

# Relativité et électromagnétisme

Alain Comtet - [alain.comtet@u-psud.fr](mailto:alain.comtet@u-psud.fr), Notes de Florian Bolgar

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Symétries et principe de relativité</b>	<b>5</b>
I)	Symétries et groupes de transformation . . . . .	5
1)	Changement de référentiels . . . . .	5
2)	Autres transformations . . . . .	6
II)	Relativité galiléenne : . . . . .	8
III)	Principe de relativité . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Cinématique relativiste</b>	<b>13</b>
I)	Événements . . . . .	13
II)	Diagrammes d'espace-temps . . . . .	14
III)	Intervalle, invariance de l'intervalle . . . . .	16
IV)	Classification des intervalles . . . . .	16
1)	Intervalle de genre temps . . . . .	17
2)	Intervalle de genre espace . . . . .	17
3)	Structure causale de l'espace-temps . . . . .	17
V)	Temps propre . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Transformations de Lorentz</b>	<b>19</b>
I)	Transformations spéciales de Lorentz . . . . .	19
II)	Loi de composition des vitesses . . . . .	23
III)	Conséquences . . . . .	23
1)	Contraction des longueurs . . . . .	23
2)	Dilatation des temps . . . . .	24
3)	Interprétation géométrique, diagramme de Minkowski . . . . .	24
4)	Références . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Groupe de Lorentz, formulation covariante</b>	<b>27</b>
I)	Éléments de calcul tensoriel . . . . .	27
1)	Scalars . . . . .	27
2)	Vecteurs contravariants . . . . .	28
3)	Vecteurs covariants . . . . .	29
4)	Contractions . . . . .	30

5)	Tenseurs . . . . .	30
6)	Espace euclidien en coordonnées euclidiennes . . . . .	31
II)	Groupe de Lorentz . . . . .	33
1)	Espace de Minkowski . . . . .	33
2)	Illustrations . . . . .	36
III)	Compléments mathématiques . . . . .	37
1)	Groupe des rotations : . . . . .	37
2)	Groupe de Lorentz . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Dynamique relativiste</b>	<b>41</b>
I)	Particules massives . . . . .	41
II)	Particules de masse nulle, effet Doppler . . . . .	43
III)	Collisions de particules . . . . .	45
IV)	Effet Compton . . . . .	46
V)	Dynamique d'une particule chargée . . . . .	48
VI)	Géodésiques de l'espace temps de Minkowski . . . . .	49
VII)	Lagrangien d'une particule chargée dans un champ électromagnétique . . . . .	50
VIII)	Énergie d'une particule dans un champ électromagnétique . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Formulation covariante des équations de Maxwell</b>	<b>52</b>
I)	Introduction : champs et particules . . . . .	52
II)	Equations de Maxwell . . . . .	52
III)	Dualité et invariance de jauge . . . . .	55
IV)	Lois de transformation des champs . . . . .	57
1)	Transformation sous les rotations . . . . .	57
2)	Transformation sous les transformations spéciales de Lorentz . . . . .	57
V)	Invariants du champ électromagnétique . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Tenseur d'énergie impulsion - lois de conservation</b>	<b>61</b>
I)	Introduction . . . . .	61
II)	Tenseur d'énergie impulsion du champ libre . . . . .	62
III)	Lois de conservation en l'absence de sources . . . . .	64
IV)	Lois de conservation en présence de sources . . . . .	65
<b>8</b>	<b>Champs rayonnés par une source</b>	<b>71</b>
I)	Position du problème . . . . .	71
II)	Fonctions de Green . . . . .	72
III)	Potentiel de Lienard Wiechert . . . . .	76
IV)	Calcul des champs . . . . .	78
V)	Puissance rayonnée . . . . .	80
VI)	Réaction de rayonnement : . . . . .	82

<b>9</b>	<b>Rayonnement multipolaire</b>	<b>85</b>
I)	Développement multipolaire en électrostatique : . . . . .	85
II)	Expression du potentiel à longue distance . . . . .	87
III)	Approximation dipolaire électrique : . . . . .	89
IV)	Rayonnement d'une antenne : . . . . .	92
V)	Dipôle magnétique et quadrupole électrique : . . . . .	93
VI)	Ordres de grandeur : . . . . .	96
<b>10</b>	<b>Diffusion de la lumière</b>	<b>98</b>
I)	Modèle de l'électron élastiquement lié . . . . .	98
II)	Diffusion Thompson et Rayleigh . . . . .	100
III)	Notion de facteur de forme . . . . .	103
IV)	Diffusion par un milieu désordonné spatialement . . . . .	109
<b>11</b>	<b>Mécanique quantique relativiste</b>	<b>111</b>
I)	Équation de Klein-Gordon : . . . . .	111
II)	Atomes pioniques . . . . .	113
III)	Équation de Dirac . . . . .	115
IV)	Limite non relativiste . . . . .	117
V)	Groupe des rotations, notion de spineur . . . . .	120

# 1 Symétries et principe de relativité

## I) Symétries et groupes de transformation

### 1) Changement de référentiels

La description d'une expérience physique nécessite un système de référence, c'est à dire un système de coordonnées servant à indiquer la position des particules dans l'espace. Dans la plupart des situations que nous traiterons, ce système de référence  $\mathcal{R}$  sera constitué d'un trièdre orthonormé  $O_{xyz}$ .

La même expérience peut être analysée par rapport à un autre référentiel  $O'_{x'y'z'}$ .

Exemples de référentiels : le wagon d'un train, une station spatiale en orbite autour de la terre etc...

On va s'intéresser à ce qui se passe si un observateur attaché au référentiel  $\mathcal{R}'$  observe le même phénomène. Si les équations du mouvement dans  $\mathcal{R}'$  exprimées en termes des coordonnées  $(x'y'z')$  ont la même forme que dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , on dira que la loi physique régissant le phénomène est invariante.

Prenons l'exemple de deux particules en interaction par un potentiel central  $V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$  :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = -\vec{\nabla}_1 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \\ m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = -\vec{\nabla}_2 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \end{cases} \quad (1.1)$$

Soit  $\mathcal{R}'$  déduit de  $\mathcal{R}$  par une translation  $g_1(\vec{a})$ . Les coordonnées des particules dans  $\mathcal{R}'$  sont  $\vec{x}'_1 = g_1(\vec{a})\vec{x}_1 = \vec{x}_1 - \vec{a}$  et  $\vec{x}'_2 = g_1(\vec{a})\vec{x}_2 = \vec{x}_2 - \vec{a}$ . Les équations du mouvement dans  $\mathcal{R}'$  s'écrivent

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{x}'_1}{dt^2} = -\vec{\nabla}_1 V(|\vec{x}'_1 - \vec{x}'_2|) \\ m_2 \frac{d^2 \vec{x}'_2}{dt^2} = -\vec{\nabla}_2 V(|\vec{x}'_1 - \vec{x}'_2|) \end{cases} \quad (1.2)$$

Les équations gardent donc la même forme.

Il est naturel de considérer un 3ème observateur attaché à un référentiel  $\mathcal{R}''$ . Pour passer du référentiel  $\mathcal{R}$  au référentiel  $\mathcal{R}''$  on est amené à composer  $g_1$  avec une transformation  $g_2$  décrivant le passage du référentiel  $\mathcal{R}'$  au référentiel  $\mathcal{R}''$ . L'ensemble des transformations, muni de la loi de composition  $g_3 = g_2 \circ g_1$  constitue un groupe (vérifier l'existence d'un élément neutre et d'un inverse)

Dans le cas présent, il s'agit du groupe des translations spatiales  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}$ . Chaque élément du groupe dépend de trois paramètres. Le groupe des translations est un groupe continu à 3 paramètres.

De même, si on effectue une rotation du référentiel indépendante du temps, les équations du mouvement vont garder la même forme. Le groupe correspondant est le groupe des rotations engendré par les matrices orthogonales  $3 \times 3$ , groupe non-abélien à 3 paramètres.

**Remarques :** 1) L'ensemble des transformations rotations et translations spatiales engendre un groupe à 6 paramètres appelé groupe euclidien  $E_3$  défini par les transformations

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = R\vec{x} - \vec{a} \quad (1.3)$$

d'où la loi de groupe

$$(\vec{a}', R')(\vec{a}, R) = (\vec{a}' + R'\vec{a}, R'R) \quad (1.4)$$

2) Point de vue passif et actif

Au lieu de considérer des transformations du référentiel, nous aurions pu tout aussi bien effectuer une transformation du système physique lui-même. On dira alors qu'on a affaire à des transformations actives. Le point de vue actif peut être testé en laboratoire en faisant tourner les appareils. De même l'ensemble du système solaire peut être, par la pensée, transporté en un point quelconque de notre galaxie. On s'attend à observer les mêmes orbites et les mêmes périodes de révolution.

3) Les transformations que nous venons de considérer reflètent des propriétés d'homogénéité et d'isotropie de l'espace physique.

## 2) Autres transformations

**Translations temporelles :**  $t \rightarrow t' = t + t_0$ .

**Transformations discrètes :** renversement du sens du temps :  $t \rightarrow t' = -t$  et parité :  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ .

Cette dernière opération s'obtient en composant une réflexion par rapport à un plan (par exemple par rapport au plan  $xOy$ ) avec une rotation (d'angle  $\pi$  autour de  $Oz$ ). Sous cette transformation

$$\begin{cases} \vec{x} \rightarrow \vec{x}' = -\vec{x} \\ \vec{v} \rightarrow \vec{v}' = -\vec{v} \end{cases} \quad (1.5)$$

On vérifie que la parité laisse invariante les équations de Newton.

Qu'en est-il des lois de l'électromagnétisme ?

Pour répondre à cette question, il faut spécifier comment se transforment les champs électrique et magnétique. Sous les transformations des champs

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{E}'(\vec{x}', t') = -\vec{E}(\vec{x}, t) \\ \vec{B}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{B}'(\vec{x}', t') = \vec{B}(\vec{x}, t) \end{cases} \quad (1.6)$$

et des courants

$$\begin{cases} \rho(\vec{x}, t) \rightarrow \rho'(\vec{x}', t') = \rho(\vec{x}, t) \\ \vec{j}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{j}'(\vec{x}', t) = -\vec{j}(\vec{x}, t) \end{cases} \quad (1.7)$$

on vérifie l'invariance des équations de Maxwell.

Signalons que cette symétrie est mise en défaut dans les interactions faibles comme le montre l'expérience de désintégration  $\beta$  de noyaux de cobalt. On prépare des atomes de cobalt dans un état polarisé, et on mesure le nombre d'électrons émis dans la direction  $\theta$  par rapport à l'axe de polarisation. En analysant l'image de cet événement dans un miroir on vérifie que l'angle d'émission des électrons  $\theta$  mesuré par rapport à l'axe de polarisation devient  $\pi - \theta$ . Si la parité est conservée, la probabilité d'être détecté en  $\theta$  doit être égale à celle d'être détectée en  $\pi - \theta$ . L'expérience montre que ce n'est pas le cas. Les interactions faibles ne sont donc pas invariantes sous la parité.

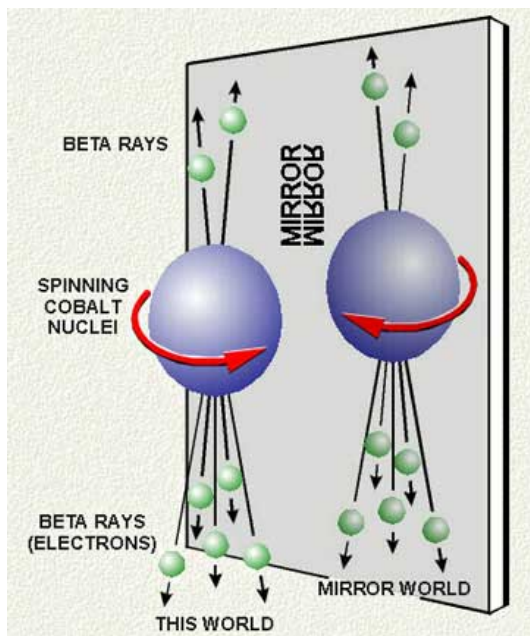


FIGURE 1.1 – Violation de la parité

**Transformations conformes :** Si on se place dans le plan, on écrit  $z = x + iy$ , une transformation conforme est caractérisée par  $z \mapsto z' = f(z)$ .

On peut démontrer que lorsqu'on applique une transformation conforme à un mouvement brownien planaire  $\vec{B}(t)$ , son image  $f(\vec{B}(t))$  a même loi et est donc encore une trajectoire brownienne .

## II) Relativité galiléenne :

Nous venons de voir que les équations de la mécanique classique sont invariantes sous le groupe euclidien

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}' = R\vec{x} - \vec{a} \quad (1.8)$$

Question : peut-on étendre ce groupe de symétries spatiales et donc purement géométriques à un groupe de transformations d'espace-temps ?

Pour cela il faut disposer non seulement de règles pour mesurer les longueurs mais aussi d'horloges pour mesurer le temps. On les suppose synchronisées et mesurant le même temps absolu.

On adjoint au groupe euclidien les transformations spéciales de Galilée

$$\begin{cases} \vec{x} \mapsto \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \\ t \mapsto t' = t \end{cases} \quad (1.9)$$

$\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont donc en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

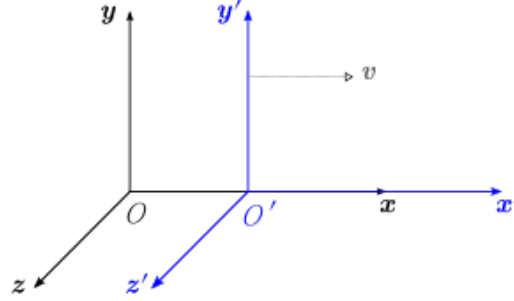


FIGURE 1.2 – transformation de Galilée

On montre que les lois de la mécanique classique, en particulier l'équation de Newton  $m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}$ , sont invariantes sous ce groupe de transformations. Les référentiels correspondants sont dits inertiels. Dans de tels référentiels le mouvement d'une particule libre  $\vec{F} = 0$  est rectiligne et uniforme. Toute déviation à la loi de Newton implique que le référentiel n'est pas inertiel. C'est notamment le cas du référentiel terrestre dans lequel les équations de la dynamique contiennent, outre la force  $\vec{F}$ , des forces fictives appelées forces d'inertie (force de Coriolis et force centrifuge). L'existence de référentiels d'inertie est un fait expérimental. L'ICRF (International Celestial Reference frame) sert actuellement de standard auprès des astronomes en matière de référentiel inertiel. Centré au centre au barycentre du système solaire, il est défini en mesurant avec précision les positions de sources extragalactiques .

De manière plus générale, le groupe de Galilée sera défini par les transformations de la forme :

$$\begin{cases} \vec{x}' = R\vec{x} - \vec{v}t - \vec{a} \\ t' = t + t_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Il s'agit donc d'un groupe à 10 paramètres. Si  $\mathcal{R}$  est un référentiel inertiel, alors tout référentiel  $\mathcal{R}'$  déduit de  $\mathcal{R}$  par une transformation de Galilée est aussi inertiel.



**Conséquences et remarques :** 1) Le mouvement rectiligne uniforme est indécélable. Il est impossible par une expérience locale de distinguer deux référentiels en translation rectiligne uniforme.

2) Loi d'addition des vitesses : la transformation spéciale de Galilée

$$\begin{cases} \vec{x}' &= \vec{x} + \vec{V}t \\ t' &= t \end{cases} \quad (1.11)$$

décrit le mouvement d'un référentiel  $\mathcal{R}'$  en translation rectiligne uniforme de vitesse  $\vec{V}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ . Par dérivation par rapport au temps on en déduit la loi d'addition des vitesses

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{V} \quad (1.12)$$

### III) Principe de relativité

Nous érigeons en principe les considérations précédentes

Exigeons que toutes les lois de la physique prennent la même forme dans tous les référentiels inertiels

Les lois de la mécanique classique satisfont par construction le principe de relativité vis à vis des transformations galiléennes.

Qu'en est-il des interactions électromagnétiques décrites par les équations de Maxwell ?

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

La réponse n'est pas évidente. Il faut en effet se donner non seulement les lois de transformation des coordonnées mais aussi celles des champs. Montrons qu'il existe une version modifiée des équations de Maxwell qui respecte l'invariance Galiléenne. Elle est obtenue en supprimant le terme inductif  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  de la dernière équation.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Supposons que sous la transformation spéciale de Galilée,

$$\begin{cases} \vec{x}' &= \vec{x} + \vec{v}t \\ t' &= t \end{cases} \quad (1.15)$$

les observables physiques se transforment selon les transformations suivantes,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \rho & \mapsto & \rho'(\vec{x}', t') = \rho(\vec{x}, t) \\ \vec{j}(\vec{x}, t) & \mapsto & \vec{j}'(\vec{x}', t') = \vec{j}(\vec{x}, t) + \rho(\vec{x}, t)\vec{v} \\ \vec{E} & \mapsto & \vec{E}' = \vec{E} \\ \vec{B} & \mapsto & \vec{B}'(\vec{x}', t') = \vec{B}(\vec{x}, t) + \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}(\vec{x}, t) \end{array} \right. \quad (1.16)$$

On peut vérifier que les grandeurs primées satisfont les équations de Maxwell modifiées.

Cependant, en supprimant ce terme inductif les équations précédentes ne peuvent pas décrire le phénomène de propagation de la lumière ! En effet, en introduisant les différents potentiels, les équations deviennent respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1.17)$$

On ne voit pas apparaître dans ces équations de terme de propagation.

Revenons aux équations exactes et montrons qu'elles ne peuvent pas être invariantes galiléennes. Pour celà, on résoud les équations sans source en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \end{array} \right. \quad (1.18)$$

Notons que les champs  $\vec{E}, \vec{B}$  sont invariants sous la transformation de jauge :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \psi \\ \phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1.19)$$

Les équations deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \text{div} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ \mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{array} \right. \quad (1.20)$$

On peut utiliser la liberté de jauge en se plaçant dans la jauge de Lorenz :

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.21)$$

Alors les équations prennent la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right. \quad (1.22)$$

On vérifie que dans le vide, la première équation admet des solutions particulières de la forme :

$$\phi(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) \quad (1.23)$$

Les équations de Maxwell montrent qu'il existe des ondes électromagnétiques se propageant à la vitesse  $c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$ . Elles semblent ainsi suggérer l'existence d'un référentiel inertiel privilégié. Dans tout autre référentiel, la vitesse de la lumière devrait être donnée par la loi de composition des vitesses. On devrait donc pouvoir mettre en évidence le mouvement de la terre par rapport à ce référentiel hypothétique. Aucune expérience d'optique n'ayant permis de mettre en évidence le mouvement relatif de la terre par rapport à ce référentiel, il a fallu non seulement remettre en question l'existence d'un tel référentiel mais aussi renoncer aux transformations galiléennes.

Deux approches complémentaires ont été développées :

- 1) Einstein (1905) développe une nouvelle cinématique s'appuyant sur le principe de relativité et l'hypothèse que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels inertiels
- 2) Poincaré (1905) construit un groupe de symétries d'espace-temps sous lequel les équations de Maxwell sont invariantes.

Le groupe de Poincaré est un groupe à 10 paramètres qui inclut les rotations spatiales (3), les translations d'espace-temps (4), et enfin les transformations spéciales de Lorentz (3).

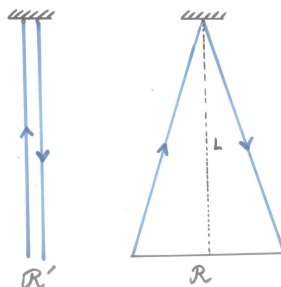


FIGURE 1.3 – miroir en mouvement

L'existence d'une vitesse universelle permet de montrer les résultats suivants :

- 1) Le temps ne s'écoule pas de la même façon dans deux référentiels en mouvement relatif.

On se donne deux référentiels inertiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  rapportés aux systèmes d'axes  $Oxyz$  et  $O'x'y'z'$ . À l'instant  $t = 0$  les référentiels coïncident puis  $\mathcal{R}'$  s'éloigne de  $\mathcal{R}$  à une vitesse  $v$  uniforme selon  $O_x$ . On imagine un dispositif lumineux attaché au référentiel  $\mathcal{R}'$  qui envoie

un rayon lumineux sur un miroir. Le signal lumineux est émis au point  $O = O'$  à l'instant 0. Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , le rayon réfléchi revient au bout d'un temps  $t' = \frac{2L}{c}$ . En revanche, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , ce rayon aura parcouru pendant le temps  $t$  la distance  $2\sqrt{L^2 + \frac{v^2 t^2}{4}}$ . En exprimant que la vitesse dans  $\mathcal{R}'$  est égale à  $c$ . On en déduit le temps :

$$t = \frac{\frac{2L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma t' \quad (1.24)$$

On peut s'arranger pour que le rayon lumineux effectue des allers-retours réguliers en plaçant un second miroir en O. On a ainsi construit une horloge optique qui, dans son référentiel propre, bat avec la période  $T' = \frac{2L}{c}$ . La période mesurée dans le référentiel du laboratoire est

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.25)$$

2) La réaction d'annihilation  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$  est mesurée dans deux référentiels inertiels. Un observateur  $B^-$  au repos observe les photons issus des points A et B et en conclut que ces événements sont simultanés. Pour l'observateur  $B^+$  qui se déplace à vitesse uniforme, B est antérieur à A.

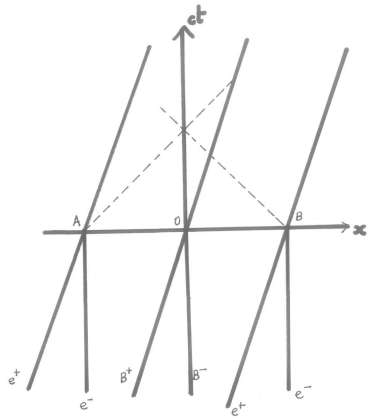


FIGURE 1.4 – absence de simultanéité

## 2 Cinématique relativiste

Objectif : Construire un cadre cinématique cohérent prenant en compte le fait que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels inertiels.

### I) Événements

Notion d'événement : La physique décrit des "événements". Ce sont des phénomènes localisés dans l'espace-temps, comme par exemple la collision de deux particules ou bien la désintégration d'une particule. Un événement existe indépendamment de tout système de référence. Cependant pour le caractériser dans un référentiel donné il faut qu'un observateur puisse affirmer " l'événement a eu lieu au point A de coordonnées  $(x, y, z)$  à l'instant  $t$  ". Il faut pour cela que l'observateur dispose d'un étalon de longueur (une règle) et d'une horloge. Un événement est donc caractérisé dans un référentiel  $\mathcal{R}$  par la donnée du quadruplet  $(x, y, z, t)$ . Dans un autre référentiel  $\mathcal{R}'$  le même événement aura pour coordonnées  $(x', y', z', t')$ . Par conséquent deux observateurs vont attribuer à un événement des coordonnées différentes.

Problème : Quelle est la relation entre les coordonnées de l'événement A dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ?

On convient de mesurer les longueurs avec des règles et d'utiliser les postulats de la géométrie Euclidienne. Pour mesurer le temps on construit un ensemble d'horloges identiques qu'il convient de synchroniser dans un référentiel d'inertie donné. Pour cela on considère une première horloge de référence placée en O. A l'instant  $t = 0$ , on envoie un flash lumineux. Lorsque le front d'onde atteint le point M placé à la distance  $R$ , on convient de synchroniser l'horloge placée en ce point de sorte qu'elle indique le temps  $t = \frac{R}{c}$ , temps mis par la lumière pour aller de O à M.

Il est commode de se représenter un référentiel comme un réseau aux noeuds duquel sont attachées des horloges et des observateurs chargés d'enregistrer l'arrivée des particules. On peut ainsi définir le mouvement d'une particule comme une suite d'événements : la suite des observateurs devant lesquels la particule est passée, aux différents instants.

**Définition : Ligne d'univers**

On appelle ligne d'univers une trajectoire dans l'espace-temps.

## II) Diagrammes d'espace-temps

**Définition : Cône de lumière**

Ensemble des lignes d'univers de rayons lumineux passant par O.

Le cône issu du point O  $(t_0, x_0, y_0, z_0)$  a pour équation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = c^2(t - t_0)^2 \quad (2.1)$$

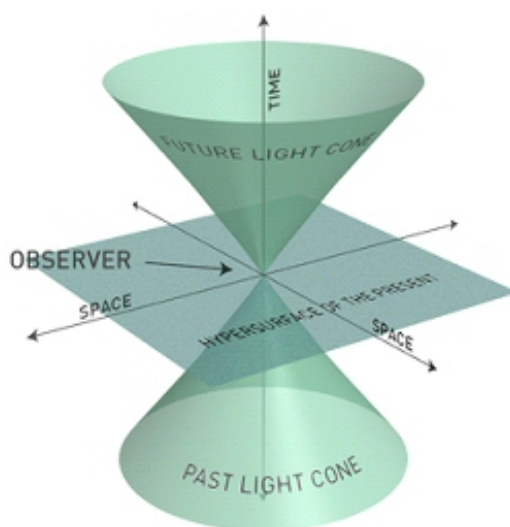


FIGURE 2.1 – Cône de lumière issu de O

L'ensemble des lignes d'univers issues ou aboutissant en O appartient à une des deux nappes :  $t > t_0$  définit le cône futur  $C^+(O)$ ,  $t < t_0$  définit le cône passé  $C^-(O)$ .

**Exemple d'utilisation d'un diagramme d'espace-temps :** Indiquons une procédure permettant à un observateur A de mesurer les coordonnées  $x_p, t_p$  d'un événement P. A l'instant  $t_1$  l'observateur A envoie un signal lumineux qui est réfléchi par un miroir fictif placé en P. Ce signal sera reçu par l'observateur A à l'instant  $t_2$ . L'observateur A peut alors facilement en déduire les coordonnées de l'événement :

$$t_p = \frac{(t_2 + t_1)}{2}, x_p = \frac{c(t_2 - t_1)}{2} \quad (2.2)$$

Par conséquent, en utilisant uniquement des signaux lumineux et des informations attachées à son propre référentiel, l'observateur A peut déterminer les coordonnées de n'importe

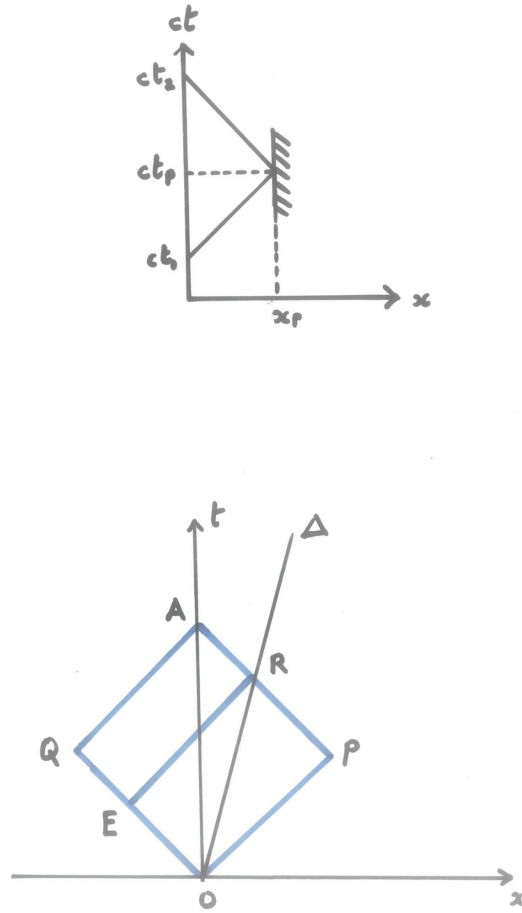


FIGURE 2.2 – Événements simultanés

quel événement. Il dispose donc d'une procédure précise permettant de déterminer si deux événements sont simultanés.

Les événements  $P$  et  $Q$  seront simultanés pour l'observateur  $A$  lorsqu'ils sont à l'intersection du cône de lumière passé  $C^-(A(t_2))$  et futur  $C^+(A(t_1))$ . Pour un observateur en translation rectiligne uniforme le long de la ligne d'univers  $\Delta$ , les événements  $P$  et  $E$  sont simultanés. Par contre l'événement  $Q$  est postérieur à l'événement  $E$ .

### III) Intervalle, invariance de l'intervalle

Considérons deux référentiels inertiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Un signal lumineux est émis en A et reçu en B. Cette suite de deux événements est décrite dans chaque référentiel par des coordonnées différentes. La vitesse de la lumière étant la même dans les deux référentiels on a :

$$c^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} = \frac{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}{(t'_2 - t'_1)^2} \quad (2.3)$$

On appelle intervalle entre deux événements la quantité  $\Delta s_{AB}^2$  définie par :

$$(\Delta s_{AB})^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \quad (2.4)$$

Dans ce cas particulier on a donc

$$(\Delta s_{AB})^2 = (\Delta s'_{AB})^2 = 0 \quad (2.5)$$

L'intervalle entre deux événements infiniment voisins s'écrit dans  $\mathcal{R}$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.6)$$

Dans  $\mathcal{R}'$  l'intervalle s'écrit  $(ds')^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$ . Pour relier ces deux quantités exprimons que les coordonnées  $(x', y', z', t')$  sont fonctions de  $(x, y, z, t)$  et que les différentielles se transforment de façon linéaire. Par conséquent  $(ds')^2$  est une certaine forme quadratique en  $(dx, dy, dz, dt)$ . Cette forme quadratique doit s'annuler pour  $ds^2 = 0$ . Puisqu'elle a les mêmes zéros que  $ds^2$ , c'est un multiple de  $ds^2$ .

$$(ds')^2 = K(|\vec{v}|) ds^2 \quad (2.7)$$

où la fonction  $K$  ne peut dépendre que de la vitesse relative de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . En échangeant le rôle des référentiels on a :

$$ds^2 = K(|-\vec{v}|)(ds')^2 \quad (2.8)$$

On en déduit  $K^2 = 1$  et par continuité  $K = 1$ .

L'intervalle entre deux événements est donc un invariant relativiste.

### IV) Classification des intervalles

En physique newtonienne l'ordre temporel des événements possède une signification intrinsèque, identique pour tous les observateurs car il existe un temps universel. L'espace-temps est feuilleté par les surfaces  $t = t_0$ . La région  $t > t_0$  est le futur,  $t < t_0$  est le passé. En physique relativiste la notion de simultanéité n'a plus un caractère intrinsèque puisqu'elle diffère selon les observateurs. Montrons qu'il existe néanmoins une façon de partitionner les événements d'espace-temps en utilisant la notion d'intervalle.



## 1) Intervalle de genre temps

On considère deux événements dont les coordonnées spatio-temporelles dans  $\mathcal{R}$  sont  $A(t_1, \vec{x}_1)$ ,  $B(t_2, \vec{x}_2)$ . Existe-t-il un référentiel  $\mathcal{R}'$ , tel que les événements A et B aient lieu au même point (d'espace) ?

$$A(t'_1, \vec{x}'_1) \ B(t'_2, \vec{x}'_2) \text{ avec } \vec{x}'_2 = \vec{x}'_1 \quad (2.9)$$

En exprimant l'invariance de l'intervalle on en déduit

$$s_{AB}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 > 0 \quad (2.10)$$

Un tel référentiel n'existe que si l'intervalle est positif.

