LP n° 48 : Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique.

NIVEAU : CPGE

A priori rien d'en cette leçon n'est vraiment pas au programme de CPGE. La première partie relève de la première année, les deux autres ne sont pas vraiment au programme mais peuvent constituer des exercices assez classiques... Par précaution, on pourra décider de mettre cette leçon au niveau Licence (2).

PRÉREQUIS :

- Mécanique de première année
- Electrocinétique de première année
- Formalisme complexe, RSF
- Interférences à N ondes
- Induction (notamment la mutuelle)
- Eventuellement la différence de marche de la lame d'air

PLAN :

1. Réponse d'un oscillateur harmonique à un forçage
2. Résonance(s) d'oscillateurs couplés
3. Cavités résonantes

BIBLIOGRAPHIE :

- [48] *Supermanuel de Physique*, J. Majou & S. Komilikis.
- [19] Hprépa, *Mécanique. Première année.*
- TD de C. Sayrin énoncé et corrigé
- Eventuellement le Taillet [74] et le Pérez d'Optique [58] pour « compléter » le TD de C. Sayrin.
- Eventuellement aussi, pour la partie de mécanique, le BFR de mécanique (tome 1) [9] autour de la page 200.
- [55] *Physique, une approche moderne.* C. Lagoute et coll.

IDÉES À FAIRE PASSER :

La résonance correspond, de manière élémentaire, à un maximum d'amplitude de la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale. Les résonances ont alors diverses caractéristiques qui nous intéressent selon les systèmes étudiés.

Introduction : Définir une résonance : un système admet une résonance lorsque l'amplitude de la réponse étudiée est maximale pour une fréquence d'excitation donnée.

1 Réponse d'un oscillateur harmonique à un forçage

Pour cette première partie, voir [48], Chapitre 9 et [19], Chapitre 5 - On s'intéresse à un oscillateur mécanique horizontal amorti par frottements fluides $-\alpha v$. Présenter le système, appliquer le principe fondamental de la dynamique sous un forçage $F = F_0 \cos(\omega t)$ et trouver l'équation mécanique :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha\frac{dx}{dt} + F$$

1.1 Résonance en vitesse

[19], pp. 105 - 106 - On commence par la résonance en vitesse parce qu'on peut l'interpréter plus simplement. On conçoit bien que (cf. **slide**) :

- A très faible fréquence d'excitation, le mobile suit la force excitatrice qui va lentement donc sa vitesse tend vers 0.
- A très haute fréquence d'excitation, le mobile est parfaitement incapable de suivre la force excitatrice de sorte qu'il fait quasiment du surplace. Sa vitesse tend à nouveau vers 0.

Ainsi, il existe forcément une fréquence d'excitation pour laquelle l'amplitude en vitesse est maximale. Introduire les notations $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{1}{\alpha}\sqrt{km}$ et réécrire l'équation. Montrer par le calcul que la résonance existe toujours (passer en complexes en posant proprement $F = F_0 e^{j\omega t}$ et $x = Re(\underline{x})$ où $\underline{x} = \underline{x_0} e^{j\omega t} = x_m e^{j\varphi_x} e^{j\omega t}$ puis traduire l'équation sur la vitesse en remplaçant $j\omega x$ par v, et résoudre cf. [19]). Étudier la réponse de la phase pour constater qu'à résonance l'excitation et la vitesse du mobile oscillent en phase, regarder l'influence du facteur de qualité rapidement sur le calcul et surtout sur la représentation graphique, ce sera plus efficace (cf. **slide**).

Aspects énergétiques : on repart de l'équation mécanique de l'oscillateur $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$ qu'on multiplie par $\dot{x}$ pour avoir le théorème énergétique : $\ddot{x}\dot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}^2 + \omega_0^2 x\dot{x} = \frac{F}{m}\dot{x}$ et on réécrit l'équation comme d'habitude :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2\right) = \frac{Fv}{m} - \frac{\omega_0}{Q}v^2$$

En valeur moyenne sur une période le terme dans la dérivée est constant (ce sont des valeurs moyennes de carrés de fonctions trigonométriques) de sorte que le terme de gauche est nul. Ainsi, on démontre qu'en moyenne (et quelque soit la fréquence d'excitation !) :

$$\langle Fv \rangle = \langle \frac{m\omega_0 v^2}{Q} \rangle$$

donc la force injectée dans le système par l'excitateur (terme de gauche) et exactement dissipée par les frottements (car $\frac{m\omega_0}{Q} = \alpha$). C'est logique : le système ne stocke pas d'énergie en moyenne donc ce qui est injecté est dissipé.
Regardons maintenant ce qu'il se passe à la résonance. On a démontré que F et v sont en phase et $v_m = F_0/\alpha$ de sorte qu'on a rigoureusement et **à tout instant** $Fv = \frac{m\omega_0 v^2}{Q}$. Ainsi, à la résonance, la puissance injectée dans le système par l'excitateur est instantanément dissipée par les frottements : le transfert d'énergie entre l'inertie et l'élasticité du ressort est optimal !

On voit sur la **slide** qu'il y a aussi un maximum d'amplitude mais ça n'est pas si évident.

