Correction de l'examen 2014
Electrostatique et magnétostatique (11PM21)

Thibault Hiron
thibault.hiron@univ-bpclermont.fr

4 mai 2015

A Segment chargé

1 Calcul du potentiel électrostatique

On étudie ici un système de charges continu. Ainsi, le potentiel électrostatique engendré au point $M(x)$ par le segment chargé s'écrit :

$$\boxed{V(x) = \int_A^B \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM}} \tag{1}$$

Aussi, une portion de segment de longueur dx' autour d'un point $P(x')$ a pour charge : $dq = \lambda dx'$. Le potentiel électrostatique s'écrit par conséquent :

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_A^B \frac{\lambda dx'}{4\pi\varepsilon_0 PM} \\ &= \int_{-d}^{d} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 (x - x')} dx' \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-d}^{d} \frac{dx'}{x - x'} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\ln(x - x') \right]_{-d}^{d} \end{aligned}$$

On a donc le potentiel électrostatique généré sur l'axe Ox par le segment chargé qui vaut :

$$\boxed{V(x) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{x+d}{x-d}\right)} \tag{2}$$

2 Champ électrostatique

L'axe Ox est axe de symétrie du système de charges, donc le champ électrostatique sur l'axe est orienté suivant $\vec{e}_x$: $\vec{E}(M) = E_x(x)\vec{e}_x$ Il est donc possible d'utiliser la relation champ-potentiel à partir du potentiel calculé à la question précédente.

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V} \tag{3}$$

On a donc ici :

$$
\begin{aligned}
E_x(x) &= -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} \\
&= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln\left(\frac{x+d}{x-d}\right)\right] \\
&= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{x-d-(x+d)}{(x-d)^2}}{\frac{x+d}{x-d}} \\
&= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2d}{(x-d)(x+d)}
\end{aligned}
$$

Ainsi, le champ électrostatique généré au point $M(x)$ par le segment chargé s'écrit :

$$
\boxed{\vec{E}(x) = \frac{\lambda d}{2\pi\varepsilon_0(x^2-d^2)}\vec{e}_x} \tag{4}
$$

3 Limite pour $|x| \gg d$

Lorsque le point M est très éloigné du segment chargé, on a :

$$
\boxed{\vec{E}(x) = \frac{\lambda d}{2\pi\varepsilon x^2}\vec{e}_x} \tag{5}
$$

Le champ électrostatique à un point très éloigné du segment chargé correspond à celui d'une charge ponctuelle de charge $2\lambda d$. Ceci est cohérent avec le fait que lorsque l'on est très éloigné du segment, celui-ci semble suffisamment « petit » pour sembler ponctuel.

B Fil infini

1 Théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère s'énonce comme suit :
La circulation du champ magnétostatique sur un chemin fermé Γ est égale à la somme des courants enlacés par ce chemin multipliée par la perméabilité du vide μ_0.
Ceci se traduit mathématiquement de la manière suivante :

$$
\boxed{\oint_\Gamma \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I_{enlaces}} \tag{6}
$$

2 Champ à l'extérieur du fil infini

Le plan contenant le fil et le point M est plan de symétrie donc $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_\varphi$.
Aussi, le système est invariant par rotation autour de l'axe Oz et par translation le long de cet axe donc : $B(M) = B(a)$.

On choisit comme contour Γ d'intégration, un cercle de rayon r, centré sur l'axe du fil et orthogonal à celui-ci.
On a donc la circulation du champ magnétostatique le long de Γ qui s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \vec{B}(r).d\vec{l} = \int_{\theta=0}^{2\pi} B(r) r d\theta = 2\pi r B(r)} \tag{7}$$

Comme à l'extérieur du fil, le courant enlacé a une intensité I, on a le champ magnétostatique qui vaut :

$$\boxed{\vec{B}_{ext}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta} \tag{8}$$