Si un tel référentiel existe, alors l'intervalle est dit de genre temps

On en déduit que B est à l'intérieur du cône de lumière issu de A. Il peut être soit dans le cône de lumière passé, soit dans le cône de lumière futur. Dans ce cas :

$$\frac{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|}{t_2 - t_1} < c \quad (2.11)$$

ce qui signifie que les événements A et B peuvent être reliés par un signal se propageant à une vitesse inférieure à  $c$ . Il peut donc y avoir un lien de causalité entre eux.

## 2) Intervalle de genre espace

Existe-t-il un référentiel  $\mathcal{R}$  tel que A et B soient simultanés ? Il faut pour cela que :

$$s_{AB}^2 = -(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 < 0 \quad (2.12)$$

Un tel intervalle sera dit de genre espace

Cette fois ci, il ne peut pas y avoir de lien causal entre les deux événements.

## 3) Structure causale de l'espace-temps

- **Causalité classique** : l'effet (2) doit être postérieur à la cause (1). Il faut donc respecter l'ordre chronologique  $t_2 > t_1$ .
- **Causalité relativiste** : l'événement (2) doit être dans le cône de lumière futur issu de (1). Par conséquent  $x_2 - x_1$  est un vecteur de genre temps pointant vers le futur. On dira que  $x_1$  précède  $x_2$  si  $(x_2 - x_1)^2 > 0$  et  $(x_2^0 - x_1^0) > 0$ . On peut montrer que cette propriété est bien invariante relativiste. Cette forme de causalité est donc plus restrictive.

## V) Temps propre

Une particule à laquelle est attachée une horloge se déplace à la vitesse  $\vec{v}(t)$  dans le référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ . Son mouvement n'est pas nécessairement rectiligne uniforme, par conséquent son référentiel propre n'est en général pas inertiel. On peut cependant, à un instant donné, définir un référentiel tangent  $\mathcal{R}'$  dont la vitesse coïncide avec la vitesse  $\vec{v}(t)$  de la particule. Considérons les deux événements suivants :

-particule en  $x$

-particule en  $x + dx$ .

Exprimons l'intervalle infinitésimal entre ces deux événements dans le référentiel  $\mathcal{R}$

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2 = c^2(dt)^2 \left(1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}\right) \quad (2.13)$$

Par construction, la particule est au repos dans le référentiel tangent. L'intervalle de temps indiqué par l'horloge attachée à  $\mathcal{R}'$  est  $d\tau$ . En définissant le temps propre comme le temps qui s'écoule dans le référentiel de l'horloge on obtient

$$(ds)^2 = c^2(d\tau)^2 \quad (2.14)$$

Par conséquent

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}} \quad (2.15)$$

En intégrant on obtient le temps propre pour une particule animée d'une vitesse arbitraire  $\vec{v}(t)$ .

$$T_0 = \int dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}} \quad (2.16)$$

Dans le cas d'une particule instable de durée de vie intrinsèque  $T_0$  et se déplaçant à vitesse constante, on en déduit la durée de vie apparente

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > T_0 \quad (2.17)$$

Cette relation joue un rôle essentiel dans l'analyse de la désintégration de particules instables (observation de muons de durée de vie intrinsèque  $T_0 = 2,19711.10^{-6}s$ )

# 3 Transformations de Lorentz

Dans les deux premiers chapitres nous avons introduit la relativité restreinte comme un cadre conceptuel permettant de préserver le principe de relativité et les lois de l'électromagnétisme. Cette présentation fait jouer un rôle particulier à l'électromagnétisme. Or on sait que la relativité a un champ d'applications beaucoup plus vaste. C'est un cadre cinématique qui s'applique à toutes les interactions. Dans ce chapitre, nous donnons une dérivation des transformations de Lorentz qui n'utilise que les propriétés générales suivantes :

- L'homogénéité de l'espace-temps permet de se restreindre à des transformations linéaires.
- L'isotropie de l'espace.
- Le postulat que les transformations forment un groupe.
- Le principe de causalité.

Nous montrons qu'il n'y a que deux solutions : groupe de Galilée et groupe de Poincaré.

## I) Transformations spéciales de Lorentz

On considère un référentiel inertiel  $\mathcal{R}'$  en translation rectiligne uniforme de vitesse  $\vec{v} = v\vec{u}_x$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . On suppose en outre que les deux référentiels coïncident à  $t = 0$ . Commençons par étudier la loi de transformation des coordonnées transverses  $y$  et  $z$ . Selon  $y$  on a

$$y' = Ax + By + Cz + Dt + E \quad (3.1)$$

Exprimons que les plans  $y = 0$  et  $y' = 0$  coïncident pour tout  $x, z, t$  :

$$0 = Ax + Cz + Dt + E \quad (3.2)$$

Par conséquent,  $A = C = D = E = 0$ , on en déduit :

$$y' = B(v)y \quad (3.3)$$

où le coefficient  $B$  ne peut que dépendre que de la vitesse de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Renversons les directions des axes  $Ox$  et  $Oz$ , pour cela nous effectuons une rotation d'angle  $\pi$  autour de  $Oy$ . Tout se passe comme si  $\mathcal{R}$  était animé d'une vitesse  $v$  par rapport à  $\mathcal{R}'$ . Ceci revient donc à échanger les rôles de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . On a donc

$$y = B(v)y' \quad (3.4)$$

On obtient ainsi  $B^2(v) = 1$  et par continuité  $B(v) = 1$ . Il vient

$$\begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (3.5)$$

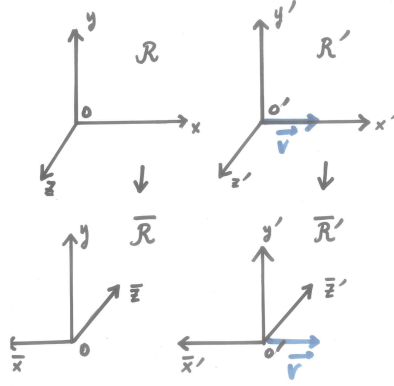


FIGURE 3.1 – Isotropie

Exprimons les transformations restantes sous la forme générale

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & b(v) \\ c(v) & d(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

1) La vitesse de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  s'obtient en considérant le point  $x' = 0$ , on a :

$$c(v)t + d(v)x = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{t} = -\frac{c(v)}{d(v)} \quad (3.7)$$

Or, le référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplace à la vitesse  $v$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , donc :

$$-\frac{c(v)}{d(v)} = v \quad (3.8)$$

2) Exprimons la vitesse de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\mathcal{R}'$ . On écrit la transformation inverse :

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d(v) & -b(v) \\ -c(v) & a(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

En posant  $x = 0$  on en déduit :

$$-c(v)t' + a(v)x' = 0 \quad (3.10)$$

En utilisant le fait que  $\mathcal{R}$  se déplace à la vitesse  $-v$  par rapport à  $\mathcal{R}'$  on obtient :

$$\frac{c(v)}{a(v)} = -v \quad (3.11)$$

Combinant les deux égalités, on obtient :

$$a(v) = d(v) \quad (3.12)$$

3) Utilisons la propriété d'isotropie. Nous allons exprimer qu'un changement d'axes n'affecte pas le mouvement relatif de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\mathcal{R}'$ .

On considère la transformation :

$$x, t \rightarrow \begin{cases} \bar{x} = -x \\ \bar{t} = t \end{cases} \quad (3.13)$$

$$x', t' \rightarrow \begin{cases} \bar{x}' = -x' \\ \bar{t}' = t' \end{cases} \quad (3.14)$$

Exprimons que  $\bar{\mathcal{R}}$  se déplace à la vitesse  $v$  par rapport à  $\bar{\mathcal{R}}'$  il vient :

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & b(v) \\ c(v) & d(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t}' \\ \bar{x}' \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & -b(v) \\ -c(v) & d(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

En comparant avec la transformation inverse vue précédemment on en déduit

$$ad - bc = 1 \quad (3.17)$$

En utilisant  $c = -va(v)$  :

$$b(v) = \frac{1 - a^2(v)}{va(v)} \quad (3.18)$$

On obtient donc la forme de la transformation à une fonction arbitraire près :

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} a(v) & \frac{1-a^2(v)}{va(v)} \\ -va(v) & a(v) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

4) Calculons le produit de deux transformations successives et exprimons que ces transformations forment un groupe :

$$\begin{pmatrix} a(v_2) & \frac{1-a^2(v_2)}{v_2 a(v_2)} \\ -v_2 a(v_2) & a(v_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(v_1) & \frac{1-a^2(v_1)}{v_1 a(v_1)} \\ -v_1 a(v_1) & a(v_1) \end{pmatrix} = \quad (3.20)$$

$$\begin{pmatrix} a(v_2)a(v_1) - \frac{v_1}{v_2} \frac{a(v_1)}{a(v_2)}(1 - a^2(v_2)) & \dots \\ \dots & a(v_1)a(v_2) - \frac{v_2}{v_1} \frac{a(v_2)}{a(v_1)}(1 - a^2(v_1)) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Ecrivons l'égalité des éléments diagonaux :

$$\frac{1 - a^2(v_2)}{v_2^2 a^2(v_2)} = \frac{1 - a^2(v_1)}{v_1^2 a^2(v_1)} = -K \quad (3.22)$$

où  $K$  est une constante indépendante de  $v$ . Par conséquent :

$$a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - Kv^2}} \quad (3.23)$$

Supposant  $K > 0$ , alors on peut écrire :

$$K = \frac{1}{c^2} \quad (3.24)$$

où  $c$  a les dimensions d'une vitesse.

On obtient alors :

$$a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.25)$$

On pose :

$$\begin{cases} \beta = \frac{v}{c} = \text{th}\varphi \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \quad (3.26)$$

La transformation peut ainsi s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}\varphi & -\text{sh}\varphi \\ -\text{sh}\varphi & \text{ch}\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Dans le cas  $K = -k < 0$ , on obtient :

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + kv^2}} & \frac{kv}{\sqrt{1 + kv^2}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1 + kv^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 + kv^2}} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Montrons que ces transformations violent la causalité car elles ne préservent pas la notion d'ordre temporel. Considérons pour cela deux événements dont les coordonnées dans le référentiel  $\mathcal{R}$  sont  $(x_1, t_1)$  et  $(x_2, t_2)$ . Supposons que ces deux événements sont causalement reliés dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et que l'événement 2 est postérieur à l'événement 1. On a donc l'inégalité  $t_2 \geq t_1$ . Les formules de transformation montrent que cette inégalité peut être violée par un choix approprié de la vitesse du référentiel  $\mathcal{R}'$ . Ces transformations ne sont donc pas admissibles.

## II) Loi de composition des vitesses

Les formules précédentes montrent que transformations spéciales forment un groupe isomorphe au groupe des rotations hyperboliques

$$\Lambda(\varphi_1)\Lambda(\varphi_2) = \Lambda(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (3.29)$$

Les relations de trigonométrie usuelles donnent :

$$v_3 = c \operatorname{th}(\varphi_3) = c \operatorname{th}(\varphi_1 + \varphi_2) = c \frac{\operatorname{th}\varphi_1 + \operatorname{th}\varphi_2}{1 + \operatorname{th}\varphi_1 \operatorname{th}\varphi_2} \quad (3.30)$$

On en déduit la loi de composition des vitesses :

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (3.31)$$

## III) Conséquences

### 1) Contraction des longueurs

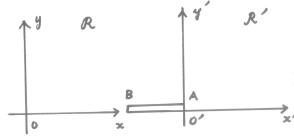


FIGURE 3.2 – contraction des longueurs

Considérons une règle rigide AB de longueur  $L'$  immobile dans  $\mathcal{R}'$ . On suppose  $\mathcal{R}'$  en translation rectiligne et uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  et que  $O$  et  $O'$  coïncident à l'instant  $t=0$ . Un observateur  $O$  dans  $\mathcal{R}$  veut mesurer la longueur de la règle. Une première méthode consiste à mesurer le temps de passage de chaque extrémité devant  $O$ .

1) Passage de A devant O. Dans  $\mathcal{R}'$  cet événement a pour coordonnées  $x'_A = 0 = t'_A$ . En utilisant la linéarité des transformations de Lorentz on en déduit les coordonnées dans  $\mathcal{R}$

$$x_A = t_A = 0.$$

2) Passage de B devant O. Dans  $\mathcal{R}'$  cet événement a pour coordonnées

$$\begin{cases} x'_B = -L' \\ t'_B = \frac{L'}{v} \end{cases} \quad (3.32)$$

Dans  $\mathcal{R}$

$$\begin{cases} ct_B = \gamma(\frac{cL'}{v}) + \gamma\beta(-L') \\ x_B = \gamma\beta(\frac{cL'}{v}) + \gamma(-L') \end{cases} \quad (3.33)$$

L'observateur O voit donc la règle défiler devant lui pendant un temps

$$t_B - t_A = \frac{L'}{c\beta} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3.34)$$

Puisque la règle a une vitesse  $v$  par rapport à  $\mathcal{R}$  sa longueur dans  $\mathcal{R}$  est donnée par

$$L = v(t_B - t_A) = L' \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3.35)$$

## 2) Dilatation des temps

On retrouve de la même façon la formule pour le temps propre donnée dans le chapitre 2. Soit  $T'$  l'intervalle de temps qui s'est écoulé entre deux événements ayant lieu au même point dans  $\mathcal{R}'$ . L'intervalle de temps correspondant dans  $\mathcal{R}$  est

$$T = \gamma T' \quad (3.36)$$

## 3) Interprétation géométrique, diagramme de Minkowski

On considère la ligne d'univers  $\Delta_1$  d'un point matériel se déplaçant à la vitesse  $v$  selon l'axe  $Ox$ . En écrivant  $x = vt$  on trouve que cette ligne d'univers fait avec l'axe des temps un angle  $\theta$  tel que

$$\tan \theta = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c} \quad (3.37)$$

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  où le point matériel est au repos, les coordonnées de l'événement  $(x, t)$  sont

$$\begin{cases} ct' = ct \cosh \varphi - x \sinh \varphi \\ x' = -ct \sinh \varphi + x \cosh \varphi \end{cases} \quad (3.38)$$

La droite  $x = 0$  représente la ligne d'univers d'un observateur au repos placé à l'origine. C'est aussi l'axe des temps dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . De même la ligne d'univers de l'observateur en mouvement rectiligne uniforme doit correspondre à la droite  $x' = 0$ . Elle est caractérisée par  $-ct \sinh \varphi + x \cosh \varphi = 0$  soit

$$\text{th} \varphi = \frac{x}{ct} = \tan \theta \quad (3.39)$$



L'axe des temps dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  est donc la droite  $\Delta_1$ .

Pour un observateur au repos l'ensemble des événements simultanés avec l'événement  $O$  est l'axe  $Ox$ . Pour l'observateur en mouvement, l'ensemble des événements simultanés avec  $O$  est caractérisé par la condition  $t' = ct \cosh \varphi - x \sinh \varphi = 0$ .

L'ensemble des événements simultanés avec  $O$  est donc donné par l'équation

$$\frac{x}{ct} = \coth \varphi = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (3.40)$$

C'est la droite  $\Delta_2$  faisant un angle  $(\frac{\pi}{2} - \theta)$  avec l'axe des temps.

$\Delta_1$  et  $\Delta_2$  définissent donc respectivement les axes temporels et spatiaux pour un observateur se déplaçant à vitesse uniforme.

On remarque que la bissectrice des axes  $ct = 0$  et  $x = 0$ , et des axes  $ct' = 0$  et  $x' = 0$  est une des génératrices du cône de lumière issu de  $O$ .

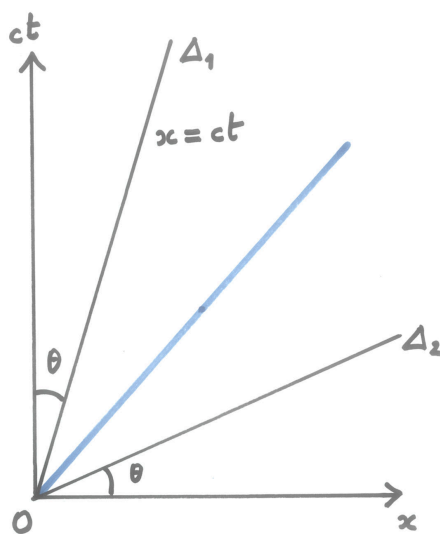


FIGURE 3.3 – Diagramme de Minkowski

#### 4) Références

- 1) On trouvera dans Berzi et Gorini (Journal of Mathematical Physics 10,1518,1969) une démonstration de la relation de réciprocité : si  $\mathcal{R}'$  se déplace par rapport à  $\mathcal{R}$  à la vitesse  $v$ , alors  $\mathcal{R}$  se déplace par rapport à  $\mathcal{R}'$  à la vitesse  $-v$ .
- 2) L'isotropie locale de l'espace temps peut être testée par des expériences de physique nucléaire. Hughes et al (Physical Review Letters, 4, 342, 1960) et Drever et al (Phil. Mag.6,683,1961) ont observé l'absorption résonante de photons par un atome de  $Li^7$  dans un champ magnétique. L'état fondamental se décompose en 4 sous-niveaux qui doivent être régulièrement espacés si les lois de la physique sont invariantes par rotation. Une expérience plus récente est décrite par Smiciklas et al, Physical Review Letters 107,171604, 2011.

## 4 Groupe de Lorentz, formulation covariante

Un événement est un point dans l'espace-temps. Dans deux référentiels distincts  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  il sera caractérisé par des coordonnées différentes  $\{x^\mu\}=(x_0, \vec{x})$  et  $\{x'^\mu\}=(x'_0, \vec{x}')$ . Dans ce point de vue, la transformation  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  est considérée comme une transformation passive qui peut être vue comme un changement de base. On peut aussi adopter un autre point de vue dans lequel les objets sont transportés physiquement dans l'espace-temps. C'est le point de vue actif (voir fig.4.1). Une transformation active définit une application de l'espace-temps sur lui même. Dans la suite nous utiliserons indifféremment l'un ou l'autre point de vue. Afin de caractériser les propriétés de transformation d'observables physiques attachées à ce point, nous allons élargir le cadre mathématique en considérant dans un premier temps des transformations générales de coordonnées  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = h^\mu(x_0, x_1, x_2, x_3)$  où les fonctions  $h^\mu$  sont localement inversibles.

### I) Éléments de calcul tensoriel

#### 1) Scalaires

Un scalaire  $f$  est une quantité qui est la même dans tous les systèmes de coordonnées.

$$f' = f \tag{4.1}$$

On dira que  $f(x)$  est un champ scalaire si

$$f'(x') = f(x) \tag{4.2}$$

Sous une transformation linéaire  $x \rightarrow x' = Rx$  on écrira

$$f'(x) = f(R^{-1}x) \tag{4.3}$$

**Exemple :** la densité de matière est un scalaire sous les rotations.

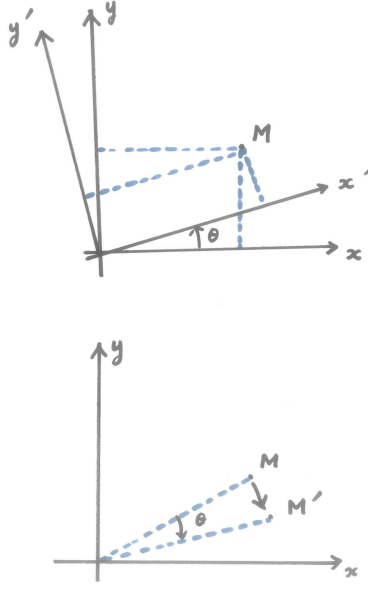


FIGURE 4.1 – Rotations passives et actives

## 2) Vecteurs contravariants

Exprimons les coordonnées  $x'^\mu$  en fonction des  $x^\mu$  et calculons l'accroissement infinitésimal

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} dx^\rho \quad (4.4)$$

On dira que les objets  $A^\mu$  sont les composantes contravariantes d'un vecteur si elles se transforment de la même façon que l'accroissement  $dx^\mu$ .

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} A^\rho \quad (4.5)$$

S'il s'agit d'un champ de vecteurs on écrira

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} A^\rho(x) \quad (4.6)$$

**Exemple : transformation d'un champ de vecteurs :** Soit  $V^i(x)$  un champ de vecteurs de  $R^3$ , il se transforme sous les rotations  $x^i \rightarrow x'^i = R^{ij}x^j$

$$V^i(x) \rightarrow V'^i(x') = R^{ij}V^j(x) \quad (4.7)$$

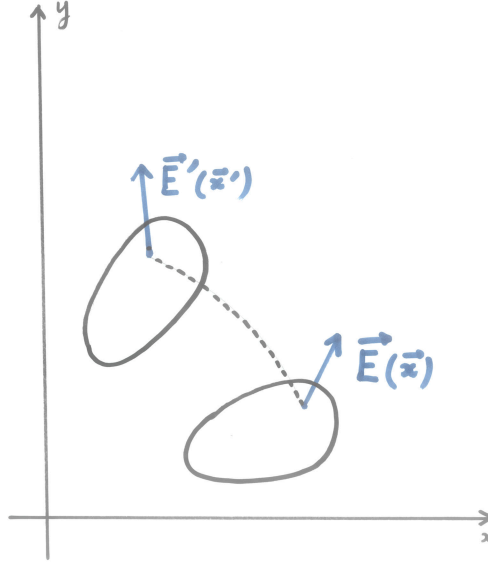


FIGURE 4.2 – Rotation d'un champ de vecteurs

L'équation

$$E'^i(x) = R^{ij} E^j(R^{-1}x) \quad (4.8)$$

signifie que lors d'une rotation active sur un objet chargé, le champ électrique tourne par rapport au référentiel mais reste fixe par rapport à l'objet.

### 3) Vecteurs covariants

En considérant la transformation inverse, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \quad (4.9)$$

On dira que les objets  $A_\mu$  sont les composantes covariantes d'un vecteur si elles se transforment sous la même forme

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\rho \quad (4.10)$$

S'il s'agit d'un champ de vecteurs on écrira

$$A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\rho(x) \quad (4.11)$$

**Exemple : transformation d'une dérivée :** Si  $f$  est une fonction scalaire

$$\frac{\partial f}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial f}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \quad (4.12)$$

Ainsi  $\frac{\partial f}{\partial x^{\rho}}$  se transforme comme un vecteur covariant. D'où la notation  $\frac{\partial f}{\partial x^{\rho}} = \partial_{\rho} f$ .

#### 4) Contractions

Montrons comment construire un scalaire à partir des vecteurs  $A_{\mu}(x)$  et  $B^{\mu}(x)$ . On pose

$$f(x) = A_{\mu}(x) B^{\mu}(x) \quad (4.13)$$

Sous une transformation générale de coordonnées on obtient

$$f'(x') = A'_{\mu}(x') B'^{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\tau}} A_{\rho}(x) B^{\tau}(x) = \delta^{\rho}_{\tau} A_{\rho}(x) B^{\tau}(x) = A_{\rho}(x) B^{\rho}(x) \quad (4.14)$$

#### 5) Tenseurs

Champ de tenseur deux fois contravariant :

$$T'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} T^{\rho\sigma}(x) \quad (4.15)$$

Champ de tenseur deux fois covariant :

$$T'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} T_{\rho\sigma}(x) \quad (4.16)$$

Champ de tenseur mixte :

$$T'^{\nu'}_{\mu'}(x') = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} T^{\sigma}_{\rho}(x) \quad (4.17)$$

**Tenseur de Kronecker :**

$$\delta^{\nu'}_{\mu'} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \delta^{\sigma}_{\rho} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} = \delta^{\nu}_{\mu} \quad (4.18)$$

C'est donc un tenseur invariant.

**Tenseur des contraintes :** Considérons un milieu continu et une interface  $\Sigma$  séparant le milieu en deux parties. Soit  $\vec{n}$  la normale orientée de 1 vers 2 . On montre que la force exercée par 2 sur 1 sur un élément de surface  $d\vec{S} = \vec{n}dS$  s'écrit sous la forme :

$$dF^i = \mathcal{T}^{ij} n^j dS \quad (4.19)$$

Les quantités  $\mathcal{T}^{ij}$  ne dépendent pas de l'orientation de la normale mais seulement du point choisi. Elles forment les composantes d'un tenseur symétrique appelé tenseur des contraintes.

Dans un fluide parfait le tenseur des contraintes ne dépend que de la pression du milieu :  $\mathcal{T}^{ij} = -p\delta^{ij}$ . Le fait qu'il s'exprime en terme du tenseur invariant  $\delta^{ij}$  traduit l'isotropie du milieu.

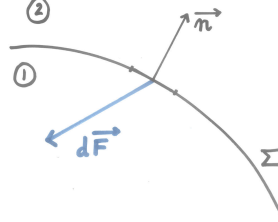


FIGURE 4.3 – Tenseur des contraintes

**Tenseur d'inertie :**

$$I^{ij} = \sum m_{\alpha} (\delta^{ij} x_{\alpha}^k x_{\alpha}^k - x_{\alpha}^i x_{\alpha}^j) \quad (4.20)$$

L'énergie cinétique d'un solide en rotation de vitesse angulaire  $\Omega$  s'exprime en terme du tenseur d'inertie sous la forme

$$T = \frac{1}{2} \Omega^i \Omega^j I^{ij} \quad (4.21)$$

Si on observe le solide dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  déduit de  $\mathcal{R}$  par une **rotation fixe** le tenseur d'inertie devient

$$I^{ij} \rightarrow I'^{ij} = R^{ik} R^{jl} I^{kl} \quad (4.22)$$

En utilisant les propriétés de transformation du vecteur  $\Omega$ , on peut vérifier que l'énergie cinétique est invariante. C'est une conséquence des propriétés de contraction suivantes.

**Contractions :**  $A^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$  est un scalaire.

$A^{\mu\nu} V_{\nu}$  est un vecteur contravariant

$B_{\mu\nu} V^{\nu}$  est un vecteur covariant.

## 6) Espace euclidien en coordonnées euclidiennes

Considérons un espace euclidien  $E_n$  muni d'une base orthonormale de vecteurs  $e_i$  tels que

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad (4.23)$$

Un vecteur arbitraire de  $E_n$  peut s'écrire

$$x = x^i e_i \quad (4.24)$$

La projection du vecteur  $x$  sur les vecteurs de base donne

$$(x, e_j) = x^i (e_i, e_j) = x^i \delta_{ij} = x^j \quad (4.25)$$

Dans une base différente  $e'_i$  (point de vue passif), le même vecteur sera représenté sous la forme

$$x = x'^i e'_i \quad (4.26)$$

Ce changement de base induit une transformation de coordonnées. On a  $x'^i = (x, e'_i) = x^j (e_j, e'_i)$  de même  $x^i = (x, e_i) = x'^j (e'_j, e_i)$

Considérons les dérivées partielles

$$\frac{\partial x'^j}{\partial x^i} = (e_i, e'_j) \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = (e'_j, e_i) \quad (4.28)$$

En utilisant la symétrie du produit scalaire nous voyons que dans l'espace euclidien, rapporté à une **base orthonormale**, les composantes covariantes et contravariantes se transforment de la même façon. Il n'y aura donc pas lieu de les distinguer .

Les relations précédentes donnent

$$x'^i = x^j (e_j, e'_i) = x'^k (e'_k, e_j) (e_j, e'_i) \text{ et } x'^i = (e'_i, e_j) (e_j, e'_k) x'^k$$

Par conséquent

$$(e'_i, e_j) (e_j, e'_k) = \delta_{ik} \quad (4.29)$$

Cette relation est satisfaite si la transformation  $x \rightarrow x'$  est une transformation orthogonale  $x'^i = (e'_i, e_j) x^j = R_{ij} x^j$  avec  $R_{ij} R_{kj} = \delta_{ik}$ , équation dont l'écriture matricielle est  $R \tilde{R} = \mathbb{1}$

**Généralisation :** Si l'espace euclidien est rapporté à une base quelconque telle que

$$(e_i, e_j) = g_{ij} \quad (4.30)$$

On appelle composantes **contravariantes** du vecteur  $x$  les nombres  $x^i$  tels que  $x = x^i e_i$ .

Les composantes **covariantes** sont les projections  $x_i = (x, e_i)$  sur les vecteurs de base.

La matrice  $g_{ij}$  ainsi que son inverse  $g^{-1}$  de composantes  $g^{ij}$  permettent de relier composantes covariantes et contravariantes

$$\begin{cases} x^i = g^{ij} x_j \\ x_i = g_{ij} x^j \end{cases} \quad (4.31)$$

Le changement de coordonnées  $x'^i = M^i_j x^j$  correspond au changement de base

$$e'_i = (M^{-1})^j_i e_j \quad (4.32)$$

On vérifie que les composantes **covariantes**  $x_i$  se transforment **comme** les vecteurs de base

$$x'_i = (M^{-1})^j_i x_j \quad (4.33)$$



## II) Groupe de Lorentz

On munit l'espace-temps  $\{x^\mu = (ct, \vec{x})\}$  d'un produit scalaire noté  $(x, y)$  ou encore  $x.y$  tel que

$$(x, y) = x^0 y^0 - \vec{x} \vec{y} = \tilde{x} g y \quad (4.34)$$

Où

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Etudions les transformations linéaires  $\Lambda$  qui laissent invariant ce produit scalaire.

**Définition :**  $\Lambda \in O(3, 1)$  si  $(\Lambda x, \Lambda y) = (x, y)$ .

Cette équation s'écrit encore  $\tilde{x} \tilde{\Lambda} g \Lambda y = \tilde{x} g y$ . Par conséquent

$$\tilde{\Lambda} g \Lambda = g \quad (4.36)$$

Déterminant :  $(\det \Lambda)^2 = 1$ .

Chaque élément a donc un inverse obtenu en écrivant  $g \tilde{\Lambda} g \Lambda = g^2 = \mathbb{1}$

Par conséquent  $\Lambda^{-1} = g \tilde{\Lambda} g$ .

On montre que ces transformations forment un groupe.

**Définition :**  $SO(1, 3)$  = sous-groupe de  $O(1, 3)$  avec  $\det \Lambda = 1$ . Il est appelé groupe spécial pseudo orthogonal.

### 1) Espace de Minkowski

**Métrie et produit scalaire** On note  $g_{\alpha\beta}$  les éléments de la matrice  $g$  et  $g^{\alpha\beta}$  les éléments de matrice de  $g^{-1}$ . Par conséquent  $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ . Les seuls termes non nuls sont

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = +1, \alpha = \beta = 0 \quad (4.37)$$

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = -1, 1 \leq \alpha = \beta \leq 3 \quad (4.38)$$

Le produit scalaire s'écrit

$$(x, y) = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

L'espace-temps muni de ce produit scalaire est appelé espace de Minkowski.  
Les vecteurs  $x$  et  $y$  sont orthogonaux si  $(x, y) = 0$ .

- $x$  est un vecteur de genre temps si  $(x, x) > 0$ .
- $x$  est un vecteur de genre espace si  $(x, x) < 0$ .
- $x$  est un vecteur de genre lumière si  $(x, x) = 0$ .