1.2 Résonance en position

[48], pp 350 - 352 et [19], pp. 102 - 104. Si on reprend le raisonnement qu'on avait fait pour la vitesse :

- A très faible fréquence d'excitation, le mobile suit la force excitatrice donc l'amplitude de l'excitateur se retrouve exactement sur le résonateur ;
- A très haute fréquence d'excitation, le mobile est parfaitement incapable de suivre la force excitatrice de sorte qu'il fait quasiment du surplace. L'amplitude de la position est proche de 0.

On comprend alors que l'amplitude de l'oscillation en position peut rejoindre 0 de manière monotone, ou admettre un maximum entre les deux fréquences limites. Cela va dépendre des caractéristiques du système. Résoudre l'équation mécanique en complexes. Trouver x_m et étudier proprement et en détail les variations du dénominateur pour trouver la condition de résonance (sur Q et sur ω). Étude de la phase.

Commentaire : la résonance n'a lieu que pour $Q = \sqrt{km}/\alpha > 1/\sqrt{2}$ c'est-à-dire qu'il faut que le frottements ne soit pas trop fort (c'est logique !). On comprend aussi pourquoi, à la résonance en position, l'excitateur et le résonateur ne sont pas en phase. Avec les mains : si on commence à tirer sur le résonateur quand il est en bout de course on n'exploite pas correctement le délai dû à l'inertie du ressort ; il faut que l'excitateur commence à tirer un peu plus tôt pour que le ressort agisse sur le résonateur au moment exact où celui-ci arrive en bout de course. De la même manière on peut peut-être essayé de comprend pourquoi la fréquence de résonance en tension n'est pas exactement la fréquence propre mais c'est pas trivial...

1.3 Régime libre

Voir [48], à partir de la page 339 - Commencer la résolution analytique pour voir apparaître les trois régimes limites et donner quelques caractéristiques pour chacun d'entre eux :

- Régime apériodique ($Q < 1/2$) : Existence eventuelle d'un extremum, donner la condition et opposer aux systèmes du premier ordre - pp. 340 - 342.
- Régime pseudo-périodique ($Q > 1/2$) : Décroissance exponentielle, nombre d'oscillations en fonction de Q. Donner les formules pour le temps caractéristique et la pseudo-pulsation - pp. 342 - 343.
- Régime critique ($Q = 1/2$).

On peut aussi présenter le lien entre le nombre d'oscillation du régime libre et Q.

1.4 Universalité du modèle

On fait l'analogie avec le RLC série en tension ou intensité : appliquer la loi des mailles rapidement pour trouver l'équation sur la tension aux bornes du condensateur et sur l'intensité, voir [19], pp. 108 - 110.

Expérience : On peut avoir préparé quelques diagrammes de Bode pour différentes valeur de R (donc de Q) en tension et en intensité (l'amplitude suffit) pour voir que dans un cas il n'y a pas toujours résonance, contrairement au cas en intensité ! Devant le jury, on peut mettre en évidence expérimentalement les différents régimes libres.

On peut citer d'autres exemples de systèmes dont la résonance est décrite par un oscillateur harmonique amorti : l'amortisseur de voiture (exo classique de prépa), l'électron élastiquement lié permettant d'expliquer la polarisabilité électronique - cf. LP28) ou encore la résonance magnétique. D'ailleurs la résonance magnétique permet de faire une bonne transition avec la partie précédente (cf singulet pour les protons seuls et multiplet avec des protons équivalents) mais faut avoir envie de rentrer un peu dans le détail... à voir !

Transition : Que se passe-t-il si on approche un deuxième RLC du premier circuit ?

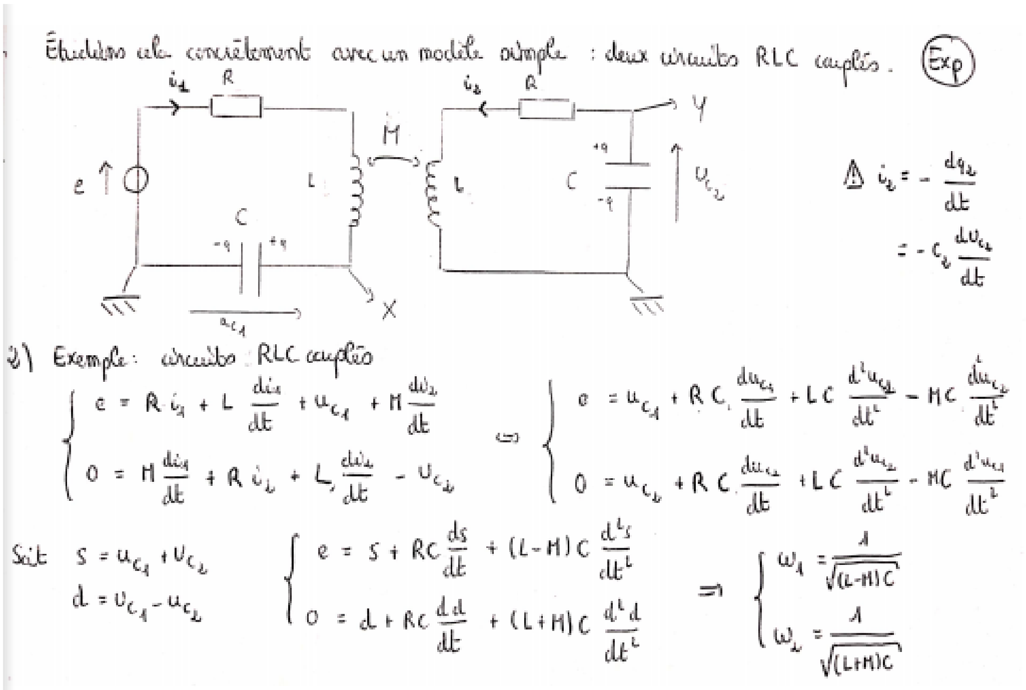
> Expérience : Le faire sur la paillasse. On voit apparaître, en wobulation, une deuxième fréquence de résonance. L'écart entre les deux fréquences de résonance dépend de la distance entre les bobines (donc du couplage).

