

LP25 (49): Oscillateurs, portraits de phase et non-linéarités

Alexandre Fafin

24/05/18

Références

- [1] J-P Faroux and J. Renault. *Mécanique 1, Cours et 162 exercices corrigés*. Dunod, 2014.
- [2] M. Fruchart, P. Lidon, E. Thibierge, M. Champion, and A. Le Duff. *Physique expérimentale. Optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*. deboeck, 2016.
- [3] C. Garing. *Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques*. Ellipses, 1998.
- [4] M. Krobb. *Electronique expérimentale*. Ellipses, 2002.
- [5] J.-Ph Pérez. *Mécanique : fondements et applications*. Dunod, 2014.

Niveau

L3

Pré-requis

- Électronique
- Régime sinusoïdal forcé
- Rétroactions et oscillations

Objectifs

- Caractéristiques des régimes non-linéaire (enrichissement spectral, portrait de phase, bifurcation)
- Intérêt du portrait de phase

Table des matières

1	Le pendule pesant : du linéaire au non linéaire[1]	2
1.1	Mise en équation	2
1.2	Portrait de phase	3
1.3	Perte d'isochronisme	4
2	Génération d'harmoniques	5
2.1	Cas du pendule pesant[1]	5
2.2	Seconde harmonique en optique non-linéaire [3]	5
3	Oscillateurs de relaxation	5
3.1	Équation de Van der Pol [5]	5
3.2	Exemple en électronique[4]	5

Introduction

Jusqu'à présent nous avons étudié des régimes linéaires, comme par exemple l'oscillateur harmonique. En prenant l'exemple du pendule simple, on a cherché à décrire le mouvement (ou système physique) par des équations simples, en approximant $\sin \theta = \theta$. L'intérêt est alors d'avoir un système linéaire qui obéit au principe de superposition. Justement, revenons sur le pendule pesant et montrons que le comportement linéaire est un cas limite

1 Le pendule pesant : du linéaire au non linéaire[1]

1.1 Mise en équation

On adopte ici un point de vue énergétique. On considère un pendule simple soumis à deux forces : le poids \vec{P} et la tension du fil \vec{T} . Le poids dérive d'une énergie potentielle que l'on peut écrire

$$E_p = mgz + \text{cte} = -mgl \cos \theta + \text{cte} \quad (1)$$

En choisissant $E_p = 0$ pour $\theta = 0$ on arrive à :

$$E_p = mgl(1 - \cos \theta) \quad (2)$$

Pour l'énergie cinétique on a :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (3)$$

Comme on ne considère pas de force dissipative, l'énergie mécanique est conservée et s'écrit :

$$E = E_c + E_p = mgl(1 - \cos(\theta)) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (4)$$

On a ici une intégrale première du mouvement. En dérivant l'énergie on obtient l'équation du mouvement que l'on peut mettre sous la forme suivant en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$:

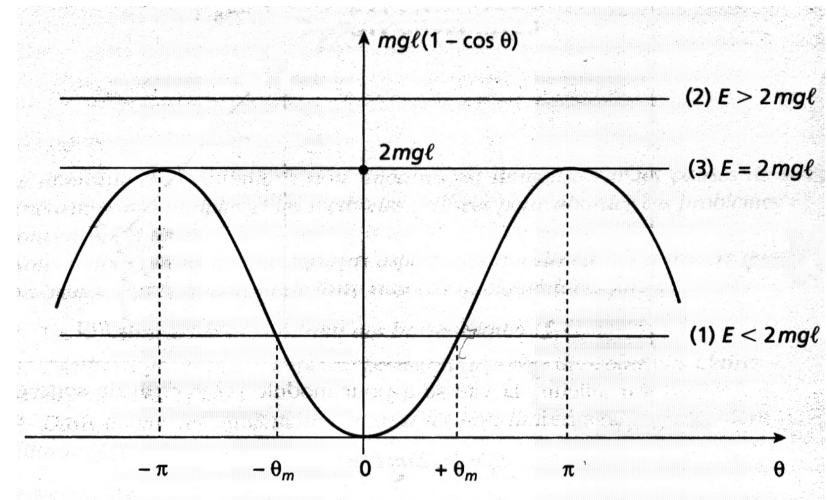
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (5)$$

Revenons à l'équation de l'énergie mécanique et exprimons la autrement :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{ml^2}(E - mgl(1 - \cos \theta)) \quad (6)$$

Pour que le mouvement ait lieu $\dot{\theta}^2 \geq 0$, donc $E \geq mgl(1 - \cos \theta)$

On va s'intéresser à tracer l'énergie potentielle $E_p = mgl(1 - \cos \theta)$ en fonction de θ :



On peut alors distinguer 4 cas en fonction de l'énergie E initiale communiquée au pendule :

- $E \ll 2mgl$. C'est le cas des petits angles. On a déjà montré que $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
- $0 < E < 2mgl$ dans ce cas $\theta \in [-\theta_m; \theta_m]$.
- $E = 2mgl$. Pour $\theta = \pi$, on arrive à une position instable avec une vitesse nulle
- $E > 2mgl$: Rien ne limite θ , on a un mouvement de type fronde.

