LP1: Gravitation

Alexandre Fafin

22/03/18

Références

[1] D. Augier and C. More. *Compétences prépas Physique PCSI.* Tec & Doc Lavoisier, 2014.

[2] C. Clerc and P. Clerc. *Mécanique, PCSI.* Bréal, 2003.

[3] J-P Faroux and J. Renault. *Mécanique 1, Cours et 162 exercices corrigés.* Dunod, 2014.

[4] Richard Feynmann. *Le cours de physique de Feynman, mécanique 1.* Dunod, 2014.

[5] J.-Ph Pérez. *Mécanique : fondements et applications.* Dunod, 2014.

[6] K. Lewis S. Olivier. *Compétences prépas Physique PC PC*.* Tec & Doc Lavoisier, 2014.

Niveau

L1

Prè-requis

— Mécanique du point
— Electrostatique

Objectifs

— Historique de la gravitation
— Aspects energétiques
— Applications de la gravitation

Table des matières

Introduction

Il existe quatre intéractions fondamentales (gravitation, électromagnétique, forte, faible) et la gravitation fait partie d'une de ces 4 interactions. Bien que le concept de gravitation soit très anciens, c'est aujourd'hui l'interaction la plus mal comprise. On va suivre dans cette leçon une approche historie.

1 Du mouvement planétaire à la théorie de la gravitation

1.1 Les lois de Kepler et le principe d'inertie

Bref aperçu historique :

— Aristote (-400 av JC) : Vision géocentrique → La Terre est fixe et les astres gravitent autour d'elle.

— Copernic (1473-1543) : Le soleil est au centre du monde

— Kepler (1571-1630) : Relations mathématiques qui régissent le mouvement des planètes.

Les lois de Kepler ont été obtenus à partir d'observation expérimentales (avec Tycho Brahé)

— Chaque planète se déplace autour du Soleil selon une ellipse avec le Soleil à l'un de ses foyer.

— Le rayon vecteur allant du Soleil à la planète balaye des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux

— Les carrés des périodes de n'importe laquelle des deux planètes sont proportionnels aux cubes de la demi-longueur des axes principaux de leurs orbites respectives ($T^2 \propto a^3$)

On connait la façon dont les astres se déplacent mais on ne comprend pas pourquoi.

Tandis que Kepler découvrait les lois, Galilée étudiait les lois du mouvement. Il comprit le principe d'inertie : en l'absence d'influence extérieure, tout corps ponctuel perdure dans un mouvement rectiligne uniforme.

1.2 La loi de la gravitation de Newton (ou universelle)

Newton ajouta la notion de force[4]. Pour changer la vitesse ou la direction du mouvement du corps une force est nécessaire. L'idée de Newton a été de se demander pourquoi la pomme tombe sur la Terre alors que la lune ne tombe pas. On peut étudier le mouvement de la lune en supposant un mouvement circulaire uniforme. Voir [3] p 144.

Newton montra que tous les corps massiques de l'univers s'attire les uns des autres.

$$\overrightarrow{F}_{1/2} = -\overrightarrow{F}_{2/1} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} u_{1\vec{\to}2} \quad (1)$$

où m_1 et m_2 sont les masses gravitationnelles des corps 1 et 2, r_{12} la distance entre les corps 1 et 2 et G la constante de gravitation. $G \approx 6,67.10^{-11} kg^{-1}.m^3.s^{-2}$.

Remarques

— Analogie avec la force électrostatique étable par Charles Coulomb en 1785. Une particule de charge électrique q_2 exerce sur une seconde particule de charge q_1 la force

$$F_{2/1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r \quad (2)$$

— G et $1/(4\pi\varepsilon_0)$ donne une idée du rapport des deux forces : la force électrostatique est en ordre de grandeur 10^{39} fois plus intense que la force de gravitation

— La force électrostatique peut-être attractive ou répulsive alors que la force de gravitation est uniquement attractive

1.3 Théorème de Gauss

Electrostatique	Gravitation
$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r$	$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$
q	m
$\vec{E}$	$\vec{\mathcal{G}}$
$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{F} = m\vec{\mathcal{G}}$
$\frac{1}{\varepsilon_0}$	$-4\pi G$

A partir de l'analogie avec la force electrostatique, en déduire le théorème de gauss

$$\oint_S \vec{G}\overrightarrow{dS} = -4\pi G M_{int} \tag{3}$$

1.4 Masse et poids

Ne pas confondre masse gravitationnelle et masse inertielle. La masse gravitationnelle est la capacité de 2 corps massifs à s'attirer. La masse inertielle est la capacité d'un corps à s'opposer à sa mise en mouvement. Dans la deuxième loi de newton ce sont des masses inertielles qui apparaissent : $\sum \vec{f} = m\vec{a}$, tandis que ce sont des masses gravitationnelles qui apparaissent dans la loi de gravitation. L'égalité entre ces deux masses a été montré par Newton. Dans un tube à vide, deux corps possèdant une masse inerte différente acquièrent la même accéleration au cours de la chute [5]. Aujourd'hui des expériences ont montré l'égalité entre la masse grave et la masse inerte avec une précision relative de 10^{-12}.

