Transformées de Fourier et applications physiques

Alain Gellé, Christophe Cappe

Université de Rennes 1 - Préparation à l'agrégation de physique

1 La distribution de Dirac

1.1 La fonction porte

La fonction porte $\Pi(x)$ est la fonction discontinue définie par morceaux :

$$\begin{cases} \Pi(x) = 1 & \text{si} \quad |x| < 1/2 \\ \Pi(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

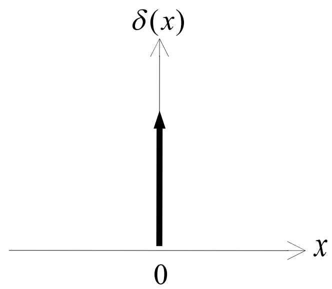
Par généralisation, on appelle également fonction porte toute fonction déduite par translation et/ou dilatation de la fonction définie ci-dessus. Ainsi, la fonction $\Pi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ correspond à une porte de largeur a centrée sur la valeur $x = b$.

1.2 La distribution de Dirac

1.2.1 Première approche

Considérons la fonction $g_e(x) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. C'est une porte de largeur ε et de hauteur $1/\varepsilon$. Son intégrale vaut 1. Lorsque $\varepsilon \to 0$, cette fonction a une largeur qui tend vers 0 et une hauteur qui tend vers l'infini, mais son intégrale est toujours égale à 1. On appellera distribution de Dirac et on notera $\delta(x)$ cette limite :

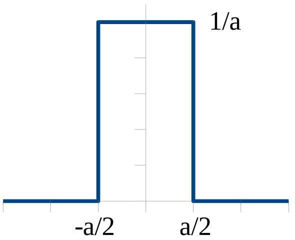
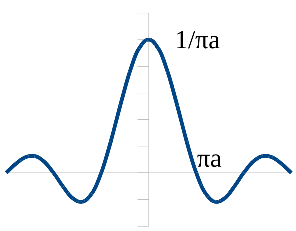
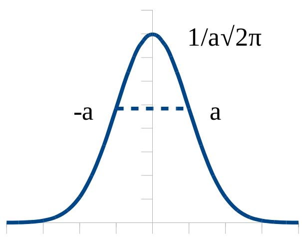
$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\Pi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$

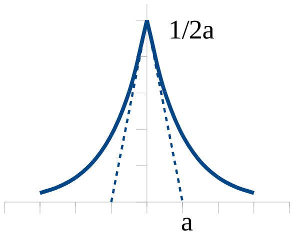
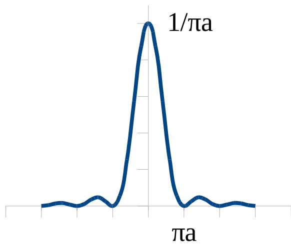


Le graphe de $\delta(x)$ sera représenté par convention par une flèche vers le haut, de hauteur 1, centrée en x = 0. On parle aussi de pic ou d'impulsion de Dirac.

1.2.2 Autres limites

On peut définir la distribution de Dirac, comme la limite de différentes fonctions. Par exemple :

Une porte	**Un sinus cardinal**	**Une gaussienne**
$g_a(x) = \frac{1}{a}\Pi\left(\frac{x}{a}\right)$	$g_{a1}(x) = \frac{1}{\pi a} sinc\left(\frac{x}{a}\right)$	$g_{a2}(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2a^2}\right)$
		

Une exponentielle	**Un sinus cardinal carré**	**…**
$g_{a3}(x) = \frac{1}{2a} e^{\frac{-\lvert x \rvert}{a}}$	$g_{a4}(x) = \frac{1}{\pi a} sinc^2\left(\frac{x}{a}\right)$	…
		Dessine ici ta fonction

L'intégrale de ces fonctions vaut 1. Lorsque a tend vers 0, on obtient la distribution de Dirac.

1.2.3 Définition

Soit f une fonction de R vers R qui n'est pas infinie en 0 et qu'on supposera intégrable sur R. On s'intéresse à la quantité :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx$$

Pour approcher cette intégrale, nous allons utiliser la fonction g_ε dont δ est la limite quand $\epsilon \to 0$:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g_\varepsilon(x)\,dx$$

Comme la fonction g_ε est nulle en dehors de l'intervalle $\left[\frac{-\varepsilon}{2};\frac{\varepsilon}{2}\right]$, le domaine d'intégration se réduit à cet intervalle. Il vient :

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} f(x)\frac{1}{\varepsilon}\,dx$$

Le changement de variable $x = \varepsilon y$ permet d'écrire :

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1/2}^{1/2} f(\varepsilon\, y)\,dy$$

Par passage à la limite :

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} f(0)\,dy$$

Nous en déduisons la véritable définition de la distribution de Dirac :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0) \tag{2}$$

En appliquant cette relation à la fonction $g(y) = f(y+a)$ et en faisant un changement de variable $x = y+a$, on trouve la généralisation en tout point :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

Notons bien que δ n'est pas une fonction ordinaire, en ce sens qu'elle n'est pas définie par sa valeur en chaque point. δ est en fait définie par l'intégrale sous une courbe : on parle de distribution et non de fonction.

Il vient immédiatement de l'égalité précédente que $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$, soit en généralisant :

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \tag{3}$$

1.2.4 Changement d’échelle

Soit a un réel $\neq 0$. Que vaut $\delta(ax)$?

