LP3: Notion de viscosité d'un fluide. Ecoulements visqueux

Alexandre Fafin

11/12/17

Niveau

L2

Prè-requis

— Hydrostatique
— Cinématique des fluides

Objectifs

— Comprendre la notion de viscosité.
— Importance du nombre de Reynolds pour classifier les écoulements
— Utiliser l'équation de Navier-Stokes pour des cas simples

Table des matières

Introduction

Manip Lacher deux billes identiques de masse m et de volume V dans la glycérine et dans l'eau. Les deux billes tombent à des vitesses différentes.

On fait le bilan des forces qui s'exercent sur la bille :
— Le poids $\overrightarrow{P} = m\vec{g}$
— La poussée d'archimède $\vec{\pi}_a = -\rho V \vec{g}$

On peut comparer les masses volumiques ρ de la glycérine (1260 kg/m^3) et de l'eau (1000 kg/m^3). Ces deux masses volumiques étant proches, cela ne permet pas d'expliquer la différence de vitesse. Il faut donc rajouter une force de frottement $\vec{f}$, dépendant de la viscosité du fluide.

1 Notion de viscosité

1.1 Forces visqueuses

On considère le système suivant :

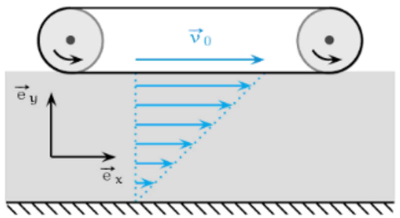


Fig. 9.1. Dispositif expérimental de mesure de la viscosité. Champ de vitesse du liquide en régime permanent. Le fond du récipient est immobile dans le référentiel du laboratoire. La paroi du haut est un tapis roulant entraîné par des rouleaux à vitesse constante. Le récipient est suffisamment étendu selon la direction x pour négliger les effets de bords.

Un liquide remplit l'espace entre les deux parois horizontales et parallèles. La paroi du bas est fixe tandis que la paroi du haut est entraînée à partir de l'instant initiale à la vitesse v_0. Au bout d'un certain temps (on s'intéresse au régime permanent), le champ de vitesse devient indépendant du temps. On montre expérimentalement que :

— Le liquide adhére localement à chaque paroi : il a une vitesse nulle par rapport à la paroi avec laquelle il est en contact.

— La paroi mobile met en mouvement la tranche de fluide située sous elle. Celle-ci met en mouvement la tranche en dessous et ainsi de suite. La vitesse est alors de la forme $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$. où v_x est une fonction linéaire de y.

Les actions de contact exercée par une tranche supérieure sur une tranche inférieure se décomposent en une composante normale et une composante tangentielle :

$$\overrightarrow{dF}_n = -p(M,t)dS\vec{u}_y \tag{1}$$
$$\overrightarrow{dF}_t = \sigma(M,t)dS\vec{u}_x \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

Ce sont les forces tangentielles qui mettent le fluide en mouvement. On peut montrer que la contrainte tangentielle σ est proportionnel au gradient de vitesse :

$$\sigma = \eta\frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{4}$$

Ce coefficient de proportionnalité η est la viscosité dynamique du système. Un fluide avec une relation linéaire entre la contrainte et le gradient de vitesse est un fluide newtonien. La science qui étudie les fluides non newtonien s'appelle la rhéologie et dépasse largement le cadre de cette leçon. Dans la rhéologie la viscosité η dépend du gradient de vitesse $\frac{\partial v_x}{\partial y}$.

Dans la suite on considère η est une constante du fluide.

Unité de η

σ s'exprime en Pa et $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ en s^{-1}, donc η s'exprime en Pa.s. On utilise aussi le Poiseuille, du nom d'un médecin ayant étudié la circulation du sang.

Quelques ordres de grandeurs

Corps pur	Air	Eau	Glycérine	Miel
Viscosité (Pa.s)	$1,8.10^{-5}$	1.10^{-3}	$1,4$	10

Trois ordres de grandeur entre l'eau et la glycérine. C'est bien la viscosité du fluide qui explique la différence de vitesse de chute.

1.2 Origine microscopique

L'origine microscopique de la viscosité vient du mouvement brownien (agitation thermique) des molécules du fluide. La vitesse d'une particule de fluide possède deux composantes : une composante thermique désordonnée, et une composante macroscopique liée au mouvement d'ensemble du fluide. $\vec{v}(M,t) = \vec{v}_m(M,t) + \vec{v}_{th}$ avec $< \vec{v}(M,t) >= \vec{v}_m(M,t)$.

Lorsqu'une particule passe d'une couche supérieur à une couche inférieure plus lente, dû au mouvement brownien, elle emporte avec elle sa quantité de mouvement. Lors des collisions avec les particules de la couche d'arrivée, elle transfère l'excédent de la quantité de mouvement qu'elle possède. En moyennant se transfert de quantité de mouvement entre couches voisines, on obtient un effet macroscopique.