**Tétrade** La notion de tétrade est une formalisation de celle de référentiel. Une tétrade est une base constituée de 4 vecteurs  $\{e_\mu\}$  tels que  $(e_\mu, e_\nu) = g_{\mu\nu}$   
Un vecteur  $x$  rapporté à cette base s'écrit  $x = e_\mu x^\mu$   
Dans une autre base (point de vue passif)  $\{e'_\mu\}$  il s'écrit  $x = e'_\mu x'^\mu$

**Base duale** Définissons les vecteurs de la base duale par la relation  $e^\mu = g^{\mu\nu} e_\nu$

Ils vérifient par conséquent

$$(e^\mu, e_\rho) = g^{\mu\nu} (e_\nu, e_\rho) = g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$$

Montrons que  $e_\mu = g_{\mu\nu} e^\nu$

On a en effet  $g_{\mu\nu} e^\nu = g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} e_\rho = \delta^\rho_\mu e_\rho = e_\mu$

La base duale permet d'exprimer les composantes  $x^\mu$  du vecteur  $x$ .

$$(e^\mu, x) = \sum_\nu (e^\mu, e_\nu x^\nu) = \sum_\nu \delta^\mu_\nu x^\nu = x^\mu$$

Par conséquent un changement de base  $e^\mu \rightarrow e'^\mu$  induit la transformation suivante

$$x'^\mu = (e'^\mu, x) = \sum_\nu (e'^\mu, e_\nu) x^\nu$$

Nous poserons par définition

$$\Lambda^\mu{}_\nu = (e'^\mu, e_\nu) \quad (4.39)$$

En utilisant la convention d'Einstein sur les indices répétés, la formule de transformation des coordonnées s'écrit

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (4.40)$$

La transformation correspondante des tétrades est

$$e_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu e'_\mu \quad (4.41)$$

**Transformations de Lorentz** Le groupe de Lorentz, défini de façon intrinsèque au premier paragraphe, est constitué des transformations linéaires de l'espace de Minkowski qui conservent le produit scalaire. En composantes on peut écrire :

$$g_{\rho\sigma} x^\rho y^\sigma = g_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\rho y^\sigma \quad (4.42)$$

On en déduit que la condition est équivalente à :

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \quad (4.43)$$

On vérifie que l'écriture matricielle est bien celle donnée par l'équation (4.36).

En se restreignant aux transformations de déterminant égal à 1 on obtient le groupe de Lorentz  $SO(1, 3)$ . On qualifiera d'orthochrones les transformations telles que  $\Lambda^0{}_0$  est positif et d'antiorthochrones celles pour lesquelles  $\Lambda^0{}_0$  est négatif.

Le groupe de Lorentz **restreint** est obtenu en restreignant  $SO(1, 3)$  aux transformations orthochrones.

**Vecteurs covariants et contravariants :** Partons des formules de transformation d'un vecteur contravariant

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} A^\rho \quad (4.44)$$

En utilisant  $x'^\mu = (e'^\mu, e_\rho)x^\rho$  il vient  $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} = (e'^\mu, e_\rho)$ .

De même  $x^\rho = (e^\rho, x) = (e^\rho, x'^\mu e'_\mu)$  donne  $\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} = (e^\rho, e'_\mu)$ .

Observons que contrairement au cas euclidien, il faut distinguer  $(e'^\mu, e_\rho)$  et  $(e^\rho, e'_\mu)$ .

Montrons comment relier composantes covariantes et contravariantes en partant de la relation

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} = (e'^\mu, e_\rho) = g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma}(e'_\nu, e^\sigma) = g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma}(e^\sigma, e'_\nu) = g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}$$

L'équation (4.6) donne

$$g_{\nu\mu}A'^\mu = g_{\nu\mu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}A^\rho = g_{\nu\mu}g^{\mu\lambda}g_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}A^\rho = \delta_\nu^\lambda g_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}A^\rho = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}g_{\sigma\rho}A^\rho$$

Elle exprime que  $g_{\sigma\rho}A^\rho$  se transforme comme un vecteur covariant.

$$A'_\nu = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} A_\sigma \quad (4.45)$$

On pourra donc poser

$$A_\sigma = g_{\sigma\rho}A^\rho \quad (4.46)$$

Le tenseur métrique permet donc de passer d'un vecteur contravariant à un vecteur covariant. Plus généralement il sert à monter et descendre les indices.

#### Résumé :

- **Vecteur contravariant**

Les composantes contravariantes se transforment selon  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\rho x^\rho$ .

- **Vecteur covariant**

les composantes covariantes se transforment selon  $x'_\mu = (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu x_\sigma \Leftrightarrow \Lambda^\mu{}_\rho x'_\mu = x_\rho$ .

- **Transformation d'une dérivée**

$\frac{\partial f}{\partial x^\rho} = \partial_\rho f$  se transforme comme un objet covariant :

$$\begin{aligned}\{\partial_\mu\} &= \left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right\} = (\partial_0, \vec{\nabla}) \\ \{\partial^\mu\} &= \left\{\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right\} = (\partial_0, -\vec{\nabla}) \\ \partial_\mu \partial^\mu &= \partial_0^2 - \Delta\end{aligned}$$

## 2) Illustrations

### Quadrivitesse, Quadriimpulsion

Rappel : Considérons une particule décrivant un mouvement arbitraire dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ . A chaque instant on peut définir un référentiel  $\mathcal{R}'$  dans lequel la particule est immobile. Considérons les deux événements

- $x$  : Particule en  $\mathcal{R}'$  à l'instant  $t'$
- $x + dx$  : Particule en  $\mathcal{R}'$  à l'instant  $t' + dt'$

L'intervalle entre ces deux événements s'écrit respectivement dans chacun des référentiels  $(ds)^2 = c^2(dt')^2 = c^2(d\tau)^2$  où  $\tau$  est le temps propre, temps mesuré par une horloge attachée à  $\mathcal{R}'$ .

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (\vec{v}dt)^2 = c^2(dt)^2(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2})$$

On a donc  $d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}$ . Par construction  $d\tau$  est un scalaire.

La ligne d'univers de la particule peut être paramétrisée sous la forme  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$  où  $\lambda$  est un paramètre arbitraire. Il est commode d'utiliser une paramétrisation dans laquelle  $\lambda$  est un scalaire. Dans ce cas le vecteur tangent à la ligne d'univers  $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$  se transformera comme l'accroissement  $dx^\mu$  et donc comme un quadrivecteur. Pour cette raison on paramétrise en terme du temps propre.

- On appelle quadrivitesse le quadrivecteur tangent à la ligne d'univers  $x^\mu(\tau)$

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (4.47)$$

Ses composantes dans  $\mathcal{R}'$  s'écrivent  $\{u'^\mu\} = (c, \vec{0})$

Ses composantes dans  $\mathcal{R}$  s'écrivent  $\{u^\mu\} = (\frac{cdt}{d\tau}, \vec{v}\frac{dt}{d\tau}) = (\gamma c, \gamma \vec{v})$

On vérifie que le quadrivecteur vitesse a pour norme  $u^2 = u^\mu u_\mu = c^2$ .

- Soit  $m$  une constante positive appelée masse de la particule. On appelle quadriimpulsion

$$p^\mu = mu^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (4.48)$$

Il a pour norme  $p^2 = p_\mu p^\mu = m^2 c^2$

**Quadricourant :** Considérons une particule étendue portant une charge électrique  $q$  et une densité de charge  $\rho$  telle que  $q = \rho dV$ . La charge  $q$ , tout comme la masse  $m$ , est une quantité intrinsèque contrairement à  $dV$  qui subit une contraction de Lorentz.

Considérons les deux événements

- Particule en  $x$
- Particule en  $x + dx$

$qdx$  est un quadrivecteur dont les composantes dans le référentiel du laboratoire s'écrivent :

$$\{qdx^\mu\} = q(cdt, d\vec{x}) = q(cdt, \vec{v}dt) = \rho dV(cdt, \vec{v}dt) = d^4x(\rho c, \rho \vec{v})$$

$d^4x$  représente le 4-volume balayé par la particule entre  $t$  et  $t + dt$ . Nous avons montré précédemment que  $d^4x$  est un scalaire de Lorentz. Par conséquent

$$\{j^\mu\} = (\rho c, \rho \vec{v}) \quad (4.49)$$

est un 4-vecteur appelé quadrivecteur courant.

Pour une charge dont la trajectoire  $\vec{x}(t)$  est prescrite il s'écrit :

$$j^\mu(\vec{r}, t) = q\delta^3(\vec{r} - \vec{x}(t))\frac{dx^\mu}{dt} \quad (4.50)$$

### III) Compléments mathématiques

#### 1) Groupe des rotations :

**Définition :** Une rotation est une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^n$  qui laisse la norme d'un vecteur invariante.

$$\tilde{X}\tilde{R}RX = \tilde{X}X \Rightarrow \tilde{R}R = \mathbb{1} \quad (4.51)$$

Les transformations qui préservent l'orientation vérifient  $\det R = 1$ . Elles forment un groupe appelé  $SO(n)$ .

**Transformations infinitésimales :** On écrit une rotation infinitésimale :

$$R = \mathbb{1} + \varepsilon X \quad (4.52)$$

$$\tilde{R} = \mathbb{1} + \varepsilon \tilde{X} \quad (4.53)$$

$$\tilde{R}R = \mathbb{1} \Rightarrow (1 + \varepsilon X)(1 + \varepsilon \tilde{X}) = \mathbb{1} \quad (4.54)$$

Au premier ordre en  $\varepsilon$  cette équation devient :

$$\mathbb{1} + \varepsilon(X + \tilde{X}) = \mathbb{1} \Rightarrow X + \tilde{X} = 0 \quad (4.55)$$

Par conséquent l'ensemble des transformations de  $SO(n)$  proches de l'identité est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des matrices antisymétriques  $n \times n$ . On en déduit

que le groupe dépend de  $\frac{n(n-1)}{2}$  paramètres.

La base de matrices antisymétriques

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

définissent les générateurs du groupe des rotations  $SO(3)$ .

Elles satisfont les relations de commutation

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k \quad (4.57)$$

**Scalaire :**  $f(\vec{x})$  est un scalaire sous les rotations si sous la transformation  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = R\vec{x}$

$$f'(\vec{x}') = f(\vec{x}) \quad (4.58)$$

C'est à dire :

$$f'(\vec{x}) = f(R^{-1}\vec{x}) \quad (4.59)$$

Par exemple, l'élément de volume est un scalaire, puisque  $d^3\vec{x}' = |\det R| d^3\vec{x} = d^3\vec{x}$ .

**Vecteurs :**

$$V^i(\vec{x}) \rightarrow V'^i(\vec{x}') = R^{ij} V^j(\vec{x}) \quad (4.60)$$

**Tenseurs :** Un tenseur de rang 2 suit une loi de transformation semblable :

$$T^{ij}(x) \rightarrow T'^{ij}(x') = R^{ik} R^{jl} T^{kl}(x) \quad (4.61)$$

Qui peut encore s'écrire

$$T'^{ij} = R^{ik} T^{kl} (\tilde{R})^{lj} \quad (4.62)$$

Soit sous forme matricielle :

$$T \rightarrow T' = R T \tilde{R} \quad (4.63)$$

**Tenseur complètement antisymétrique :**

$$\epsilon^{ijk} \mapsto \epsilon'^{ijk} = R^{il} R^{jm} R^{kn} \epsilon^{lmn} = \epsilon^{ijk} \det R = \epsilon^{ijk} \quad (4.64)$$

$\epsilon^{ijk}$  est donc un tenseur invariant.

## 2) Groupe de Lorentz

**Définition :** C'est le groupe des transformations linéaires qui préservent la métrique

$$\tilde{\Lambda} g \Lambda = g \quad (4.65)$$

et l'orientation  $\det(\Lambda) = 1$ .

**Transformations infinitésimales :** Soit  $\Lambda$  une transformation de Lorentz proche de l'identité

$$\Lambda = \mathbb{1} + \omega \quad (4.66)$$

On doit satisfaire (4.64) à l'ordre  $\omega$  soit  $(\mathbb{1} + \tilde{\omega})g(\mathbb{1} + \omega) = g$   
donne  $\tilde{\omega}g = -g\omega$  par conséquent

$$\tilde{\omega} = -g\omega g \quad (4.67)$$

La solution générale

$$\omega = \theta n_i L_i + \lambda m_i M_i \quad (4.68)$$

dépend de 6 paramètres  $\{\theta, \lambda$  et les deux vecteurs unitaires  $\vec{m}, \vec{n}\}$ .

Expression des générateurs

Matrices  $L_i$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

Matrices  $M_i$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

Ecriture équivalente en terme de générateurs hermitiens et antihermitiens

$$\omega = -i\theta n_i (iL_i) - i\lambda m_i (iM_i) = -i\theta n_i J_i - i\lambda m_i K_i \quad (4.71)$$

avec  $J_i = iL_i$  hermitien et  $K_i = iM_i$  antihermitien.

**Algèbre de Lie :**

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk} J_k \end{aligned} \quad (4.72)$$

Considérons l'action d'une transformation infinitésimale sur un vecteur  
 $x \rightarrow x' = \Lambda x$  avec

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda m_1 & \lambda m_2 & \lambda m_3 \\ \lambda m_1 & 1 & -\theta n_3 & \theta n_2 \\ \lambda m_2 & \theta n_3 & 1 & -\theta n_1 \\ \lambda m_3 & -\theta n_2 & \theta n_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

On obtient

$$\begin{cases} x'^0 = x^0 + \lambda \vec{m} \cdot \vec{x} \\ \vec{x}' = \vec{x} + \lambda \vec{m} x^0 + \theta \vec{n} \wedge \vec{x} \end{cases} \quad (4.74)$$

On montre que ces transformations infinitésimales correspondent aux transformations finies suivantes

**Transformations spéciales de Lorentz de vitesse  $\vec{v} = c\vec{\beta}$  (forme passive)**

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) \\ \vec{x}' = \vec{x} - \gamma x^0 \vec{\beta} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{x}) \end{cases} \quad (4.75)$$

**Rotations autour de l'axe  $\vec{n}$  d'angle  $\theta$  (forme active)**

$$\vec{x}' = \vec{n}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \cos \theta [\vec{x} - \vec{n}(\vec{x} \cdot \vec{n})] + \sin \theta \vec{n} \wedge \vec{x} \quad (4.76)$$

**Représentations de l'algèbre :** On pose

$$\begin{cases} J_i^+ = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) \\ J_i^- = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \end{cases} \quad (4.77)$$

Il vient

$$\begin{aligned} [J_i^+, J_j^+] &= i\epsilon_{ijk} J_k^+ \\ [J_i^-, J_j^-] &= i\epsilon_{ijk} J_k^- \\ [J_i^+, J_j^-] &= 0 \end{aligned} \quad (4.78)$$

→ Représentations non unitaires de  $SU(2) \times SU(2)$  étiquetées par le couple  $(j, j')$ .

Exemples :

- Représentation  $(1/2, 0)$  de dimension 2 obtenue en posant  $J_i^+ = \frac{1}{2}\sigma_i$  et  $J_i^- = 0$

$$\begin{cases} J_i = \frac{\sigma_i}{2} \\ K_i = -i\frac{\sigma_i}{2} \end{cases} \quad (4.79)$$

Les éléments du groupe sont représentés par la matrice

$$U(\Lambda) = e^{-i\theta \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2} - \lambda \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{m}}{2}} \quad (4.80)$$

Ils agissent sur des spineurs à deux composantes (pouvant par exemple décrire des neutrinos de masse nulle)

- Représentation de Dirac

$$\vec{J} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

$$\vec{K} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

Nous verrons ultérieurement qu'elle agit sur des spineurs de Dirac à 4 composantes.



# 5 Dynamique relativiste

## I) Particules massives

Considérons une particule décrivant la ligne d'univers  $x(\tau)$ . On se propose de construire une équation du mouvement compatible avec l'invariance relativiste. On utilise la covariance en travaillant avec les vecteurs quadrivitesse et quadriimpulsion de la particule

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad p^\mu = mu^\mu \quad (5.1)$$

Minkowski a proposé de généraliser l'équation de Newton  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$  en posant

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu \quad (5.2)$$

Le second membre  $K^\mu$ , appelé **4-force** est une généralisation covariante de la force de Newton. Sa forme précise dépend du problème mais on ne peut pas la choisir arbitrairement comme dans le cas newtonien. On doit en effet satisfaire la relation

$$p^2 = p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \quad (5.3)$$

qui exprime que l'on décrit le mouvement d'une particule massive de masse  $m$ .

On peut ensuite écrire

$$p^2 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \quad (5.4)$$

On en déduit :

$$\frac{dp^2}{d\tau} = g_{\mu\nu} \frac{dp^\mu}{d\tau} p^\nu + g_{\mu\nu} p^\mu \frac{dp^\nu}{d\tau} = 2p_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (5.5)$$

Or cette dérivée est nulle, ce qui implique

$$0 = p_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} = p_\mu K^\mu = pK \quad (5.6)$$

Ainsi la 4-force est orthogonale au vecteur  $p$  ce qui s'écrit en composantes

$$\begin{aligned} pK &= g_{\mu\nu} p^\mu K^\nu \\ &= g_{00} p^0 K^0 + g_{ii} p^i K^i \\ &= p^0 K^0 - \vec{p} \cdot \vec{K} = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

On obtient donc une relation entre la composante temporelle et la composante spatiale de la 4-force :

$$K^0 = \frac{\vec{p} \cdot \vec{K}}{p^0} \quad (5.8)$$

Or, on a :

$$\{p^\mu\} = \{m\gamma c, m\gamma \vec{v}\} = \{p^0, \vec{p}\} \quad (5.9)$$

On en déduit le rapport :

$$\frac{\vec{p}}{p^0} = \frac{\vec{v}}{c} \quad (5.10)$$

Ecrivons la composante 0 de l'équation du mouvement en tenant compte de la relation ci-dessus.

$$\begin{aligned} \frac{dp^0}{d\tau} &= \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{K} \\ \frac{dp^0}{dt} &= \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{K} \sqrt{1 - \beta^2} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{mc}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) &= \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{K} \sqrt{1 - \beta^2} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) &= \vec{v} \cdot \vec{K} \sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Pour la composante spatiale on obtient :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{K} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (5.12)$$

En posant

$$\vec{F} = \vec{K} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (5.13)$$

les équations deviennent :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \vec{F} \cdot \vec{v} \end{cases} \quad (5.14)$$

La première équation redonne la formule classique dans la limite non relativiste. Montrons que la seconde équation exprime la conservation de l'énergie. Supposons pour celà que la force dérive d'un potentiel

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \quad (5.15)$$

On obtient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + U \right) = 0 \quad (5.16)$$

On obtient ainsi une constante du mouvement que nous pouvons identifier à l'énergie. En effet dans la limite non relativiste

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + U(\vec{r}) = mc^2 + \frac{m\vec{v}^2}{2} + U(\vec{r}) + O(1/c^2) \quad (5.17)$$

on retrouve bien l'énergie totale du système, à une constante additive près interprétée comme une énergie de masse.

Dans le cas d'une particule libre on pose

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{énergie totale} \quad (5.18)$$

$$T = E - mc^2 \quad \text{énergie cinétique} \quad (5.19)$$

Par conséquent

$$\{p^\mu\} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad (5.20)$$

Une particule de masse  $m$  caractérisée par la relation  $p^2 = m^2 c^2$  satisfait donc la relation de dispersion relativiste

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (5.21)$$

## II) Particules de masse nulle, effet Doppler

Pour une particule massive de quadriimpulsion  $(p^0, \vec{p})$ , on peut trouver un référentiel dans lequel la particule est au repos. Il faut pour cela construire une transformation de Lorentz passive  $\Lambda(\vec{\beta})$  qui amène le vecteur  $(p^0, \vec{p})$  sur le vecteur  $(mc, \vec{0})$ , soit

$$\begin{cases} mc = \gamma(p^0 - \vec{\beta}\vec{p}) \\ \vec{0} = \vec{p} - \gamma p^0 \vec{\beta} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \vec{\beta}(\vec{\beta}\vec{p}) \end{cases} \quad (5.22)$$

dont la solution est  $\vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{p^0}$ . Par conséquent, pour une particule massive on a bien  $\beta < 1$ .

Une particule de masse nulle obéit à la relation de dispersion

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = 0 \quad (5.23)$$

par conséquent

$$\{p^\mu\} = (E/c, \vec{p}) = (p, \vec{p}) \quad (5.24)$$

est un quadrivecteur de genre lumière. Par conséquent, contrairement au cas d'une particule massive, il n'existe aucun référentiel dans lequel la particule est au repos. Un exemple classique est celui du photon, particule de masse nulle et de spin 1. La mécanique quantique nous apprend que :

$$\begin{cases} E &= \hbar\omega \\ \vec{p} &= \hbar\vec{k} \\ |\vec{k}| &= \frac{\omega}{c} \end{cases} \quad (5.25)$$

On a donc un quadrivecteur de genre lumière :

$$\{p^\mu\} = \hbar \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) = \{\hbar k^\mu\} \quad (5.26)$$

Cette quantité intervient par exemple dans l'expression du champ électrique d'une onde plane. Le champ électrique peut s'écrire :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \vec{E}_0 e^{-ik^\mu x_\mu} \quad (5.27)$$

### Application à l'effet Doppler et à l'aberration de la lumière :

Considérons une source lumineuse se déplaçant à la vitesse  $v$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ . Soit  $\mathcal{R}'$  le référentiel lié à la source. Un rayon lumineux émis dans la direction  $\theta'$  sera caractérisé par le quadrivecteur

$$k' = \left( \frac{\omega_0}{c}, \vec{k}' \right) = \left( \frac{\omega_0}{c}, \frac{\omega_0}{c} \cos \theta', \frac{\omega_0}{c} \sin \theta', 0 \right) \quad (5.28)$$

Considérons une émission vers l'arrière  $\theta' = \pi$  telle que

$$k' = \left( \frac{\omega_0}{c}, \vec{k}' \right) = \left( \frac{\omega_0}{c}, -\frac{\omega_0}{c}, 0, 0 \right) \quad (5.29)$$

Le signal lumineux sera reçu dans le référentiel  $\mathcal{R}$  avec une pulsation  $\omega$  telle que

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ k_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega_0}{c} \\ -\frac{\omega_0}{c} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

On en déduit :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (5.31)$$

En terme de la longueur d'onde elle s'écrit

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (5.32)$$

ou encore Cette formule a de nombreuses applications, notamment en astrophysique. La mesure du décalage spectral  $\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$  permet de déterminer les vitesses radiales des étoiles et des galaxies. Lorsque les vitesses sont faibles, on peut se contenter d'un développement du premier ordre.

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \beta \quad (5.33)$$

donné par la théorie classique. Pour des vitesses plus élevées il faut utiliser la formule relativiste. Dans le cas des galaxies la présence d'un décalage spectral systématique vers le rouge est un argument en faveur de la théorie de l'expansion de l'univers.

Considérons maintenant une émission sous un angle arbitraire  $\theta'$ . Le rayon lumineux sera reçu dans le référentiel  $\mathcal{R}$  sous un angle  $\theta$  tel que

$$\cos \theta = \frac{\beta + \cos \theta'}{1 + \beta \cos \theta'} \quad (5.34)$$

ou encore

$$\tan(\theta/2) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tan(\theta'/2) \quad (5.35)$$

La position angulaire apparente d'un objet lumineux est déplacée d'une quantité qui dépend de la vitesse relative de l'objet par rapport à l'observateur. C'est le phénomène d'aberration de la lumière découvert par J. Bradley en 1729. Dans le cas de la lumière émise par les étoiles, le déplacement lié au mouvement orbital de la terre est très faible car la vitesse de la terre est de l'ordre de 30km/s. Pour une étoile située au pôle Nord de l'écliptique  $\theta' = \pi/2$ , on trouve  $\theta = \pi/2 - \beta$  soit un déplacement angulaire de l'ordre de 20" d'arc.

### III) Collisions de particules

Nous présentons quelques applications de la conservation de l'énergie impulsion aux collisions entre particules. On distingue les collisions élastiques dans lesquelles les particules sont les mêmes avant et après collision des collisions inélastiques dans lesquelles de nouvelles particules sont produites.

Exemple de collision élastique : l'effet Compton  $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$

Exemple de processus inélastique : l'annihilation du positronium en deux photons  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$  ou en trois photons  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ .

Dans l'exemple qui suit nous étudions la production d'antiprotons à partir de collisions entre protons. On étudie la réaction :

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p} \quad (5.36)$$

Dans l'état initial et dans l'état final, on considère que les particules sont libres et ont une quadri-impulsion fixée. La conservation de l'impulsion et de l'énergie s'écrit sous la forme :

$$\sum_i p_i^\mu = \sum_f p_f^\mu \quad (5.37)$$

Cherchons l'énergie minimale, qui correspond à l'énergie seuil pour que la réaction soit possible. Dans un premier temps on suppose que le proton cible est au repos. Une quantité invariante relativiste bien adaptée à l'étude de ce problème est la norme au carré de l'impulsion totale :

$$s = (p_1 + p_2)^2 \quad (5.38)$$

Écrivons les impulsions des particules incidentes dans le référentiel où le proton cible est au repos

$$p_1 = \left( \frac{E_1}{c}, \vec{p}_1 \right) \quad (5.39)$$

$$p_2 = (mc, \vec{0}) \quad (5.40)$$

$$p_1 + p_2 = \left( \frac{E_1}{c} + mc, \vec{p}_1 \right) \quad (5.41)$$

On en déduit :

$$(p_1 + p_2)^2 = \left( \frac{E_1}{c} + mc \right)^2 - \vec{p}_1^2 = \frac{E_1^2}{c^2} + 2E_1m + m^2c^2 - \vec{p}_1^2 \quad (5.42)$$

Or :

$$E_1^2 = \vec{p}_1^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (5.43)$$

On en déduit :

$$(p_1 + p_2)^2 = 2m^2c^2 + 2E_1m \quad (5.44)$$

Exprimons maintenant l'invariant  $s$  dans le référentiel centre de masse des particules produites.

$$s = (E_3 + E_4 + E_5 + E_6)^2 - (\vec{0})^2 \quad (5.45)$$

Le seuil d'énergie est atteint lorsque les particules sont produites avec une impulsion infinitésimale. Par conséquent

$$\sum E_i > 4mc^2 \quad (5.46)$$

L'égalité correspondant au cas où les 4 particules ont une vitesse nulle. On en déduit alors :

$$E_1 > 7mc^2 \quad (5.47)$$

Pour un proton, l'énergie correspondante est de  $7 \times 0,938 GeV$ . Afin de réduire le coût en énergie il est préférable utiliser deux faisceaux de protons animés de vitesse opposées de sorte que le référentiel du centre de masse coïncide avec le référentiel du laboratoire. L'inégalité devient

$$16m^2c^2 < \frac{4}{c^2} E_1^2 \quad (5.48)$$

soit :

$$E_1 > 2mc^2 \quad (5.49)$$

Cette cinématique est donc plus avantageuse. C'est celle qu'on utilise en pratique.

## IV) Effet Compton

On s'intéresse à la diffusion élastique de rayons X par des électrons atomiques. Pour simplifier l'analyse nous considérons l'électron incident au repos. On désigne par  $\theta$  l'angle entre les impulsions initiales et finales  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$  des photons.

La conservation de l'énergie-impulsion donne :

$$p_\gamma + p_e = p'_\gamma + p'_e \quad (5.50)$$

On écrit les impulsions :

$$p_\gamma = \left( \frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\vec{k} \right) \quad p_e = (mc, \vec{0}) \quad (5.51)$$

$$p'_\gamma = \left( \frac{\hbar\omega'}{c}, \hbar\vec{k}' \right) \quad p'_e = \left( \frac{E'}{c}, \vec{p}' \right) \quad (5.52)$$

On écrit ensuite :

$$(p_\gamma - p'_\gamma)^2 = (p'_e - p_e)^2 \quad (5.53)$$

$$\underbrace{p_\gamma^2}_0 - 2p_\gamma p'_\gamma + \underbrace{p'^2_\gamma}_0 = -2 \left( \frac{\hbar^2 \omega \omega'}{c^2} - \hbar^2 \vec{k} \vec{k}' \right) \quad (5.54)$$

$$= -2\hbar^2 \left( \frac{\omega \omega'}{c^2} - |\vec{k}| |\vec{k}'| \cos \theta \right) \quad (5.55)$$

Ensuite :

$$(p'_e - p_e)^2 = p'^2_e + p_e^2 - 2p_e p'_e = 2m^2 c^2 - 2mE' = 2m(mc^2 - E') \quad (5.56)$$

La conservation de l'énergie donne :

$$\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + E' \quad (5.57)$$

On en déduit :

$$(p'_e - p_e)^2 = 2m\hbar(\omega' - \omega) = -2\hbar^2 \frac{\omega \omega'}{c^2} (1 - \cos \theta) \quad (5.58)$$

D'où finalement :

$$\frac{mc^2}{\hbar} \left( \frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} \right) = (1 - \cos \theta) \quad (5.59)$$

En terme des longueurs d'onde on obtient :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \quad (5.60)$$

Cette formule fait apparaître une longueur caractéristique appelée longueur d'onde Compton donnée par

$$\frac{h}{mc} \quad (5.61)$$

Elle vaut pour l'électron  $2.4.10^{-12}m$ .

On remarque que la longueur d'onde Compton fait intervenir à la fois  $c$  et  $h$ , deux constantes fondamentales qui interviennent en relativité et en mécanique quantique. Dans le dernier chapitre nous montrerons comment combiner ces deux constantes fondamentales au sein d'une même théorie, la mécanique quantique relativiste.

Une variante intéressante de l'effet Compton est l'effet Compton inverse qui est la diffusion d'électrons par des photons. Sunyaev et Zeldovich ont montré que la diffusion d'électrons de haute énergie par les photons du rayonnement cosmologique pouvait créer une anisotropie du rayonnement fossile.

