

Big-Line-Big-Clique Conjecture e Bloqueadores de Visibilidade

Gabriel K. Lasso
Orientador: Carlos E. Ferreira

Sumário

1	Introdução	5
1.1	Motivação	5
1.2	Estrutura do trabalho	5
2	Noções preliminares	7
2.1	Grafos	7
2.2	Grafo de visibilidade	7
2.3	Geometria combinatória	8
2.3.1	Teorema de Erdős-Szekeres	8
2.3.2	Teorema de Sylvester-Gallai	8
3	Big-Line-Big-Clique conjecture	9
3.1	Casos triviais	9
3.2	Caso $k = 4$	9
3.3	Caso $k = 5$	11
3.3.1	Pontos em posição convexa	11
3.4	Para conjuntos infinitos de pontos	11
3.5	Dificuldades encontradas	12
3.5.1	The orchard problem e o grafo de Turán	12
3.5.2	Conjuntos de pontos sem heptágonos vazios	12
4	Bloqueadores de visibilidade	13
4.1	Ordem de crescimento de $b(n)$	13
4.2	Conjuntos de pontos em posição convexa	13

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Aqui faremos um estudo de um problema de visibilidade que surgiu em 2005 e até o começo dessa década chamou a atenção de vários pesquisadores. Qual a quantidade máxima de pontos no plano de forma que não tenha conjuntos grandes de pontos colineares nem de pontos visíveis? A natureza desse problema lembra o problema de Ramsey, porém ele possui uma cara geometria e é extremamente difícil de lidar, tanto que não se sabe se existe essa quantidade máxima.

Se dois pontos não são visíveis, é porque um terceiro bloqueia a visibilidade deles. Outro problema estudado aqui é sobre o tamanho mínimo do conjunto de bloqueadores para um conjunto de pontos.

Todos esses conceitos serão definidos com mais formalidade mais pra frente. O primeiro problema é conhecido como **conjectura big-line-big-clique** e o segundo é uma questão natural sobre **bloqueadores de visibilidade**.

1.2 Estrutura do trabalho

No capítulo 2 vamos definir alguns conceitos que serão base para os demais, assim como demonstrar algumas propriedades chaves desses conceitos. No capítulo 3 vamos mostrar os resultados conhecidos sobre a conjectura big-line-big-clique, mostrar algumas dificuldades encontradas na tentativa de resolver esse problema e discutir alguns fatos sobre ele. No capítulo 4 vamos focar no problema dos bloqueadores de visibilidade, mostrando cotas superiores e inferiores conhecidas e discutindo algumas coisas em aberto que as pessoas acreditam que sejam verdade.

Capítulo 2

Noções preliminares

2.1 Grafos

Um grafo é um par $G = (V, E)$ em que V é um conjunto enumerável (geralmente finito) e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos de V . Os elementos de V são chamados **vértices**, e os elementos de E são chamados **arestas**.

Se G é um grafo, chamamos de $V(G)$ seu conjunto de vértices e de $E(G)$ seu conjunto de arestas.

Chamamos **ordem** de um grafo a cardinalidade de seu conjunto de vértices.

Se uma aresta $e = u, v \in E(G)$, dizemos que u e v são **vizinhos** ou **adjacentes**.

Um grafo **completo** é um grafo em que todos dois vértices distintos são adjacentes. Chamamos o grafo completo de ordem n de K_n .

Se G é um grafo e $S \subset V(G)$ é um conjunto de vértices, chamamos de **subgrafo** de G induzido por S o grafo $G[S] = (S, E_S)$, em que $E_S = \{u, v \in E(G) | u, v \in S\}$. Nesse caso, dizemos que G contém uma cópia de $G[S]$ ou simplesmente que G contém $G[S]$, ou ainda que G possui $G[S]$.

Um **k-clique** é um conjunto de vértices C tal que $G[C]$ é um grafo completo de ordem k .

2.2 Grafo de visibilidade

Na sessão anterior, definimos conceitos básicos de teoria dos grafos. Aqui vamos estudar um caso bem particular.

Seja P é um conjunto de pontos no plano tal que todo ponto de P é isolado e $x, y \in P$. Dizemos que x e y são visíveis em P se $\overline{xy} \cap P = \{x, y\}$. p_1, p_2, \dots, p_n são visíveis se são visíveis dois a dois.