3 Champ à l'intérieur du fil infini

a Intensité du courant enlacé

Le fil est parcouru de façon uniforme par le courant, ce qui nous donne une densité surfacique de courant $\vec{j} = \dfrac{I}{\pi a^2}\vec{e}_z$. Aussi, pour une densité surfacique de courant, l'intensité enlacée par le parcours Γ qui définit une surface $S = 2\pi r$ vaut $I(r) = \iint_S \vec{j} d\vec{S}$ d'où la relation :

$$\boxed{I(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^2 I} \tag{9}$$

b Calcul du champ magnétique

On en déduit l'expression du théorème d'Ampère :

$$\begin{aligned} 2\pi r B_{int}(r) &= \mu_0 \\ B_{int}(r) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \end{aligned}$$

D'où le champ magnétostatique à l'intérieur du conducteur :

$$\boxed{B_{int}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{a^2}} \tag{10}$$

C Spire et solénoïde

1 Symétries du système

Tout plan contenant l'axe de la spire est plan d'antisymétrie, donc le champ magnétostatique sur l'axe est selon $\vec{e}_z$. Ainsi :

$$\boxed{\vec{B}_{spi}(M) = B_{spi}(M)\vec{e}_z} \tag{11}$$

2 Expression de $\vec{B}_{spi}$

On applique la loi de Biot et Savart en un point M de l'axe $x'Ox$ ce qui nous donne :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{Spire} \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}} \tag{12}$$

En utilisant le repère cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$, on a :
- $d\vec{l} = Rd\theta\vec{e}_\varphi$
- $\overrightarrow{PM} = -R\vec{e}_R + x\sin\alpha\vec{e}_x$
- $r = R/\sin\alpha$

Aussi, $\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_r$ et $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_z$, il est donc possible d'éliminer du produit vectoriel le terme en $z\sin\theta$. On a donc :

$$\begin{aligned}\vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{Spire} \frac{Rd\varphi\vec{e}_\varphi \wedge R\vec{e}_r}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{R^3}{\sin^3\alpha}}\vec{e}_z\end{aligned}$$

Ce qui nous donne le champ magnétostatique d'une spire circulaire le long de son axe :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta\vec{e}_z} \tag{13}$$

3 Champ magnétostatique pour un solénoïde

a Solénoïde de longueur L

Un solénoïde est une succession de N spires, on peut donc écrire : $d\vec{B} = \vec{B}_{spi}$ et intégrer sur l'ensemble du solénoïde avec $dn = ndz$ le nombre de spires contenues entre z et $z + dz$, d'où :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \int_{sol} \vec{B}_{spi} dn} \tag{14}$$

On a donc :

$$\vec{B}_{sol} = \int_{-L/2}^{L/2} n\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta dz\vec{e}_z$$

Or, $z = -\dfrac{R}{\tan\theta}$ donc $dz = \dfrac{Rd\theta}{\sin^2\theta}$, d'où :

$$\vec{B}_{sol} = n\frac{\mu_0 I}{2R}\vec{e}_z \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sin\theta d\theta$$

On a donc le champ magnétostatique créé par un solénoïde qui s'écrit :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\vec{e}_z} \tag{15}$$

b Solénoïde de longueur infinie

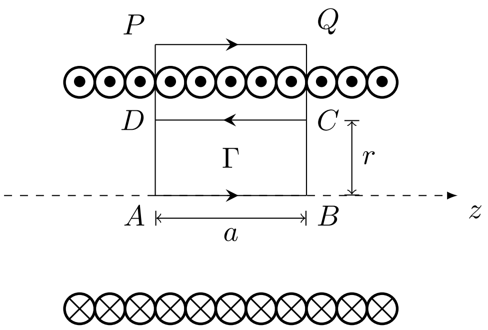
Pour un solénoïde infini, $\theta_1 \to \pi$ et $\theta_2 \to 0$, d'où :

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 In\vec{e}_z} \tag{16}$$

c Utilisation du théorème d'Ampère

Tout plan orthogonal à l'axe du solénoïde est plan de symétrie. On a donc $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_z$. De plus la distribution de courant est invariante par translation selon z et par rotation autour de Oz, on a donc :

$$\boxed{\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_z} \tag{17}$$



On choisit comme contour d'intégration un circuit rectangulaire.
On place ce contour orienté $\Gamma = ABCD$ à l'intérieur du solénoïde, ce qui donne pour la circulation du champ magnétostatique :

$$\begin{aligned}\mathcal{C} = \oint_\Gamma \vec{B}.\vec{dl} &= \int_A^B \vec{B}.\vec{dl} \int_C^D \vec{B}.\vec{dl} \\ &= 0 + aB(O) + 0 - aB(r)\end{aligned}$$