## V) Dynamique d'une particule chargée

L'équation de Minkowski donne une relation entre la 4-force et l'accélération. Pour l'appliquer au cas d'une particule chargée il faut trouver une expression de la 4-force satisfaisant la contrainte  $K^\mu p_\mu = 0$ . Cette relation constitue une contrainte sur les différentes dynamiques compatibles avec l'invariance relativiste. On peut par exemple postuler qu'il existe un tenseur de rang 2,  $F^{\mu\nu}$ , tel que :

$$K^\mu = \lambda F^{\mu\nu} p_\nu \quad (5.62)$$

La contrainte :

$$K^\mu p_\mu = \lambda F^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 0 \quad (5.63)$$

peut se réécrire sous la forme :

$$\lambda \sum_{\mu > \nu} 2(F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu}) p_\mu p_\nu = 0 \quad (5.64)$$

Elle sera donc satisfaite si nous prenons pour  $F$  un tenseur antisymétrique. On dispose donc de six degrés de liberté indépendants. On peut par conséquent poser sans perte de généralité

$$\begin{cases} F_{ij} &= -\varepsilon_{ijk} B^k \text{ avec } i, j, k \text{ différents} \\ F_{0i} &= \frac{E^i}{c} \end{cases} \quad (5.65)$$

On écrit ensuite le PFD :

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \lambda F^{\mu\nu} p_\nu \quad (5.66)$$

La partie spatiale donne :

$$\begin{aligned} \frac{dp^i}{d\tau} &= \lambda F^{i\nu} p_\nu = \lambda F^{ij} p_j + \lambda F^{i0} p_0 \\ &= -\lambda \varepsilon_{ijk} p_j B^k + \lambda \frac{E^i}{c} p_0 \end{aligned} \quad (5.67)$$

Car :

$$\begin{cases} F^{ij} &= F_{ij} \\ F^{i0} &= -F^{0i} = F_{0i} \end{cases} \quad (5.68)$$

En utilisant l'expression de l'impulsion :

$$\begin{cases} \vec{p} &= \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ p^0 &= \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \quad (5.69)$$

On obtient :

$$\frac{dp^i}{d\tau} = \lambda \varepsilon_{ijk} p^j B^k + \lambda p^0 \frac{E^i}{c} \quad (5.70)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left( \frac{mv^i}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \lambda \varepsilon_{ijk} \frac{mv^j}{\sqrt{1-\beta^2}} B^k + \frac{\lambda m E^i}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (5.71)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \lambda m \vec{v} \wedge \vec{B} + \lambda m \vec{E} \quad (5.72)$$



En posant  $\lambda = \frac{q}{m}$  on retrouve l'expression de la force de Lorentz :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = q(\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E}) \quad (5.73)$$

Cette construction nous montre que les champs électriques et magnétiques sont les composantes d'un tenseur antisymétrique. De plus on obtient une expression covariante de la force de Lorentz, ce qui au départ ne sautait pas aux yeux. La covariance de la théorie exige que l'impulsion et les champs obéissent aux lois de transformation :

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}(x) &\rightarrow F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}(\vec{x}) \\ p^\mu &\rightarrow p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu \end{aligned} \quad (5.74)$$

## VI) Géodésiques de l'espace temps de Minkowski

Dans l'espace euclidien les géodésiques sont les courbes  $\gamma$  qui minimisent la distance euclidienne entre deux points

$$L(\gamma) = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (5.75)$$

Ce sont évidemment les droites passant par ces deux points. Cette définition s'étend à n'importe quelle variété munie d'une métrique  $g_{\mu\nu}$ . La longueur d'une courbe s'écrit

$$L(\gamma) = \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (5.76)$$

Montrons que la dynamique des particules massives admet une interprétation géométrique en terme de géodésiques dans l'espace-temps muni de la distance

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2 \quad (5.77)$$

Prenons une action proportionnelle à la longueur de la ligne d'univers :

$$\begin{aligned} S &= -mc \int_{t_1}^{t_2} ds = -mc \int \sqrt{c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2} \\ &= -mc \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \\ &= -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \end{aligned} \quad (5.78)$$

Le Lagrangien est :

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5.79)$$

Le signe et le préfacteur ont été choisis pour retrouver le cas non relativiste lorsque  $c \rightarrow \infty$ . L'équation d'Euler-Lagrange donne :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = 0 \quad (5.80)$$

On retrouve l'équation du mouvement d'une particule libre de masse  $m$ . Le fait que l'action d'une particule libre soit donnée par  $-mcL(\gamma)$  implique que les trajectoires de vitesse constante sont celles qui maximisent la distance au sens de la métrique de Minkowski.

On va maintenant passer au formalisme hamiltonien par une transformation de Legendre. L'impulsion est :

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.81)$$

On en déduit le Hamiltonien :

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (5.82)$$

## VII) Lagrangien d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

On veut essayer de trouver le bon Lagrangien pour retrouver :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (5.83)$$

Ce lagrangien va en fait dépendre des potentiels et non des champs. Montrons que (voir calcul de Mécanique analytique) :

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q\vec{v} \cdot \vec{A} \quad (5.84)$$

est solution du problème.

Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = -q \left( \frac{\partial A^i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) + qv^j \left( \frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \right) \quad (5.85)$$

Vérifions que la densité Lagrangienne est un invariant relativiste. Pour cela on écrit le terme d'interaction sous la forme :

$$-qA_\mu \frac{dx^\mu}{dt} \quad (5.86)$$

Avec :

$$A_0 = \frac{\phi}{c} \quad (5.87)$$

L'action infinitésimale est donc égale à :

$$\mathcal{L}dt = -mc ds - qA_\mu dx^\mu \quad (5.88)$$

## VIII) Énergie d'une particule dans un champ électromagnétique

On a vu que le Lagrangien était :

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v} \quad (5.89)$$

On en déduit le Hamiltonien :

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} \quad (5.90)$$

$$= \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\vec{A} \cdot \vec{v} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\phi - q\vec{A} \cdot \vec{v} \quad (5.91)$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\phi \quad (5.92)$$

$$H = \sqrt{c^2(\vec{p} - q\vec{A})^2 + m^2c^4} + q\phi \quad (5.93)$$

Expression dont la limite non relativiste donne bien le résultat attendu

$$H = mc^2 + \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi \quad (5.94)$$

## 6 Formulation covariante des équations de Maxwell

### I) Introduction : champs et particules

Les théories classiques des champs sont des théories dualistes car elles font intervenir deux types d'entités, particules et champs. Ainsi dans la théorie Newtonienne de la gravitation le champ de gravitation est décrit par un champ vectoriel  $\vec{g}(\vec{r})$  créé par une distribution de masse  $\rho(\vec{r})$ . Le mouvement d'une particule test dans un champ de gravitation  $\vec{g}(\vec{r})$  obéit aux équations :

$$\begin{cases} m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}(\vec{r}) & (1) \\ \text{div } \vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G\rho(\vec{r}) & (2) \end{cases} \quad (6.1)$$

Considérons par exemple une distribution ponctuelle de masse placée à l'origine :

$$\rho(\vec{r}) = M\delta^3(\vec{r}) \quad (6.2)$$

Alors on va devoir résoudre :

$$\text{div } \vec{g}(\vec{r}) = -4\pi GM\delta^3(\vec{r}) \quad (6.3)$$

Ce qui donne le résultat classique :

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{MG\vec{r}}{r^3} \quad (6.4)$$

### II) Equations de Maxwell

On peut suivre la même démarche pour le champ électromagnétique. L'équation du mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique s'écrit :

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{m} F^{\mu\nu} p_\nu \quad (6.5)$$

La covariance de cette équation et la condition  $p^2 = m^2 c^2$  exigent que  $F^{\mu\nu}$  est un tenseur antisymétrique de rang 2.

Il nous faut trouver l'équivalent de l'équation (2) du système (6.1). Puisque le champ électromagnétique a pour source le quadrivecteur courant nous pouvons poser :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (6.6)$$

En utilisant l'antisymétrie de  $F$  on obtient :

$$0 = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 \partial_\nu j^\nu \quad (6.7)$$

Cette équation traduit la conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad (6.8)$$

Nous observons que l'équation (6.6) n'est pas suffisante pour déterminer complètement les champs. En effet le tenseur anti-symétrique  $F^{\mu\nu}$  a 6 composantes indépendantes (les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ ) or on ne dispose que de 4 équations. L'antisymétrie de  $F$  suggère de représenter  $F$  en terme d'un champ vectoriel :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (6.9)$$

Un calcul élémentaire montre que :

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 \quad (6.10)$$

La représentation des champs physiques en terme de potentiels nous fournit donc les équations manquantes.

Vérifions qu'on retrouve les équations de Maxwell usuelles

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{div } \vec{E} & = & \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & = & \mu_0 \vec{j} \\ \text{div } \vec{B} & = & 0 \\ \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & = & 0 \end{array} \right. \quad (6.11)$$

Posons

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F_{ij} & = & -\epsilon_{ijk} B^k \\ F_{0i} & = & \frac{1}{c} E^i \end{array} \right. \quad (6.12)$$

On réécrit l'équation 6.6 en termes de  $E^i$  et  $B^k$  :

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \mu_0 j^i \quad (6.13)$$

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = \mu_0 j^i \quad (6.14)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{c} E^i \right) + \epsilon_{ijk} \partial_j B^k = \mu_0 j^i \quad (6.15)$$

On retrouve la seconde équation du système 6.11 :

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (6.16)$$

La composante temporelle de l'équation (6.6) s'écrit :

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 j^0 \quad (6.17)$$

$$\partial_i F^{i0} = \mu_0 j^0 \quad (6.18)$$

$$\frac{1}{c} \partial_i E^i = \mu_0 \rho c \quad (6.19)$$

$$\partial_i E^i = \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.20)$$

On retrouve donc la première équation de Maxwell du système (6.11)

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.21)$$

On peut vérifier que l'équation 6.10 donne les deux dernières équations de Maxwell. Nous venons donc de montrer que les équations de Maxwell prennent la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \\ \partial^\mu F^{\rho\sigma} + \partial^\rho F^{\sigma\mu} + \partial^\sigma F^{\mu\rho} = 0 \end{array} \right. \quad (6.22)$$

Où le tenseur  $F$  s'écrit :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^1}{c} & \frac{E^2}{c} & \frac{E^3}{c} \\ -\frac{E^1}{c} & 0 & -B^3 & B^2 \\ -\frac{E^2}{c} & B^3 & 0 & -B^1 \\ -\frac{E^3}{c} & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

Il est commode de faire apparaitre le tenseur dual :

$$F^{*\mu\nu} = \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (6.24)$$

où  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  est le tenseur complètement antisymétrique dans les 4 indices. Pour le spécifier complètement on pose  $\epsilon^{0123} = 1$ . Les équations du mouvement prennent la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \end{array} \right. \quad (6.25)$$

Etudions comment agit l'opération de dualité sur les champs électrique et magnétique

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & \frac{E^3}{c} & -\frac{E^2}{c} \\ B^2 & -\frac{E^3}{c} & 0 & \frac{E^1}{c} \\ B^3 & \frac{E^2}{c} & -\frac{E^1}{c} & 0 \end{pmatrix} \leftarrow F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E^1}{c} & -\frac{E^2}{c} & -\frac{E^3}{c} \\ \frac{E^1}{c} & 0 & -B^3 & B^2 \\ \frac{E^2}{c} & B^3 & 0 & -B^1 \\ \frac{E^3}{c} & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

Ces relations montrent que l'on passe de  $F$  à  $\tilde{F}$  par la transformation :

$$\begin{cases} c\vec{B} & \leftarrow \vec{E} \\ -\frac{\vec{E}}{c} & \leftarrow \vec{B} \end{cases} \quad (6.27)$$

### III) Dualité et invariance de jauge

Les équations de Maxwell ne sont manifestement pas invariantes par dualité. Pour restaurer la symétrie de dualité  $F \rightarrow \tilde{F}$ , il faudrait considérer les équations généralisées :

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} & = j^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} & = k^\nu \end{cases} \quad (6.28)$$

La seconde équation implique que le champ magnétique n'est plus de divergence nulle. La composante  $k^0$  représente une densité de charges magnétiques. Certaines théories, comme les théories de grande unification, prédisent l'existence de monopoles magnétiques. Imaginés par Dirac, ces objets hypothétiques permettent de rendre compte de la quantification de la charge électrique. La quantification du moment angulaire implique que le produit de la charge magnétique élémentaire par la charge électrique est un multiple entier de la constante de Planck  $gq = n\hbar$ .

Dans la suite on suppose qu'il n'y a pas de sources magnétiques. On travaillera par conséquent avec les équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} & = j^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} & = 0 \end{cases} \quad (6.29)$$

Si nous considérons  $F$  et  $\tilde{F}$  comme des champs élémentaires et que nous les prenons comme variables indépendantes, on peut résoudre la seconde équation en terme d'un champ auxiliaire qui est le quadripotentiell

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (6.30)$$

Montrons que ce quadripotentiell n'est pas déterminé de façon unique. Soit  $A_\nu^{(0)}$  une solution particulière telle que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^{(0)} - \partial_\nu A_\mu^{(0)} \quad (6.31)$$

Pour toute fonction scalaire  $\Lambda(x)$  :

$$A_\nu = A_\nu^{(0)} + \partial_\nu \Lambda \quad (6.32)$$

est encore solution.

Une transformation des potentiell  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda$ ,  $A_0 \rightarrow A_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$  qui laisse invariant les champs  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  est appelée transformation de jauge. Il s'agit d'une symétrie locale car  $\Lambda(x)$  est fonction de l'espace et du temps. En physique classique cette symétrie n'a pas de conséquence particulière car les seules observables physiques sont les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Il en va différemment

en physique quantique car les équations d'évolution font intervenir le potentiel. Ainsi dans le cas non relativiste l'équation de Schrodinger

$$\frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2\psi + qcA_0\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (6.33)$$

fait intervenir explicitement le potentiel vecteur. On montre que la transformation de jauge (6.32) accompagnée par un changement de phase de la fonction d'onde

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-iq\frac{\Lambda(x)}{\hbar}}\psi(x) \quad (6.34)$$

laisse invariante l'équation de Schrodinger. On a donc une symétrie de jauge locale. Le fait qu'une théorie admette une symétrie locale de jauge fournit une contrainte sur les interactions entre la matière et les champs. L'interaction avec le champ électromagnétique est locale dans le potentiel vecteur mais est non locale en terme des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Un exemple remarquable illustrant cette non-localité est l'expérience de Aharonov-Bohm.

Dans son principe, cette expérience consiste à regarder si les interférences par un dispositif de fentes d'Young sont modifiées par la présence d'un solénoïde (voir figure 6.1). En plaçant un solénoïde infiniment fin et suffisamment long, on crée un dispositif dans lequel le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde, par conséquent aucune force ne s'exerce sur les électrons. On ne devrait donc observer aucune modification des franges d'interférences. Cependant, le potentiel vecteur ne peut être identiquement nul (car l'intégrale de contour du potentiel vecteur sur un contour fermé entourant le solénoïde doit être égale au flux de  $\vec{B}$ ). Le calcul quantique montre que les franges d'interférence sont déplacées par un terme de la forme  $\frac{q\Phi}{\hbar}$  où  $\Phi$  est le flux magnétique traversant le solénoïde. Lorsque le flux magnétique est quantifié  $\Phi = \frac{2n\pi\hbar}{q}$  où  $n \in \mathbb{Z}$  aucun effet n'est observé.

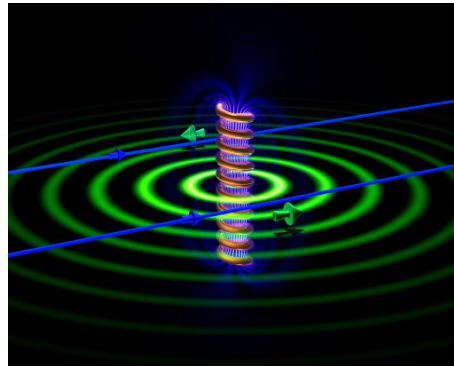


FIGURE 6.1 – Vue d'artiste de l'expérience de Aharonov-Bohm.



## IV) Lois de transformation des champs

On étudie les propriétés de transformation des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  par changement de référentiel en utilisant le fait que  $F^{\mu\nu}$  est un tenseur sous le groupe de Lorentz.

### 1) Transformation sous les rotations

Les formules de transformation d'un tenseur deux fois contravariant nous donnent

$$F'^{0i} = \Lambda^0_\rho \Lambda^i_\sigma F^{\rho\sigma} \quad (6.35)$$

Dans le cas d'une rotation la matrice  $\Lambda$  a pour composantes

$$\begin{cases} \Lambda^0_\nu = \delta^0_\nu \\ \Lambda^i_j = R^{ij}, R \in SO(3) \end{cases} \quad (6.36)$$

On obtient alors :

$$F'^{0i} = \Lambda^i_j F^{0j} \quad (6.37)$$

On en déduit :

$$E'^i = R^{ij} E^j$$

On retrouve la propriété attendue que  $\vec{E}$  se transforme sous les rotations comme un vecteur.

### 2) Transformation sous les transformations spéciales de Lorentz

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} \quad (6.38)$$

$$= \Lambda^\mu_\rho F^{\rho\sigma} (\Lambda^t)_\sigma{}^\nu \quad (6.39)$$

Sous forme matricielle ces formules donnent

$$F' = \Lambda F^t \Lambda \quad (6.40)$$

Pour une transformation spéciale le long de  $Ox$  on obtient :

$$\begin{cases} E'^1 = E^1 \\ E'^2 = \gamma(E^2 - \beta c B^3) \\ E'^3 = \gamma(E^3 + \beta c B^2) \end{cases} \quad \begin{cases} B'^1 = B^1 \\ B'^2 = \gamma(B^2 + \frac{\beta}{c} E^3) \\ B'^3 = \gamma(B^3 - \frac{\beta}{c} E^2) \end{cases} \quad (6.41)$$

A titre d'application, essayons de calculer le champ créé en un point fixe  $P$  par une particule chargée en mouvement uniforme. Considérons une particule chargée de charge  $q$  se déplaçant à la vitesse  $v$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Calculons les champs dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié

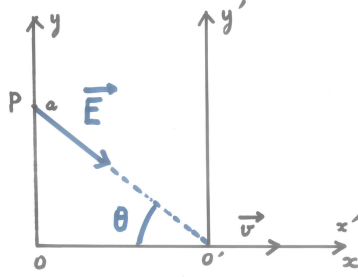


FIGURE 6.2 – Charge en mouvement uniforme

à la charge. Il nous faut exprimer le champ au point  $P$  dont les coordonnées dans  $\mathcal{R}$  sont  $P = (ct, x = 0, y = a)$ . Dans  $\mathcal{R}'$  ce point a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  la charge ponctuelle  $q$  crée le champ coulombien

$$\vec{E}' = \frac{q\vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \quad (6.42)$$

dont les composantes s'écrivent

$$\begin{cases} E'^x &= \frac{-q\gamma vt}{4\pi\epsilon_0(a^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E'^y &= \frac{qa}{4\pi\epsilon_0(a^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E'^z &= 0 \end{cases} \quad (6.43)$$

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  les formules de transformation montrent qu'il apparaît à la fois un champ électrique et un champ magnétique transverse

$$B^z = \frac{\gamma v \mu_0 q}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.44)$$

Dans la limite non relativiste, ce résultat redonne la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (6.45)$$

Les composantes du champ électrique s'écrivent

$$\begin{cases} E^x &= \frac{-q\gamma vt}{4\pi\epsilon_0(a^2+\gamma^2v^2t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E^y &= \frac{q\gamma a}{4\pi\epsilon_0(a^2+\gamma^2v^2t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E^z &= 0 \end{cases} \quad (6.46)$$

On peut vérifier que le champ électrique peut s'écrire sous la forme

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.47)$$

où  $\theta$  est l'angle entre le vecteur vitesse et le vecteur  $\vec{r}$  qui joint la charge au point d'observation.

Ce résultat appelle plusieurs remarques. Bien que le champ soit radial et décroisse en  $1/r^2$ , il ne s'agit pas d'un champ coulombien. Le fait que le champ électrique à l'instant  $t$  pointe dans la direction où se trouve la charge à cet instant est a priori surprenant. On s'attendrait en effet à ce que le champ à l'instant  $t$  dépende de la position de la charge à l'instant retardé  $t - \frac{R}{c}$ .

Exemple : considérons une charge au repos pour  $t \leq 0$ , brutalement accélérée à  $t = 0$ , et se déplaçant ensuite à vitesse constante  $v_0$ . Le profil du champ électrique aura l'allure suivante :

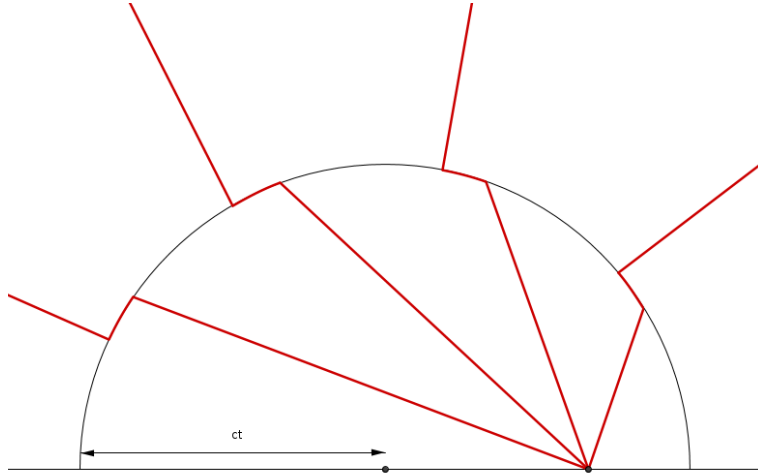


FIGURE 6.3 – Champ électrique d'une particule en mouvement et effet de retard

Le raccord entre le champ extérieur et le champ intérieur se fait sur une coque d'épaisseur  $\Delta r = c\Delta t$  où  $\Delta t$  est le temps pendant lequel la particule est accélérée. Il apparaît un champ électrique transverse qui décroît en  $1/r$  et non pas en  $1/r^2$  comme un champ coulombien. C'est là l'origine du phénomène de rayonnement.

## V) Invariants du champ électromagnétique

On peut construire deux quantités scalaires à partir de  $\vec{E}, \vec{B}$ .

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{2}{c^2}(c^2\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \quad (6.48)$$

$$F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = -\frac{4\vec{E}\cdot\vec{B}}{c} \quad (6.49)$$

En utilisant l'invariance de ces quantités on peut répondre à certaines questions. Par exemple, est-il possible de trouver un référentiel tel que le champ  $\vec{E}$  soit nul ? Il faut pour cela satisfaire  $c^2\vec{B}^2 - \vec{E}^2 > 0$  et  $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ . Il faut par conséquent satisfaire les deux conditions  $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} > 0$  et  $F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = 0$ .

# 7 Tenseur d'énergie impulsion - lois de conservation

## I) Introduction

Considérons un ensemble de particules chargées de densité  $\rho(\vec{r}, t)$  localisées à l'intérieur d'un domaine  $\Omega$ .

La charge totale est  $\int_{\Omega} \rho(\vec{r}, t) d\vec{r}$ .

La perte de charge par unité de temps est égale au flux sortant :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho(\vec{r}, t) d\vec{r} = \int_{\partial\Omega} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} \text{div } \vec{j} d\vec{r} \quad (7.1)$$

Cette relation devant être satisfaite pour tout volume  $\Omega$ , on en déduit l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad (7.2)$$

Si on introduit les quadrivecteurs  $j^\mu = (\rho c, \vec{j})$  et  $\partial_\mu = (\frac{\partial}{c\partial t}, \vec{\nabla})$  on peut l'exprimer sous une forme covariante :

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (7.3)$$

Nous nous proposons d'étudier la conservation de l'énergie et de l'impulsion d'un ensemble de particules chargées. Nous verrons qu'il faut prendre en compte la contribution venant des particules et aussi celle venant du champ .

Loi de conservation globale mais écriture locale.

La covariance implique de traiter l'énergie et l'impulsion sur le même plan. L'équation de conservation sera nécessairement plus riche. Elle fait intervenir le tenseur d'énergie impulsion  $T^{\mu\nu}$  qui est la généralisation covariante du tenseur des contraintes des milieux continus.

**Rappel :** Sur le tenseur  $\mathcal{T}$  des contraintes. On considère dans un milieu continu un élément de surface séparant dans son voisinage deux parties du milieu que nous désignons par 1 et 2. Soit  $\vec{n}$  la normale orientée de 1 vers 2.

- Force exercée par 2 sur 1 :  $dF^i = \mathcal{T}^{ij} n^j dS$
- Dans un fluide parfait :  $\mathcal{T}^{ij} = -p\delta^{ij}$ , et donc  $dF^i = -pn^i dS$

- $\mathcal{T}^{ij} = \mathcal{T}^{ji}$ , tenseur symétrique.

Pour rendre compte de la symétrie du tenseur, on peut prendre un cube de matière, et lui appliquer deux forces  $F\mathbf{e}_x$  et  $F\mathbf{e}_y$ , et montrer qu'on ne doit pas avoir de couple résiduel. Après calcul on va conclure à la symétrie de  $\mathcal{T}$  (entre  $x$  et  $y$ , puis on change les faces choisies).

## II) Tenseur d'énergie impulsion du champ libre

On introduit le tenseur d'énergie-impulsion associé au champ. On exige que  $T^{\mu\nu}$  ait les propriétés suivantes :

- symétrique  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$
- trace nulle  $g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = T^\mu_\mu = 0$  (nous verrons plus tard l'interprétation)
- invariance de jauge (ne dépend que de  $F^{\mu\nu}$ )
- dépendance quadratique dans le champ.

La forme la plus générale d'un tenseur quadratique dans les champs est :

$$T^{\mu\nu} = ag^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + bF^\mu_\rho F^{\rho\nu} \quad (7.4)$$

Exprimons que  $T$  est de trace nulle :

$$g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = ag_{\mu\nu}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + bg_{\mu\nu}F^\mu_\rho F^{\rho\nu} \quad (7.5)$$

$$= 4aF_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + \underbrace{bF_{\nu\rho}F^{\rho\nu}}_{-bF_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}} \quad (7.6)$$

$$= (4a - b)F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = 0 \quad (7.7)$$

Cela implique  $a = \frac{b}{4}$ .

On va maintenant écrire la conservation de  $T^{\mu\nu}$ , quand il n'y a pas de sources :

$$T^{\mu\nu} = b \left( \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + F^\mu_\rho F^{\rho\nu} \right) \quad (7.8)$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = b \left( \frac{1}{4}\partial^\nu(F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}) + \partial_\mu(F^\mu_\rho F^{\rho\nu}) \right) \quad (7.9)$$

Or on a :

$$\frac{1}{4}((\partial^\nu F^{\rho\sigma})(F_{\rho\sigma}) + (F_{\rho\sigma})\partial^\nu F^{\rho\sigma}) = \frac{1}{2}F_{\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} \quad (7.10)$$

Donc :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = b \left( \frac{1}{2}F_{\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} + (\partial_\mu F^\mu_\rho)F^{\rho\nu} + F_{\mu\rho}\partial^\mu F^{\rho\nu} \right) \quad (7.11)$$

Or  $\partial_\mu F^{\mu\rho} = j^\rho = 0$  (Maxwell), on a donc :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{b}{2} [F_{\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} + 2F_{\rho\lambda} \partial^\rho F^{\lambda\nu}] \quad (7.12)$$

$$= \frac{b}{2} [F_{\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} + F_{\rho\sigma} \partial^\rho F^{\sigma\nu} + F_{\rho\lambda} \partial^\rho F^{\lambda\nu}] \quad (7.13)$$

$$= \frac{b}{2} [F_{\rho\sigma} (\partial^\nu F^{\rho\sigma} + \partial^\rho F^{\sigma\nu}) + F_{\rho\lambda} \partial^\rho F^{\lambda\nu}] \quad (7.14)$$

On écrit ensuite :

$$\partial^\nu F^{\rho\sigma} + \partial^\rho F^{\sigma\nu} + \partial^\sigma F^{\nu\rho} = 0 \quad (7.15)$$

On obtient alors :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{b}{2} (-F_{\rho\sigma} \partial^\sigma F^{\nu\rho} + F_{\rho\lambda} \partial^\rho F^{\lambda\nu}) \quad (7.16)$$

$$= \frac{b}{2} F_{\rho\lambda} (\partial^\lambda F^{\rho\nu} + \partial^\rho F^{\lambda\nu}) \quad (7.17)$$

L'expression entre parenthèses est symétrique en  $(\rho, \lambda)$  et  $F_{\rho\lambda}$  est antisymétrique. La quantité contractée est donc nulle :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (7.18)$$

Dans les unités du système international, on a  $b = \frac{1}{\mu_0}$  :

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} + F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} \right) \quad (7.19)$$

$$T^{00} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} + F^0{}_\lambda F^{\lambda 0} \right) \quad (7.20)$$

Or on a :

$$\frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = \frac{1}{4} (F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0}) + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \quad (7.21)$$

$$= -\frac{1}{2} \left( +\frac{E^i}{c} \frac{E^i}{c} \right) + \frac{1}{4} \times 2 \times \vec{B}^2 \quad (7.22)$$

De plus :

$$F^0{}_\lambda F^{\lambda 0} = F^0{}_i F^{i0} = -F^{0i} F^{i0} = (F^{i0})^2 = \frac{\vec{E}^2}{c^2} \quad (7.23)$$

On en déduit :

$$T^{00} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\vec{E}^2}{2c^2} + \frac{\vec{B}^2}{2} \right) = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \quad (7.24)$$

Ensuite :

$$T^{0i} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{4} \underbrace{g^{0i}}_0 F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} + F^0{}_\lambda F^{\lambda i} \right) \quad (7.25)$$

Or :

$$F^0_{\lambda} F^{\lambda i} = F^0_j F^{ji} \quad (7.26)$$

$$= -F^{0j} F^{ji} \quad (7.27)$$

$$= F^{0j} F^{ij} \quad (7.28)$$

$$= -\frac{E^j}{c} (-\epsilon_{ijk} B^k) \quad (7.29)$$

$$= \frac{1}{c} (\vec{E} \wedge \vec{B})^i \quad (7.30)$$

On en déduit :

$$T^{0i} = \frac{1}{\mu_0 c} (\vec{E} \wedge \vec{B})^i = \frac{\Pi^i}{c} \quad (7.31)$$

On appelle vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (7.32)$$

Le tenseur d'énergie-impulsion peut donc s'écrire

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} u & \frac{\Pi^1}{c} & \frac{\Pi^2}{c} & \frac{\Pi^3}{c} \\ \frac{\Pi^1}{c} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ \frac{\Pi^2}{c} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ \frac{\Pi^3}{c} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \quad (7.33)$$

On a posé

$$T^{ij} = \epsilon_0 \left( -E^i E^j + \frac{\vec{E}^2}{2} \delta^{ij} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( -B^i B^j + \frac{\vec{B}^2}{2} \delta^{ij} \right) \quad (7.34)$$

$$u = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\vec{E}^2}{2c^2} + \frac{\vec{B}^2}{2} \right) = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \quad (7.35)$$

On définit le tenseur de Maxwell  $\mathcal{T}_{ij} = -T_{ij}$

### III) Lois de conservation en l'absence de sources

En utilisant les équations de Maxwell dans le vide nous venons de montrer que

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (7.36)$$



Pour donner une interprétation physique de cette relation locale, nous l'intégrons dans un volume fini

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} T^{00} + \partial_i T^{i0} = 0 \quad (7.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} T^{00} d^3 \vec{x} + c \int_{\Omega} \partial_i T^{i0} d^3 \vec{x} = 0 \quad (7.38)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} T^{00} d^3 \vec{x} = c \int_{\Omega} \partial_i T^{i0} d^3 \vec{x} \quad (7.39)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} T^{00} d^3 \vec{x} = c \iint_{\partial \Omega} T^{0i} n^i dS \quad (7.40)$$

Puisque  $T^{00}$  est la densité d'énergie contenue dans  $\Omega$ ,  $cT^{i0} = \Pi^i$  est le flux d'énergie sortant.

## IV) Lois de conservation en présence de sources

Cette fois le terme en  $j_{\lambda}$  de l'équation 7.11 ne va pas s'annuler, et on va avoir :

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = b(\partial^{\rho} F_{\rho\lambda}) F^{\lambda\nu} = \mu_0 b j_{\lambda} F^{\lambda\nu} = j_{\lambda} F^{\lambda\nu} \quad (7.41)$$

Pour  $\nu = 0$  on obtient :

$$\partial_{\mu} T^{\mu 0} = j_{\lambda} F^{\lambda 0} = -j_{\lambda} F^{0\lambda} \quad (7.42)$$

$$\partial_0 T^{00} + \partial_i T^{i0} = -j_i F^{0i} = j^i F^{0i} = -j^i \frac{E^i}{c} \quad (7.43)$$

On retrouve alors :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{c} \text{div } \vec{\Pi} + \frac{\vec{j} \cdot \vec{E}}{c} = 0 \quad (7.44)$$

Cette équation traduit la conservation locale de l'énergie. Pour le montrer faisons un bilan global.