O grafo de visibilidade de um conjunto P de pontos no plano é o grafo construído da seguinte forma: o conjunto de vértices é P e há uma aresta entre dois vértices x e y se x e y são visíveis. Denotamos esse grafo por $\mathcal{V}(P)$ e se p, q é uma aresta, às vezes nos referimos a ela como o segmento aberto \overline{pq} .

Dizemos que um grafo de visibilidade é planar se suas arestas não se interceptarem.

Teorema 2.2.1. [7] *Todo grafo de visibilidade finito é planar ou contém uma cópia de K_4 .*

Demonstração. Seja $G = \mathcal{V}(P)$ um grafo de visibilidade finito. Suponha que G não seja planar. Vamos mostrar que G contém K_4 .

Como G não é planar, existe alguma aresta \overline{ab} que intercepta com outras (pelo menos uma outra). A reta \overleftrightarrow{ab} separa o plano em dois semiplanos D e E . Seja p o ponto de D mais próximo do segmento \overline{ab} e q o ponto de E mais próximo do segmento \overline{ab} . Pela escolha de p e q , os pontos a, b, p e q são visíveis, logo $G[\{a, b, p, q\}]$ é um K_4 . \square

2.3 Geometria combinatória

Vamos dar algumas definições a respeito de conjuntos de pontos no plano. Seja P um conjunto finito de pontos no plano e $\text{conv}(P)$ o casco convexo de P . Dizemos que P está em **posição geral** se não existirem três pontos colineares em P .

Dizemos que P está em **posição convexa** se todo ponto de P estiver na fronteira de $\text{conv}(P)$.

Um ponto $v \in P$ é uma **ponta** de P se $\text{conv}(P) \neq \text{conv}(P \setminus v)$.

Se todos os pontos de P forem pontas, dizemos que P está em **posição estritamente convexa**.

Um **k -ágono** (respectivamente um **k -ágono estritamente convexo**) é o casco convexo de um conjunto de k pontos (respectivamente em posição estritamente convexa).

Se X for um subconjunto de P de k pontos em posição estritamente convexa tal que $\text{conv}(X) \cap P = X$, então $\text{conv}(X)$ é um **k -buraco** ou um **k -ágono vazio estritamente convexo** ou simplesmente um **k -ágono vazio**.

Chamamos 3-ágonos de triângulos, 4-ágonos de quadriláteros, 5-ágonos de pentágonos, etc.

2.3.1 Teorema de Erdős-Szekeres

Provar teorema de Erdős-Szekeres sobre polígonos convexos (Happy ending problem).

2.3.2 Teorema de Sylvester-Gallai

Todo conjunto finito de pontos tem todos os pontos colineares ou existe uma reta que passa por exatamente dois desses pontos.

Capítulo 3

Big-Line-Big-Clique conjecture

A conjectura seguinte foi proposta por [8] em 2005, e ainda não se sabe se ela vale para valores a partir de $k = 6$ e $l = 4$.

Conjectura 1. *Dados dois inteiros $k, l \geq 2$, existe um $n = n(k, l)$ tal que todo conjunto finito P com pelo menos n pontos no plano contém k pontos visíveis (alternativamente, $\mathcal{V}(P)$ possui um k -clique) ou l pontos colineares.*

Para nos habituarmos com o problema, vamos começar pelos casos mais básicos:

3.1 Casos triviais

Primeiramente, se $k = 2$ ou $l = 2$, com certeza todo conjunto com pelo menos dois pontos tem dois pontos colineares e dois pontos visíveis.

Se $k = 3$, ou se tem três pontos visíveis ou todos os pontos no conjunto são colineares, então $n(3, l) = \max\{3, l\}$.

Se $l = 3$, ou todos os pontos são visíveis para todos os outros ou algum ponto não deixa outros dois se verem, se tendo três pontos colineares. $n(k, 3) = \max\{k, 3\}$.

3.2 Caso $k = 4$

Vamos mostrar que os conjuntos que não possuem quatro pontos visíveis possuem muitos pontos colineares. Isto é, para todo l existe um n tal que todo conjunto P com pelo menos n pontos que não possui quatro pontos visíveis possui pelo menos l pontos colineares.

