Leçon : Lois de conservation en dynamique

Gabriel Le Doudic

Préparation à l'agrégation de Rennes

6 mai 2023

Niveau : CPGE
Prérequis : Cinénatique et dynamique d'un point matériel
: Référentiels galiléens
: Force d'inertie

1. Grandeurs conservées
   - La quantité de mouvement
   - Théorême de l'énergie cinétique
   - Énergie mécanique
   - Point mobile sans frottement sur une sphère

2. Application aux chocs
   - Conservation de la quantité de mouvement
   - Conservation de l'énergie mécanique

3. Mouvement à force centrale
   - TMC dans un référentiel galiléen - Loi des aires
   - Conséquences de la conservation de l'énergie-cas des satellites

insertsubsection

Théorême du moment cinétique :

$$\vec{\mathcal{L}}_{/O} = \vec{OM} \wedge m\frac{d\vec{OM}}{dt}$$

Hors si $\vec{L}$ est constante, sa direction l'est aussi. Cela signifie que $\vec{OM}$ évolue dans un espace perpendiculaire à une direction constante : un plan.

insertsubsection

Théorême du moment cinétique :

$$\vec{L}_{/O} = \vec{OM} \wedge m\frac{d\vec{OM}}{dt}$$

Hors si $\vec{L}$ est constante, sa direction l'est aussi. Cela signifie que $\vec{OM}$ évolue dans un espace perpendiculaire à une direction constante : un plan.

Relation fondamentale

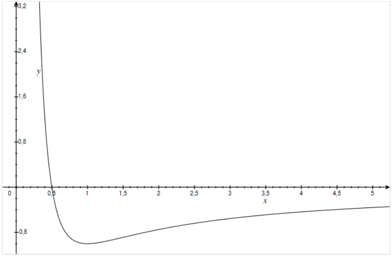
$$\begin{cases} \vec{u}_r : & \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & = -G\frac{M}{r^2} \\ \vec{u}_\theta : & 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} & = 0 \end{cases} \tag{1}$$

- la vitesse angulaire Keplerienne $\Omega(r_c) = sqrt\frac{GM}{r_c^3}$
- La loi des aires $r^2\dot{\theta} = C$

Conséquences de la conservation de l'énergie-cas des satellites

Théorême de l'énergie mécanique

$$E_{Peff} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} \tag{2}$$



$Em = Ec + Ep$ comme $Ec > 0$ cela implique que les états accessibles :

$Em \geq Ep$:

- si $Em = \min(Ep)$: mouvement circulaire
- si $\min(Ep) < Em < 0$: deux intersections, deux solutions *rmin* et *rmax*. On a un mouvement qui oscille entre ces deux valeurs.
- si $Em > 0$, il y a une intersection, mouvement entre *rmin* et $+\infty$.

Conséquences de la conservation de l'énergie-cas des satellites

On peut réecrire l'équation sur $\vec{u}_r$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}$$

Cette équation a pour solution :

$$u = \frac{GM}{C^2} + Acos(\theta - \theta_0)$$

On retrouve alors l'équation d'une conique sur r

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$$

On peut exprimer l'excentricité en fonction de l'énergie mécanique tel que :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Em}{GMm}} \tag{3}$$

Illustrer avec programme python