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u d^3 \vec{x} = \int_{\Omega} \text{div } \vec{\Pi} d^3 \vec{x} + \int_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{E} d^3 \vec{x} = \int_{\partial \Omega} \vec{\Pi} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{E} d^3 \vec{x} \quad (7.45)$$

Le deuxième terme de droite correspond à une perte d'énergie par effet Joule.

Pour  $\nu = i$  on obtient :

$$\partial_{\mu} T^{\mu i} = j_{\lambda} F^{\lambda i} = -j_{\lambda} F^{i\lambda} \quad (7.46)$$

$$= -j_0 F^{i0} - j_j F^{ij} \quad (7.47)$$

$$= j_0 F^{0i} + j^j F^{ij} \quad (7.48)$$

$$= \rho c \left( -\frac{E^i}{c} \right) - \rho v^j (\epsilon_{ijk} B^k) \quad (7.49)$$

$$\partial_{\mu} T^{\mu i} = -\rho (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})^i \quad (7.50)$$

En intégrant sur un volume  $\Omega$  on obtient

$$\int_{\Omega} \rho(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) d^3\vec{x} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}_{part} \quad (7.51)$$

où  $\vec{P}_{part}$  représente l'impulsion totale des particules contenues dans  $\Omega$ .

Considérons le membre de gauche

$$\partial_0 T^{0i} + \partial_j T^{ji} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\Pi^i}{c} + \partial_j T^{ji} \quad (7.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int \frac{\Pi^i}{c^2} d^3\vec{x} \right) + \int \partial_j T^{ji} d^3\vec{x} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}_{part} \quad (7.53)$$

En regroupant on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{P}_{part} + \int \frac{\Pi^i}{c^2} d^3\vec{x} \right) = - \int_{\Omega} \partial_j T^{ji} d^3\vec{x} = \int_{\Omega} \partial_j \mathcal{T}^{ji} d^3\vec{x} = \int_{\partial\Omega} \mathcal{T}^{ji} n^j dS \quad (7.54)$$

Nous avons fait apparaître le tenseur de Maxwell  $\mathcal{T}^{ij} = -T^{ij}$ .

Cette relation exprime que la variation de l'impulsion totale contenue dans le domaine  $\Omega$  est égale à la somme des forces qui s'exercent sur le domaine. Elle permet d'interpréter :

- $\frac{\vec{\Pi}}{c^2}$  comme la densité locale de quantité de mouvement du champ électromagnétique.
- $\mathcal{T}^{ji} n^j dS$  comme la force exercée sur un élément de surface  $\vec{n} dS$  où  $\mathcal{T}^{ij}$  est le tenseur des contraintes de Maxwell.

$$\mathcal{T}^{ij} = \epsilon_0 \left( E^i E^j - \frac{\vec{E}^2}{2} \delta^{ij} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B^i B^j - \frac{\vec{B}^2}{2} \delta^{ij} \right) \quad (7.55)$$

Il est instructif de comparer cette formule à celle donnant la variation de quantité de mouvement en mécanique des fluides. En utilisant l'équation d'Euler, on montre que la variation de quantité de mouvement dans un domaine fixe s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\Omega} \rho v_i d^3\vec{x} \right) = \int_{\partial\Omega} \partial_j \mathcal{T}^{ji} d^3\vec{x} \quad (7.56)$$

Dans ce cas le tenseur des contraintes est la somme d'un terme de pression et d'un terme convectif

$$\mathcal{T}_{ij} = -p \delta_{ij} - \rho v_i v_j \quad (7.57)$$

**Remarque 1 :** Vérifions que  $\frac{\vec{\Pi}}{c^2}$  correspond à la densité de quantité de mouvement, et  $\vec{\Pi}$  au flux d'énergie en considérant le cas d'une onde plane,  $B = \frac{E}{c}$ .

On obtient facilement :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \epsilon_0 E^2 \\ \vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{k} = cu\vec{k} \end{array} \right. \quad (7.58)$$

par conséquent

$$\frac{\vec{\Pi}}{c^2} = \frac{u\vec{k}}{c} \quad (7.59)$$

Cette relation est en accord avec  $P = \frac{E}{c}$  pour des particules de masse nulle à condition d'interpréter  $\frac{\vec{\Pi}}{c^2}$  comme une densité de quantité de mouvement.

**Remarque 2 :** On peut aussi introduire la densité de moment angulaire :

$$\vec{l} = \vec{r} \wedge \frac{\vec{\Pi}}{c^2} \quad (7.60)$$

Le moment angulaire total du champ va être :

$$\vec{L}_{ch} = \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \vec{r} \wedge \vec{\Pi} d^3\vec{r} \quad (7.61)$$

Il intervient notamment dans l'étude de l'interaction d'une particule chargée avec un monopole magnétique. L'équation du mouvement d'une particule chargée de charge  $q$  placée dans le champ magnétique

$$\vec{B} = \frac{g\vec{r}}{r^3} \quad (7.62)$$

créé par un monopole de charge magnétique  $g$  s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (7.63)$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \frac{g\vec{r}}{r^3} \quad (7.64)$$

Calculons la dérivée du moment angulaire

$$\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v} \quad (7.65)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{v} \wedge \vec{v} + m\vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (7.66)$$

$$= gq\vec{r} \wedge \left( \frac{\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) \quad (7.67)$$

$$= gq \frac{\vec{v}\vec{r}^2 - \vec{r}(\vec{v} \cdot \vec{r})}{r^3} \quad (7.68)$$

Le moment angulaire n'est pas conservé car la force magnétique n'est pas une force centrale. Mais on peut vérifier que

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{L} - gq \frac{\vec{r}}{r} \right) = 0 \quad (7.69)$$

On peut montrer que le terme supplémentaire n'est autre que le moment angulaire du champ (champ coulombien créé par la particule chargée et champ magnétique créé par le monopole). On a donc bien conservation du moment angulaire total.

**Remarque 3 :** Équations de Maxwell dans le vide :

Montrons pourquoi  $B = \frac{E}{c}$  en partant de :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (7.70)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (7.71)$$

On remarque que  $F^{\mu\nu}$  est invariant sous la transformation  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ . On va donc pouvoir faire un choix de jauge, il est commode de se placer dans la jauge de Lorenz :

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (7.72)$$

On écrit ensuite :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0 \quad (7.73)$$

Cela revient à écrire, en utilisant le choix de jauge précédent :

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 = \square A^\nu \quad (7.74)$$

Considérons les solutions particulières de cette équation de la forme :

$$A^\nu = \epsilon^\nu e^{ikx} \text{ avec } k.x = k_\mu x^\mu \quad (7.75)$$

Or :

$$(\partial_0^2 - \Delta) e^{ikx} = (-k_0^2 + \vec{k}^2) e^{ikx} = -k^2 e^{ikx} = 0 \quad (7.76)$$

C'est à dire :

$$k^2 = 0 \quad (7.77)$$

De plus, l'équation 7.72 va donner :

$$\partial_\nu A^\nu = ik.\epsilon e^{ikx} = 0 \quad (7.78)$$

On en déduit :

$$\epsilon.k = 0 \quad (7.79)$$

On écrit ensuite :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \epsilon^\nu (ik^\mu) e^{ikx} - \epsilon^\mu (ik^\nu) e^{ikx} = i(\epsilon^\nu k^\mu - \epsilon^\mu k^\nu) e^{ikx} \quad (7.80)$$

Exprimons les deux invariants :

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -(\epsilon_\mu k_\nu - \epsilon_\nu k_\mu)(\epsilon^\mu k^\nu - \epsilon^\nu k^\mu)e^{2ikx} = -2(\epsilon^2 k^2 - (k.\epsilon)^2)e^{2ikx} = 0 \quad (7.81)$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(\epsilon^\mu k^\nu - \epsilon^\nu k^\mu)(\epsilon^\rho k^\sigma - \epsilon^\sigma k^\rho)e^{2ikx} = 0 \quad (7.82)$$

On obtient :

$$\begin{cases} B^2 - \frac{E^2}{c^2} = 0 \\ \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (7.83)$$

Par exemple, si on prend  $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \frac{\omega}{c}, 0, 0)$ ,  $\epsilon = (0, 0, 1, 0)$ .

$$k.x = \frac{\omega}{c}ct - \frac{\omega}{c}x = \omega t - kx \quad (7.84)$$

On a alors :

$$F^{02} = \partial^0 A^2 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} e^{i(\omega t - kx)} = i \frac{\omega}{c} e^{i(\omega t - kx)} \quad (7.85)$$

$$F^{12} = \partial^1 A^2 = -\frac{\partial A^2}{\partial x} = i k e^{i(\omega t - kx)} \quad (7.86)$$

$$E^2 = -i\omega e^{i(\omega t - kx)} \quad (7.87)$$

$$B^3 = -i k e^{i(\omega t - kx)} \quad (7.88)$$

On peut remarquer qu'il est possible d'ajouter  $\lambda k^\mu$  à  $\epsilon$  et on aura toujours un vecteur orthogonal. Cela correspond à une transformation de jauge et donc ne change rien aux équations.

**Remarque 4 :** Interprétation de  $g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = 0$ .

Nous avons vu que les équations de Maxwell sont invariantes sous le groupe de Poincaré. En l'absence de charges, les équations sont en réalité invariantes sous un groupe plus grand qui est le groupe conforme. Ce groupe à 15 paramètres inclut en particulier les dilatations  $x \rightarrow x' = \lambda x$ . Sous ces transformations le champ électromagnétique se transforme selon

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = \lambda A_\mu(\lambda x) \quad (7.89)$$

Le fait que le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique libre est de trace nulle est une conséquence de l'invariance conforme, invariance qui repose sur le fait que le photon est de masse nulle. Montrons que cette symétrie se manifeste dans la thermodynamique d'un gaz de photons. La condition de trace nulle s'écrit explicitement :

$$T^{00} - T^{11} - T^{22} - T^{33} = 0 \quad (7.90)$$

Nous avons vu que  $T^{00}$  s'interprète comme la densité d'énergie du champ électromagnétique, et  $T^{ii}$  comme la pression de radiation.

Afin de donner une interprétation physique de cette relation considérons un gaz de photons dans une enceinte et étudions les collisions sur la paroi. Chaque photon arrivant sous une incidence  $\theta$  avec la normale va échanger une impulsion  $2\frac{h\nu}{c}\cos\theta$ . Si on s'intéresse à un élément de surface  $\Delta S$ , le volume du cylindre dans lequel se trouvent les photons pouvant heurter la surface est :

$$\Delta S c \Delta t \cos \theta \quad (7.91)$$

Le nombre de photons incidents sous l'angle  $\theta$  à  $d\theta$  près est :

$$\left(\frac{1}{2} \sin \theta d\theta\right) n \Delta S c \Delta t \cos \theta \quad (7.92)$$

On a donc une pression de :

$$p = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \times 2 \frac{h\nu}{c} \cos^2 \theta n c \quad (7.93)$$

On peut alors calculer la pression totale, et vérifier que :

$$u = T^{00} = 3p \quad (7.94)$$

On peut aussi faire une démonstration thermodynamique de  $p = \frac{u}{3}$ . En effet, la densité d'état d'un gaz de photons est :

$$\rho(\epsilon) = \frac{\Omega \epsilon^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \text{ densité d'état} \quad (7.95)$$

L'énergie s'écrit :

$$E = \int_0^\infty \epsilon \rho(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{\Omega k^4 T^4}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2 \Omega k^4 T^4}{15 \hbar^3 c^3} \quad (7.96)$$

Le grand potentiel :

$$J = kT \int_0^\infty \rho(\epsilon) \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) d\epsilon = \frac{\Omega k^4 T^4}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx \quad (7.97)$$

On fait ensuite une intégration par parties pour obtenir le résultat cherché :

$$\int_0^\infty x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx = \left[ \frac{x^3}{3} \ln(1 - e^{-x}) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{x^3}{3} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx \quad (7.98)$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (7.99)$$

Ce qui donne exactement le résultat cherché en se souvenant que  $J = -p\Omega$

## 8 Champs rayonnés par une source

### I) Position du problème

Nous nous proposons de construire les solutions générales des équations de Maxwell en présence de sources. On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} \partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\nu \\ \partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

La deuxième équation a pour solution générale :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (8.2)$$

La première équation devient

$$\partial^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \mu_0 j_\nu \quad (8.3)$$

$$\square A_\nu - \partial_\nu (\partial^\mu A_\mu) = \mu_0 j_\nu \quad (8.4)$$

En se plaçant dans la jauge de Lorenz

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \quad (8.5)$$

On obtient

$$\square A_\nu = \mu_0 j_\nu \quad (8.6)$$

Séparant les composantes spatiales et temporelles, on obtient les deux équations :

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (8.7)$$

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (8.8)$$

Nous allons montrer l'existence de solutions dans lesquelles les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  décroissent à l'infini en  $\frac{1}{r}$  et non pas en  $\frac{1}{r^2}$  comme dans le cas coulombien. Ceci implique une décroissance du vecteur de Poynting en  $\frac{1}{r^2}$  et donc un flux d'énergie non nul à l'infini, qui traduit l'apparition d'un rayonnement électromagnétique créé par les sources.

## II) Fonctions de Green

Afin de nous familiariser avec la notion de fonction de Green, commençons par regarder le cas particulier de l'électrostatique. Nous cherchons la solution générale de l'équation de Poisson :

$$-\Delta\phi(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\Delta} \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (8.9)$$

L'inverse du Laplacien est un opérateur intégral. En effet, on peut écrire  $\phi$  sous la forme :

$$\phi(\vec{r}) = \int G(\vec{r} - \vec{r}') \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} d^3\vec{r}' + \phi_0(\vec{r}) \text{ avec } \Delta\phi_0(\vec{r}) = 0 \quad (8.10)$$

Dans cette expression intégrale la quantité  $G$  appelée fonction de Green satisfait l'équation

$$-\Delta G(\vec{r}) = \delta^3(\vec{r}) \quad (8.11)$$

Pour la résoudre, on considère la transformée de Fourier  $\tilde{G}(\vec{k})$  définie par

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{G}(\vec{k}) d^3\vec{k} \quad (8.12)$$

Par conséquent

$$-\Delta G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int (-\Delta e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \tilde{G}(\vec{k}) d^3\vec{k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \vec{k}^2 \tilde{G}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{k} \quad (8.13)$$

Or on a :

$$\delta^3(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{k} \quad (8.14)$$

La transformée de Fourier vérifie donc l'équation algébrique

$$\vec{k}^2 \tilde{G}(\vec{k}) = 1 \quad (8.15)$$

En revenant dans l'espace réel on obtient

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{G}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{\vec{k}^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{k} \quad (8.16)$$



Pour calculer cette intégrale, on utilise un système de coordonnées judicieux. On se place en coordonnées sphériques,  $\vec{r}'$  définit l'axe Oz. On écrit  $\vec{k} \cdot \vec{r}' = kr \cos \theta$ . On obtient :

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2} e^{ikr \cos \theta} k^2 \sin \theta d\theta d\varphi dk \quad (8.17)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (8.18)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta \quad (8.19)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 e^{ikru} du \quad (8.20)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \left[ \frac{e^{ikru}}{ikr} \right]_{-1}^1 \quad (8.21)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \quad (8.22)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 r} \underbrace{\int_0^\infty d(kr) \frac{\sin kr}{kr}}_{\frac{\pi}{2}} \quad (8.23)$$

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r} \quad (8.24)$$

On en déduit la solution générale de l'équation de Poisson

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \phi_0(\vec{r}) \quad (8.25)$$

Considérons maintenant le problème dépendant du temps. L'équation de départ est :

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu(x) \quad (8.26)$$

Pour simplifier la discussion considérons le problème scalaire :

$$\square \varphi(x) = j(x) \quad (8.27)$$

Contrairement au cas précédent, nous allons montrer que le courant  $j(x)$  ne détermine pas de façon unique les champs. Il faudra imposer à la solution physique d'être causale. On définit la **fonction de Green retardée**  $G(x)$  comme la solution de l'équation :

$$\square G(x) = \delta^4(x) \quad (8.28)$$

qui s'annule pour  $x_0 < 0$ .

La solution générale de 8.27 peut s'écrire sous la forme d'une somme de deux termes : solution de l'équation homogène + solution particulière de l'équation avec second membre.

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \int G(x-y) j(y) d^4y \text{ avec } \square \varphi_0 = 0 \quad (8.29)$$

On passe en Fourier :

$$\square G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int -k^2 e^{-ikx} \tilde{G}(k) d^4k \quad (8.30)$$

On en déduit :

$$-k^2 \tilde{G}(\vec{k}) = 1 \quad (8.31)$$

C'est à dire :

$$\tilde{G}(k) = \frac{-1}{k^2} = \frac{-1}{k_0^2 - \vec{k}^2} \quad (8.32)$$

A  $\vec{k}$  fixé,  $\tilde{G}(k) = \tilde{G}(k_0, \vec{k})$  est une fonction méromorphe de la variable complexe  $k_0$  avec deux pôles simples  $k_0 = +|\vec{k}|$  et  $k_0 = -|\vec{k}|$ . Ces deux pôles simples sont sur l'axe réel. Montrons que la fonction de Green physique (avec de bonnes propriétés de causalité) s'obtient en déplaçant ces deux poles dans le demi-plan inférieur  $\Im(k_0) < 0$ . En rajoutant  $-i\epsilon$  on obtient :

$$\begin{cases} k_0^1 = |\vec{k}| - i\epsilon \\ k_0^2 = -|\vec{k}| - i\epsilon \end{cases} \quad (8.33)$$

On écrit alors :

$$\tilde{G}(k_0, \vec{k}) = -\frac{1}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \vec{k}^2} \quad (8.34)$$

$$G(x_0, \vec{x}) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 x_0}}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \vec{k}^2} \quad (8.35)$$

Pour  $x_0 < 0$  on peut calculer l'intégrale sur  $k_0$  en utilisant le théorème de Cauchy. Prenons comme contour d'intégration l'axe réel complété par un demi cercle situé dans le demi-plan supérieur  $\Im(k_0) > 0$ . L'intégrale sur ce contour fermé est nulle car la fonction est holomorphe dans le demi plan supérieur. Par ailleurs la contribution sur le demi-cercle tend vers zéro lorsqu'on fait tendre le rayon du demi-cercle vers l'infini. Par conséquent  $G(x_0, \vec{x}) = 0$ .

Pour  $x_0 > 0$  on prend cette fois ci comme contour d'intégration l'axe réel complété par un demi-cercle situé dans le demi plan inférieur  $\Im(k_0) < 0$ . La contribution du demi-cercle est nulle, par conséquent l'intégrale sur le contour est égale à l'intégrale sur l'axe réel  $\Im(k_0) = 0$  (à  $\vec{k}$  fixé). La valeur de cette intégrale est donnée par la somme des résidus, c'est à dire :

$$-2i\pi \left[ \frac{1}{2|\vec{k}|} e^{-i|\vec{k}|x_0} - \frac{1}{2|\vec{k}|} e^{i|\vec{k}|x_0} \right] \quad (8.36)$$

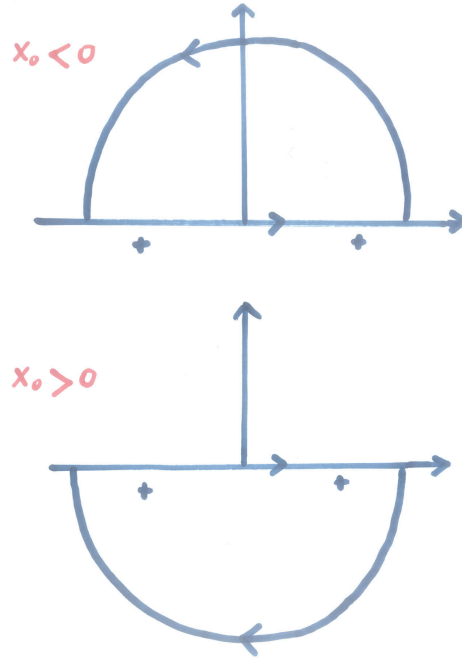


FIGURE 8.1 – Contour d'intégration

La fonction de Green s'écrit

$$G(\vec{x}, x_0) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{2|\vec{k}|} [e^{ikx_0} - e^{-ikx_0}] \quad (8.37)$$

$$= -\frac{2\pi i}{(2\pi)^3} \int k^2 dk \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{e^{ikx \cos \theta}}{2k} [e^{ikx_0} - e^{-ikx_0}] \quad (8.38)$$

$$G(x, x_0) \underset{u=\cos \theta}{=} -\frac{i}{(2\pi)^2} \int \frac{k}{2} [e^{ikx_0} - e^{-ikx_0}] \int_{-1}^1 du e^{ikxu} \quad (8.39)$$

$$= -\frac{1}{2(2\pi)^2 x} \int_0^\infty dk [e^{i|\vec{k}|x} - e^{-i|\vec{k}|x}] [e^{ikx_0} - e^{-ikx_0}] \quad (8.40)$$

$$= -\frac{1}{2(2\pi)^2 x} \int_{-\infty}^{+\infty} dk [e^{ik(x+x_0)} - e^{ik(x-x_0)}] \quad (8.41)$$

$$= -\frac{1}{2(2\pi)x} [\delta(|\vec{x}| + x_0) - \delta(|\vec{x}| - x_0)] \quad (8.42)$$

$$G(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi x} \delta(|\vec{x}| - x_0) \Theta(x_0) \text{ car } G(x, x_0) = 0 \text{ si } x_0 \leq 0 \quad (8.43)$$

$$G(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta(|\vec{x}| - ct) \Theta(t) \quad (8.44)$$

Nous avons donc réussi à construire la fonction de Green retardée, solution causale de l'équation :

$$\square G = \delta(x_0)\delta^3(\vec{r}) = \frac{1}{c}\delta(t)\delta^3(\vec{r}) \quad (8.45)$$

Dans le cas général on procède de la même façon, ce qui conduit au potentiel vecteur

$$A^\mu = \mu_0 \int \frac{\Theta(t-t')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) j^\mu(\vec{r}', t') d^3\vec{r}' dt' \quad (8.46)$$

On obtient ainsi la formule des potentiels retardés :

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \mu_0 \int \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} j^\mu\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) d^3\vec{r}' \quad (8.47)$$

### III) Potentiel de Lienard Wiechert

On se propose de calculer le potentiel créé par une charge ponctuelle  $q$  dont la trajectoire  $\vec{x}(t)$  est prescrite :

$$j^\mu(\vec{r}, t) = q\delta^3(\vec{r}-\vec{x}(t))\frac{dx^\mu}{dt} \quad (8.48)$$

La particule porte donc une densité de charge  $\rho(\vec{r}, t) = q\delta^3(\vec{r}-\vec{x}(t))$ , telle que :

$$\begin{cases} j^0 &= \rho c \\ \vec{j} &= \rho \vec{v} \end{cases} \quad (8.49)$$

En reportant cette expression dans la formule des potentiels retardés on obtient

$$A^0(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 c q}{4\pi} \int \frac{\Theta(t-t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) \delta^3(\vec{r}'-\vec{x}(t')) d^3\vec{r}' dt' \quad (8.50)$$

$$= \frac{\mu_0 c q}{4\pi} \int \frac{\Theta(t-t')}{|\vec{r}-\vec{x}(t')|} \delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}{c}\right) dt' \quad (8.51)$$

**Interprétation géométrique :** La fonction  $\delta$  exprime que le champ au point  $(\vec{r}, t)$  a été créé par un signal émis dans le passé à un instant retardé  $t_0$  obtenu en prenant l'intersection du cône de lumière passé avec la ligne d'univers de la particule. On pose comme indiqué sur la figure 8.2 :

$$\begin{cases} \vec{R} &= \vec{r}-\vec{x}(t_0) \\ \vec{n} &= \frac{\vec{R}}{R} \end{cases} \quad (8.52)$$

Pour effectuer l'intégration sur  $t'$  il est commode d'introduire :

$$g(t') = t' - t + \frac{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}{c} \quad (8.53)$$

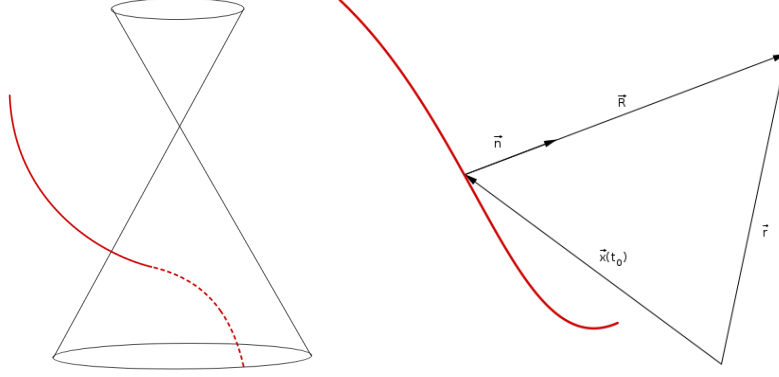


FIGURE 8.2 – Espace temps (à gauche) et Espace ordinaire (à droite)

On a alors, admettant que  $g$  n'ait qu'un seul zéro tel que  $g(t_0) = 0$  :

$$\delta(g(t')) = \frac{\delta(t' - t_0)}{|g'(t_0)|} \quad (8.54)$$

On dérive  $g$  :

$$\frac{dg}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \sqrt{(\vec{x}(t') - \vec{r})^2} \quad (8.55)$$

$$= 1 + \frac{1}{c} \frac{(\vec{x}(t') - \vec{r}) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt'}}{|\vec{x}(t') - \vec{r}|} \quad (8.56)$$

$$\left. \frac{dg}{dt'} \right|_{t'=t_0} = 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}(t_0)}{c} \quad (8.57)$$

$$(8.58)$$

En intégrant 8.51 sur  $t'$  on en déduit le potentiel scalaire, et par un raisonnement analogue le potentiel vecteur :

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{x}(t_0)|} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}(t_0)}{c})} \quad (8.59)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}(t_0)}{c})} \frac{\vec{v}(t_0)}{|\vec{r} - \vec{x}(t_0)|} \quad (8.60)$$

Ces expressions ne diffèrent des potentiels de l'électrostatique ou de la magnétostatique que par le préfacteur :

$$1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}(t_0)}{c} \quad (8.61)$$

Ce préfacteur est important dans le cas où  $\vec{v}$  et  $\vec{n}$  sont colinéaires et  $|\vec{v}| \sim c$ . Par conséquent le champ rayonné par une particule relativiste est surtout concentré vers l'avant.

Essayons de résoudre l'équation qui définit le temps retardé

$$t - t_0 - \frac{|\vec{x}(t_0) - \vec{r}|}{c} = 0 \Rightarrow t_0(t, \vec{r}) \quad (8.62)$$

En différentiant cette expression on obtient :

$$dt - dt_0 - \frac{1}{c|\vec{x}(t_0) - \vec{r}|} \left[ \frac{d\vec{x}}{dt_0} dt_0 - d\vec{r} \right] [\vec{x}(t_0) - \vec{r}] = 0 \quad (8.63)$$

$$dt - dt_0 + \frac{\vec{n}}{c} \left[ \frac{d\vec{x}}{dt_0} dt_0 - d\vec{r} \right] = 0 \quad (8.64)$$

$$dt - dt_0 \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{n} \cdot d\vec{r}}{c} = 0 \quad (8.65)$$

En écrivant :

$$dt_0 = \frac{\partial t_0}{\partial t} dt + \frac{\partial t_0}{\partial \vec{r}} d\vec{r} \quad (8.66)$$

On va pouvoir en tirer  $\frac{\partial t_0}{\partial t}$  ainsi que  $\frac{\partial t_0}{\partial \vec{r}}$  :

$$dt - \left( \frac{\partial t_0}{\partial t} dt + \frac{\partial t_0}{\partial \vec{r}} d\vec{r} \right) \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \vec{n} \cdot \frac{d\vec{r}}{c} = 0 \quad (8.67)$$

$$dt \left[ 1 - \frac{\partial t_0}{\partial t} \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) \right] - d\vec{r} \left[ \frac{\partial t_0}{\partial \vec{r}} \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) + \frac{\vec{n}}{c} \right] = 0 \quad (8.68)$$

On en déduit donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial t_0}{\partial t} &= \frac{1}{g'(t_0)} \\ \frac{\partial t_0}{\partial \vec{r}} &= -\frac{\vec{n}}{cg'(t_0)} \end{cases} \quad (8.69)$$

## IV) Calcul des champs

On écrit le champ électrique

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{r}, t) \quad (8.70)$$

On va maintenant calculer  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t_0} \frac{\partial t_0}{\partial t} = \frac{1}{g'(t_0)} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t_0} \quad (8.71)$$

Or on a :

$$\vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{g'(t_0)} \frac{\vec{v}(t_0)}{R(t_0)} \quad (8.72)$$

On ne dérive pas le terme en  $\frac{1}{R(t_0)}$ . Il donnerait en effet une contribution en  $\frac{1}{R^2}$  qui ne contribue pas au rayonnement à longue distance

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t_0} \left( \frac{\vec{v}(t_0)}{g'(t_0)} \right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}(t_0)|} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{R^2} \right) \quad (8.73)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{g'(t_0) \vec{a}(t_0) - \vec{v} g''(t_0)}{g'^3(t_0)} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}(t_0)|} \quad (8.74)$$

Considérons le potentiel scalaire :

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{g'(t_0)} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}(t_0)|} \quad (8.75)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}(t_0)}{c}\right)} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}(t_0)|} \quad (8.76)$$

Pour calculer sa dérivée spatiale il faudrait en principe prendre en compte la dépendance de  $t_0$  par rapport à  $\vec{r}$ , ainsi que les dépendances explicites de  $\vec{n}$  et  $\vec{r}$ , mais ces contributions sont sous-dominantes et on peut les négliger :

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t_0} \left[ \frac{1}{g'(t_0)} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}(t_0)|} \right] \frac{\partial t_0}{\partial \vec{r}} \quad (8.77)$$

$$\simeq -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{g''}{g'^2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}(t_0)|} \left( -\frac{\vec{n}}{c g'(t_0)} \right) \quad (8.78)$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{g''}{g'^3} \frac{\vec{n}}{R} \quad (8.79)$$

On déduit de ce qui précède l'expression du champ électrique :

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R g'^3} [c g'' \vec{n} + g' \vec{a} - g'' \vec{v}_0] \quad (8.80)$$

où  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}(t_0)$  est l'accélération de la particule à l'instant retardé.

Or on a

$$\begin{cases} g'(t_0) = 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_0}{c} \\ g''(t_0) \simeq -\frac{\vec{n} \cdot \vec{a}(t_0)}{c} \end{cases} \quad (8.81)$$

On obtient l'expression des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à longue distance

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \frac{\vec{n} \wedge \left[ \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}_0}{c} \right) \wedge \vec{a} \right]}{\left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_0}{c} \right)^3} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c} \end{cases} \quad (8.82)$$

En gardant tous les termes on montre que l'expression complète du champ  $\vec{E}$  est la suivante :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{\vec{n} - \frac{\vec{v}_0}{c}}{\gamma^2 \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_0}{c} \right)^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \frac{\vec{n} \wedge \left[ \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}_0}{c} \right) \wedge \vec{a} \right]}{\left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_0}{c} \right)^3} \quad (8.83)$$

Le premier terme est une contribution indépendante de l'accélération qui décroît en  $\frac{1}{R^2}$ , alors que le deuxième terme dépend de l'accélération et décroît en  $\frac{1}{R}$ . Seul ce terme donne une contribution au rayonnement à longue distance.