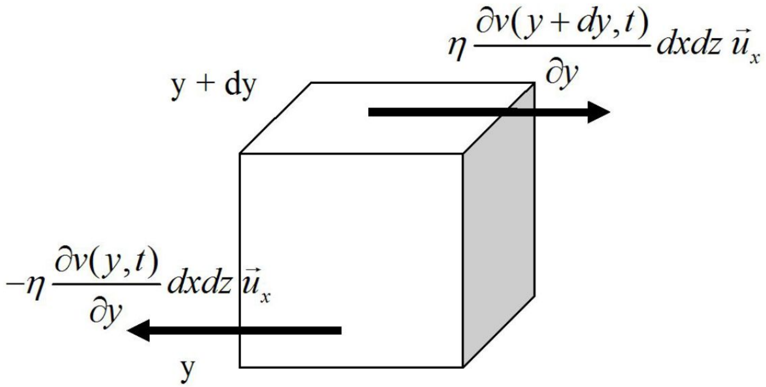
Pour les gaz on peut montrer que $\eta = \frac{1}{3}\rho l v_{th}$ où l est le libre parcours moyen. D'après la théorie cinétique des gaz $v_{th} \propto \sqrt{T}$, donc $\eta \propto \sqrt{T}$. Pour les gaz la viscosité augmente avec la température.

Pour les liquides la loi est différente $\eta \propto e^{b/T}$, la viscosité diminue donc avec la température. Ici on ne peut pas négliger l'interaction entre les particules.

2 Dynamique des écoulement visqueux

2.1 Équation de Navier-Stokes

On suppose un fluide newtonien et incompressible.



On considère un élément de volume $d\tau = dxdydz$. On cherche la résultante des forces de viscosité (on ne s'intéresse pas aux forces de pression). D'après ce que l'on a obtenu précédemment (en prenant $dF > 0$ pour les forces de viscosité exercées par le fluide de la tranche supérieure)

$$\overrightarrow{dF}_{y+dy} = \eta \frac{\partial v_x(y+dy)}{\partial y} dxdz\vec{u}_x \tag{5}$$

$$\overrightarrow{dF}_{y+dy} = -\eta \frac{\partial v_x(y)}{\partial y} dxdz\vec{u}_x \tag{6}$$

Ainsi (voir [2])

$$\frac{d\overrightarrow{F}}{d\tau} = \eta \frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} \tag{7}$$

Pour un champ de vitesse quelconque à 3D, ce résultat se généralise sous la forme

$$\frac{d\overrightarrow{F}}{d\tau} = \eta \Delta \vec{v} \tag{8}$$

Considérons une particule de fluide de masse $dm = \rho d\tau$ dans un référentiel galiléen et effectuons un BdF :

— Résultante des forces de pressions $\frac{d\overrightarrow{F}}{d\tau} = -\overrightarrow{grad}p$

— Résultante des forces visqueuses $\frac{d\overrightarrow{F}}{d\tau} = \eta\Delta\vec{v}$

— Poids $\frac{d\overrightarrow{F}}{d\tau} = \rho\vec{g}$

Le PFD s'écrit (en divisant par $d\tau$) :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{grad}p + \eta\Delta\vec{v} + \rho\vec{g} \tag{9}$$

En développant la dérivée particulaire en prenant en compte l'accélération locale (taux de variation au cours du temps de la vitesse en un point fixe de l'espace) et l'accélération convective (ou advective : taux de variation dans l'espace de la vitesse à un instant fixé) on obtient :

$$\rho(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\vec{v}) = -\overrightarrow{grad}p + \eta\Delta\vec{v} + \rho\vec{g} \tag{10}$$

Cette équation est l'équation de Navier-Stokes. C'est une équation fondamentale en physique utilisée dans de nombreux domaines (météorologie, aéronautique...). La résolution de cette équation dans le cas général est impossible analytiquement (méthodes numériques)

2.2 Nombre de Reynolds

L'équation de NS est compliquée à cause de :

— $(\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\vec{v}$ qui rend l'équation non-linéaire

— $\eta\Delta\vec{v}$. Terme de diffusion visqueuse qui introduit des dérivées du 2nd ordre.

On cherche les cas où l'un de ses deux termes prédominent. Le nombre de Reynolds est défini par :

$$R_e = \frac{\text{Terme convectif}}{\text{Terme diffusif}} = \frac{\|\rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\vec{v})\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{vL}{\nu} \tag{11}$$

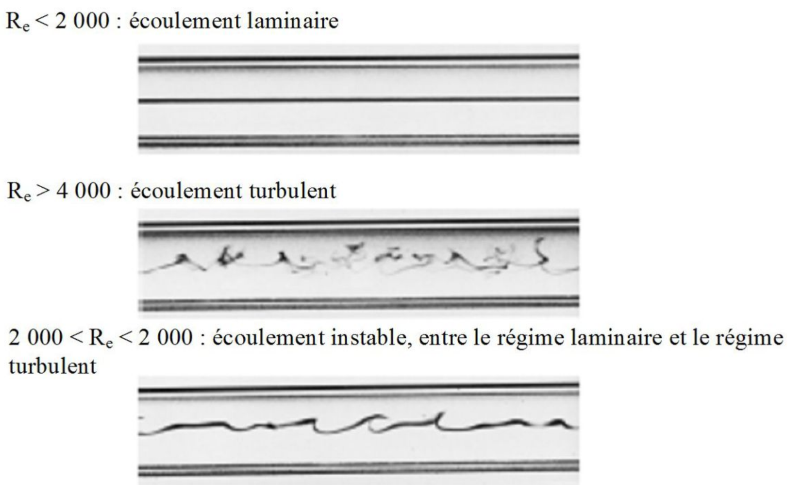
avec :