Il est trivial de voir que $\delta(ax)$ vaut 0 partout sauf en 0 ou il est infini. Il parait donc assimilable à une distribution de Dirac. Il faut vérifier que son intégrale sur R est finie :

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)dx$$

Le changement de variable $y = ax$ donne :

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\frac{dy}{|a|}$$

La valeur absolue vient du fait que si $a < 0$ les bornes changent de signe. On trouve la propriété de changement d’échelle :

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{4}$$

Pour l’analyse des fréquences, on peut ainsi montrer que $\delta(\omega) = \delta(f) / 2\pi$.

1.3 La distribution peigne de Dirac

1.3.1 Définition

Le peigne de Dirac, noté $\text{III}(x)$, est composé d’une succession périodique de distributions δ :

$$\text{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n) \tag{5}$$

Sa période est 1. Le peigne a une importance capitale en traitement du signal, c’est l’outil qui permet de décrire de manière formelle l’opération d’échantillonnage (*cf.* § 4.1). Il est aussi à la base de la représentation de tous les phénomènes périodiques.

1.3.2 Changement d’échelle

Le peigne $\text{III}(x)$ a une période 1. Un peigne de période $a>0$, noté $\text{III}_a(x)$, c’est-à-dire dont les « dents » sont des distributions δ d’intégrale 1 espacées de a , s’écrit alors :

$$\text{III}_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-na)$$

En utilisant la relation (1.5) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, nous pouvons écrire :

$$\text{III}_a(x) = \frac{1}{|a|}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{x}{a}-n\right)$$

Soit finalement :

$$\text{III}_a(x) = \frac{1}{|a|}\,\text{III}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{6}$$

2 La transformée de Fourier

2.1 Définition

Soit $f(t)$ une fonction de variable réelle à valeurs réelles ou complexes.

On appelle transformée de Fourier (ou TF) de la fonction f l'intégrale :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \tag{7}$$

On parle d'espace direct pour décrire $f(t)$, et d'espace de Fourier pour décrire $\hat{f}(\nu)$. On utilisera parfois les notations suivantes : $\hat{f} = TF\{f\}$ ou $\hat{f}(\nu) = TF\{f\}(\nu)$.

La quantité ν est réelle, elle est dite variable conjuguée de t. Sa dimension est $[\nu] = [t]^{-1}$. Ainsi, si t est un temps (en s), ν est une fréquence (en Hz). Attention, d'autres définitions existent.

La transformée de Fourier d'une fonction existe si les trois conditions dites de Dirichlet sont vérifiées (il s'agit de conditions suffisantes mais pas nécessaires).

1. $f(t)$ possède un nombre fini de discontinuités sur tout intervalle fini.
2. $f(t)$ possède un nombre fini de maxima et de minima sur tout intervalle fini.
3. $f(t)$ est absolument intégrable, c'est-à-dire $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$.

Connaissant $\hat{f}(\nu)$, on peut obtenir $f(t)$ par une transformation de Fourier inverse :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = TFI\{\hat{f}\}(t) \tag{8}$$

2.2 Autres définitions

Les physiciens utilisent différentes définitions de la TF, qui diffèrent entre elles par des coefficients. Il est préférable d'utiliser la première formule qui donne des expressions « simples » pour les fonctions usuelles.

TF temps → fréquence	TF temps → pulsation	TF temps → pulsation (bis)
$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$	$\hat{f}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$	$\hat{f}_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$
$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega$	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega$
La bonne formule. Garantie sans additifs !	La TF et TF inverse sont différentes. Formules enrichies en facteurs 2π. On a la relation évidente : $\hat{f}_1(2\pi\nu) = \hat{f}(\nu)$	On peut aussi symétriser la TF et son inverse. Formules enrichies en facteurs $\sqrt{2\pi}$. Attention ici la TF est modifiée: $\hat{f}_2(2\pi\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\nu)$

2.3 TF de fonctions usuelles

Transformée de Fourier d'une distribution de Dirac

La transformée de Fourier d'une distribution de Dirac, et son inverse, sont importantes. Elles sont à la base de l'analyse spectrale. Elles interviennent aussi souvent dans les calculs de TF. Si on utilise la propriété de la distribution de Dirac, la transformée de Fourier de $f(t) = \delta(t)$ s'écrit :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = e^{-i2\pi\nu 0} = 1$$

$\hat{f}(\nu)$ vaut donc 1 quelle que soit ν. On écrira :

$$\delta(t) \overset{TF}{\rightarrow} \mathbf{1}(\nu)$$

Pour démontrer la transformée inverse, on peut utiliser la description de δ comme une limite de fonction. On peut par exemple se servir de l'exercice suivant. On trouve bien :

$$\mathbf{1}(\nu) \overset{TFI}{\rightarrow} \delta(t)$$

On trouve de même aisément la TF d'une distribution de Dirac centrée en a :

$$\delta(t-a) \overset{TF}{\rightarrow} e^{-i2\pi\nu a} \qquad \text{et} \qquad e^{-i2\pi\nu a} \overset{TFI}{\rightarrow} \delta(t-a) \tag{9}$$

De même pour un Dirac en fréquence (attention au signe) :

$$e^{i2\pi t\nu_0} \overset{TF}{\rightarrow} \delta(\nu-\nu_0) \qquad \text{et} \qquad \delta(\nu-\nu_0) \overset{TFI}{\rightarrow} e^{i2\pi t\nu_0} \tag{10}$$