1.2 Portrait de phase

Le portrait de phase est la représentation de la coordonnée de position en fonction de la coordonnée de la vitesse. Dans notre cas on va représenter $\dot{\theta}$ en fonction de θ .

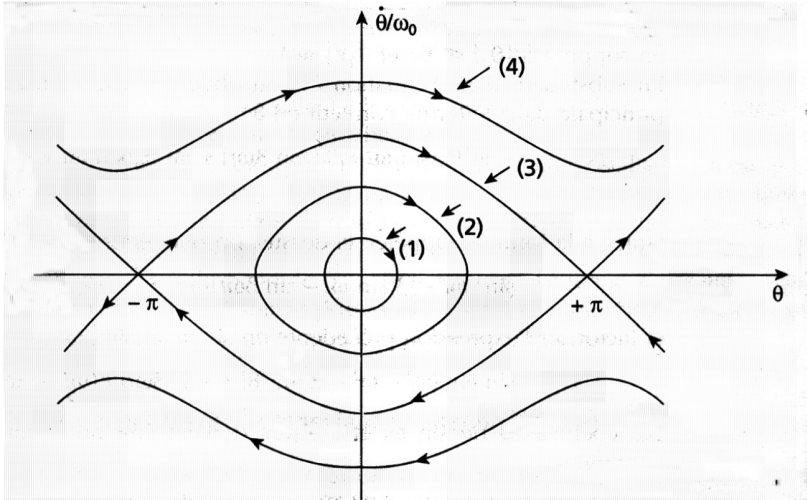
L'équation 4 peut s'écrire :

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 + 2(1 - \cos \theta) = \frac{E}{mgl} \quad (7)$$

Plaçons nous dans le cas des petits angles ($E \ll 2mgl$), ce qui permet d'effectuer le développement limité du cosinus à l'ordre 2. On arrive à :

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 + \theta^2 = \frac{E}{mgl} \quad (8)$$

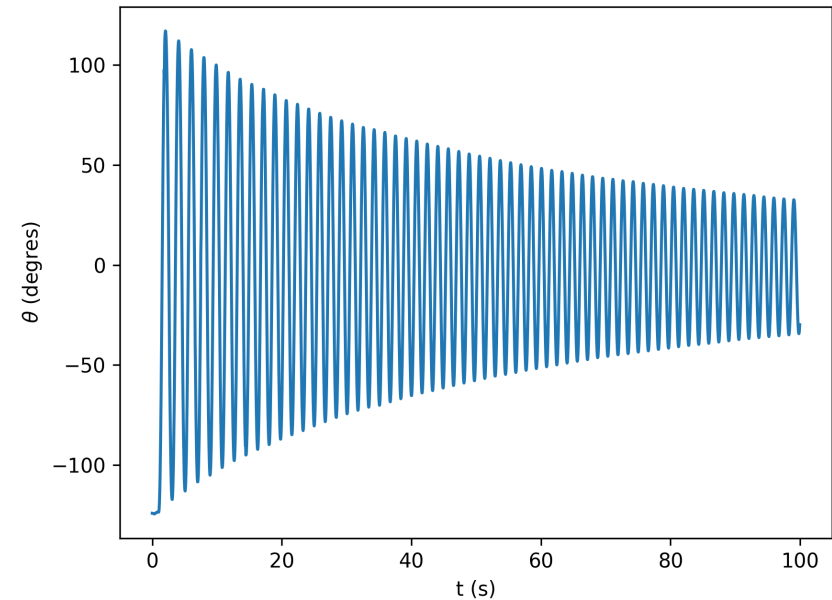
Dans le plan $(\theta, \dot{\theta}/\omega_0)$, on reconnaît l'équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{\frac{E}{mgl}}$. Si on prend le cas $0 < E < 2mgl$, on va alors avoir un cercle déformé. Résumons les différentes situations :