Pelo teorema 2.2.1, um conjunto que não possui quatro pontos visíveis possui grafo de visibilidade planar. O teorema a seguir caracteriza os grafos de visibilidade planares:

Teorema 3.2.1. [2] *Seja P um conjunto finito de pontos no plano. Então $\mathcal{V}(P)$ é planar se e somente se satisfaz uma das condições:*

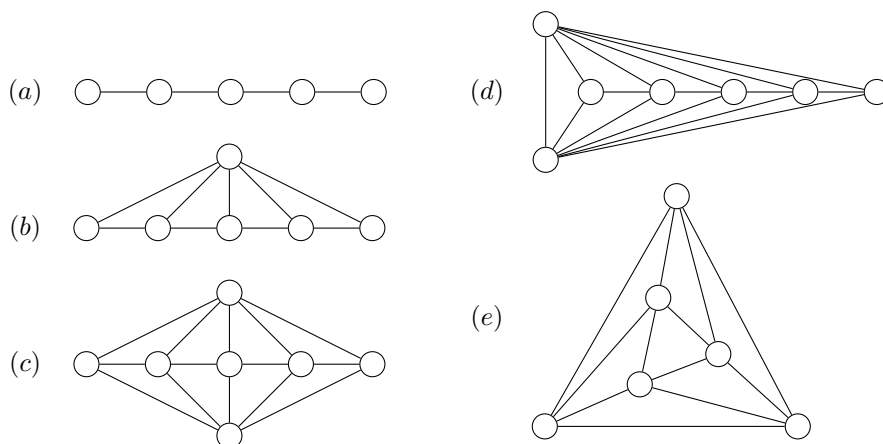


Figura 3.1: Tipos de grafos de visibilidade planares

- (a) Todos os pontos de P são colineares.
- (b) Todos os pontos de P são colineares exceto um.
- (c) Todos os pontos de P são colineares exceto dois pontos não visíveis.
- (d) Todos os pontos de P são colineares exceto dois pontos p e q tais que o segmento \overline{pq} não intercepta o menor segmento que contém $P \setminus \{p, q\}$.
- (e) $\mathcal{V}(P)$ é o grafo (e) desenhado na figura 3.1

Demonstração. Como pode ser visto na figura 3.1 e pode ser facilmente demonstrado, se um grafo de visibilidade satisfaz alguma das condições (a) – (e), ele é planar. Para mostrar a outra direção, seja P um conjunto finito de pontos no plano tal que $\mathcal{V}(P)$ é planar.

Se P contém no máximo dois pontos, P satisfaz (a). Então vamos supor que $|P| \geq 3$. Seja L um maior conjunto de pontos colineares em P e \hat{L} a reta que contém L . $|L| \geq 2$. Se $|L| = 2$, então L satisfaz (a), (b) ou (e). Vamos supor então que $|L| \geq 3$.

A reta \hat{L} divide o plano em dois semiplanos. Sejam S e T os conjuntos de vértices em cada um desses semiplanos tal que $|S| \geq |T|$. Se $|S|$ for no máximo 1, então P satisfaz algum de (a) – (d). Então supor que $|S| \geq 2$. Seja v um ponto de S mais próximo de \hat{L} e seja w um ponto de $S \setminus \{v\}$ mais próximo de \hat{L} . Note que a reta que contém v e w não é paralela a \hat{L} , pois, se fosse, para todos $x, y \in L$, as arestas \overline{vx} e \overline{wy} ou as arestas \overline{vy} e \overline{wx} se interceptariam e, como o grafo é planar, existiria um vértice nessa interseção que seria mais próximo de \hat{L} do que v , contradizendo a escolha de v . Então a reta que contém v e w intercepta \hat{L} em um ponto, digamos, p .

Vamos mostrar que em \hat{L} se tem no máximo um vértice de cada lado de p . Para isso, suponha que existam dois vértices $x, y \in L$ tais que x esteja entre y e p . Então as arestas \overline{vy} e \overline{wx} se interceptam num ponto mais próximo de \hat{L} do que v e, como o grafo é planar, deve existir um vértice nessa interseção, contradizendo a escolha de v . Mas como $|L| \geq 3$, L tem que possuir exatamente 3 pontos: p e um ponto de cada lado de p , que vamos chamar de x e y .