Comme l'ensemble des des distributions de Dirac $\delta(x-a)$ forme une base de fonctions, ces relations montrent que pour toutes les fonctions qui nous intéressent :

$$TF \circ TFI = Id$$

Exercice 1 : transformée de Fourier de la fonction porte

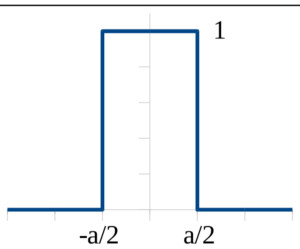
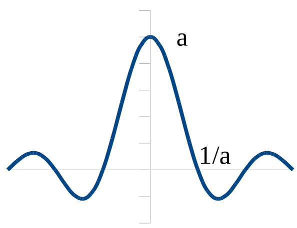
Vérifier que la transformée de Fourier de la fonction porte $f(t) = \Pi(t/T)$ est $\hat{f}(\nu) = T \operatorname{sinc}(\pi \nu T)$ où la fonction « sinc(x) » désigne le sinus cardinal sin(x)/x.

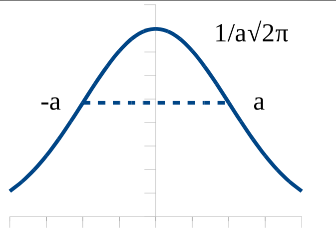
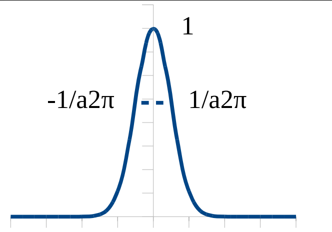
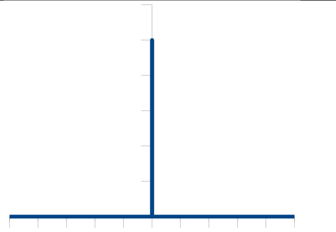
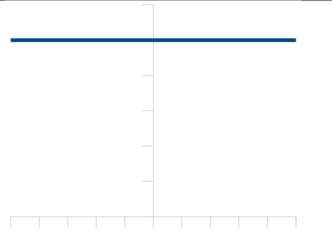
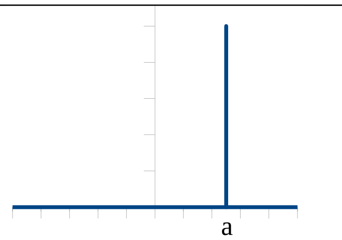
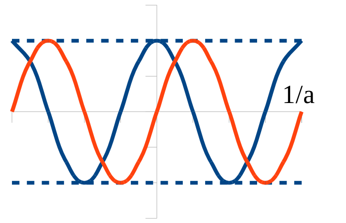
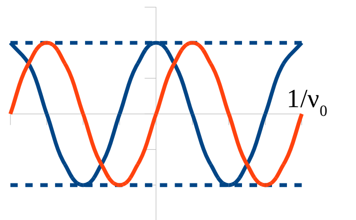
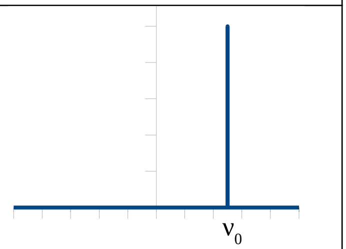
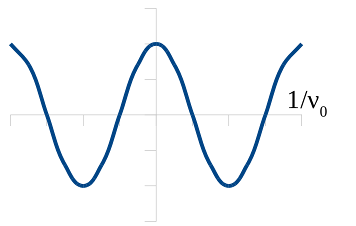
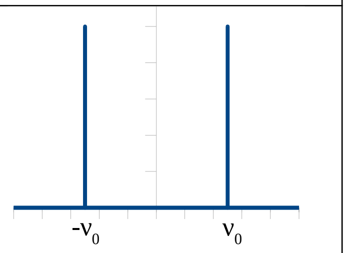
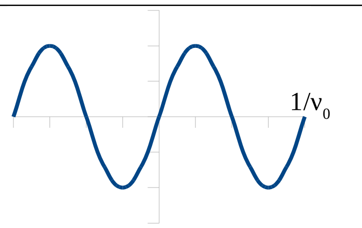
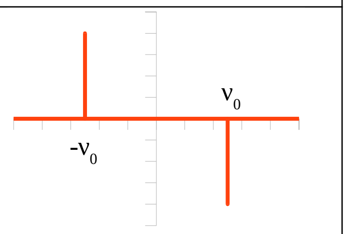
Prendre ensuite les limites T → ∞ et T → 0. Montrer que l'on retrouve la TF d'un Dirac ou la TF d'une constante.

Transformées de Fourier usuelles en image

Très souvent l'analyse de Fourier ne requière pas de calcul ou très peu. On peut très souvent obtenir un résultat en utilisant les caractéristiques des TF usuelles (forme, taille caractéristique) et les propriétés de la TF (voir chap. suivant).

Dans le tableau ci-dessous les courbes en bleu représentent la partie réelle et en orange la partie imaginaire de la fonction.

Fonction		**TF**	
$\Pi(x/a)$		$a \operatorname{sinc}(\pi\nu a)$	

$\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2a^2}}$		$e^{\frac{-\nu^2}{2b^2}}$ b=1/a2π	
$\delta(x)$		1	
$\delta(x-a)$		$e^{i2\pi\nu a}$	
$e^{i2\pi\nu_0 x}$		$\delta(\nu-\nu_0)$	
$\cos(2\pi\nu_0 x)$		$\frac{\delta(\nu-\nu_0)+\delta(\nu+\nu_0)}{2}$	
$\sin(2\pi\nu_0 x)$		$\frac{\delta(\nu-\nu_0)-\delta(\nu+\nu_0)}{2i}$	
$III_{Te}(t)$	Peigne de Dirac de largeur T_e	$\nu_e\ III_{\nu e}(\nu)$	Peigne de Dirac de largeur $\nu_e = 1/T_e$

2.4 Propriétés de la transformée de Fourier

Soit une fonction $f(t)$ qui a les propriétés dont on a besoin.