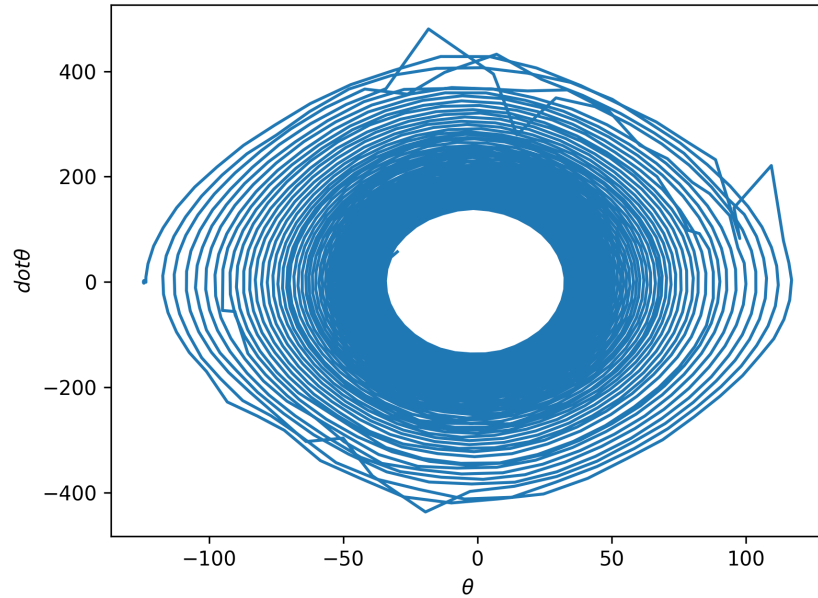
Le point $\theta = \pi$ correspond à un point singulier correspondant à une position instable du système. On a un outil pour vérifier les non-linéarités

qui est beaucoup plus précis que l'observation de l'allure temporelle de θ . Ainsi même si on n'est pas capable de d'écrire une équation d'évolution d'un système, le portrait de phase est un moyen de sonder les surfaces énergétiques.

Manip A partir de l'enregistrement vidéo d'un pendule et d'un traitement informatique avec le logiciel tracker, on peut suivre l'évolution de θ en fonction du temps



Grâce à python on peut tracer simplement le portrait de phase de ce pendule. On remarque que pour des grands angles, on s'éloigne de la forme ellipsoïdale.



A cause des frottement, l'amplitude de θ n'est pas constante. L'influence sur le portrait de phase sera une spirale dont le rayon diminue à mesure que t augmente.

1.3 Perte d'isochronisme

L'approximation $\sin \theta = \theta$ n'est valable que pour des petits angles. Pour des angles plus importants il est nécessaire de faire un développement limité du sinus à l'ordre supérieur :

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} \quad (9)$$

Ainsi l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 - \frac{\omega^2}{6}\theta^3 = 0 \quad (10)$$

On cherche une solution approchée de l'équation précédente sous la forme :

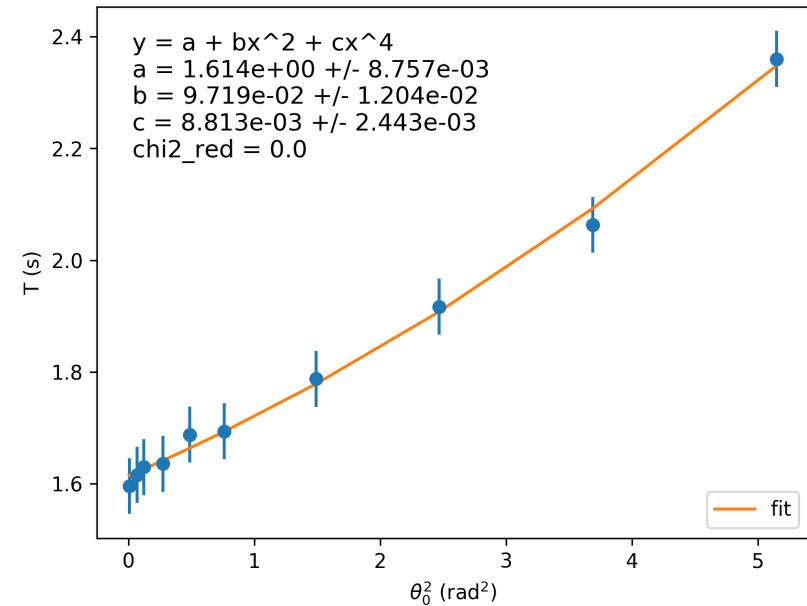
$$\theta = \theta_0(\sin(\omega t) + \varepsilon \sin(3\omega t)) \quad (11)$$

avec $\varepsilon \ll 1$. En injectant cette équation dans l'équation du mouvement on montre :

$$T = T_0(1 + \frac{\theta_0^2}{16}) \quad (12)$$

La période des oscillations dépend maintenant de θ_0 (l'angle initial).