Or, les courants enlacés par Γ sont nuls. Le théorème d'Ampère implique donc

$$\boxed{\vec{B}(r < R) = \vec{B}(O) = \vec{B}_{int}} \tag{18}$$

On place maintenant le contour orienté $\Gamma = CDPQ$ à cheval sur le solénoïde et donc $I_{enlaces} = naI$. En appliquant le théorème d'Ampère, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{C} = \oint_\Gamma \vec{B}.\vec{dl} &= \int_D^P \vec{B}.\vec{dl} + \int_P^Q \vec{B}.\vec{dl} + \int_Q^C \vec{B}.\vec{dl} + \int_C^Q \vec{B}.\vec{dl} \\ &= 0 + aB(r) + 0 - aB_{int} \\ &= \mu_0 naI\end{aligned}$$

D'où le champ magnétostatique à l'extérieur du solénoïde qui s'écrit :

$$\boxed{\vec{B}(r > R) = \vec{B}_{int} - \mu_0 nI} \tag{19}$$

En assimilant le solénoïde infini à un solénoïde de rayon infini, on a par symétrie, le champ magnétostatique au centre du solénoïde qui est nul : il existe une infinité de plans de symétries passant par le centre ce qui impose que $\vec{B}_{centre} = \vec{O}$. De plus, comme à l'extérieur du solénoïde, quelque soit le contour choisi, $I_{enlaces} = 0$, on a nécessairement $\vec{B}_{ext} = \vec{B}_{centre} = \vec{0}$.

On a donc le champ magnétostatique sur l'axe du solénoïde infini qui s'écrit :

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 In\vec{e}_z} \tag{20}$$

Notes du correcteur

Subdivision des points

Question	Élément de réponse	Points
A.1	Potentiel distribution de charge	*1*
	Obtention du résultat final	*1.5*
A.1	Relation champ-potentiel	*1*
	Obtention du résultat final	*1.5*
A.3	Champ loin de la distribution de charge	*1*
B.1	Théorème littéral	*1*
	Théorème mathématique	*1*
B.2	Symétries et invariances	*0.5*
	Champ magnétostatique extérieur	*0.5*
B.3	Intensité du courant enlacé	*0.5*
	Champ magnétostatique intérieur	*0.5*
C.1	Symétries et invariances	*1*
C.2	Loi de Biot et Savart	*1*
	Champ magnétostatique d'une spire	*1.5*
C.3.a	Formule générale	*0.5*
	Champ magnétostatique pour un solénoïde fini	*1*
C.3.b	Limites de θ_1 et θ_2 en $+\infty$	*0.25*
	Champ magnétostatique pour un solénoïde infini	*0.25*
C.3.c	Symétries et invariances	*0.75*
	Définition des contours	*0.5*
	Champ magnétostatique à l'intérieur du solénoïde	*0.75*
	Champ magnétostatique à l'extérieur du solénoïde	*0.75*
	Justification de $\vec{B}_{est} = \vec{0}$	*1*
	Champ magnétostatique sur l'axe	*0.75*

Question A.2

On obtient exactement le même résultat (ouf) et avec un nombre d'étapes de calcul similaires en utilisant la formule $d\vec{E}(x) = \frac{\lambda dx'}{4\pi\varepsilon_0(x-d)^2}$.
Le choix dépendant alors notamment d'une préférence personnelle entre dérivation et intégration.

Remarques globales

Beaucoup des résultats de cet examen avaient déjà été vu en TD, à un facteur près, ou à un changement de notation près. Et il était possible de *sauver les meubles* en ayant seulement appris son cours. En effet, un premier comptage donne 5 points pour les formules du cours et 3 points pour les symétries et autres questions faisant appel à la réflexion mais pas au calcul.