2.4.1 Linéarité

La transformation de Fourier est une opération linéaire, c'est-à-dire que si λ est une constante complexe ou réelle, on a :

$$TF\{\lambda f + \mu g\} = \lambda TF\{f\} + \mu TF\{g\} \quad (11)$$

2.4.2 Propriété 2 : changement de signe

Un renversement de l'axe des t (changement $t \to -t$) se traduit par un renversement de l'axe des ν :

$$f(-t) \overset{TF}{\to} \hat{f}(-\nu) \quad (12)$$

2.4.3 Propriété 3 : conjugaison

$$\overline{f(t)} \overset{TF}{\to} \overline{\hat{f}(\nu)} \quad (13)$$

2.4.4 Propriété 4 : changement d'échelle

Une dilatation ou une compression de l'axe des t (changement $t \to at$ où $a \in \mathbb{R}^*$) se traduit par une compression ou une dilatation de l'axe des ν :

$$f(at) \overset{TF}{\to} \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right) \quad (14)$$

On pourra retenir le résultat important suivant : une fonction large dans l'espace direct est étroite dans l'espace de Fourier, et inversement.

2.4.5 Propriété 4 bis : largeur des fonctions

On note Δt une largeur caractéristique de la fonction $f(t)$ et $\Delta \nu$ une largeur caractéristique de sa transformée de Fourier $\hat{f}(\nu)$. La fonction $f_a(t) = f(at)$ correspond à la fonction $f(t)$ contractée, sa largeur caractéristique est $\Delta t_a = \Delta t / a$. On obtient l'effet inverse sur la transformée de Fourier, et la largeur caractéristique de $\hat{f}_a(\nu)$ est $\Delta \nu_a = a \Delta \nu$. On voit que le produit de ces deux largeur reste constant :

$$\Delta t \, \Delta \nu = \text{cst} \quad (15)$$

2.4.6 Propriété 5 : translation

Une translation de l'axe des t (changement $t \to t+a$ où $a \in \mathbb{R}$) se traduit par une multiplication par un terme de phase linéaire $e^{i2\pi a\nu}$ dans l'espace de Fourier :

$$f(t+a) \overset{TF}{\to} e^{i2\pi a\nu} \hat{f}(\nu) \quad (16)$$

Ainsi, lorsqu'on effectue une translation, le module de la transformée de Fourier est inchangé, seule la phase contient l'information sur cette translation (ajout d'une contribution linéaire $2\pi a \nu$ à la phase de la TF de $f(t)$).

2.4.7 Propriété 6 : multiplication par un terme de phase linéaire

Une multiplication par un terme de phase linéaire de fréquence $\nu_0 \in \mathbb{R}$ dans l'espace direct se traduit par une translation d'une quantité $-\nu_0$ dans l'espace de Fourier :

$$e^{i2\pi\nu_0 t} f(t) \overset{TF}{\rightarrow} \hat{f}(\nu-\nu_0) \tag{17}$$

C'est la propriété symétrique de la précédente. On en déduit l'effet d'une multiplication par un cos :

$$\cos(2\pi\nu_0 t+\phi) f(t) \overset{TF}{\rightarrow} \frac{e^{i\phi}}{2}\hat{f}(\nu-\nu_0) + \frac{e^{-i\phi}}{2}\hat{f}(\nu+\nu_0) \tag{18}$$

On obtient la TF d'un paquet d'onde dont f est l'enveloppe.

2.4.8 Symétries

Si la fonction f présente des symétries, la transformée de Fourier présentera elle aussi certaines propriétés. La correspondance entre ces propriétés de symétrie n'est pas toujours très intuitive. Cependant, on les retrouve rapidement en reprenant la définition de la transformée de Fourier. On montre aisément les correspondances suivantes :

Propriété de la fonction	**Propriété de la TF**
Paire	Paire
Impaire	Impaire
Réelle	$\hat{f}(-\nu) = \overline{\hat{f}(\nu)}$
Imaginaire pure	$\hat{f}(-\nu) = -\overline{\hat{f}(\nu)}$
$f(-t) = \overline{f}(t)$	Réelle
$f(-t) = -\overline{f}(t)$	Imaginaire pure

On peut combiner ces propriétés. En particulier les fonctions qui intéressent le plus le physicien sont les fonction réelles qui vérifient :

Propriété de la fonction	**Propriété de la TF**
Réelle	$\hat{f}(-\nu) = \overline{\hat{f}(\nu)}$
Réelle + paire	Réelle + paire
Réelle + impaire	Imaginaire pure + impaire

2.4.9 Fonctions à valeurs réelles

Pour les fonctions réelles la transformée de Fourier vérifie $\hat{f}(-\nu) = \overline{\hat{f}(\nu)}$. Les fréquences positives et négatives sont reliées. Les coefficients sont égaux, à un signe près pour la phase. On peut donc se limiter à l'étude de la transformée de Fourier pour les fréquences positives. C'est pour ça que l'on dit souvent en physique que seules les fréquences positives ont un sens. En réalité les fréquences négatives ont un sens elles aussi : elles permettent de décrire des fonctions complexes.

