et volumiques s'exerçant sur un fluide. Nous avons introduit l'équation de Navier-Stokes régissant la dynamique du fluide. Problème : cette équation est extrémement dure à résoudre et il n'y a pas de solution générale. Nous allons voir si nous pouvons pas faire des approximations pour simplifier cette équations.

1 Modèle de l'écoulement parfait

1.1 Position du problème

Un fluide parfait est dénué de toute viscosité. Les fluides parfaits sont également appelés supefluides, et on peut citer l'hélium 4 qui, en dessous de la température de 2,17 K devient superfluide. Lors de son écoulement il n'y a plus de pertes de charges. Mais en pratique peu de fluide sont parfaits.

Dans la suite nous considérons :
- Fluide monophasé (pas d'interface entre 2 fluides)
- Description en milieux continus. On se place à l'échelle de la particule fluide, échelle mésoscopique. L'échelle de description l est suffisamment grande pour contenir beaucoup de molécules mais la pression et la températur est uniforme.
- On suppose $v << v_{son}$, c'est-à-dire un écoulement très faiblement compressible ?

1.2 Modèle de l'écoulement parfait

Un écoulement parfait est un écoulement où il n'y a pas de phénomènes de diffusion thermique (on considère l'évolution adiabatique réversible) et sans viscosité. On supprime tout phénomène irreversible dans l'écoulement. Cela permet de découpler les aspects mécaniques et thermodynamique. L'énergie mécanique reste de l'énergie mécanique.

Faire un schéma de l'écoulement des lignes de courant autour d'une sphère. Introduire la couche limite. On a défini le nombre de Reynolds comme l'ordre de grandeur du transport de quantité de moubement sur le phénomène diffusif :

$$Re = \frac{vL\rho}{\nu} \tag{1}$$

Le modèle de l'écoulement parfait consiste à considérer Re très grand.

Etablir l'expression de l'épaisseur de la couche limite δ au voisinage d'une plaque de longueur L en comparant les ordres de grandeur des termes des actions de viscosité et de l'acceleration advective [3]. On arrive à :

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \tag{2}$$

Ainsi avec un grand nombre de Reynolds l'épaisseur de la couche limite tend vers 0.

Si on prend une plane de longueur 1m placée dans un écoulement d'air à la vitesse $v = 5$ m/s. Le nombre de Reynolds vaut $3,4.10^5$ et l'épaisseur de la couche limite en vout de plaque est $\delta = 0,0085$ m [1] ! Dans la suite on va négliger la couche limite.

1.3 Equation d'Euler

L'équation d'Euler s'écrit donc

$$\rho(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\text{grad}})\vec{v}) = -\vec{\text{grad}}p - +\rho\vec{g} \tag{3}$$

On dénombre 5 inconnues : $\vec{v}$, p, ρ. La température n'est pas prise en compte on négligle est échanges thermiques au sein du fluide.

Nous avons également la relation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\text{div}}\rho\vec{v} = 0 \tag{4}$$

Cela fait 4 équations : il faut rajouter l'équation l'équation (ou fonction) d'état du fluide $\rho(p)$ qui donne une nouvelle relation.

2 Théorème de Bernouilli

2.1 Intégration de l'équation d'Euler

On fait l'hypothèse que le fluide ne subit d'actions autres que celle de la pesanteur entre les points A et B de la ligne de courant considérée. De plus on se place dans le cas d'un écoulement permanent.

Ecoulement permanent et fuide incompressible

$$P + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z = cte \tag{5}$$

Ecoulement irrotationnel et fluide incompressible

On a maintenant une condition en plus

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}(M,t) = \vec{0} \tag{6}$$

La vitesse dérive donc d'un potentiel : $\vec{v} = -\vec{\mathrm{grad}}\phi$ On arrive à :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi = f(t) \tag{7}$$

Cette relation est valable dans tout le fluide et plus seulement sur une ligne de courant.

Ecoulement d'un fluide barotrope

Un fluide barotrope est caractérisé par une pression en dépendant que de la masse volumique $p(\rho)$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + k \tag{8}$$

2.2 Interpretation énergiétique

Intégrale première du mouvement qui traduit la conservation de l'énergie mécanique des particules fluides au cours de leur déplacement.

3 Applications

3.1 Vidange d'un réservoir

Manip A l'aide d'un vase de Mariott vérifier la formule de Toricelli :

$$v = \sqrt{2gh} \tag{9}$$

Si possible utiliser deux liquides (eau et eau + NaCl saturé) pour montrer que ça ne dépend pas de la masse volumique.

3.2 Effet Venturi

Montrer que la pression est plus faible au rétrecissement d'une conduite. Utilité en chimie notamment pour les trompes à vide.