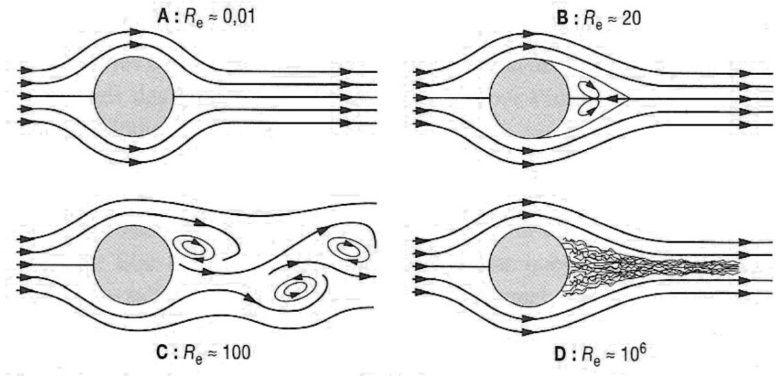
- L une longueur caractéristique
- $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ la viscosité cinématique
- v une vitesse caractéristique

On peut distinguer deux cas :

- Si $R_e >> 1$. Le transport convectif est beaucoup plus efficace que le transport diffusif. Écoulement turbulent, le terme visqueux est négligeable. On montre que les effets visqueux sont concentrés dans une couche limite.
- Si $R_e << 1$. Transport diffusif dominant. Écoulement laminaire essentiellement gouverné par la viscosité.

On peut visualiser ces différents types d'écoulements sur les deux exemples ci-dessous





Deux écoulements sont similaires s'ils sont caractérisés par le même nombre de Reynolds. Par exemple une sphère avec un diamètre de 5m avec v=200 m/s a un écoulement similaire à une sphère de 1m avec v=1000m/s. Cela permet d'effectuer des tests en laboratoire sur des modèles réduits.

3 Exemple d'écoulements visqueux

3.1 Écoulement dans une conduite (Poiseuille)

Exemple bien traité dans [2]. Il faut se servir des symétries et utiliser l'équation de N-S en régime stationnaire. On constate que la pression P ne dépend que de z, tandis que la vitesse v ne dépend que de r. On arrive à

$$v_z(r) = \frac{\Delta P}{4L\eta}(R^2 - r^2) \tag{12}$$

On peut tracer le profil de vitesse en fonction de r.

On souhaite mesurer la perte de charge induite par la viscosité. Expérimentalement il est plus facile d'avoir accès au débit volumique D_v plutôt que de mesurer la vitesse de l'écoulement. Ainsi

$$D_v = \iint \vec{v}.\overrightarrow{dS} \tag{13}$$

$$= \frac{\pi R^4 \rho g \Delta h}{8\eta \Delta L} \tag{14}$$

Ainsi en mesurant Δh, ΔL et D_v on peut remonter à la viscosité de l'eau η.

3.2 Chute d'une bille dans le glycérol

Exemple bien traité dans [2] et [1]. Il faut considérer une force de traînée obéissant à la loi de Stokes. On ne s'intéresse qu'au régime stationnaire. En mesurant la vitesse limite de la bille, on peut remonter à la viscosité.

Conclusion

On a établi l'équation de Navier-Stokes et on a pu mesurer expérimentalement la viscosité de l'eau grâce à la perte de charge dans une conduite. Ouvrir sur la notion de couche limite, où les effets visqueux sont confinés, ce qui permet de traiter des fluides parfaits (équation d'Euler).

Questions et remarques

— Donner des exemples de fluides non-newtonien : dentifrice, sang, sables mouvants... En réalité beaucoup de fluide de la vie de tous les jours

— Pourquoi pour les liquide $\eta \propto e^{b/T}$? Il y a ici une barrière d'énergie à franchir. Cela est de forme de la loi d'Arrhenius.

— Pour la résultante des forces de viscosité le passage de 1D à 3D est loin d'être trivial...

— C'est surtout le terme $(\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\vec{v}$ qui rend l'équation de N-S compliquée.

— Pour établir l'équation de Navier-Stokes, il est nécessaire de supposer un fluide incompressible. Si on ne fait pas cette hypothèse, il faut tenir compte d'une seconde viscosité[3]. Si on ne suppose pas le fluide incompressible on a 4 inconnues (vx,vy,vz et P) pour 3 équations.

Références

[1] J.-Ph Pérez. *Mécanique : fondements et applications*. Dunod, 2014.

[2] K. Lewis S. Olivier. *Compétences prépas Physique PC PC**. Tec & Doc Lavoisier, 2014.

[3] Étienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, and Luc Petit. *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences, 2012.