Dans le cas d'une fonction réelle, on peut même modifier l'écriture de la TF pour que la fonction s'écrive comme la somme de fonction réelle (des cosinus) plutôt que des fonctions complexes (les exponentielles). On réécrit la transformée de Fourier inverse en ne sommant que les fréquences positives :

$$f(t) = \int_0^{+\infty} d\nu \left(\hat{f}(\nu)e^{i2\pi\nu x}+\hat{f}(-\nu)e^{-i2\pi\nu x}\right) = \int_0^{+\infty} d\nu \left(\hat{f}(\nu)e^{i2\pi\nu x}+\overline{\hat{f}(\nu)}e^{-i2\pi\nu x}\right)$$

$$f(t) = 2\int_0^{+\infty} d\nu\, \Re\left[\hat{f}(\nu)e^{i2\pi\nu x}\right]$$

On écrit ensuite la TF comme le produit d'un terme d'amplitude et d'un terme de phase : $\hat{f}(\nu) = A(\nu)e^{i\phi(\nu)}$.

Ont obtient ainsi la décomposition d'une fonction $f(t)$ à valeurs réelles en cosinus :

$$f(t) = 2\int_0^{+\infty} d\nu\, A(\nu)\cos(2\pi\nu x+\phi) \tag{19}$$

Une fonction réelle peut s'exprimer comme la superposition d'onde réelle de fréquences positives. Lorsque les équations sont linéaires on peut résoudre un problème physique en le traitant fréquence par fréquence, en cherchant des solutions sous la forme : $A\cos(2\pi\nu x+\phi)$.

2.4.10 Notations complexes en physique

En physique on utilise souvent la notation complexe qui permet de simplifier la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires. Cette notation revient à remplacer un cosinus par une exponentielle complexe :

$$\cos(2\pi\nu x+\phi) \rightarrow e^{i2\pi\nu x+\phi}$$

La notation complexe est très utile puisque qu'elle permet de simplifier les dérivées : $d/dt \rightarrow i\omega$.

L'utilisation de la notation complexe permet aussi de simplifier l'expression de la transformée de Fourier. Si on remplace le cos par une exponentielle dans la formule (19), on obtient :

$$f(x) = \Re(f_1(x)) \quad \text{avec} \quad f_1(t) = 2\int_0^{+\infty} d\nu\, A(\nu)e^{i(2\pi\nu x+\phi)} \tag{20}$$

Pour la physique des ondes, on parle de décomposition d'un signal en ondes planes.

On peut remarquer que l'expression de f_1 correspond à une TF pour laquelle on a supprimé les fréquences négatives. On peut aussi remarquer que pour les fréquences positives la TF de $f_1(t)$ est égale à la TF de $f(t)$ à un facteur 2 près. Il arrive souvent que l'on omette ce facteur 2 lorsqu'on écrit cette relation.

Limiter la TF aux fréquences positives permet souvent de simplifier les calculs. C'est en particulier le cas pour le calcul de la propagation d'un paquet d'onde.

3 La convolution

3.1 Définition

Soient f et g deux fonctions intégrables sur R.

On appelle produit de convolution de f par g l'intégrale :

$$h(x) = (f*g)(x) = \int_{\infty}^{+\infty} f(x')g(x-x')dx' \tag{21}$$

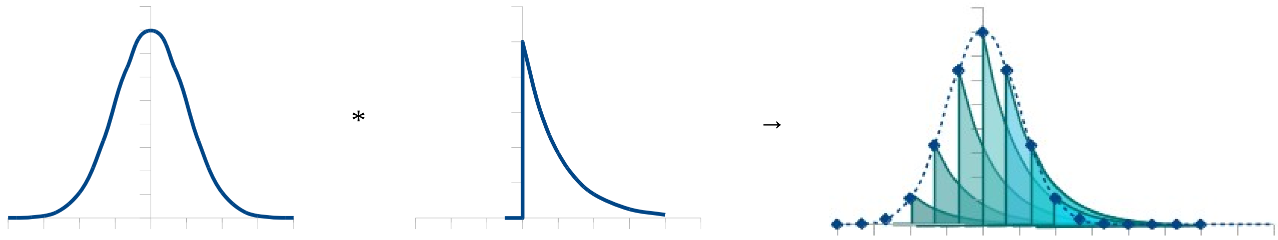
Le produit de convolution est une opération fonctionnelle, elle agit sur les deux fonctions f et g, et renvoie une fonction h. La notation $h(x) = f(x)*g(x)$ est donc incorrecte parce que $f(x)$ et $g(x)$ désignent des nombres et non des fonctions. Cela dit, on l'utilise parfois. C'est en particulier le cas lorsque l'on translate une des fonction (ex : $f(x-a)$).

Il y a plusieurs façon de « voir » le produit de convolution. Pour interpréter ce produit de manière physique, on peut dans un premier temps considérer $x'=x_1$ comme un paramètre. Il suffit ensuite de remarquer que

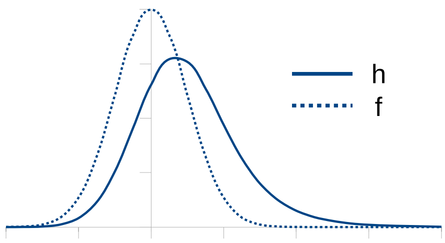
$g_1(x) = f(x_1) g(x - x_1)$ n'est rien d'autre que la fonction $g(x)$ translatée pour être centrée sur x_1 puis multiplier par une constante $f(x_1)$. Cette Si on interprète l'intégrale comme une somme (intégrale de Riemann) en considérant des intervalles de largeur Δx :

$$f * g = \sum_i f(x_i) g(x - x_i) \Delta x$$

On voit que l'on somme des fonction $g_i(x) = f(x_i) g(x - x_i)$ centrées sur x_i pondérées par un facteur $f(x_i) \Delta x$.