Agora vamos mostrar que $S = \{v, w\}$. Suponha que S contém um terceiro ponto u . u não está na mesma reta que p, v e w pois L tem tamanho máximo. Pela escolha de v e w , u está mais longe de \hat{L} do que w . Então \overline{uv} intercepta \overline{wx} ou \overline{wy} num ponto mais próximo de \hat{L} do que w , contradizendo a escolha de w . Logo $|S| = 2$. Então $|T| \leq 2$.

Se $T = \emptyset$, então P satisfaz (c). Suponha que $T \neq \emptyset$. Seja u um ponto de T e q a interseção da reta que contém u e v e da reta \hat{L} . Suponha que q não seja um vértice de L . Se q está entre x e y , então as arestas \overline{vu} e \overline{px} ou \overline{py} se interceptam em q , e como o grafo é planar, q tem que ser um vértice do grafo, o que é uma contradição. Similarmente, se q não está entre x e y , as arestas \overline{uv} e \overline{wx} ou \overline{wy} se interceptam no ponto q , gerando uma contradição. Então u intercepta \hat{L} num vértice. Esse vértice não pode ser p , pois se fosse isso contradiria a escolha de L .

Suponha que existam dois pontos u_1 e u_2 em T . Se u_1 está na mesma reta que v e x e u_2 está na mesma reta que v e y . As arestas $\overline{u_1y}$ e $\overline{u_2x}$ se interceptam em um ponto de T que não está na mesma reta que v e x nem que v e y , o que é uma contradição. Se u_1 e u_2 estão na mesma reta que v e x , suponha sem perda de generalidade que u_1 está entre x e u_2 , então as arestas $\overline{u_1y}$ e $\overline{u_2x}$ se interceptam em um ponto de T que não está na mesma reta que v e x nem que v e y , o que é uma contradição. Do mesmo jeito, se u_1 e u_2 estão na mesma reta que v e y também temos uma contradição. Portanto $|T| = 1$. Sem perda de generalidade, digamos que u é colinear com v e x . Assim $\{p, u, v, x, y, w\}$ forma o grafo (e) da figura 3.1 \square

Corolário 3.2.1.1. *Seja P um conjunto finito de pontos no plano. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- P satisfaz (a), (b), (c) ou (e) do teorema 3.2.1.
- $\mathcal{V}(P)$ não tem K_4 .

Demonstração. Se P satisfaz (a), (b), (c) ou (e) do teorema 3.2.1, é fácil ver que $\mathcal{V}(P)$ não tem K_4 .

Se $\mathcal{V}(P)$ não tem K_4 , pelo teorema 2.2.1, $\mathcal{V}(P)$ é planar. Logo, pelo teorema 3.2.1, P satisfaz (a), (b), (c), (d) ou (e). Mas como (d) possui K_4 , P satisfaz (a), (b), (c) ou (e). \square

Corolário 3.2.1.2. *A conjectura 1 é verdadeira para $k = 4$ com $n(4, l) = \max\{7, l + 2\}$ se $l > 3$.*

3.3 Caso $k = 5$

3.3.1 Pontos em posição convexa

[1]

3.4 Para conjuntos infinitos de pontos

Em 2010[12], Atila Pór e David Wood mostraram que a conjectura 1 não vale para conjuntos infinitos de pontos com a seguinte construção:

Teorema 3.4.1. *Existem conjuntos infinitos enumeráveis de pontos sem 4 pontos colineares e sem 3 pontos visíveis dois a dois.*

Demonstração. Vamos construir indutivamente um conjunto de pontos com tal propriedade.

Sejam x_1, x_2 e x_3 três pontos não colineares no plano.

Dados pontos x_1, \dots, x_{n-1} não conlineares, vamos definir o ponto x_n da seguinte forma: pelo teorema de Sylvester-Gallai, existe uma reta que passa por exatamente dois pontos de x_1, \dots, x_{n-1} . Seja $\mathcal{L} = \overleftrightarrow{x_i x_j}$ a reta que passa por exatamente dois pontos de x_1, \dots, x_{n-1} com $i < j$ e com i mínimo entre as com j mínimo. Coloque x_n no segmento $\overline{x_i x_j}$ tal que ela seja a única reta que contenha x_n e mais dois pontos (isso é possível, já que somente uma quantidade finita de pontos de \mathcal{L} não pode ser escolhida).