## V) Puissance rayonnée

On calcule le vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{E})}{c\mu_0} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{E}^2}{c\mu_0} \quad (8.84)$$

$$\vec{\Pi} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{1}{R^2} \vec{n} \left[ \vec{n} \wedge \left[ \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \wedge \vec{a} \right] \right]^2 \frac{1}{\left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right)^6} \quad (8.85)$$

**Formule de Larmor :** Dans la limite non relativiste on obtient :

$$\vec{\Pi} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{1}{R^2} \vec{n} [\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{a})]^2 \quad (8.86)$$

On en déduit le flux d'énergie rayonnée dans l'angle solide  $d\Omega$  :

$$\vec{\Pi} \cdot \vec{n} \cdot R^2 d\Omega = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} [\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{a})]^2 d\Omega \quad (8.87)$$

Notant  $\theta$  l'angle entre  $\vec{n}$  et  $\vec{a}$ , la puissance rayonnée par unité d'angle solide est donc :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} [\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{a})]^2 = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \quad (8.88)$$

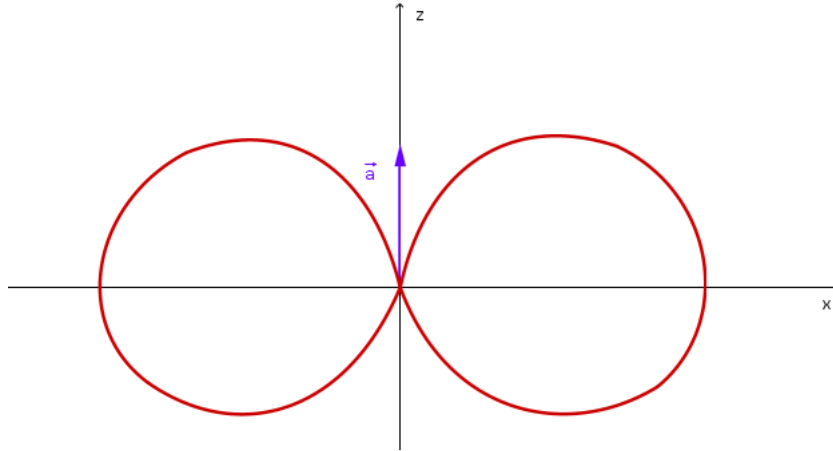


FIGURE 8.3 – Rayonnement d'une particule non relativiste accélérée

Dans le cas général, lorsque la vitesse est parallèle à l'accélération (figure 8.4) on obtient (Jackson, page 662)

$$\frac{dP}{d\Omega} \sim \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (8.89)$$



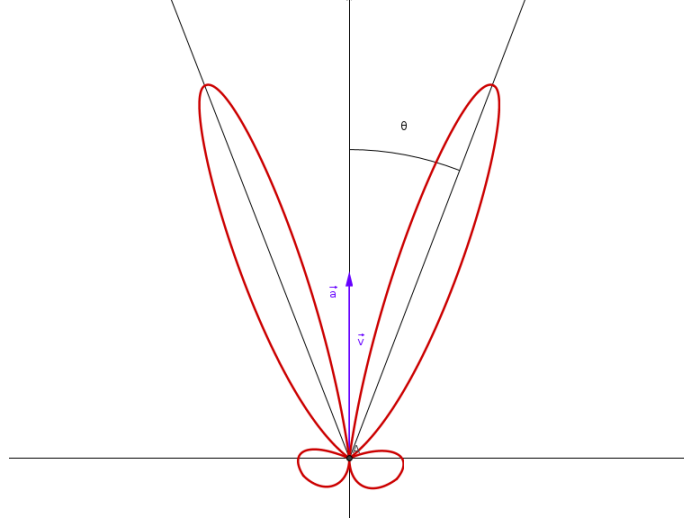


FIGURE 8.4 – Rayonnement d’une particule relativiste accélérée

Dans la limite ultrarelativiste on observe que la puissance rayonnée passe par un maximum sous l’angle  $\theta \sim \frac{1}{2\gamma}$ . Ce résultat signifie que le rayonnement est essentiellement concentré vers l’avant dans un domaine conique d’ouverture angulaire  $\theta$ .

Revenons à la formule de Larmor non relativiste :

$$\frac{dP}{d\Omega} = C \sin^2 \theta \quad (8.90)$$

Par conséquent la puissance totale rayonnée est :

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (8.91)$$

$$= C \int \sin^3 \theta d\theta d\varphi \quad (8.92)$$

$$= 4\pi C \int_0^1 (1 - x^2) dx \quad (8.93)$$

$$= \frac{8\pi C}{3} \quad (8.94)$$

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (8.95)$$

**Généralisation relativiste :** Admettons que  $P$  est un scalaire de Lorentz. Il ne peut dépendre que de l’accélération  $\frac{dp^\mu}{d\tau}$ . En postulant une expression de la forme :

$$P = k \frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} \xrightarrow{c \rightarrow \infty} -k \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 = km^2 \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)^2 = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)^2 \quad (8.96)$$

On en déduit :

$$k = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \quad (8.97)$$

Au LHC par exemple, avec  $E = 7000\text{GeV}$  et  $D = 27\text{km}$ , on obtient une perte d'énergie relative par tour :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{q^2 \beta^3}{3\epsilon_0 R m c^2} \left( \frac{E}{m c^2} \right)^3 = 4.8 \times 10^{-10} \text{ par tour} \quad (8.98)$$

## VI) Réaction de rayonnement :

La puissance totale rayonnée par une charge test accélérée est donnée par la formule de Larmor :

$$P = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)^2 \quad (8.99)$$

Nous nous proposons d'étudier qualitativement l'effet du rayonnement sur le mouvement de la charge. Considérons le mouvement d'une charge au repos pour  $t < 0$  puis uniformément accélérée pour  $t > 0$  selon la loi horaire  $x = \frac{at^2}{2}$ . Son énergie cinétique à l'instant  $t$  est

$$E_C(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ma^2t^2 \quad (8.100)$$

A comparer à l'énergie totale rayonnée entre 0 et  $t$ .

$$E_R(t) = \frac{q^2 a^2 t}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (8.101)$$

Les effets radiatifs seront donc négligeables si

$$\frac{1}{2}ma^2t^2 \gg \frac{q^2 a^2 t}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (8.102)$$

Cette expression nous invite à introduire une échelle de temps caractéristique

$$\tau_0 = \frac{q^2}{6\pi m \epsilon_0 c^3} \quad (8.103)$$

On s'attend donc à ce que les effets radiatifs puissent être négligés pour des temps  $t > \tau_0$ . Notons que

$$c\tau_0 = \frac{q^2}{6\pi m \epsilon_0 c^2} \sim r_0 \quad (8.104)$$

Où  $r_0$  est le rayon classique de l'électron défini conventionnellement en écrivant que l'énergie de masse est égale à l'énergie électrostatique d'une sphère chargée de rayon  $r_0$ .

$$\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 r_0} \sim mc^2 \Leftrightarrow r_0 \sim \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (8.105)$$

On peut décrire de façon phénoménologique l'effet du rayonnement en faisant un bilan d'énergie. Exprimons que la variation d'énergie est égale à l'énergie rayonnée

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)^2 \quad (8.106)$$

$$= -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[ \frac{d}{dt} \left( \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} \right) - \vec{v} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} \right] \quad (8.107)$$

En intégrant cette équation entre  $t_1$  et  $t_2$  on voit que le premier terme ne contribue que par un terme de bord. Ce terme est négligeable dans le cas d'un mouvement périodique ou bien dans le cas d'une collision (dans ce dernier cas les états asymptotiques sont libres). En ne retenant que le dernier terme on peut écrire

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \vec{v} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} \quad (8.108)$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (8.109)$$

On en déduit l'expression de la force de rayonnement

$$\vec{F} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} \quad (8.110)$$

Dans certains cas cette expression peut conduire à des paradoxes ou à des solutions non physiques. Par exemple l'équation du mouvement d'une particule libre chargée

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^2v}{dt^2} \quad (8.111)$$

admet des solutions exponentiellement croissantes exprimant que la particule est accélérée par son propre rayonnement, ce qui est manifestement absurde...

**Estimation semi-classique de la durée de vie d'un état de Rydberg :** On étudie le mouvement d'une particule dans un potentiel central.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} V(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} \quad (8.112)$$

La perte d'énergie par unité de temps est

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{m^2} \left( \frac{dV}{dr} \right)^2 \quad (8.113)$$

Dans le cas coulombien exprimons l'énergie d'une particule sur une orbite circulaire

$$E = \frac{m\vec{v}^2}{2} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (8.114)$$

Le rayon de l'orbite va donc décroître au cours du temps et la particule va tomber sur le centre. On peut donner une estimation de ce temps en utilisant une approche semi-classique.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{m^2} \frac{q^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} \quad (8.115)$$

On en déduit :

$$r^2 \frac{dr}{dt} = -\frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 m^2} = -3\tau_0^2 c^3 \quad (8.116)$$

Il vient

$$\frac{1}{3} [r^3(t) - r^3(0)] = -3(\tau_0 c)^3 \frac{t}{\tau_0} \quad (8.117)$$

On s'attend à ce que cette description classique se raccorde avec la physique quantique dans la limite des grands nombres quantiques,  $n \gg 1$ . En désignant par  $T$  le temps mis par la particule pour transiter de l'état  $n \rightarrow n-1$ , il vient :

$$r_n^3 - r_{n-1}^3 = -9(\tau_0 c)^3 \frac{T}{\tau_0} \quad (8.118)$$

En écrivant le rayon d'une orbite de Bohr  $r_n = n^2 a_0$ , on obtient :

$$a_0^3 n^6 - a_0^3 (n-1)^6 = 9(\tau_0 c)^3 \frac{T}{\tau_0} \quad (8.119)$$

Pour  $n$  grand il vient, en gardant le terme dominant :

$$6a_0^3 n^5 = 9(\tau_0 c)^3 \frac{T}{\tau_0} \quad (8.120)$$

On en déduit une expression approchée de la durée de vie d'une orbite de Bohr de nombre quantique principal  $n$

$$T = \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{\tau_0 c} \right)^3 n^5 \tau_0 \quad (8.121)$$

En introduisant la constante de structure fine :

$$\alpha = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \quad (8.122)$$

On obtient l'estimation suivante :

$$T = \frac{3\hbar n^5}{2\alpha^5 m c^2} \quad (8.123)$$

Remarquons que cette formule asymptotique donne le bon ordre de grandeur pour la transition de l'état  $6h$  à  $5g$  :

$$\begin{cases} T & \sim 7.2 \times 10^{-7} s \\ T_{exp} & \sim 6.1 \times 10^{-7} s \end{cases} \quad (8.124)$$

## 9 Rayonnement multipolaire

Dans ce chapitre nous étudions le rayonnement électromagnétique d'un ensemble de particules chargées. Nous montrons que seul un nombre fini de paramètres interviennent dans le problème. Ce sont les moments multipolaires du système. Commençons par rappeler leur signification dans le contexte de l'électrostatique.

### I) Développement multipolaire en électrostatique :

Le potentiel créé par une distribution de charge  $\rho(\vec{r})$  s'écrit :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (9.1)$$

Pour calculer le potentiel à longue distance il faut développer :

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = (\vec{r}^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + \vec{r}'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + \frac{\vec{r}'^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (9.2)$$

On introduit  $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$  :

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2\vec{n}\cdot\vec{r}'}{r} + \frac{\vec{r}'^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (9.3)$$

$$= \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( -\frac{2\vec{n}\vec{r}'}{r} + \frac{\vec{r}'^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left( -\frac{2\vec{n}\vec{r}'}{r} + \frac{\vec{r}'^2}{r^2} \right)^2 \right] \quad (9.4)$$

$$= \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\vec{n}\vec{r}'}{r} - \frac{\vec{r}'^2}{2r^2} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{n}\vec{r}')^2}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \right] \quad (9.5)$$

Le potentiel à longue distance prend la forme :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \underbrace{\int \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'}_Q + \frac{\vec{n}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \underbrace{\int \rho(\vec{r}') \vec{r}' d^3\vec{r}'}_{\vec{d}} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^3} \int [3(\vec{n}\cdot\vec{r}')^2 - \vec{r}'^2] \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}' \quad (9.6)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{n}\cdot\vec{d}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{n^i n^j}{8\pi\epsilon_0 r^3} \underbrace{\int \rho(\vec{r}') (3x'^i x'^j - \vec{x}'^2 \delta^{ij}) d^3\vec{r}'}_{Q^{ij}} \quad (9.7)$$

Ce développement fait apparaître trois quantités qui caractérisent la distribution de charge

La charge totale

$$Q = \int \rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}' \quad (9.8)$$

Le moment dipolaire électrique :

$$\vec{d} = \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' d^3 \vec{r}' \quad (9.9)$$

Le moment quadrupolaire :

$$Q^{ij} = \int \rho(\vec{r}) (3x^i x^j - \vec{x}^2 \delta^{ij}) d^3 \vec{x} \quad (9.10)$$

Le développement du potentiel peut ainsi s'écrire :

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{n}\vec{d}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{1}{2} \frac{n^i n^j Q_{ij}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots \quad (9.11)$$

Le moment quadrupolaire est un tenseur symétrique de rang 2. De plus, un calcul rapide montre qu'il est de trace nulle, donc il ne dépend finalement que de 5 paramètres. On constate que les différents termes du développement dépendent respectivement de 1, 3 et 5 paramètres. Comment le comprendre ? Montrons comment un développement systématique à l'ordre  $r^{-(l+1)}$  fait intervenir les  $2l + 1$  harmoniques sphériques  $Y_{lm}$ .

Considérons une distribution de charge localisée spatialement, et évaluons le potentiel en dehors de celle-ci. Le potentiel correspondant vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta\phi(\vec{r}) = 0 \quad (9.12)$$

Le Laplacien en coordonnées sphériques est :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] \quad (9.13)$$

Cherchons des solutions décroissantes de la forme :

$$\phi(r) = r^{-(l+1)} f(\theta, \varphi) \quad (9.14)$$

On obtient :

$$\phi'(r) = -(l+1)r^{-l-2} \quad (9.15)$$

$$r^2 \phi'(r) = -(l+1)r^{-l} \quad (9.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \phi') = l(l+1)r^{-(l+1)} \quad (9.17)$$

On obtient :

$$l(l+1)f + [\dots]f = 0 \quad (9.18)$$

En terme du laplacien sur la sphère  $\Delta_2$  l'équation s'écrit

$$-\Delta_2 f = l(l+1)f \quad (9.19)$$

Les fonctions propres du Laplacien sur la sphère  $S_2$  sont données par les harmoniques sphériques, par conséquent :

$$\phi_{l,m}(\vec{r}) = r^{-(l+1)} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (9.20)$$

De manière générale :

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l,m} a_{lm} r^{-(l+1)} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (9.21)$$

A un ordre donné, le développement du potentiel à longue distance est donc caractérisé par  $2l+1$  paramètres  $a_{lm}$ ,  $-l \leq m \leq l$ .

**Exemple :** La terre est un ellipsoïde aplati aux pôles qui crée à longue distance le potentiel :

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{r} + \frac{C}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (9.22)$$

La dépendance angulaire du terme quadrupolaire fait apparaître l'harmonique sphérique  $Y_{20}(\theta, \phi)$ . Ce terme affecte les trajectoires des orbites des satellites artificiels. En effet la force n'est plus centrale, donc la trajectoire n'est plus plane.

## II) Expression du potentiel à longue distance

On considère des sources localisées dans une région de dimension  $a$  autour de O. On observe le champ rayonné à longue distance (par exemple, le rayonnement d'un noyau ou d'un atome). L'expression du potentiel retardé au point M donne :

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} j^\mu \left( \vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) d^3 \vec{r}' \quad (9.23)$$

Considérons une distribution spatiale de courants quelconque avec une dépendance périodique temporelle :

$$j^\mu(\vec{r}, t) = j^\mu(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (9.24)$$

Par conséquent

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j^\mu(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-i\omega \left( t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)} d^3 \vec{r}' \quad (9.25)$$

$$= \frac{\mu_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{j^\mu(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{\frac{i\omega}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}' \quad (9.26)$$

On obtient :

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\vec{r}^2 + \vec{r}'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \quad (9.27)$$

$$= r \sqrt{1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{\vec{r}'^2}{r^2}} \quad (9.28)$$

$$= r \left[ 1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{\vec{r}'^2}{2r^2} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{2r^4} + \dots \right] \quad (9.29)$$

$$= r \left[ 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{r} + \frac{\vec{r}'^2}{2r^2} - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{r}')^2}{2r^2} + \dots \right] \quad (9.30)$$

$$= r - \vec{n} \cdot \vec{r}' + \frac{\vec{r}'^2 - (\vec{n} \cdot \vec{r}')^2}{2r} + \dots \quad (9.31)$$

Considérons le terme de phase :

$$\frac{\omega}{c} |\vec{r} - \vec{r}'| = k \left[ r - \vec{n} \cdot \vec{r}' + \frac{\vec{r}'^2 - (\vec{n} \cdot \vec{r}')^2}{2r} \right] \quad (9.32)$$

$$= kr - \underbrace{k\vec{n} \cdot \vec{r}'}_{\sim ka} + \underbrace{k \left[ \frac{\vec{r}'^2 - (\vec{n} \cdot \vec{r}')^2}{2r} \right]}_{k \frac{a^2}{r}} \quad (9.33)$$

On pourra négliger le troisième terme  $\frac{ka^2}{r} \ll 2\pi$  si  $r \gg \frac{a^2}{\lambda}$ . On obtient alors la formule suivante :

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 e^{-i\omega t + ikr}}{4\pi r} \int_{\Omega} e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{r}'} j^\mu(\vec{r}') d^3\vec{r}' \quad (9.34)$$

La dépendance radiale en  $\frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$  est celle d'une onde sphérique émergente. Toutes les complications liées aux sources sont contenues dans l'intégrale. Le développement multipolaire consiste à développer le terme exponentiel en puissance de  $k\vec{r}'$  :

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{-i\omega t + ikr} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-ik)^p}{p!} \int d^3\vec{r}' \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{r}')^p}_{a^p} j^\mu(\vec{r}') \quad (9.35)$$

Chacun des termes de la somme va être de la forme :

$$\frac{(ka)^p}{p!} J a^3 \quad (9.36)$$

Où  $J$  est un courant caractéristique. Si  $ka \ll 1$  les termes successifs du développement décroissent rapidement. Puisque  $|\vec{r}'| \sim a$  est la taille caractéristique du système, on doit avoir  $ka \ll 1$  soit  $\frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1$ . Il s'agit donc d'un développement dans le paramètre sans dimension  $\frac{a}{\lambda}$ .



### III) Approximation dipolaire électrique :

On ne retient que le terme d'ordre 0.

$$\int d^3\vec{r} \vec{j}(\vec{r}, t) \text{ avec } \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (9.37)$$

qu'on transforme par les identités suivantes :

$$\int_{\Omega} d^3\vec{r} j^i(\vec{r}, t) = \int_{\Omega} d^3\vec{r} [\partial_k [x^i j^k] - x^i \partial_k j^k] = \int_{\partial\Omega} n_k (x^i j^k) dS - \int_{\Omega} d^3\vec{r} x^i \partial_k j^k \quad (9.38)$$

On utilise la loi de conservation de la charge pour calculer le deuxième terme, et on choisit  $\partial\Omega$  de telle façon que le courant  $j^k$  s'annule au bord (les charges étant localisées cette condition est bien assurée) :

$$\int_{\Omega} d^3\vec{r} j^i(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} d^3\vec{r} x^i \rho(\vec{r}, t) = \frac{\partial d^i}{\partial t} \quad (9.39)$$

où  $\vec{d}$  est le moment dipolaire du système. Puisque nous avons supposé une dépendance harmonique :

$$\int_{\Omega} d^3\vec{r} \vec{j}(\vec{r}, t) = -i\omega \vec{d} e^{-i\omega t} \quad (9.40)$$

Par conséquent :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{-i\mu_0\omega \vec{d} e^{-i(\omega t - kr)}}{4\pi r} \quad (9.41)$$

On calcule ensuite le champ magnétique  $\vec{B}$  à longue distance :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \vec{d} \right) = \epsilon^{ijk} \partial_j \left( \frac{e^{ikr}}{r} d^k \right) \quad (9.42)$$

$$= \frac{ik}{r} \epsilon^{ijk} \frac{x_j}{r} d^k \quad (9.43)$$

$$= \frac{ik}{r} (\vec{n} \wedge \vec{d})^i \quad (9.44)$$

On en déduit :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (9.45)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\omega k}{4\pi r} e^{-i(\omega t - kr)} \vec{n} \wedge \vec{d} \quad (9.46)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\omega^2}{4\pi r c} \vec{n} \wedge \vec{d} e^{-i(\omega t - kr)} \quad (9.47)$$

Utilisons les équations de Maxwell pour calculer le champ électrique loin des sources :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (9.48)$$

$$= ik\vec{n} \wedge \vec{B} \quad (9.49)$$

$$= \frac{1}{c^2} (-i\omega) \vec{E} \quad (9.50)$$

On en déduit

$$\vec{E} = -c\vec{n} \wedge \vec{B} \quad (9.51)$$

Le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2\mu_0} \Re(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{c}{2\mu_0} \Re(\vec{B}^* \wedge (\vec{n} \wedge \vec{B})) = \frac{c}{2\mu_0} \vec{n} |\vec{B}|^2 \quad (9.52)$$

La puissance rayonnée par unité d'angle solide s'écrit :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \vec{\Pi} \cdot \vec{n} = \frac{\omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} (\vec{n} \wedge \vec{d})^2 \quad (9.53)$$

**Distribution angulaire du rayonnement :** En prenant  $\vec{d}$  selon l'axe 0z on obtient

$$(\vec{n} \wedge \vec{d})^2 = d^2 \sin^2 \theta \quad (9.54)$$

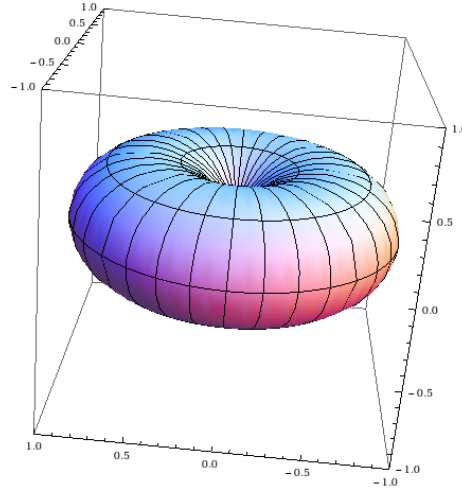


FIGURE 9.1 – Patron de rayonnement dipolaire

**Puissance totale rayonnée :**

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4 d^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \quad (9.55)$$

La puissance rayonnée dans tout l'espace est :

$$P_{de} = \frac{\omega^4 d^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \quad (9.56)$$

$$= \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^4 d^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \quad (9.57)$$

$$P_{de} = \frac{\omega^4 d^2}{12\epsilon_0 \pi c^3} \quad (9.58)$$

On vérifie que ce résultat coïncide avec celui donné par la formule de Larmor pour une charge ponctuelle en mouvement harmonique  $x = x_0 e^{i\omega t}$

$$\langle P \rangle = \frac{q^2 \langle a^2 \rangle}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{q^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \quad (9.59)$$

**Remarque sur l'absence de rayonnement dipolaire :** Dans le cas où la dépendance temporelle n'est pas harmonique, on peut reprendre le calcul, on trouve :

$$P_{de} \sim \left( \frac{d^2 \vec{d}}{dt^2} \right)^2 \quad (9.60)$$

En effet :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3 \vec{r}' \vec{j} \left( \vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) \quad (9.61)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial t} \vec{d} \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (9.62)$$

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} \wedge \vec{n} \quad (9.63)$$

La puissance est donc donnée par :

$$P = \frac{1}{6\pi \epsilon_0 c^3} \left| \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} \right|^2 \quad (9.64)$$

Un cas particulier intéressant est celui de deux charges  $e_1, m_1$  et  $e_2, m_2$  en interaction par une force centrale  $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ . Le moment dipolaire s'écrit

$$\vec{d} = e_1 \vec{r}_1 + e_2 \vec{r}_2 \quad (9.65)$$

En utilisant les équations fondamentales de la dynamique on obtient

$$\frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = -\frac{e_1}{m_1} \vec{\nabla} V + \frac{e_2}{m_2} \vec{\nabla} V = \vec{\nabla} V \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \quad (9.66)$$

On a donc :

$$P \sim \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \quad (9.67)$$

Il semblerait par conséquent qu'un système de particules identiques tel que  $\frac{e_1}{m_1} = \frac{e_2}{m_2}$ , ne rayonne pas. En réalité les termes suivants dans le développement vont contribuer au rayonnement. (voir American Journal of Physics vol 62 (1994), p 251).

## IV) Rayonnement d'une antenne :

Considérons une antenne constituée de deux branches de longueur  $\frac{l}{2}$ , alimentée par un câble coaxial en son milieu. Supposons l'intensité de la forme  $I(z) = I_0 \sin(\frac{kl}{2} - k|z|)$ . Le cas  $kl = \pi$  correspond à une antenne dite demi-onde .

On part de la formule :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{-i(\omega t - kr)} \int d^3 \vec{r} \vec{j}(\vec{r}) e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{r}} \quad (9.68)$$

avec

$$\vec{j}(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)I_0 \sin\left(\frac{kl}{2} - k|z|\right) \vec{u}_z \quad (9.69)$$

On trouve :

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz \sin\left(\frac{kl}{2} - k|z|\right) e^{-ikz \cos \theta} = \frac{2}{k} \frac{\left(\cos\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kl}{2}\right)}{\sin^2 \theta} \quad (9.70)$$

$\vec{A}$  est de la forme :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \vec{f} \quad (9.71)$$

où

$$\vec{f} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi k} \left[ \frac{\cos\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kl}{2}}{\sin^2 \theta} \right] \vec{k} \quad (9.72)$$

Les formules précédentes permettent de calculer le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{c\vec{n}}{2\mu_0} \Re \vec{B} \vec{B}^* = \frac{c\vec{n}k^2 |\vec{n} \wedge \vec{f}|^2}{2\mu_0 r^2} \quad (9.73)$$

On en déduit la puissance rayonnée :

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \vec{\Pi} \cdot \vec{n} = \frac{ck^2 |\vec{n} \wedge \vec{f}|^2}{2\mu_0} \quad (9.74)$$

On trouve donc à une constante numérique près  $K = \frac{1}{8\pi^2}$  :

$$\frac{dP}{d\Omega} = K \frac{I_0^2}{\epsilon_0 c} \left[ \frac{\cos(\frac{kl}{2} \cos \theta) - \cos \frac{kl}{2}}{\sin \theta} \right]^2 \quad (9.75)$$

Dans le cas d'une antenne courte ( $kl \ll 1$ ) on retrouve le cas du rayonnement dipolaire :

$$1 - \frac{k^2 l^2}{8} \cos^2 \theta - \left( 1 - \frac{k^2 l^2}{8} \right) = \frac{k^2 l^2}{8} \sin^2 \theta \quad (9.76)$$

On obtient :

$$\frac{dP}{d\Omega} = K \frac{I_0^2}{\epsilon_0 c} k^4 l^4 \sin^2 \theta \quad (9.77)$$

Ainsi :

- $kl \ll 1$ , alors  $\frac{dP}{d\Omega} \sim \sin^2 \theta$
- $kl = \pi$ ,  $l = \frac{\lambda}{2}$ , antenne demi-onde. Alors  $\frac{dP}{d\Omega} \sim \frac{I_0^2}{\epsilon_0 c} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$
- $kl = 2\pi$ ,  $l = \lambda$ .  $\frac{dP}{d\Omega} \sim \frac{I_0^2}{\epsilon_0 c} \frac{\cos^4(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$

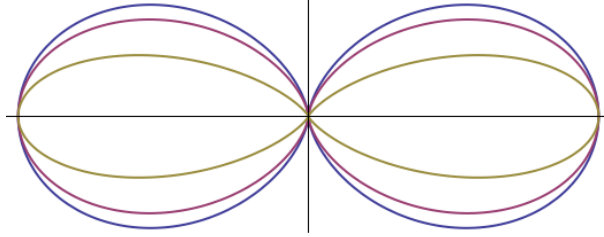


FIGURE 9.2 – Rayonnement encore plus directionnel

Le rayonnement est de plus en plus directionnel lorsque la longueur d'onde diminue.