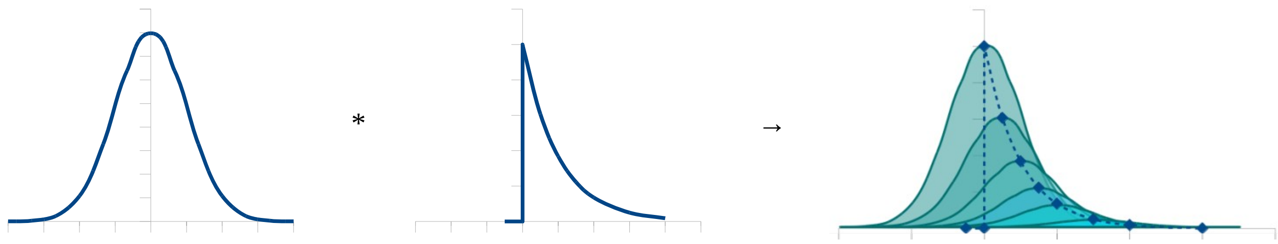
Si on somme toutes ces fonctions on obtient le produit de convolution. Par rapport à la Gaussienne de départ, la fonction $h(x)$ est légèrement décalée vers la droite et dissymétrique. Ceci vient bien sûr de l'exponentielle décroissante qui est elle-même centrée sur une valeur positive de x et dissymétrique.



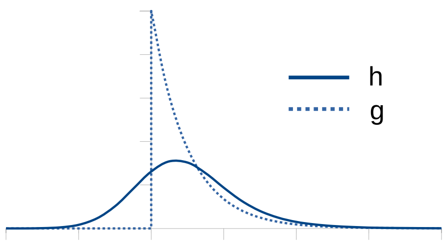
On peut noter que le produit de convolution est symétrique et qu'on peut faire le raisonnement inverse (en faisant un changement de variable : $x'' = x - x'$).

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{\infty}^{+\infty} f(x - x'') g(x'') d x'' \tag{22}$$

On peut donc interpréter le produit en considérant que c'est maintenant $f(x)$ qui est translatée puis sommée. On obtient bien évidemment le même résultat.



Par rapport à la fonction exponentielle, la fonction $h(x)$ varie plus lentement. En convoluant la fonction par une Gaussienne on a effectué un lissage.



Par cette approche, on comprend bien que le produit de convolution peut servir à décrire la notion de flou : chaque point de la courbe $f(x')$ est remplacé par une tache décrite par la courbe $g(x-x')$ (voir les exemples).

3.2 Propriétés

- Associativité : $(f*g)*h = f*(g*h)$
- Commutativité : $f*g = g*f$
- Linéarité : $f*(g + h) = f*g + f*h$
- Décalage : pour décaler (changer d'origine) un produit de convolution $f*g$, il suffit de décaler l'une des deux fonctions f ou g . Ainsi (en utilisant une notation impropre, mais pratique) :

$$(f*g)(x+a) = f(x+a)* = f*g(x+a) \text{ avec } a\in\mathbb{R}$$

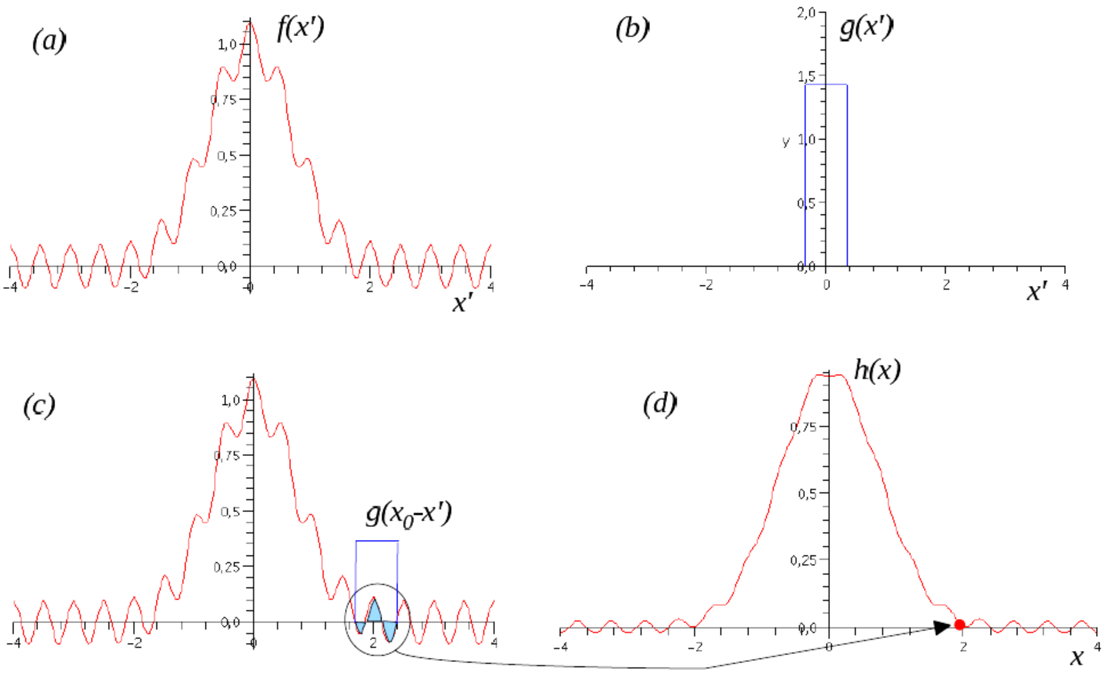
3.3 Exemples

3.3.1 Convolution par une porte

Soit $g(x) = \frac{1}{a}\Pi\left(\frac{x}{a}\right)$ une porte de largeur a et d'intégrale 1. La convolution d'une fonction f quelconque par g s'écrit :