Vamos chamar de $P = \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$. Por construção, P não tem 4 pontos colineares e se x_i e x_k com $i < k$ são visíveis então existe um outro ponto colinear x_j com $j < k$ e x_k está no segmento $\overline{x_i x_j}$.

Suponha que x_i, x_j e x_k são dois a dois visíveis com $i < j < k$. Então existem pontos $x_{i'}$ e $x_{j'}$ com $i' < k$ e $j' < k$ tais que x_k está no segmento $\overline{x_i x_{i'}}$ e no segmento $\overline{x_j x_{j'}}$. Pela escolha de x_k , só existe uma reta que contém x_k e mais dois pontos entre x_1, \dots, x_{k-1} . Então $i = j'$ e $j = i'$. Mas então $P \cap \overline{x_i x_j} = \{x_i, x_j, x_k\}$, ou seja, x_i e x_j não são visíveis, ou seja, x_i e x_j não são visíveis.

Portanto não existem 3 pontos visíveis dois a dois em P . □

3.5 Dificuldades encontradas

3.5.1 The orchard problem e o grafo de Turán

Problema citado em [11], solução do orchard problem tem menos arestas do que o grafo de Turán para $k \geq 5$

3.5.2 Contuntos de pontos sem heptágonos vazios

Dado que o teorema de Erdős-Szekeres vale, Erdős colocou o problema de determinar se para um dado n existe um $g(n)$ tal que todo conjunto com $g(n)$ pontos em posição geral contém um n -ágono vazio.

Se essa questão fosse respondida afirmativamente, a conjectura 1 sairia como corolário.

Para $n = 3$ e $n = 4$ é fácil ver que $g(3) = 3$ e $g(4) = 5$. Harborth[5] provou que $g(5) = 10$ e Gerken[4] e Nicolas[10] provaram que $g(6)$ existe.

No entanto, Horton[6] mostrou uma construção de conjuntos arbitrariamente grandes sem heptágonos vazios.

Teorema 3.5.1. *Existem conjuntos arbitrariamente grandes sem heptágonos.*

Demonstração. □

Capítulo 4

Bloqueadores de visibilidade

4.1 Ordem de crescimento de $b(n)$

[3, 9]

4.2 Conjuntos de pontos em posição convexa

[3, 9]

Referências Bibliográficas

- [1] Zachary Abel, Brad Ballinger, Prosenjit Bose, Sébastien Collette, Vida Dujmović, Ferran Hurtado, Scott D. Kominers, Stefan Langerman, Attila Pór, and David R. Wood. Every large point set contains many collinear points or an empty pentagon. <https://arxiv.org/abs/0904.0262>, 2009.
- [2] Vida Dujmovic, David Eppstein, Matthew Suderman, and David R. Wood. Drawings of planar graphs with few slopes and segments. <https://arxiv.org/abs/math/0606450>, 2008.
- [3] Adrian Dumitrescu, János Pach, and Géza Tóth. A note on blocking visibility between points. <http://www.cs.uwm.edu/faculty/ad/blocking.pdf>, 2009.
- [4] Tobias Gerken. Empty convex hexagons in planar point sets. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-007-9018-x>, 2008.
- [5] Heiko Harborth. Konvexe fünfecke in ebenen punktmengen. *Elemente der Mathematik*, 33:116–118, 1978.
- [6] J. D. Horton. Sets with no empty 7-gons. <https://cms.math.ca/10.4153/CMB-1983-077-8>, 1983.
- [7] J. D. Horton. A general notion of visibility graphs. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-003-2773-4>, 2003.
- [8] Jan Kára, Attila Pór, and David R. Wood. On the chromatic number of the visibility graph of a set of points in a plane. <http://dx.doi.org/10.1007/s00454-005-1177-z>, 2005.
- [9] Jiří Matoušek. Blocking visibility for points in general position. <https://doi.org/10.1007/s00454-009-9185-z>, 2009.
- [10] Carlos M. Nicolas. The empty hexagon theorem. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-007-1343-6>, 2007.
- [11] Attila Pór and David R. Wood. On visibility and blockers. <https://arxiv.org/abs/0912.1150>, 2009.
- [12] Attila Pór and David R. Wood. The big-line-big-clique conjecture is false for infinite point sets. <https://arxiv.org/abs/1008.2988>, 2010.