## V) Dipôle magnétique et quadrupole électrique :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} (-ik) \int \vec{j}(\vec{r}') (\vec{n} \cdot \vec{r}') d^3 \vec{r}' e^{i(kr - \omega t)} \quad (9.78)$$

Pour transformer l'intégrant, on part de l'identité :

$$\vec{n} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{j}) = \vec{r}(\vec{n} \cdot \vec{j}) - \vec{j}(\vec{n} \cdot \vec{r}) \quad (9.79)$$

Il vient :

$$\int \vec{j}(\vec{r})(\vec{n}\vec{r})d^3\vec{r} = \frac{1}{2} \int \vec{j}(\vec{n}\vec{r})d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \int \vec{j}(\vec{n}\vec{r})d^3\vec{r} \quad (9.80)$$

$$\int d^3\vec{r} j^i(\vec{n}\vec{r}) = \int \left[ \underbrace{\frac{1}{2}\vec{j}(\vec{n}\vec{r}) + \frac{1}{2}\vec{r}(\vec{n}\vec{j})}_{J^i} - \underbrace{\frac{1}{2}\vec{n} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{j})}_{R^i} \right] d^3\vec{r} = J^i + R^i \quad (9.81)$$

On calcule  $J^i$  :

$$J^i = \frac{1}{2} \int [j^i(n^j x^j) + x^i(n^j j^j)] d^3\vec{r} = \frac{1}{2} n^j \int [j^i x^j + j^j x^i] d^3\vec{r} \quad (9.82)$$

Pour construire ce terme on considère le terme de surface :

$$\int_{\Omega} \partial_k [x^i x^j j^k] d^3\vec{r} = \int_{\Omega} [\delta^i_k x^j j^k + x^i \delta^j_k j^k + x^i x^j \partial_k j^k] d^3\vec{r} \quad (9.83)$$

$$0 = \int [x^j j^i + x^i j^j - x^i x^j \frac{\partial \rho}{\partial t}] d^3\vec{r} \quad (9.84)$$

On a donc :

$$\int [x^j j^i + x^i j^j] d^3\vec{r} = \int x^i x^j \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int x^i x^j \rho(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \quad (9.85)$$

Définissons le moment magnétique :

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \int (\vec{r} \wedge \vec{j}) d^3\vec{r} \quad (9.86)$$

Le potentiel vecteur s'écrit :

$$A^i(\vec{r}, t) = -\frac{\omega^2}{8\pi r \epsilon_0 c^3} e^{i(kr - \omega t)} n^j \int x^i x^j \rho(\vec{x}) d^3\vec{r} + \frac{ik\mu_0}{4\pi r} (\vec{n} \wedge \vec{M})^i e^{i(kr - \omega t)} \quad (9.87)$$

Il est de la forme :

$$A^i(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} e^{ikr} n^j \Lambda^{ij} \quad (9.88)$$

On calcule ensuite  $\vec{B}$  :

$$B^i = (\vec{\text{rot}} \vec{A})^i \quad (9.89)$$

$$= \epsilon^{ijk} \partial_j A^k \quad (9.90)$$

$$= \epsilon^{ijk} \partial_j \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \Lambda^{kl} n^l \quad (9.91)$$

$$= \frac{ik}{r} \underbrace{\epsilon^{ijk} n^j \Lambda^{kl} n^l}_{(1)} e^{ikr} \quad (9.92)$$

On développe (1) :

$$(1) = \epsilon^{ijk} n^j n^l \int x^k x^l \rho(\vec{x}) d^3 \vec{r} \quad (9.93)$$

$$= \epsilon^{ijk} n^j n^l \int (x^k x^l - \frac{1}{3} \delta^{kl}) \rho(\vec{x}) d^3 \vec{r} \quad (9.94)$$

Le champ magnétique s'écrit donc :

$$\vec{B} = \frac{-i\omega^3 e^{i(kr-\omega t)}}{24\pi\epsilon_0 c^4} \frac{1}{r} \vec{n} \wedge Q\vec{n} - \frac{\omega^2}{4\pi r \epsilon_0 c^4} e^{i(kr-\omega t)} \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{M}) \quad (9.95)$$

La contribution dipolaire magnétique à la puissance rayonnée par unité d'angle solide est :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^5} |\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{M})|^2 \quad (9.96)$$

La contribution quadrupolaire électrique à la puissance rayonnée par unité d'angle solide est :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^6}{1152\pi^2 c^5 \epsilon_0} |\vec{n} \wedge Q\vec{n}|^2 \quad (9.97)$$

## Puissance totale rayonnée :

### 1 - Cas dipolaire magnétique :

$$[\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{M})]^2 = [\vec{n}(\vec{M} \cdot \vec{n}) - \vec{M}]^2 \quad (9.98)$$

$$= (\vec{M} \cdot \vec{n})^2 - 2(\vec{n} \cdot \vec{M})^2 + \vec{M}^2 \quad (9.99)$$

$$= \vec{M}^2 - (\vec{M} \cdot \vec{n})^2 \quad (9.100)$$

$$= M^2 - M^2 \cos^2 \theta = M^2 \sin^2 \theta \quad (9.101)$$

On en déduit :

$$P_{dm} = \frac{2\pi\omega^4 M^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^5} \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{M^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^5} \quad (9.102)$$

### 2 - Cas quadrupolaire électrique :

$$Q^{ij} = \int (3x^i x^j - \delta^{ij} \vec{x}^2) \rho(\vec{x}) d^3 \vec{x} \quad (9.103)$$

Q est un tenseur symétrique de trace nulle. Calculons la puissance rayonnée :

$$\vec{n} \wedge Q\vec{n} = \epsilon_{ijk} n_j Q_{kl} n_l \quad (9.104)$$

Par conséquent :

$$[\vec{n} \wedge Q\vec{n}]^2 = \epsilon_{ijk} n_j Q_{kl} n_l \epsilon_{i\rho\tau} n_\rho Q_{\tau\sigma} n_\sigma \quad (9.105)$$

$$= (\delta_{j\rho} \delta_{k\tau} - \delta_{j\tau} \delta_{k\rho}) n_j n_\rho n_l n_\sigma Q_{kl} Q_{\tau\sigma} \quad (9.106)$$

$$= n_l n_\sigma Q_{kl} Q_{k\sigma} - n_j n_k n_l n_\sigma Q_{kl} Q_{j\sigma} \quad (9.107)$$

L'invariance par rotation donne

$$\int n_l n_\sigma d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{l\sigma} \quad (9.108)$$

$$\int n_j n_k n_l n_\sigma d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{jk} \delta_{l\sigma} + \delta_{j\sigma} \delta_{kl} + \delta_{jl} \delta_{k\sigma}) \quad (9.109)$$

Il vient en utilisant  $\text{tr } Q = 0$  :

$$\int [\vec{n} \wedge Q\vec{n}]^2 d\Omega = \frac{4\pi}{3} Q_{kl} Q_{kl} - \frac{4\pi}{15} [2Q_{kl} Q_{kl}] \quad (9.110)$$

$$= \frac{4\pi}{5} Q_{kl} Q_{kl} \quad (9.111)$$

$$= \frac{4\pi}{5} \text{tr}(Q^2) \quad (9.112)$$

On en déduit donc :

$$P_{qe} = \frac{\omega^6}{1440\pi\epsilon_0 c^5} \text{tr}(Q^2) \quad (9.113)$$

## VI) Ordres de grandeur :

1 - Dipolaire électrique et magnétique :

$$\frac{P_{de}}{P_{dm}} = \frac{d^2 c^2}{M^2} \sim \left(\frac{c}{v}\right)^2 \gg 1 \quad (9.114)$$

2 - Quadrupolaire électrique et dipolaire magnétique :

$$\frac{P_{qe}}{P_{dm}} \sim \frac{\omega^6 \text{tr } Q^2 c^5}{c^5 M^2 \omega^4} \quad (9.115)$$

$$= \frac{\omega^2 \text{tr } Q^2}{M^2} \quad (9.116)$$

$$= \frac{\omega^2 q^2 a^4}{(qav)^2} \quad (9.117)$$

$$= \frac{k^2 c^2 a^2}{v^2} \quad (9.118)$$

$$= (ka)^2 \left(\frac{c}{v}\right)^2 \quad (9.119)$$



**3 -** Quadrupolaire électrique et dipolaire électrique :

$$\frac{P_{qe}}{P_{de}} = \frac{c^3 \omega^6 Q^2}{\omega^4 d^2 c^5} \quad (9.120)$$

$$= \frac{\omega^2 Q^2}{c^2 d^2} \quad (9.121)$$

$$= \frac{\omega^2 q^2 a^4}{c^2 q^2 a^2} \quad (9.122)$$

$$= \frac{\omega^2 a^2}{c^2} \quad (9.123)$$

$$= (ka)^2 \sim \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \ll 1 \quad (9.124)$$

**Formule du rayonnement gravitationnel en RG :**

$$P = \frac{G}{45c^5} \text{tr} \left[ \left( \frac{d^3 Q}{dt^3} \right)^2 \right] \quad (9.125)$$

Elle exprime la puissance totale rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles et intervient notamment pour décrire le rayonnement de pulsars. La variation de la période orbitale de pulsars binaires peut être mesurée indirectement grâce à la mesure de la période d'émission des ondes électromagnétiques.

# 10 Diffusion de la lumière

La diffusion des ondes électromagnétiques par la matière donne lieu à une physique très riche qui dépend fortement des énergies mises en jeu. Pour se faire une idée des différents régimes, nous pouvons comparer l'énergie des photons incidents à l'énergie d'ionisation des atomes.

- $\hbar\omega < E_I \rightarrow$  diffusion Rayleigh,  $\approx$  eV, visible.
- $\hbar\omega > E_I \rightarrow$  effet photoélectrique,  $\approx$  keV, rayons X.
- $\hbar\omega \gg E_I \rightarrow$  diffusion Thompson.
- $\hbar\omega \approx mc^2 \rightarrow$  effet Compton,  $\approx$  MeV.

Dans ce qui suit nous allons nous concentrer sur le phénomène de diffusion. Nous commençons par décrire de façon phénoménologique le rayonnement d'un atome excité par une onde électromagnétique. Ensuite nous étudions la diffusion de la lumière par un ensemble d'atomes, un cristal puis un milieu désordonné.

## I) Modèle de l'électron élastiquement lié

On considère un modèle d'atome dans lequel chaque électron est lié à l'atome par une force de rappel linéaire. Il y a donc une fréquence propre d'oscillation  $\omega_0$  telle que :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (10.1)$$

On ajoute à la contribution élastique un terme supplémentaire modélisant la réaction de rayonnement :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x + \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^3x}{dt^3} \quad (10.2)$$

Cherchons les modes propres en  $e^{-i\omega t}$  :

$$-m\omega^2 = -m\omega_0^2 + \frac{iq^2\omega^3}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (10.3)$$

On peut traiter le terme complexe comme une perturbation en posant :

$$\omega = \omega_0(1 + x) \quad (10.4)$$

Il vient alors :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{iq^2\omega^3}{6\pi m\epsilon_0 c^3} \quad (10.5)$$

Donc

$$2\omega_0^2 x = -\frac{iq^2\omega_0^3}{6\pi m\epsilon_0 c^3} \quad (10.6)$$

Par conséquent, on a :

$$\omega = \omega_0 - \frac{i\gamma}{2} \quad (10.7)$$

Avec :

$$\gamma = \frac{q^2\omega_0^2}{6\pi m\epsilon_0 c^3} \quad (10.8)$$

Ainsi l'amplitude du mouvement décroît en  $e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ , par conséquent l'énergie décroît en  $e^{-\gamma t}$ . L'amplitude du mouvement est donc amortie au bout d'un temps caractéristique :

$$T = \frac{6\pi m\epsilon_0 c^3}{q^2\omega_0^2} \quad (10.9)$$

On vérifie que  $\omega_0 T = \frac{1}{2|x|}$ . Le paramètre sans dimension  $x$  est tel que :

$$|x| = \frac{\gamma}{2\omega_0} \quad (10.10)$$

Estimation de  $|x|$  : Admettons que l'on puisse identifier  $\omega_0$  à la pulsation atomique. Nous pouvons calculer  $\omega_0$  dans le modèle de Bohr :

$$\begin{cases} \frac{mv^2}{r} &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ mvr &= n\hbar \end{cases} \quad (10.11)$$

On obtient :

$$r = \frac{n^2\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{mq^2} \text{ et } v = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar} \quad (10.12)$$

On a par conséquent :

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{mc^2}{\hbar n^3} \left( \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^2 \quad (10.13)$$

La pulsation atomique fondamentale  $\omega_0$  peut donc être définie par :

$$\omega_0 = \frac{mc^2}{\hbar} \alpha^2 \quad (10.14)$$

En reportant dans l'expression de  $|x|$  on obtient :

$$|x| = \frac{q^2}{12\pi m\epsilon_0 c^3} \frac{mc^2}{\hbar} \alpha^2 = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 \hbar c} \alpha^2 = \frac{\alpha^3}{3} \ll 1 \quad (10.15)$$

Ce résultat justifie a posteriori le calcul perturbatif.

Dans la suite nous utiliserons une variante de ce modèle dans laquelle le terme d'amortissement est linéaire dans la vitesse :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = 0 \quad (10.16)$$

Les fréquences propres vérifient

$$-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2 = 0 \quad (10.17)$$

Soit

$$\omega = \frac{-i\gamma + \sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}}{2} \simeq \omega_0 - \frac{i\gamma}{2} \quad (10.18)$$

Nous pouvons donc reprendre l'expression précédente :

$$\gamma = \frac{q^2\omega_0^2}{6\pi m\epsilon_0 c^3} \quad (10.19)$$

## II) Diffusion Thompson et Rayleigh

Nous considérons le rayonnement d'un électron élastiquement lié excité par une onde plane monochromatique. Nous supposons que la longueur d'onde est beaucoup plus grande que la taille de l'atome. Sous l'influence de l'onde incidente l'atome acquiert un dipôle induit qui rayonne. L'équation du mouvement est la suivante :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{qE_0}{m} \vec{k} e^{-i\omega t} \quad (10.20)$$

D'où

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t} = \frac{qE_0}{m} \frac{\vec{k} e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \quad (10.21)$$

Le moment dipolaire induit s'écrit :

$$\vec{d}_0 = q\vec{r}_0 = \frac{q^2 E_0}{m} \frac{\vec{k}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} = \epsilon_0 \alpha_C E_0 \vec{k} \quad (10.22)$$

où  $\alpha_C(E)$  définit la polarisabilité classique de l'atome à la fréquence  $\omega$  (dimension  $L^3$ ). La puissance rayonnée par ce dipôle, donnée par la formule de Larmor, peut donc s'écrire :

$$P = \frac{\omega^4 d_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{\omega^4 \epsilon_0 |\alpha_C|^2 E_0^2}{12\pi c^3} \quad (10.23)$$

On se propose de calculer la section efficace de rayonnement  $\sigma = \frac{P}{\phi}$  où  $\phi$  est le flux d'énergie incident. Ecrivons le vecteur de Poynting et le flux d'énergie de l'onde incidente :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2\mu_0} \Re \vec{E} \wedge \vec{B}^* = \frac{1}{2\mu_0} \Re \vec{E} \wedge \left( \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}^*}{c} \right) = \frac{\vec{n} E_0^2}{2\mu_0 c} \quad (10.24)$$

$$\phi = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \quad (10.25)$$

On en déduit :

$$\sigma = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{\omega}{c} \right)^4 |\alpha_C|^2 \quad (10.26)$$

$$= \frac{1}{6\pi c^4} \frac{q^4}{m^2 \epsilon_0^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \quad (10.27)$$

Rappelons l'expression du rayon classique de l'électron :

$$mc^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_e} \Rightarrow r_e = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sim 3 \times 10^{-15} m \quad (10.28)$$

La section efficace de rayonnement s'écrit :

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \quad (10.29)$$

Discussion des différents régimes de diffusion :

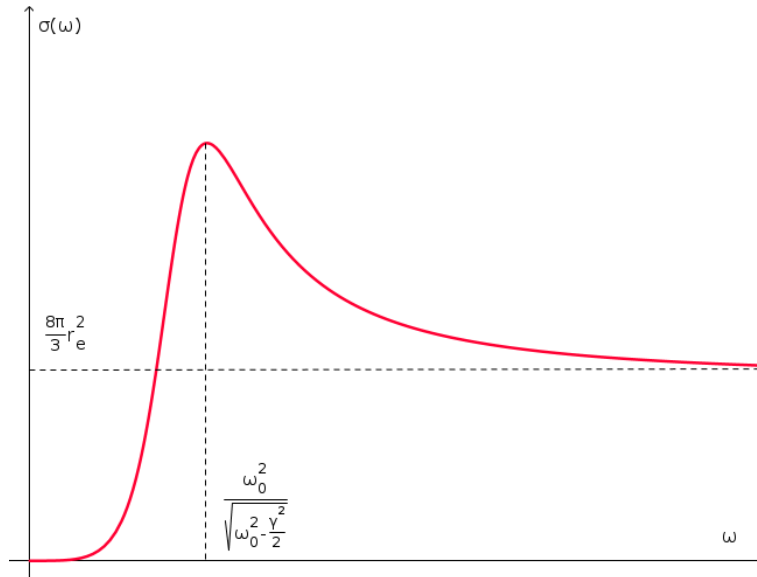


FIGURE 10.1 – Section efficace de rayonnement en fonction de la pulsation

1. **Diffusion Rayleigh** : elle correspond à la diffusion à basse fréquence,  $\omega \ll \omega_0$ . Par exemple dans le cas de la diffusion de la lumière visible dans l'air on sait que les molécules de l'atmosphère ont des bandes d'absorption dans l'ultraviolet. On a donc :

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad (10.30)$$

La dépendance en  $\omega^4$  ou encore  $\frac{1}{\lambda^4}$  implique que les petites longueurs d'onde (par exemple le bleu) sont plus diffusées que les grandes (par exemple le rouge).

2. **Diffusion Thompson** : Il s'agit cette fois de la diffusion à haute fréquence ( $\omega \gg \omega_0$ ), ce qui revient en fait à considérer des électrons libres :

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.6 \times 10^{-24} \text{cm}^2 \quad (10.31)$$

On peut retrouver ce résultat par un calcul d'électrodynamique quantique de la diffusion  $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$

3. **Diffusion résonante** : La section efficace totale augmente de façon considérable lorsque la fréquence de l'onde incidente s'approche de la fréquence de résonance. Au niveau du pic de section efficace de rayonnement :

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left( \frac{\omega_0}{\gamma} \right)^2 \quad (10.32)$$

Le calcul précédent donne :

$$\frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{\omega_0}{q^2 \omega_0^2} 6\pi m \epsilon_0 c^3 = \frac{6\pi m \epsilon_0 c^3}{q^2 \omega_0} \quad (10.33)$$

Par conséquent :

$$r_e \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m c^2} \frac{6\pi m \epsilon_0 c^3}{q^2 \omega_0} = \frac{3c}{2\omega_0} = \frac{3}{4\pi} \lambda_0 \quad (10.34)$$

On a donc :

$$\sigma = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \quad (10.35)$$

La section efficace de diffusion résonante est de l'ordre du carré de la longueur d'onde.

Remarque : le calcul quantique du moment dipolaire induit d'un atome excité par une onde plane non résonante donne un résultat analogue à la formule classique.

$$d_0 = \frac{2q^2}{\hbar} E_0 \sum_n \frac{\omega_{n0} |\langle \phi_n | x | \phi_0 \rangle|^2}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \quad (10.36)$$

où  $\omega_{n0} = \omega_n - \omega_0$  (voir Cohen p1307).

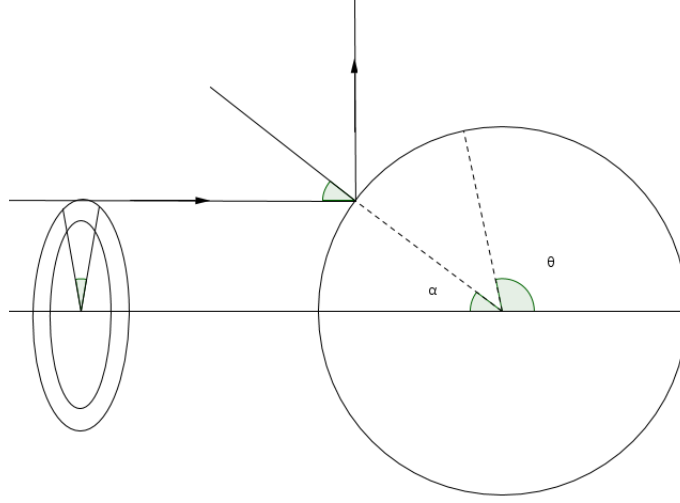


FIGURE 10.2 – Diffusion élastique par une sphère

**Rappel : Diffusion élastique par une sphère :** Les particules diffusées par la sphère sous  $d\Omega$  sont celles qui traversent l'élément de surface  $b db d\varphi$  avec :

$$b = R \sin \alpha = R \sin \left( \frac{\pi - \theta}{2} \right) = R \cos \frac{\theta}{2} \quad (10.37)$$

D'où :

$$|b db d\varphi| = \frac{1}{2} R^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta d\varphi \quad (10.38)$$

$$d\sigma = \frac{R^2}{4} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (10.39)$$

Le nombre de particules diffusées par unité de temps est :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{R^2}{4} d\Omega \Phi \quad (10.40)$$

où  $\Phi$  est le nombre de particules incidentes par unité de temps et de surface. On en déduit :

$$\frac{1}{\Phi} \frac{dN}{dt d\Omega} = \frac{R^2}{4} \quad (10.41)$$

Par conséquent :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\Phi} \frac{dN}{dt d\Omega} = \frac{R^2}{4} \Rightarrow \sigma = \frac{R^2}{4} 4\pi = \pi R^2 \quad (10.42)$$

### III) Notion de facteur de forme

On considère cette fois-ci non plus un seul atome diffuseur, mais une assemblée de  $N$  atomes ou molécules. Nous aimerions comprendre ce qui distingue la diffusion de la lumière

par un cristal de celle de la diffusion par l'atmosphère terrestre. Nous montrons qu'il y a deux comportements de diffusion très différents :

- $\sigma^T = N\sigma_0$  : diffusion incohérente
- $\sigma^T = N^2\sigma_0$  : diffusion cohérente

Le champ rayonné par un dipôle s'écrit :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\omega^2}{4\pi cr} e^{-i(\omega t - kr)} \vec{n} \wedge \vec{d}_0 \quad (10.43)$$

$$\vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{n} \quad (10.44)$$

le dipôle induit  $\vec{d}_0$  dépend du champ électrique de l'onde incidente. Pour calculer le champ résultant il faudrait donc en principe sommer les contributions venant de chaque centre diffuseur. Considérons pour simplifier la discussion le cas d'une onde scalaire. L'onde incidente s'écrit

$$\varphi_i(\vec{r}, t) = \varphi_0 e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (10.45)$$

Chaque centre diffuseur  $\vec{r}_i$  va créer une onde sphérique. Au point  $\vec{R}$  on observe une onde sphérique émergente de la forme :

$$\varphi_e(\vec{R}, t) = a_i \frac{e^{ik|\vec{R} - \vec{r}_i|}}{|\vec{R} - \vec{r}_i|} \quad (10.46)$$

L'amplitude de l'onde diffusée dépend linéairement de celle de l'onde incidente. On pose

$$a_i = \alpha_i \varphi_0 e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_i - \omega t)} \quad (10.47)$$

par conséquent le champ résultant au point  $\vec{R}$  est :

$$\varphi(\vec{R}, t) = \varphi_0 \sum_{i=1}^N \alpha_i e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_i - \omega t)} \frac{e^{ik|\vec{R} - \vec{r}_i|}}{|\vec{R} - \vec{r}_i|} \quad (10.48)$$

Écrivons maintenant :

$$|\vec{R} - \vec{r}_i| = \sqrt{(\vec{R}^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{r}_i + \vec{r}_i^2)} \quad (10.49)$$

$$= R \left( 1 - \frac{2\vec{R} \cdot \vec{r}_i}{R^2} + \frac{\vec{r}_i^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10.50)$$

$$= R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}_i}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) \quad (10.51)$$

$$= R - \vec{n} \cdot \vec{r}_i + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) \quad (10.52)$$



L'onde diffusée résultante s'écrit

$$\varphi(\vec{R}, t) = \frac{\varphi_0}{R} \sum_{i=1}^N \alpha_i e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_i - \omega t) + ikR - ik\vec{n} \cdot \vec{r}_i} \quad (10.53)$$

$$= \frac{\varphi_0}{R} e^{i(kR - \omega t)} \sum_i \alpha_i e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{r}_i + i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_i} \quad (10.54)$$

On remarque que  $\vec{k} = k_0 \vec{n}$  représente le vecteur d'onde diffusée, et  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0$  le transfert de vecteur d'onde.

**Notion de facteur de forme :**

$$\varphi(\vec{R}, t) = \varphi_0 \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \underbrace{\sum_{i=1}^N \alpha_i e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i}}_{F(\vec{q})} \quad (10.55)$$

La quantité  $F(\vec{q})$ , appelée facteur de forme, ne dépend que du milieu diffuseur, et pas de l'onde incidente.

Dans le cas qui nous intéresse, celui de la diffusion d'une onde électromagnétique,  $\alpha_i$  est la polarisabilité de l'atome  $i$ . Nous verrons plus loin qu'elle est reliée à l'indice du milieu. Supposons pour simplifier la discussion que toutes les particules soient identiques et de même polarisabilité  $\alpha$ . La section efficace de rayonnement pour  $N$  atomes sera donnée par :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 |F(\vec{q})|^2 \quad (10.56)$$

Or :

$$|F(\vec{q})|^2 = |\alpha|^2 \sum_{i,j=1}^N e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i + i\vec{q} \cdot \vec{r}_j} \quad (10.57)$$

Dans le cas d'une diffusion vers l'avant, c'est à dire  $\vec{q} = 0$ , on a :

$$\sum_{i,j=1}^N e^{-i\vec{q}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)} = N^2 \quad (10.58)$$

On obtient donc une diffusion cohérente :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = N^2 \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \quad (10.59)$$

En revanche si  $\vec{q} \neq 0$ , seuls les termes tels que  $\vec{r}_i - \vec{r}_j = 0$ , c'est à dire  $i = j$  vont contribuer. Les autres vont se moyennner et ne contribuent pas à la somme. Sachant qu'il y a  $N$  termes tels que  $i = j$ , on obtient une diffusion incohérente :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = N \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \quad (10.60)$$

**Calcul plus précis :** On transforme le facteur de forme

$$F(\vec{q}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \quad (10.61)$$

en faisant apparaitre une quantité macroscopique qui est l'indice du milieu.

**Rappel :** Électromagnétisme dans la matière :

$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  reste valable mais  $\rho$  doit inclure les charges extérieures et les charges de polarisation créées par les dipôles induits.

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_{ext} + \rho_p) \quad (10.62)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_{ext} - \text{div } \vec{P}) \quad (10.63)$$

$$\text{div } (\underbrace{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}}) = \rho_{ext} \text{ avec } \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (10.64)$$

On a :

$$\vec{P} = N\vec{p} = N\epsilon_0\alpha\vec{E} \quad (10.65)$$

On en déduit :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} (1 + N\alpha) = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \Rightarrow \epsilon_r = 1 + N\alpha \quad (10.66)$$

On en déduit l'indice optique :

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \simeq 1 + \frac{N\alpha}{2} = 1 + \frac{1}{2} \sum \alpha_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (10.67)$$

Le facteur de forme peut donc s'exprimer en terme de l'indice local du milieu :

$$F(\vec{q}) = 2 \int [n(\vec{r}) - 1] e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \quad (10.68)$$

La section efficace du rayonnement :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim Cste \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \left| \int \underbrace{[n(\vec{r}) - 1]}_{\delta n(\vec{r})} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \right|^2 \quad (10.69)$$

Le terme en module carré vaut :

$$\int \delta n(\vec{r}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \int \delta n(\vec{r}') e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'} d^3\vec{r}' = \int \delta n(\vec{r}) \delta n(\vec{r} - \vec{s}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{s}} d^3\vec{r} d^3\vec{s} \quad (10.70)$$

On définit la fonction d'autocorrélation spatiale :

$$\Gamma(\vec{s}) = \int d^3\vec{r} \delta n(\vec{r}) \delta n(\vec{r} - \vec{s}) \quad (10.71)$$

Alors on a :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \hat{\Gamma}(\vec{q}) \quad (10.72)$$

où  $\hat{\Gamma}(\vec{q})$  est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation

$$\hat{\Gamma}(\vec{q}) = \int d^3\vec{s} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{s}} \Gamma(\vec{s}) \quad (10.73)$$

Dans un milieu homogène,  $\Gamma(\vec{s})$  est indépendant de  $\vec{s}$ , on va donc obtenir une section efficace proportionnelle à  $\delta^3(\vec{q})$ . On s'attend donc à observer un renforcement de la diffusion vers l'avant.

**Diffusion par un cristal :** Un exemple classique est celui de la diffusion de Bragg de rayons X utilisée notamment pour déterminer les structures cristallines. Considérons pour simplifier un cristal cubique de maille  $a$ . On numérote les atomes par trois entiers  $(n, m, p)$  tels que

$$\vec{r}_{nmp} = a(n\vec{i} + m\vec{j} + p\vec{k}) \quad (10.74)$$

On en déduit le facteur de forme :

$$F(\vec{q}) = \sum_{n,m,p} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_{nmp}} \quad (10.75)$$

$$= \sum e^{-ia\vec{q}\cdot(n\vec{i}+m\vec{j}+p\vec{k})} \quad (10.76)$$

$$= \sum_{n=1}^{N_x} e^{-iq_n a} \sum_{m=1}^{N_y} e^{-iamq_y} \sum_{p=1}^{N_z} e^{-iapq_z} \quad (10.77)$$

Ainsi, à une phase près, on obtient :

$$F(\vec{q}) = \frac{\sin\left(N_x \frac{aq_x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{aq_x}{2}\right)} \frac{\sin\left(N_y \frac{aq_y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{aq_y}{2}\right)} \frac{\sin\left(N_z \frac{aq_z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{aq_z}{2}\right)} \quad (10.78)$$

Le cas d'intensité maximale correspond à :  $q_x = \frac{2\pi}{a}p_x$ ,  $q_y = \frac{2\pi}{a}p_y$  et  $q_z = \frac{2\pi}{a}p_z$  où  $(p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{Z}^3$ . On a alors :

$$F(\vec{q}) = N_x N_y N_z \quad (10.79)$$

Ainsi on a une diffusion cohérente. Pour que ceci soit possible, il faut que  $|\vec{q}| > \frac{2\pi}{a}$ . Or on a  $|\vec{q}| = 2k \sin \frac{\theta}{2}$ . Pour observer une diffusion cohérente il faut donc satisfaire

$$a > a \sin \frac{\theta}{2} > \frac{\lambda}{2} \quad (10.80)$$

Pour  $\lambda > 2a$ , il ne va rester que la diffusion vers l'avant. On peut retrouver ce résultat par un argument élémentaire. On considère deux rayons parallèles frappant deux atomes situés sur une même droite perpendiculaire aux plans atomiques.

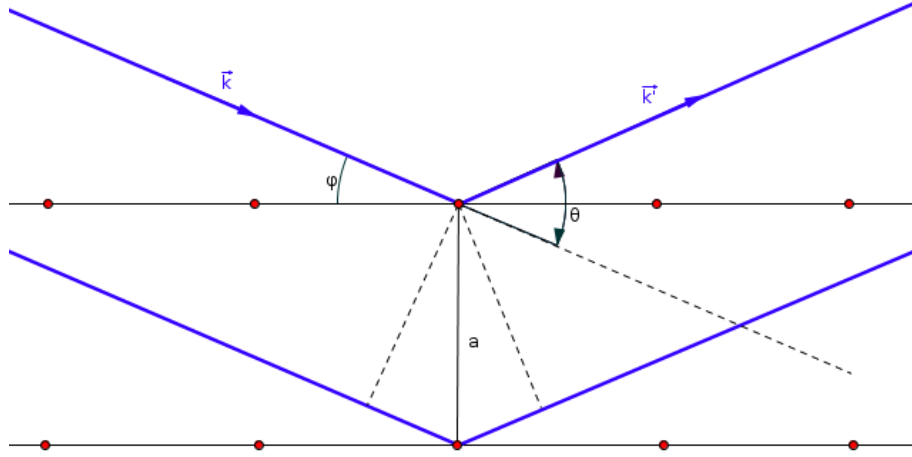


FIGURE 10.3 – Diffusion vers l'avant dans un cristal

La différence de marche est :

$$\delta = 2a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2a \sin \varphi = 2a \sin \frac{\theta}{2} \quad (10.81)$$

Si cette distance est un multiple entier de  $\lambda$ , il y aura une interférence constructive. Ce qui donne :

$$2k \sin \frac{\theta}{2} = n \frac{2\pi}{a} \quad (10.82)$$

Cela correspond au cas où le vecteur du réseau réciproque est dirigé selon un des axes principaux.

**Généralisation :** Pour un réseau quelconque de maille élémentaire définie par les vecteurs de base  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$ , la condition de Bragg donne :

$$\vec{q} \cdot \vec{e}_1 = 2\pi n \quad \vec{q} \cdot \vec{e}_2 = 2\pi m \quad \vec{q} \cdot \vec{e}_3 = 2\pi p \quad (10.83)$$

Il faut ensuite définir le réseau réciproque (voir Matière condensée) puis effectuer le même raisonnement que précédemment.

### Applications :

1. Découverte de la structure en double hélice de l'ADN par Crick et Watson. Expériences de Rosalind Franklin de diffraction de rayons X sur des cristaux d'ADN. Les techniques de diffraction par rayons X sont toujours utilisées pour l'étude de la structure des protéines (par exemple l'hémoglobine).

2. Étude des groupes de symétrie des cristaux. 230 types de groupes spatiaux donnant lieu à des figures de diffraction discrètes. Pendant très longtemps on pensait qu'une telle structure était nécessairement associée à une structure cristalline périodique. Shechtman découvre en 1982 des quasi-cristaux, matériaux non périodiques formant des pics de Bragg.