$$h(x) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\,\Pi\left(\frac{x-x'}{a}\right)dx' = \frac{1}{a}\int_{x-a/2}^{x+a/2} f(x')dx'$$

Il s'agit donc d'une moyenne glissante, c'est-à-dire d'une valeur moyenne de f sur un intervalle de largeur a autour du point x . Cette opération a pour effet d'atténuer les fluctuations rapides de f et est notamment utilisée en traitement du signal pour réduire le bruit.



3.3.2 Réponse d'un appareil de mesure

Un appareil de mesure (voltmètre, ampèremètre ...) ne mesure jamais une grandeur à un instant donné, il a toujours besoin d'effectuer sa mesure sur un temps caractéristique τ. En première approximation on peut considérer qu'il effectue la moyenne sur un temps τ. Chaque valeur affichée h(t), correspond en réalité à la moyenne de la grandeur f(t) sur un temps τ (c-a-d entre f(t) et f(t-τ)). la fonction h(t) correspond donc à la convolution de f(t) par une porte (voir exemple précédent).

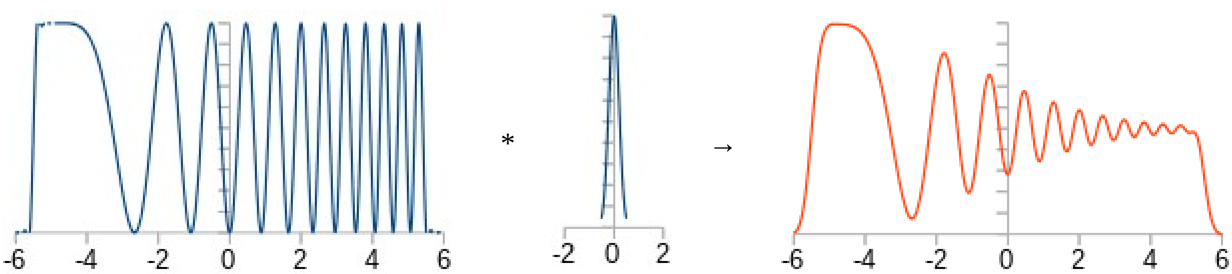
De manière plus générale, si l'appareil peut réaliser une moyenne pondérée, ce qui revient à convoluer la fonction f(t) par une fonction g(t) différente d'une porte.

$$h = f * g$$

La fonction f correspond au signal, h est mesure. La fonction g est appelée fonction d'appareil ou réponse impulsionnelle.

3.3.3 Convolution et fréquences

Dans l'exemple suivant, on considère une fonction de fréquence variable telle que celle utilisée pour la vobulation. On utilise un signal de la forme $\Pi_6(t)\cos(at^2+bt+c)$. La pseudo-période du signal en $t = 0$ vaut $T_0 = 0{,}4$. Ce signal est convolué par une gaussienne de largeur $\sigma = 0{,}2$.



On voit que les variations dont la demi-période est plus petite que σ sont fortement diminuées. La convolution par une fonction en cloche correspond donc à un opérateur passe bas. On retrouve cet effet dans beaucoup de phénomènes : le flou en photographie, temps d'intégration pour les appareil en physique etc (voir exercices) .

3.3.4 Convolution par un pic de Dirac

$$(f*\delta)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\,\delta(x-x') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x'')\,\delta(x'') = f(x)$$

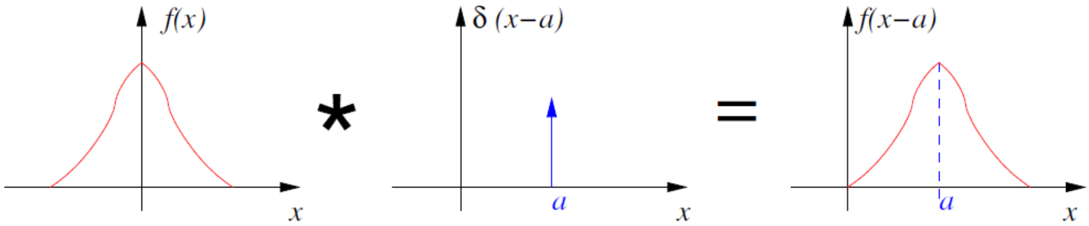
3.3.5 Convolution par un pic de Dirac décalé