On peut faire le lien entre l'acceleration de la pesenteur g et la constante gravitationnelle G . On suppose que la terre est une boule de rayon $R_T = 6400$ km de masse $M_T = 6,0.10^{24}$ kg et de symétrie sphérique. La norme force exercée par la terre sur un objet de masse m s'écrit

$$F = G\frac{mM_T}{R_T^2} = mg \tag{4}$$

On en déduit :

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM_T}{R_T^2} =\approx 9,8 \text{ m.s}^{-2} \tag{5}$$

C'est ici un ordre de grandeur car g dépend également de la rotation de la Terre (cours de 2ème année). La formule complète est :

$$\vec{g} = G_T(M) + \Omega^2 H\vec{M} + \vec{G}_a(M) - \vec{G}_a(T) \tag{6}$$

Le premier terme représente 99% de la pesanteur. Le second terme est dû à la rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique. Le dernier terme représente les champs gravitationnels causés par les autres astres respectivement en M et au centre T de la Terre. Ce terme est dit de marée. Par définition $\vec{g}$ est la verticale du lieu. Du fait du second terme, dépendant de la latitude du lieu, cette direction ne se confond pas exactement avec celle du centre de la Terre, même en supposant que celle-ci comme une distribution parfaitement sphérique de masse.

Manip : Mesurer la constante de gravitation g. Soit expérience de la chute libre avec une bille ou expérience du rail incliné.

2 Mouvement des astres

2.1 Conservation du moment cinétique

Un point matériel soumis à une force centrale conservative possède un moment cinétique constant [6]. En effet, appliquons le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt} = \overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} \tag{7}$$

car $\overrightarrow{OM}//\overrightarrow{F}$. Le moment cinétique est donc constant, ce qui implique que le mouvement est plan ([6]). On peut à partir de là retrouver la loi des aires de la deuxième loi de Kepler.

$$\overrightarrow{L}_O = mC\vec{u}_z = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z \tag{8}$$

Ici c'est clair : quand r augmente, la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ diminue car le moment cinétique est constant.

2.2 Aspect énergétique

La force graviationelle est conservative, ce qui implique qu'elle dérive d'une énergie potentielle. Le mouvement de du point matériel M est plan , ce qui entraîne que l'on peut repérer le point M par deux coordonnées : r et θ. La conservation du moment inétique implique une relation entre r et θ : $C = r^2\dot{\theta}$. Comme la force gravtiationnelle est conservative, alors l'énergie mécanique est conservée [6] :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p \tag{9}$$

On peut alors introduire une énergie potentielle effective :

$$E_{p,eff}(r) = E_p(r) + \frac{mC^2}{2r^2} \tag{10}$$

Il faut exprimer l'énergie potentielle $E_p(r)$.

$$E_p(r) = -\int_{r_0}^{r} G\frac{mm'}{r} = -G\frac{mm'}{r} + cte \tag{11}$$

On peut choisir l'énergie potentielle nulle à l'infini, et dans ce cas cte=0. On a donc

$$E_p(r) = -G\frac{mm'}{r} \tag{12}$$

On a donc :

$$E_m = E_{c,eff} + E_{p,eff} \tag{13}$$

$E_{c,eff} \geq 0$, ce qui implique $E_{p,eff} \leq Em$. On peut alors distinguer trois cas :

— $E_m < 0$: Etat lié. Montrer sur la courbe de l'énergie potentielle effective.
— $E_m > 0$: Etat libre, état de diffusion.
— $E_m = 0$. Cas peu probable.

2.3 Forme des trajectoires

On utilise le formalisme de Binet en posant $u = \frac{1}{r}$. Partons de l'expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires :

$$v = \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\phi} \end{vmatrix} \tag{14}$$

On peut montrer que le vecteur vitesse en introduisant le changement de variable $u = \frac{1}{r}$ s'écrit[5] :

$$v = \frac{L_z}{m}\begin{vmatrix} -\frac{du}{d\phi} \\ u \end{vmatrix} \tag{15}$$

Avec ces variables l'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}m\frac{L^2}{m^2}\left[\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2\right]\dot{r}^2 + Ku \tag{16}$$

en notant $K = -Gmm'$.

On dérive cette expression par rapport à ϕ, en partant du principe de la conservation de l'énergie et on arrive à :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p} \tag{17}$$

avec $p = \frac{L^2}{mK}$

Ainsi on trouve :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\phi - \phi_0)} \tag{18}$$

avec $e = Ap$

Ainsi on peut exprimer l'énergie mécanique en fonction de l'excentricité e :

$$E_m = G\frac{mM}{2p}(1 - e^2) \tag{19}$$

— Etats libres : $E_m \geq 0$: la conique est une hyperbole si $Em > 0$ ($e > 1$ et une parabole si $E_m = 0$ ($e = 1$)
— Etats liés : $E_m < 0$: la conique est une ellipse et lorsque l'excentricité atteint sa valeur minimal $e = 0$

3 Satellites dans l'espace

3.1 Vitesse d'évasion

[5]. Donner la valeur de la vitesse

3.2 Assistance gravitationnelle

[1, 2]. Calculer la distance minimale d'approche d'un satellite (exercice 7)

4 Conclusion

Ouvrir sur la gravitation et la relativité [4]. La théorie de la relativité d'Einstein, montre que toute particule possèdant de l'énergie possède de la masse au sens où elle est attirée gravitationnellement. Ainsi lorsque de la lumière passe près du soleil, elle se trouve déviée.