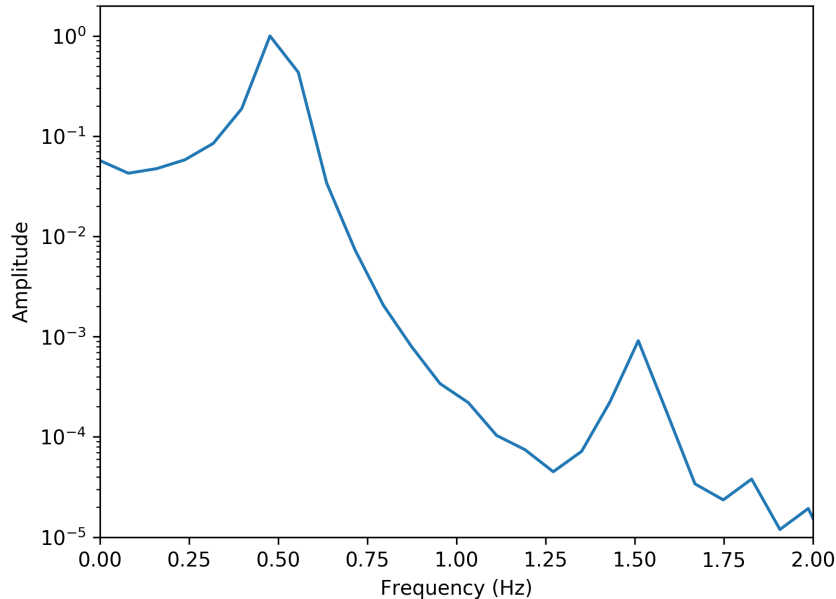
Manip [2] Montrer l'isochronisme des oscillations. On trace T en fonction de θ_0^2 . Pour bien ajuster la courbe il est nécessaire de prendre en compte un terme d'ordre supérieur en θ^4 :



2 Génération d'harmoniques

2.1 Cas du pendule pesant[1]

Manip Effectuer la transformée de Fourier de $\theta(t)$ et montrer l'apparition d'une harmonique à 3ω . Pour cela il faut effectuer la transformée de Fourier uniquement sur les oscillations de grandes amplitudes. J'ai choisi de prendre en compte $0 < t < 10$ s. Il faut se mettre en échelle log car l'amplitude à 3ω est très inférieure à l'amplitude à ω .



2.2 Seconde harmonique en optique non-linéaire [3]

Partie bien développée dans le Garing. On montre que la polarisation n'est plus simplement proportionnelle au champ électrique dans le cas où l'amplitude du champ électrique est importante. Cela explique que l'on utilise un laser Nd :Yag pour générer un faisceau de couleur verte. En

effet le milieu Nd :Yag émet à 1064 nm mais en introduisant un cristal non linéaire, on va générer une harmonique à 532 nm.

3 Oscillateurs de relaxation

On a vu jusque là des oscillations libres ou forcées, nous allons maintenant étudier des oscillateurs auto-entretenus.

3.1 Équation de Van der Pol [5]

Un oscillateur de relaxation est un système qui évolue périodiquement entre 2 états de fonctionnement d'énergies différentes grâce à une source extérieure d'énergie. On peut prendre l'exemple du vase de Tentale[5] où la hauteur z de liquide dans le vase obéit à l'équation de Van der Pol :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \varepsilon \omega_0 \left(1 - \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right) \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0 \quad (13)$$

Tout l'intérêt de l'équation de Van der Pol est d'introduire un amortissement de signe variable suivant $z < z_0$ ou $z > z_0$. Cela permet d'expliquer le démarrage et la stabilisation en amplitude d'une oscillation.

- Si $\varepsilon \simeq 0$: la non-linéarité est très faible, solution quasi-sinusoidale
- Si $\varepsilon \gg 0$: On a des oscillations de relaxation.

3.2 Exemple en électronique[4]

Manip Réaliser le montage et effectuer le portrait de phase à l'oscilloscope. L'intérêt du montage est de pouvoir faire varier ε à l'aide d'une résistance et d'étudier les différents régimes.

Conclusion

On a introduit un outil très puissant : le portrait de phase. Nous avons étudié des systèmes non-linéaires et vu quelques conséquences : génération d'harmonique et perte d'isochronisme des oscillations.

Remarques

- L'intérêt du portrait de phase doit bien ressortir. Il est intéressant d'introduire un exemple de potentiel double puits pour étudier les bifurcations. On peut montrer sur cet exemple que l'on a un système chaotique.
- Leçon assez longue (pour 40 min). L'exemple en optique peut être enlevé.