Il s'agit d'une propriété importante en termes de signification physique. Ainsi, en utilisant la propriété de décalage, on peut écrire :

$$f*\delta(x-a) = (f*\delta)(x-a) = f(x-a)$$

On obtient un résultat intéressant : pour translater une fonction d'une quantité a, on la convolue par un pic de Dirac $\delta(x-a)$. On écrira souvent (même si la notation est incorrecte) :

$$f(x)*\delta(x-a) = f(x-a) \qquad (23)$$

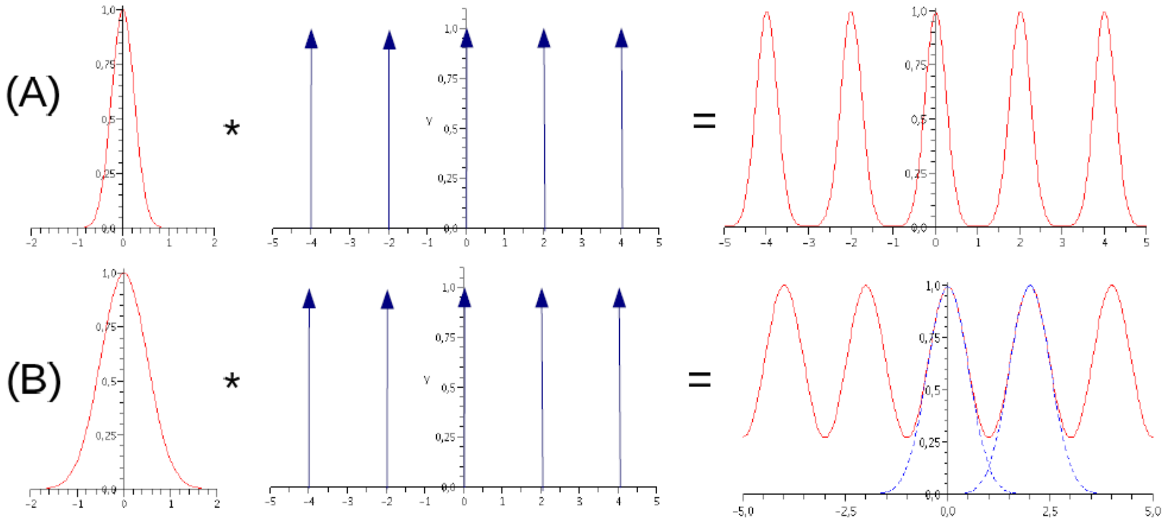


3.3.6 Convolution par un peigne de Dirac

En utilisant la propriété précédente, il vient immédiatement :

$$(f*\mathrm{III}_a)(x) \;=\; f(x)\;*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-na) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x-na) \tag{24}$$

Convoluer f par un peigne, c'est « périodiser » f, c'est-à-dire créer une fonction périodique à partir d'une infinité de répliques de f centrées sur les « dents » du peigne, et faire la somme de toutes ces répliques.



3.4 Transformée de Fourier d'une convolution et d'un produit

- Soient deux fonctions f et g de la même variable t, et h leur produit de convolution :

$$h(t) \;=\; (f*g)(t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t-t')\,dt'$$

Nous avons donc :

$$\hat{h}(\nu) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i2\pi\nu t}dt \;=\; \int_{t=-\infty}^{+\infty}\int_{t'=-\infty}^{+\infty} f(t')g(t-t')e^{-i2\pi\nu t}dt\,dt'$$

On permute les intégrales :

$$\hat{h}(\nu) \;=\; \int_{t'=-\infty}^{+\infty} dt'\;\; f(t')\int_{t=-\infty}^{+\infty} dt\;\; g(t-t')e^{-i2\pi\nu t}$$

La seconde intégrale est la transformée de Fourier de la fonction $g(t-t')$, soit d'après la propriété de translation :

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} g(t-t')e^{-i2\pi\nu t}dt = \hat{g}(\nu)e^{-i2\pi\nu t'}$$

Finalement, il vient :

$$\hat{h}(\nu) = \hat{g}(\nu)\int_{t'=-\infty}^{+\infty} dt' \ f(t')e^{-i2\pi\nu t'} = f(\nu)g(\nu)$$

La transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple des transformées :

$$(f*g)(t) \overset{TF}{\rightarrow} \hat{f}(\nu)\hat{g}(\nu) \tag{25}$$

Inversement, intéressons-nous à la transformée de Fourier du produit des deux fonctions f et g. En écrivant $g(t)$ comme la transformée inverse de $\hat{g}(\nu')$, on a :

$$TF\{f\,g\}(\nu) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)e^{-i2\pi\nu t}dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\int_{\nu'=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\nu')e^{+i2\pi\nu' t}\,e^{-i2\pi\nu t}\,d\nu'\,dt$$

Soit :

$$TF\{f\,g\}(\nu) = \int_{\nu'=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\nu')\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi(\nu-\nu')t}dt\,d\nu' = \int_{\nu'=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\nu')\hat{f}(\nu-\nu')d\nu'$$

La transformée de Fourier d'un produit de fonctions est la convolution des transformées :

$$f(t)g(t) \overset{TF}{\rightarrow} (\hat{f}*\hat{g})(\nu) \tag{26}$$

4 Principales applications

4.1 Multiplications dans l'espace réel

(Correspond à une convolution dans l'espace réciproque.)

4.1.1 Par une fonction (porte, cloche ...)

Fenêtre d'observation, échantillonnage, diaphragme en optique.

4.1.2 Par un ou des pics de Dirac

Peigne : discrétisation (numérisation).

4.2 Convolutions dans l'espace réel

(Correspond à un produit dans l'espace réciproque.)

4 Par une fonction (porte, cloche ...)

Flou, réponse d'un appareil, filtre en électronique.

4.2.1 Par un ou des pics de Dirac

Pic : translation, retard. Peigne : discrétisation dans l'espace réciproque, série de Fourier.

4.2.2 Convolution de deux fonctions

Spectrométrie par transformée de Fourier (fonction carré dans l'espace réciproque).