Peut-on l'expliquer ?

---

2 Résonance(s) d'oscillateurs couplés

On traite l'exemple de deux oscillateurs couplés. Il faut insister sur le fait que la résonance correspond en fait à un mode propre du système, symétrique ou anti-symétrique, comme le montre le calcul en introduisant les grandeurs somme s et différence d.



On peut aussi faire l'analogie avec les pendules couplés par torsion. Éventuellement indiquer qu'il y a deux types de couplage : en position (pendules) ou inertiel (RLC). Ça peut être utile de se renseigner sur comment coupler des RLC en position (cf. lien).

Remarque : J'ai lu quelque part une remarque intéressante sur les avantages et inconvénients des couplage en position ou inertiel mais pas moyen de retrouver où, ni ce qu'elle disait exactement...

Transition : Si on regarde la réponse de la chaîne de 8 oscillateurs on voit 8 fréquences de résonance apparaître (**slide**). Si on regarde un spectre RMN on voit l'influence du couplage des protons : on voit des doublet, triplet, etc... C'est donc un phénomène général : lorsqu'on couple N oscillateurs on obtient N fréquences de résonance. Un moyen de faire tendre N vers l'infini est de couplé un oscillateur avec lui-même ; c'est le principe des cavités résonantes.

---

3 Système avec un nombre infini de degrés de liberté, cavité résonante

Traiter l'interféromètre de Fabry-Pérot à partir du TD de C. Sayrin énoncé et corrigé (on peut voir aussi le Taillet [74] pour compléments et éventuellement le Pérez d'Optique [58]).

3.1 Cavité Fabry-Pérot

Il faut TORCHER le calcul de la différence de marche (voir le mettre en prérequis si on n'a pas le temps de le faire) puis exprimer les vibrations lumineuses des différents rayons en sortie en fonction des coefficients de réflexion et de transmission et du nombre d'aller-retour effectuer par le rayon dans la cavité.

3.2 Intensité de l'onde transmise

Sommer le tout et aboutir à l'expression de l'intensité

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin(\varphi/2)^2}$$

Tracer grâce au **programme python « Fabry_Perot »** (ou mettre sur **slide**) pour différentes valeurs du coefficient de réflexion : plus le coefficient de réflexion et proche de 1 plus il y a d'ondes qui interfèrent (plus il y a d'oscillateur couplés) donc meilleure est la cavité !

3.3 Pouvoir de résolution

On peut faire le calcul de la largeur des pics et établir l'expression de la Finesse. Faire le lien avec le facteur de qualité des résonances du I. !

> On connaît d'autres exemples de cavités résonantes que l'on peut choisir d'évoquer ou pas. Par exemple les tuyaux sonores (cf. [39]) dont les conditions limites imposent $L = n\frac{\lambda}{2}$ (ouvert/ouvert) ou $L = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$ (ouvert/fermé), le premier étant strictement analogue à la corde de Melde (qui peut être vue comme une chaîne d'oscillateurs). Un autre exemple plus exotique est celui de la baie de Fundy (Nouvelle-Ecosse), voir [39], p. 53.

Conclusion : Ouvrir sur les résonances paramétriques, par exemple la balançoire (pendule simple dont la longueur varie). On voit alors apparaître des phénomènes non linéaires et apparition de nouvelles harmoniques.

BONUS :

- Quelques ordres de grandeur du facteur de qualité Q : de quelques unités pour les systèmes mécaniques courants jusqu'à 100 pour le RLC. En acoustique, le facteur de qualité d'une corde de piano ou de violon est typiquement de l'ordre de 1000, voire 10^4 pour un diapason. A l'extrême on a un facteur $Q = 10^6$ pour les quartz à piézoélectriques et même 10^8 pour les horloges atomiques !
- Quelques interprétations du facteur de qualité : il s'interprète comme le décrément logarithmique de l'énergie, la largeur de la résonance ($Q = \omega_0/\Delta\omega$), le nombre d'oscillations avant l'amortissement du régime libre, le rapport entre l'élongation à résonance et l'amplitude de l'excitateur, ...