LP n° 49 : Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités

NIVEAU : LICENCE 3

PRÉREQUIS :

- Oscillateur harmonique (amorti, libre, Régime Sinusoïdal Forcé)
- Analyse de Fourier
- Électronique (AO, lois des circuits)

PLAN :

1. Étude des oscillateurs conservatifs
2. Oscillateurs amortis, oscillateurs entretenus

BIBLIOGRAPHIE :

- BUP n°744 sur *Le portrait de phase des oscillateurs*
- [15] *Mécanique. PCSI-MPSI.* P. Brasselet.
- [46] *Électronique expérimentale*, Krob (un peu)
- Polycopié de TP de Montrouge *Physique non linéaire.*

IDÉES À FAIRE PASSER :

L'étude des oscillateurs ouvre un vaste champ d'étude de la physique : linéaires et non linéaires, amortis et entretenus, leur résolution exacte est souvent compliquée. Sur des systèmes simples, on introduit ici un outil d'étude graphique généralisable aux systèmes les plus compliqués : le portrait de phase.

Introduction : Définir un oscillateur comme un système physique oscillant de part et d'autre d'une position d'équilibre stable - par exemple cœur qui bat, horloge. Dans cette leçon on prendra pour définition d'un système non-linéaire un système pour lequel le principe de superposition ne s'applique pas ; il a notamment pour propriété de pouvoir modifier la fréquence des signaux d'entrée.

1 Étude des oscillateurs conservatifs

1.1 Le portrait de phase illustré sur l'exemple de l'oscillateur harmonique

Il va sans dire que vu l'intérêt physique à peu près nul de cette partie, qui n'a sa place dans cette leçon que d'un point de vue pédagogique, il faut être efficace.

Poser l'équation d'un oscillateur harmonique (éventuellement donner quelques exemples physiques) et résoudre en exprimant position et vitesse **sans oublier les constantes d'intégration!** Définir le portrait de phase (BUP, p. 719) en insistant sur le rôle des conditions initiales (BUP, p. 720) et démontrer que **les trajectoires de l'OH dans le plan de phase sont des cercles centrés sur O et dont le rayon dépend des conditions initiales**. Tracer le portrait de phase de l'oscillateur harmonique (à tracer vite fait au tableau) et expliquer dans quel sens on tourne.

1.2 L'influence des non linéarités illustrée sur l'exemple du pendule simple

On s'intéresse à un pendule simple. Faire très rapidement (ou admettre) la mise en équation : schéma, système, référentiel, bilan des forces. On a un système conservatif à un degré de liberté donc conservation de l'énergie mécanique et on choisit E_p nulle pour $\theta = 0$ pour aboutir à

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl\sin(\theta) = E(\theta_0, \dot{\theta}0)$$

Rappeler qu'on a déjà vu un moyen de prévoir le mouvement adopté par le pendule en fonction de l'énergie mécanique associée aux conditions initiales. L'énergie cinétique étant toujours positive cela implique comme d'habitude une valeur maximale pour E_P. On trace le potentiel, et différentes valeurs d'énergie et on interprète :

- si E est faible le système est cantonné à θ petit devant 1 on peut linéariser et on retrouve l'oscillateur harmonique dont on a déjà vu les trajectoires dans l'espace des phases.
- pour E un peu plus grand on a une déformation du cercle.
- dans le cas limite $E = E_{max}$ on oscille entre $-\pi$ et π.
- dans le cas d'énergie supérieure on fait des tours : mouvement révolutif.

L'équation du mouvement est compliquée à résoudre de manière analytique mais on peut avoir rapidement accès à la forme des trajectoires en établissant le portrait de phase de manière numérique. Voir BUP, p. 721. Tracer les trajectoire et le portrait de phase avec le **programme python Portrait_Phase_Pendule** et prendre le temps de retrouver les quatre mouvements précédents sur le portrait de phase.

1.3 Non-linéarités et aspect fréquentiel

Voir [15], pp. 124 - 126 : Linéarisation du sinus à l'ordre supérieur et résolution en perturbation. On obtient l'apparition d'harmoniques impaires, et la modification de la période du pendule (pert d'isochronisme). On se sert du **programme python Pendule_NonLineaire** pour ajouter aux graphes du programme précédent celui de la transformée de fourier des signaux. Aux petites amplitudes on a bien un unique pic à la fréquence attendue, puis au fur et à mesure qu'on s'éloigne de cette approximation on observe deux phénomènes :

- La modification de la fréquence centrale par la formule de Borda ;
- L'apparition d'harmoniques impaires à des fréquences plus élevées.

Transition : Puissance du portrait de phase : on ne résout pas d'équation mais on a des informations sur le mouvement quand même ! Problème : on a ici des oscillations qui finissent par s'amortir, pas comme le cœur ou les horloges !