**Diffusion Brillouin :** diffusion de la lumière par une onde acoustique.

La réflexion d'un rayon lumineux sur une onde acoustique s'accompagne d'un changement de fréquence  $\Delta\omega = \omega_{sonore}$ .

## IV) Diffusion par un milieu désordonné spatialement

Considérons la diffusion causée par des fluctuations de densité dans un gaz ou dans un liquide (par exemple au voisinage d'une transition de phase). Exprimons l'indice local en fonction de la densité de particules.

$$\delta n(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum \alpha_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = \frac{\alpha}{2} \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = \frac{\alpha}{2} \rho(\vec{r}) \quad (10.84)$$

Vérifions que  $\rho(\vec{r})$  est effectivement une densité de particules :

$$\int \rho(\vec{r}) d\vec{r} = \int d\vec{r} \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = \sum_i \int \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = N \quad (10.85)$$

Exprimons la fonction d'autocorrélation spatiale en terme de la fonction de corrélation densité-densité :

$$\Gamma(\vec{s}) = \int \delta n(\vec{r}) \delta n(\vec{r} - \vec{s}) d^3 \vec{r} \quad (10.86)$$

$$= \frac{\alpha^2}{4} \int \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r} - \vec{s}) d^3 \vec{s} \quad (10.87)$$

Considérons la diffusion de la lumière par un milieu désordonné avec les hypothèses suivantes :

- Les centres diffuseurs sont répartis de façon uniforme.

$$\langle \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \rangle = \frac{1}{V} \Rightarrow \langle \rho(\vec{r}) \rangle = \frac{N}{V} = \langle \rho \rangle \quad (10.88)$$

- Absence de corrélation spatiale entre les centres diffuseurs  $\vec{r}_i$  et  $\vec{r}_j$ . Par conséquent

$$\langle \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \rangle = \langle \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \rangle \langle \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \rangle = \frac{1}{V^2} \quad (10.89)$$

Il vient :

$$\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}-\vec{s}) = \sum_{i,j} \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\delta(\vec{r}-\vec{r}_j-\vec{s}) \quad (10.90)$$

$$= \sum_i \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\delta(\vec{r}-\vec{r}_i-\vec{s}) + \sum_{i \neq j} \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\delta(\vec{r}-\vec{r}_j-\vec{s}) \quad (10.91)$$

$$= \delta(\vec{s}) \sum_i \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) + \sum_{i \neq j} \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\delta(\vec{r}-\vec{r}_j-\vec{s}) \quad (10.92)$$

En prenant la moyenne sur le désordre on obtient :

$$\langle \rho(\vec{r})\rho(\vec{r}-\vec{s}) \rangle = \delta(\vec{s}) \frac{N}{V} + \sum_{i \neq j} \frac{1}{V^2} \quad (10.93)$$

$$= \delta(\vec{s}) \bar{\rho} + \frac{N(N-1)}{V^2} \quad (10.94)$$

$$\stackrel{N \rightarrow \infty}{=} \delta(\vec{s}) \bar{\rho} + \bar{\rho}^2 \quad (10.95)$$

La moyenne de la fonction d'autocorrélation est donc :

$$\langle \Gamma(\vec{s}) \rangle = \int d^3 \vec{r} \langle \delta n(\vec{r}) \delta n(\vec{r}-\vec{s}) \rangle \quad (10.96)$$

$$= \frac{\alpha^2}{4} \int d^3 \vec{r} [\delta(\vec{s}) \bar{\rho} + \bar{\rho}^2] \quad (10.97)$$

$$\langle \Gamma(\vec{s}) \rangle = \frac{\alpha^2}{4} V [\delta(\vec{s}) \bar{\rho} + \bar{\rho}^2] \quad (10.98)$$

Calculons la transformée de Fourier :

$$\int e^{-i\vec{q}\vec{s}} \langle \Gamma(\vec{s}) \rangle d^3 \vec{s} = \frac{\alpha^2 V}{4} [\bar{\rho} + \bar{\rho}^2 (2\pi)^3 \delta^3(\vec{q})] \quad (10.99)$$

$$= \frac{\alpha^2}{4} [N + \text{diffusion vers l'avant}] \quad (10.100)$$

On a donc une diffusion incohérente

# 11 Mécanique quantique relativiste

La mécanique quantique relativiste est une théorie qui intègre dans un même cadre conceptuel la mécanique quantique et la relativité. L'existence d'une vitesse limite impose de nouvelles restrictions au processus de mesure et laisse entrevoir certaines limitations de la théorie. La longueur d'onde Compton définit une échelle naturelle de distance faisant intervenir les deux constantes fondamentales  $\hbar$  et  $c$ . La longueur d'onde Compton d'une particule de masse  $m$  s'écrit :

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc} \quad (11.1)$$

La relation d'incertitude de Heisenberg  $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$  exprime que des fluctuations de position sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde Compton  $\Delta x = \lambda$  conduisent à des fluctuations d'impulsion et par conséquent d'énergie :

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta p \geq \frac{mc}{4\pi} \Rightarrow \Delta E \sim mc^2 \quad (11.2)$$

Ces fluctuations étant de l'ordre de l'énergie de masse, on entrevoit qu'il puisse y avoir création de particules ou d'antiparticules. On s'attend par conséquent à ce qu'il ne soit pas possible de construire un formalisme entièrement cohérent dans le cadre d'une théorie à une particule. Le cadre conceptuel de la mécanique quantique relativiste débouche naturellement sur la théorie quantique relativiste des champs.

## I) Équation de Klein-Gordon :

La façon traditionnelle d'obtenir l'équation de Schrodinger est de partir de la relation de dispersion :

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (11.3)$$

et d'appliquer la règle de correspondance :

$$\left\{ \begin{array}{l} E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \end{array} \right. \quad (11.4)$$

On obtient ainsi l'équation

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi \quad (11.5)$$

Vérifions la covariance de cette équation sous les transformations Galiléennes :

$$\begin{cases} \vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t \\ t \rightarrow t' = t \end{cases} \quad (11.6)$$

Il nous faut construire une transformation unitaire  $\psi \rightarrow \psi'$  telle que

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi \\ i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t'} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta' \psi' \end{cases} \quad (11.7)$$

La solution est donnée par :

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi'(\vec{x}', t') = \exp \frac{i}{\hbar} \left( m \frac{\vec{v}^2 t}{2} + m \vec{v} \cdot \vec{x} \right) \psi(\vec{x}, t) \quad (11.8)$$

Essayons maintenant de transposer cette approche au cas relativiste

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = mc^2 \sqrt{1 - \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \Delta} \psi \quad (11.9)$$

Cette approche conduit à une équation qui n'est pas locale puisqu'elle fait intervenir des puissances arbitraire du Laplacien. En outre, la symétrie d'espace-temps  $(\vec{x}, t)$  n'est pas manifeste. Pour lever cette difficulté, partons de la relation de dispersion :

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \Rightarrow \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = +\hbar^2 c^2 \Delta \psi - m^2 c^4 \psi \quad (11.10)$$

On obtient l'équation de Klein-Gordon :

$$\left( \square \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi \right) = 0 \quad (11.11)$$

dans laquelle la symétrie relativiste semble restaurée. On peut effectivement vérifier que cette équation est bien covariante sous les transformations de Lorentz  $x \rightarrow x' = \Lambda x$  avec  $\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x)$ .

Cherchons des solutions particulières de type onde plane  $\psi = e^{\frac{ipx}{\hbar}}$  :

$$\left( \partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (11.12)$$

$$-p_\mu p^\mu \psi + m^2 c^2 \psi = 0 \quad (11.13)$$

$$p^2 = m^2 c^2 \quad (11.14)$$

$$p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (11.15)$$

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (11.16)$$



- On obtient des solutions d'énergie positive avec la bonne relation de dispersion mais aussi des solutions d'énergie négative qu'il faudra interpréter ultérieurement.
- Afin de donner une interprétation probabiliste à ces solutions essayons de procéder comme dans le cas non relativiste :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \text{ avec } \rho = |\psi|^2 \text{ et } \vec{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \quad (11.17)$$

Ici :

$$\psi^* \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi \right] = 0 \quad (11.18)$$

$$\psi \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} - \Delta \psi^* + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* \right] = 0 \quad (11.19)$$

$$\frac{1}{c^2} \left[ \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} \right] - [\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*] = 0 \quad (11.20)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \cdot [\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*] = 0 \quad (11.21)$$

$$(11.22)$$

En posant

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} (\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^*) \quad (11.23)$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \quad (11.24)$$

On obtient une équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad (11.25)$$

Mais  $\rho$  n'est manifestement plus défini positif ce qui nous laisse entrevoir une interprétation non pas en terme de densité de particules mais plutôt de densité de charge.

- Notons également que l'équation de Klein-Gordon est une équation aux dérivées partielles du second ordre (de type hyperbolique) pour laquelle les conditions initiales consistent en la donnée de la fonction  $\psi(x, 0)$  et de sa dérivée par rapport au temps  $\dot{\psi}(x, 0)$ .

## II) Atomes pioniques

Un exemple d'application de l'équation de Klein-Gordon est l'étude des atomes pioniques. Ce sont des atomes dans lesquels un ou plusieurs électrons sont remplacés par des mésons  $\pi^-$ , particules de spin 0, décrites par l'équation de Klein-Gordon. Pour produire des atomes pioniques il faut disposer d'un faisceau de pions. On les produit à partir de collisions inélastiques

$pp \rightarrow pp\pi^-\pi^+$ . les pions sont ensuite ralentis puis dirigés sur une cible où ils sont capturés selon la réaction  $\pi^- + atome \rightarrow atome' + \pi^- + e^-$ . La masse du  $\pi^-$  est  $m_\pi c^2 = 139 MeV$  soit 273 fois la masse de l'électron  $m_e c^2 = 0.5 MeV$ . Ceci a comme conséquence que son orbite de Bohr  $r \sim \frac{n^2 \hbar}{m c \alpha}$  est très proche du noyau. Le temps de vie du  $\pi^-$  dans la désintégration  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$  est  $T \sim 2.6 \times 10^{-8} s$ , temps beaucoup plus grand que le temps de désexcitation par transition dipolaire. On peut ainsi observer ces transitions lorsqu'un pion passe d'un état excité à l'état fondamental et ainsi tester la validité de l'équation de Klein-Gordon par des mesures spectroscopiques. Pour décrire le couplage au champ coulombien nous pouvons nous laisser guider par des considérations classiques. Considérons le Lagrangien relativiste d'une particule chargée couplée à un champ extérieur.

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} + q \vec{A} \cdot \vec{v} - q\Phi \quad (11.26)$$

En faisant une transformation de Legendre on en déduit :

$$H - q\Phi = \sqrt{(\vec{p} - q\vec{A})^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (11.27)$$

Pour passer du hamiltonien libre au hamiltonien en interaction il faut donc faire la substitution suivante :

$$\begin{cases} E & \rightarrow E - q\Phi = E - qcA_0 \\ \vec{p} & \rightarrow \vec{p} - q\vec{A} \end{cases} \quad (11.28)$$

par conséquent :

$$\begin{cases} \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} & \rightarrow \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - qA_0 \\ \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} & \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \end{cases} \quad (11.29)$$

Partant de l'équation de Klein-Gordon on obtient ainsi l'équation d'onde :

$$\left( \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - qA_0 \right)^2 \psi - \left( -i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 \psi = m^2 c^2 \psi \quad (11.30)$$

Considérons le cas particulier d'un champ Coulombien

$$-qA_0 = \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 r c} \quad (11.31)$$

Alors on a l'équation suivante dont nous cherchons des solutions stationnaires de la forme  $\psi(\vec{r}, t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \varphi(\vec{r})$

$$\left( \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 r c} \right)^2 \psi + \hbar^2 \Delta \psi = m^2 c^2 \psi \quad (11.32)$$

$$\left( \frac{E}{c} + \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 r c} \right)^2 \varphi + \hbar^2 \Delta \varphi = m^2 c^2 \varphi \quad (11.33)$$

Cherchons des états propres de moment angulaire fixé de la forme  $\varphi = \frac{R(r)}{r} Y_{lm}(\varphi, \theta)$  :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) + \left( \frac{E}{\hbar c} + \frac{Z\alpha}{r} \right)^2 R(r) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} R(r) \quad (11.34)$$

On obtient l'équation radiale

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} R - \frac{1}{r^2} [l(l+1) - Z^2 \alpha^2] R(r) + \frac{2EZ\alpha}{\hbar c r} R(r) + \left( \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) R(r) = 0 \quad (11.35)$$

En comparant avec l'équation de Schrodinger non relativiste (voir Cohen chapitre 7) on obtient les niveaux d'énergie

$$E_{nl} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{(n+\lambda)^2}}} \quad (11.36)$$

Où :

$$l(l+1) - Z^2 \alpha^2 = \lambda(\lambda+1) \Rightarrow \lambda \simeq l - \frac{Z^2 \alpha^2}{2l+1} \quad (11.37)$$

Les niveaux d'énergie dépendent donc des deux nombres quantiques  $n$  et  $l$ . Le développement en puissance de la constante de structure fine  $\alpha = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$  donne

$$E_{nl} = mc^2 - \frac{mc^2 Z^2 \alpha^2}{2n^2} + mc^2 Z^2 \alpha^4 \left( \frac{3}{8n^4} - \frac{1}{(2l+1)n^3} \right) + O(\alpha^6)$$

Le premier terme représente l'énergie de masse, le second l'énergie de liaison calculée dans l'approximation non relativiste. Le troisième terme donne la correction relativiste dominante pour des particules de spin 0. Elle ne décrit pas correctement le spectre de l'atome d'hydrogène. En effet les 6 états  $n=2, l=1$  ne sont pas dégénérés mais regroupés en deux groupes d'états dégénérés ( $2s_{1/2}, 2p_{1/2}$ ) et ( $2p_{3/2}$ ). C'est une des prédictions de l'équation de Dirac.

### III) Équation de Dirac

Perspective historique : Dirac propose de travailler avec une équation du 1er ordre dont le carré redonne l'équation de Klein-Gordon. Cette approche se rattache au problème mathématique suivant : écrire une forme quadratique, telle que l'intervalle d'espace-temps, comme le carré d'une forme linéaire.

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (\beta c t + \alpha^1 x + \alpha^2 y + \alpha^3 z)^2 \quad (11.38)$$

Pour trouver une solution il faut que les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  anticommulent. On va les chercher dans un espace matriciel. Postulons une équation de la forme :

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \alpha^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + \frac{imc}{\hbar} \beta \psi \quad (11.39)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des matrices  $N \times N$

On exige que cette équation itérée redonne l'équation de Klein-Gordon 11.11

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^3 \left( \alpha^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{imc}{\hbar} \beta \right) \left( \sum_{l=1}^3 \alpha^l \frac{\partial}{\partial x^l} + \frac{imc}{\hbar} \beta \right) \psi \quad (11.40)$$

Le terme en  $\alpha^k \alpha^l$  est :

$$\sum \alpha^k \alpha^l \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} = \sum \frac{1}{2} (\alpha^k \alpha^l + \alpha^l \alpha^k) \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} = \sum \frac{\partial^2}{\partial x^{k^2}} \quad (11.41)$$

Par conséquent

$$\begin{cases} \alpha^{i^2} &= \mathbb{1} \\ \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i &= 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (11.42)$$

De même, il faut que l'on ait :

$$\begin{cases} \beta^2 &= \mathbb{1} \\ \beta \alpha^k + \alpha^k \beta &= 0 \end{cases} \quad (11.43)$$

En résumé on doit donc satisfaire l'algèbre suivante :

$$\alpha^k \alpha^l + \alpha^l \alpha^k = 2\delta^{kl} \mathbb{1} \quad (11.44)$$

$$\beta \alpha^k + \alpha^k \beta = 0 \quad (11.45)$$

$$\beta^2 = \alpha^k \alpha^k = \mathbb{1} \quad (11.46)$$

Ecrivons maintenant l'équation 11.39 sous forme hamiltonienne  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi$ . On obtient

$$H = -i\hbar c \alpha^k \frac{\partial}{\partial x^k} + mc^2 \beta \quad (11.47)$$

Le Hamiltonien étant un opérateur hermitique, on en déduit que  $\beta$  et  $\alpha^k$  sont des matrices hermitiennes.

On en déduit que ces matrices sont de trace nulle en utilisant les relations d'anticommutation  $\beta \alpha^i \beta = -\alpha^i$  et en prenant la trace.

Montrons que les matrices  $\alpha$  et  $\beta$  sont de dimension paire. Les relations  $\alpha^i \alpha^i = \beta^2 = 1$  impliquent que les valeurs propres sont  $\pm 1$  donc  $\dim \alpha = \dim \beta = 2n$ .

Pour  $n = 1$  il n'y a pas de solution, par contre pour  $n = 2$ , on peut exhiber la solution particulière suivante :

$$\begin{cases} \alpha^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ \beta &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (11.48)$$

Équation de continuité :

$$\psi^+ i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi^+ (-i\hbar c \vec{\alpha} \vec{\nabla} \psi + mc^2 \beta \psi) \quad (11.49)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi = (-i\hbar c \vec{\nabla} \psi^+ \alpha - mc^2 \psi^+ \beta) \psi \quad (11.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^+ \psi) = -c \vec{\nabla} (\psi^+ \alpha \psi) \quad (11.51)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \quad (11.52)$$

Avec :

$$\begin{cases} \rho &= \psi^+ \psi > 0 \\ j^i &= c \psi^+ \alpha^i \psi \end{cases} \quad (11.53)$$

## IV) Limite non relativiste

Couplage à un champ électromagnétique.

On effectue dans l'équation de Dirac la substitution :  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q \vec{A} = \vec{\Pi}$  :

$$\begin{cases} -i\hbar \vec{\nabla} &\rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} - q \vec{A} \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q c A^0 \end{cases} \quad (11.54)$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - q c A^0 \psi &= \left[ (-i\hbar \vec{\nabla} - q \vec{A}) c \vec{\alpha} + \beta m c^2 \right] \psi \\ i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \left[ (\vec{p} - q \vec{A}) c \vec{\alpha} + \beta m c^2 + q c A^0 \mathbb{1} \right] \psi \end{cases} \quad (11.55)$$

On découple  $\psi$  en deux composantes  $\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ , correspondants à la structure en blocs des matrices  $\beta$  et  $\alpha$ . On obtient l'équation suivante :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m c^2 + q c A^0 & c \vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi} \\ c \vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi} & -m c^2 + q c A^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (11.56)$$

Dans le cas où le champ électromagnétique est indépendant du temps on cherche des solutions stationnaires de la forme :

$$\begin{pmatrix} \varphi(\vec{r}) \\ \chi(\vec{r}) \end{pmatrix} e^{-\frac{i E t}{\hbar}} \quad (11.57)$$

Ce qui donne :

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m c^2 + q c A^0 & c \vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi} \\ c \vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi} & -m c^2 + q c A^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (11.58)$$

C'est à dire :

$$\begin{cases} E\varphi &= (mc^2 + qcA^0)\varphi + c\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}\chi \\ E\chi &= c\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}\varphi + (qcA^0 - mc^2)\chi \end{cases} \quad (11.59)$$

On s'intéresse à la limite non relativiste en posant  $E = mc^2 + \epsilon$ . On trouve en prenant la seconde équation et en négligeant  $\epsilon$  et  $qcA^0$  devant l'énergie de masse

$$(2mc^2 - qcA^0)\chi \simeq c\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}\varphi \Rightarrow \chi \simeq \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}}{2mc}\varphi \quad (11.60)$$

La première équation devient

$$(mc^2 + \epsilon)\varphi = (mc^2 + qcA^0)\varphi + c\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}\chi \quad (11.61)$$

On en déduit alors l'équation sur  $\varphi$  :

$$\epsilon\varphi = qcA^0\varphi + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi})^2}{2m}\varphi \quad (11.62)$$

Dans le cas où il n'y a qu'un champ magnétique :

$$\epsilon\varphi = \frac{1}{2m} \left( \vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi} \right)^2 \varphi \quad (11.63)$$

où  $\varphi$  est une fonction d'onde à deux composantes.

Les matrices de Pauli vérifient :

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (11.64)$$

Par conséquent

$$(\sigma_i a_i)(\sigma_j b_j) = (a_i b_j) \delta_{ij} \mathbb{1} + i\epsilon_{ijk} (a_i b_j) \sigma_k \quad (11.65)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \mathbb{1} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad (11.66)$$

Dans le cas où  $a$  est un vecteur et non un opérateur vectoriel on en déduit :

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})^2 = \vec{a}^2 \mathbb{1} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{a}) = a^2 \mathbb{1} \quad (11.67)$$

Appliquons la relation 11.65 à  $\vec{\Pi}$  :

$$\epsilon_{ijk} \Pi_i \Pi_j = \epsilon_{ijk} (p_i - qA_i)(p_j - qA_j) \quad (11.68)$$

$$= -q\epsilon_{ijk} (p_i A_j + A_i p_j) \quad (11.69)$$

$$= -q\epsilon_{ijk} p_i A_j + q\epsilon_{ijk} A_j p_i \quad (11.70)$$

$$= -q\epsilon_{ijk} [p_i, A_j] \quad (11.71)$$

$$= -q\epsilon_{ijk} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \quad (11.72)$$

$$= i\hbar q B^k \quad (11.73)$$

D'où :

$$\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}\right)^2 = \vec{\Pi}^2 - q\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (11.74)$$

On obtient l'équation de Pauli :

$$\epsilon\varphi = \left(\frac{\vec{\Pi}^2}{2m} - \frac{q\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}\right) \varphi = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 \varphi - \frac{q\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \varphi \quad (11.75)$$

Dans le cas d'un champ magnétique constant :  $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r}$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q}{2m} (\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}) + \frac{1}{2m} q^2 \vec{A}^2 - \frac{q\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (11.76)$$

$$= \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q}{2m} \left( \underbrace{[\vec{p}, \vec{A}]}_{\propto \text{div } \vec{A}=0} + 2\vec{A} \cdot \vec{p} \right) + \mathcal{O}(\vec{B}^2) - \frac{q\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (11.77)$$

Réécrivons le hamiltonien d'interaction :

$$H_I = -\frac{q}{2m} (\vec{B} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{p} - \frac{q\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (11.78)$$

$$= -\frac{q}{2m} [\vec{B}, \vec{r}, \vec{p}] - \frac{q\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (11.79)$$

$$= -\frac{q}{2m} \vec{B} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{p}) - \frac{q\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (11.80)$$

$$= -\frac{q}{2m} \vec{B} \cdot \vec{L} - \frac{q}{m} \frac{\hbar \vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{B} \quad (11.81)$$

$$= -\frac{q}{2m} \vec{B} \cdot \vec{L} - \frac{q}{m} \vec{B} \cdot \vec{S} \quad (11.82)$$

Interprétation du terme  $-\frac{q\vec{L}\vec{B}}{2m}$

Considérons le couplage d'une boucle de courant à un champ magnétique

$$i = \frac{q}{T} = \frac{q}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{qv}{2\pi r} \quad (11.83)$$

Le moment magnétique s'écrit

$$\mu = iS = \pi r^2 \frac{q|v|}{2\pi r} = \frac{q}{2m} mrv = \frac{q}{2m} L$$

Algébriquement on a

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

Le hamiltonien d'interaction

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{-q}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B}$$

décrit le couplage entre le champ magnétique extérieur et le moment magnétique de l'atome engendré par la rotation de l'électron sur son orbite.

Interprétation du terme  $-\frac{q\hbar}{2m}\vec{\sigma}\vec{B}$

Les formules obtenues montrent que l'électron porte un moment magnétique intrinsèque  $\vec{\mu} = \frac{q\hbar}{2m}\vec{\sigma}$ . En l'exprimant en terme de l'opérateur de spin  $\vec{S} = \hbar\frac{\vec{\sigma}}{2}$  on a  $\vec{\mu} = \frac{q}{m}\vec{S}$ . On peut l'écrire de façon générale sous la forme  $\vec{\mu} = g\frac{q}{2m}\vec{S}$  où  $g$  est par définition le facteur gyromagnétique. La théorie de Dirac prédit  $g = 2$ .

Les corrections radiatives calculées dans le cadre de l'électrodynamique quantique donnent

$$g = 2\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + C_1\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + C_2\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3\right) \quad (11.84)$$

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  font intervenir des corrections radiatives venant non seulement de l'électrodynamique mais aussi des interactions faibles et fortes. On dispose actuellement d'un développement à l'ordre  $\alpha^5$ . Ces corrections dépendent des masses des particules et par conséquent de la nature des leptons (electron, muon, tau).

## V) Groupe des rotations, notion de spineur

Les rotations de  $\mathbb{R}^3$  forment un groupe appelé  $SO(3)$ . Une rotation infinitésimale d'angle  $\epsilon$  autour de l'axe  $\vec{n}$  peut s'écrire

$$\vec{x}' = \vec{x} + \epsilon\vec{n} \wedge \vec{x} = R\vec{x} \quad (11.85)$$

Avec

$$R(\epsilon, \vec{n}) = \mathbb{1} - i\epsilon\vec{n} \cdot \vec{J} \quad (11.86)$$

Les matrices :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.87)$$

sont les générateurs du groupe des rotations.

Elles satisfont :

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \quad (11.88)$$

La connaissance des générateurs permet de construire n'importe quelle rotation finie et par conséquent de remonter des générateurs au groupe. Ecrivons que les matrices  $R$  constituent



un groupe en considérant deux rotations successives autour du même axe

$$R(\epsilon, \vec{n})R(\theta, \vec{n}) = R(\epsilon + \theta, \vec{n}) \quad (11.89)$$

$$(\mathbb{1} - i\epsilon\vec{n} \cdot \vec{J})R(\theta, \vec{n}) = R(\theta + \epsilon, \vec{n}) \quad (11.90)$$

$$-i\vec{n} \cdot \vec{J}R(\theta, \vec{n}) = \frac{R(\theta + \epsilon, \vec{n}) - R(\theta, \vec{n})}{\epsilon} \quad (11.91)$$

$$\frac{d}{d\theta}R(\theta, \vec{n}) = -i\vec{n} \cdot \vec{J}R(\theta, \vec{n}) \quad (11.92)$$

$$R(\theta, \vec{n}) = \exp(-i\theta\vec{n} \cdot \vec{J}) \quad (11.93)$$

Etant données les relations de commutation précédentes, on peut se demander s'il existe d'autres jeux de matrices  $N \times N$  satisfaisant (11.88). La réponse générale à cette question est fournie par la théorie des représentations du groupe  $SO(3)$ . Vérifions de façon élémentaire que pour  $N = 2$ , les matrices de Pauli nous fournissent une autre solution  $J_i = \frac{\sigma_i}{2}$ . La formule précédente nous permet de construire la transformation correspondante dans le groupe

$$\mathcal{U}(\theta, \vec{n}) = \exp\left(-i\theta\frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}\right) \in SU(2) \quad (11.94)$$

Cette matrice agit non plus sur des vecteurs de  $R^3$  mais sur des objets à deux composantes, appelés spineurs.

Exercice : vérifier que

$$\mathcal{U}(\theta, \vec{n})\vec{\sigma}\vec{x}\mathcal{U}^{-1}(\theta, \vec{n}) = \vec{\sigma}\vec{x}' \quad (11.95)$$

où  $\vec{x}'$  est l'image de  $\vec{x}$  par la rotation  $R(\theta, \vec{n})$ .

Cette relation établit une correspondance (un homomorphisme) entre les rotations  $R(\theta, \vec{n})$  et les matrices  $2 \times 2$  de la forme

$$\mathcal{U}(\theta, \vec{n}) = \exp\left(-i\theta\frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}\right) \in SU(2) \quad (11.96)$$

**Fonctions d'onde vectorielles et spinorielles :** Nous avons vu au début du cours qu'une fonction scalaire sous les rotations est caractérisée par ses propriétés de transformation :

$$\varphi(\vec{x}) \rightarrow \varphi'(\vec{x}') = \varphi(\vec{x}) \quad (11.97)$$

$$\varphi'(\vec{x}) = \varphi(R^{-1}\vec{x}) \quad (11.98)$$

Pour une fonction vectorielle

$$\varphi^i(\vec{x}) \rightarrow \varphi'^i(\vec{x}') = R^{ij}\varphi^j(\vec{x}) \Rightarrow \varphi'^i(\vec{x}) = R^{ij}\varphi^j(R^{-1}\vec{x}) \quad (11.99)$$

La construction précédente nous suggère d'introduire des fonctions d'ondes à deux composantes telles que

$$\varphi(\vec{x}) \rightarrow \varphi(\vec{x}) = \mathcal{U}\varphi(R^{-1}\vec{x}) \quad (11.100)$$

Ces objets sont appelés des fonctions d'onde spinorielles. Montrons que les spineurs de Dirac se transforment effectivement selon cette loi.

**Invariance par rotation de l'équation de Dirac :** Affirmer que l'équation de Dirac est invariante par rotation c'est dire d'une part que l'équation prend la forme dans deux référentiels déduits l'un de l'autre par une rotation et d'autre part qu'il doit exister une correspondance  $\psi'(\vec{x}', t) = S(R)\psi(\vec{x}, t)$  qui permette de relier les fonctions d'onde.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{x}, t) = -i\hbar c \alpha^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k}(\vec{x}, t) + mc^2 \beta \psi(\vec{x}, t) \quad (11.101)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t}(\vec{x}', t) = -i\hbar c \alpha^k \frac{\partial \psi'}{\partial x^k}(\vec{x}', t) + mc^2 \beta \psi'(\vec{x}', t) \quad (11.102)$$

Or on a  $\psi'(\vec{x}', t) = S(R)\psi(\vec{x}, t)$ ,  $\psi = S^{-1}\psi'$  :

$$i\hbar S^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial t} = -i\hbar c \alpha^k S^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial x^k} + mc^2 \beta S^{-1} \psi' \quad (11.103)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = -i\hbar c S \alpha^k S^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial x^k} + mc^2 S \beta S^{-1} \psi' \quad (11.104)$$

$$= -i\hbar c S \alpha^k S^{-1} R^{ik} \frac{\partial \psi'}{\partial x^i} + mc^2 S \beta S^{-1} \psi' \quad (11.105)$$

Pour que les deux équations coïncident, il faut que :

$$\begin{cases} \beta &= S \beta S^{-1} \\ \alpha^i &= S \alpha^k S^{-1} R^{ik} \end{cases} \quad (11.106)$$

Il est commode de se placer dans la base où :

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} \mathcal{U} & 0 \\ 0 & \mathcal{U} \end{pmatrix} \quad (11.107)$$

L'équation sur  $\alpha$  donne

$$\mathcal{U} \sigma^k \mathcal{U}^{-1} R^{ik} = \sigma^i \quad (11.108)$$

On vérifie que l'opérateur  $\mathcal{U}$  défini par l'équation 11.94 est effectivement solution, par conséquent

$$\psi'(\vec{x}) = S\psi(R^{-1}\vec{x}) = \exp\left(-i\theta \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{n}}{2}\right) \psi(R^{-1}\vec{x}) \quad (11.109)$$

Nous venons donc de prouver que les fonctions d'onde de Dirac se transforment comme des fonctions d'onde spinorielles sous les rotations spatiales.

Vérification expérimentale : interférences de neutrons.