---

2 Oscillateurs amortis, oscillateurs entretenus

2.1 Considérations générales

Jusque là on n'a pas pris en compte de terme proportionnel à la dérivée, mais l'équation générale du mouvement est de la forme $\ddot{x}+A(x)\dot{x}+\omega_0^2 x=0$ et l'oscillateur est amorti ou amplifié selon le signe de A. Dans la suite on va regarder deux modèles simples :

- Un exemple d'oscillateur amorti avec A constante et négatif ;
- Un exemple d'oscillateur avec $A(x)=a+bx^2=\epsilon(x^2-1)$ amplifié pour $x<1$ et amorti lorsque $x>1$ (pas de terme en x pour conserver la parité) ?

2.2 Application à l'étude des oscillateurs amortis

Voir le BUP, p. 722. On donne l'équation dans le cas de l'amortissement fluide, donner l'expression de Q et prévoir qualitativement comment il va influer sur le mouvement. On peut déjà dire que l'oscillateur va perdre de l'énergie donc d'un tour sur l'autre il atteindra des vitesses plus faibles et des angles moins importants. Simulation numérique par le **programme python Oscillateur_Amorti_Fluide** : on voit comme attendu des spirales sur le portrait de phase convergeant plus ou moins rapidement vers l'origine qui apparaît comme un point attracteur. *Pour le pendule amorti on a une infinité de points attracteurs multiples de* 2π.

On peut éventuellement mentionner les oscillateurs amortis par frottements solides et et lancer le **programme python Oscillateur_Amorti_Solide** pour montrer que la décroissance n'est pas de même nature et surtout qu'il n'y plus un point attracteur mais une plage de points attracteurs du fait que l'oscillateur s'arrête non pas lorsque $v=0$ mais lorsque v n'est plus suffisante pour lutter contre les frottements.

2.3 Oscillateur entretenu, le modèle de Van der Pol

Introduire les oscillateurs entretenus à partir du BUP, p. 727 - Donner l'équation générale $\ddot{x}+\epsilon(x^2-1)\dot{x}+x=0$ puis le schéma du circuit sur **slide** et remplacer ϵ par sa valeur en fonction des composants. Intuiter le comportement de l'oscillateur pour x petit ou grand devant 1.

> Expérience : On regarde successivement :
>
> - Commencer par vérifier l'intuition qu'on a eu sur le modèle : si x petit les oscillations croissent, au contraire si x grand elles décroissent. Faire apparaître un cycle attracteur de rayon $x=1$.
> - Les oscillations semblent (quasi-)sinusoïdales si $\epsilon \ll 1$. Pour le vérifier il faut regarder le portrait de phase qui doit être un cercle. Tracer le portrait de phase et constater effectivement le cycle limite (nouveau cas particulier d'attracteur). Bien remarquer que LE CYCLE ATTRACTEUR EST INDÉPENDANT DES CONDITIONS INITIALES ET NE DÉPEND QUE DE L'OSCILLATEUR LUI MÊME, C'EST-À-DIRE DE LA VALEUR DE ϵ.
> - Comment expliquer le démarrage des oscillations? On a l'impression de voir une exponentielle croissante. Peut-on le démontrer?

Regardons plus précisément le démarrage des oscillation. Si $x \ll 1$ on linéarise l'équation, on résout en $x(t)=Ae^{\epsilon t}\cos(\omega t)$ et on vérifie effectivement la croissance exponentielle de l'amplitude. Si on est exactement à l'origine on y reste mais au moindre bruit c'est perdu !

Voir ce site pour les calculs et la phénoménologie sur Van der Pol.

- Si enfin $\epsilon \gg 1$ on à affaire à des oscillations de relaxation. On perd complètement l'aspect sinusoïdal mais on garde quoiqu'il arrive un cycle attracteur.

Conclusion : Sensibilité aux conditions initiales et transition vers le chaos. On peut par exemple évoquer l'attracteur de Lorenz.

BONUS :

1. Autres domaines d'utilisation du portrait de phase ? Quasiment tous les systèmes dynamiques, en particulier ceux régis par des équations différentielles dont les coefficients dépendent du point où on les applique.
2. Dans quel domaine de valeur peut-on linéariser le $\sin(\theta)$ sans commettre une trop grande erreur ? En général, au-délà de 20° il faut ajouter le terme en cube, puis à 40° le terme en puissance 5 et après il faut très vite rajouter beaucoup de termes.
3. Voir la page Wikipédia sur les oscillations de relaxation !
4. Peut-être que l'on peut introduire plus tôt le modèle électrique et s'en servir pour vérifier qu'on raconte prouver qu'on raconte pas n'importe quoi dans la partie I.