Big-Line-Big-Clique Conjecture e Bloqueadores de Visibilidade

Gabriel K. Lasso
Orientador: Carlos E. Ferreira

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Aqui faremos um estudo de um problema de visibilidade que surgiu em 2005 e até o começo dessa década chamou a atenção de vários pesquisadores. Qual a quantidade máxima de pontos no plano de forma que não tenha conjuntos grandes de pontos colineares nem de pontos visíveis? A natureza desse problema lembra o problema de Ramsey, porém ele possui uma cara geométria e é extremamente difícil de lidar, tanto que não se sabe se existe essa quantidade máxima.

Se dois pontos não são visíveis, é porque um terceiro bloqueia a visibilidade deles. Outro problema estudado aqui é sobre o tamanho mínimo do conjunto de bloqueadores para um conjunto de pontos.

Todos esses conceitos serão definidos com mais formalidade mais pra frente. O primeiro problema é conhecido como **conjectura big-line-big-clique** e o segundo é uma questão natural sobre **bloqueadores de visibilidade**.

1.2 Estrutura do trabalho

No caítulo 2 vamos definir alguns conceitos que serão base para os demais, assim como demonstrar algumas propriedades chaves desses conceitos. No capítulo 3 vamos mostrar os resultados conhecidos sobre a conjectura big-line-big-clique, mostrar algumas dificuldades encontradas na tentativa de resolver esse problema e discutir alguns fatos sobre ele. No capítulo 4 vamos focar no problema dos bloqueadores de visibilidade, mostrando cotas superiores e inferiores conhecidas e discutindo algumas coisas em aberto que as pessoas acreditam que sejam verade.

Capítulo 2

Noções preliminares

2.1 Grafos

Um grafo é um par $G = (V, E)$ em que V é um conjunto enumerável (geralmente finito) e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos de V. Os elementos de V são chamados **vértices**, e os elementos de E são chamados **arestas**.

Se G é um grafo, chamamos de $V(G)$ seu conjunto de vértices e de $E(G)$ seu conjunto de arestas.

Chamamos **ordem** de um grafo a cardinalidade de seu conjunto de vértices.

Se uma aresta $e = u, v \in E(G)$, dizemos que u e v são **vizinhos** ou **adjacentes**.

Um grafo **completo** é um grafo em que todos dois vértices distintos são adjacentes. Chamamos o grafo completo de ordem n de K_n.

Se G é um grafo e $S \subset V(G)$ é um conjunto de vértices, chamamos de **subgrafo** de G induzido por S o grafo $G[S] = (S, E_S)$, em que $E_S = u, v \in E(G) | u, v \in S$. Nesse caso, dizemos que G contém uma cópia de $G[S]$ ou simplesmente que G contém $G[S]$, ou ainda que G possiu $G[S]$.

Um **k-clique** é um conjunto de vértices C tal que $G[C]$ é um grafo completo de ordem k.

Se G é um grafo, uma **imersão de G no plano** ou um **desenho de G** é um conjunto de pontos no plano tal que existe uma bijeção p que leva cada vértice v do grafo a um ponto $p(v)$ da imersão, de modo que uma aresta u, v passa a ser vista como um segmento com extremos $p(u)$ e $p(v)$. Dizemos que um grafo é **planar** se existir uma imersão no plano na qual as arestas não se cruzam. Muitas vezes confundimos o grafo com sua uma imersão sua, os tratando como o mesmo objeto.

2.2 Grafo de visibilidade

Na sessão anterior, definimos conceitos básicos de teoria dos grafos. Aqui vamos estudar um caso bem particular.

Seja P é um conjunto de pontos no plano tal que todo ponto de P é isolado e $x, y \in P$. Dizemos que x e y são visíveis em P se $\overline{xy} \cap P = \{x, y\}$. $p_1, p_2, ..., p_n$ são visíveis se são visíveis dois a dois.

O grafo de visibilidade de um conjunto P de pontos no plano é o grafo construído da seguinte forma: o conjunto de vértices é P e há uma aresta entre dois vértices x e y se x e y são visíveis. Denotamos esse grafo por $\mathcal{V}(P)$ e se p, q é uma aresta, nos referimos a ela como o segmento $\overline{pq}$ às vezes.

Teorema 1. *[5] Todo grafo de visibilidade finito é planar ou contém uma cópia de K_4.*

Prova: Seja $G = \mathcal{V}(P)$ um grafo de visibilidade finito. Suponha que G não seja planar. Vamos mostrar que G contém K_4.

Como G não é planar, existe alguma aresta $\overline{ab}$ que intercepta com outras (pelo menos uma outra). A reta $\overleftrightarrow{ab}$ separa o plano em dois semiplanos D e E. Seja p o ponto de D mais próximo do segmento $\overline{ab}$ e q o ponto de E mais próximo do segmento $\overline{ab}$. Pela escolha de p e q, os pontos a, b, p e q são visíveis, logo $G[\{a, b, p, q\}]$ é um K_4. $\square$

Capítulo 3

Big-Line-Big-Clique conjecture

Conjectura 1. *Dados dois inteiros $k, l \geq 2$, existe um $n = n(k, l)$ tal que todo conjunto finito P com pelo menos n pontos no plano contém k pontos visíveis (alternativamente, $\mathcal{V}(P)$ possui um k-clique) ou l pontos colineares.*

Para nos habituarmos com o problema, vamos começar pelos casos mais básicos:

3.1 Casos triviais

Primeiramente, se $k = 2$ ou $l = 2$, com certeza todo conjunto com pelo menos dois pontos tem dois pontos colineares e dois pontos visíveis.

Se $k = 3$, ou se tem três pontos visíveis ou todos os pontos no conjunto são colineares, então $n(3, l) = max\{3, l\}$.

Se $l = 3$, ou todos os pontos são visíveis para todos os outros ou algum ponto não deixa outros dois se verem, se tendo três pontos colineares. $n(k, 3) = max\{k, 3\}$.

3.2 Caso $k = 4$

3.2.1 Grafos de visibilidade planares

Provar teorema 1 de [2] [6]

3.3 Caso $k = 5$

3.3.1 Erdös-Szekeres Theorem

Provar teorema de Erdös-Szekers sobre polígonos convexos (Happy ending problem). [1]

3.4 Para conjunstos infinitos de pontos

[9]

3.5 Dificuldades encontradas

3.5.1 The orchard problem e o grafo de Turán

Problema citado em [8], solução do orchard problem tem menos arestas do que o grafo de Turán para $k \geq 5$

3.5.2 Contuntos de pontos sem heptágonos vazios

Construção de conjuntos arbitrariamente grandes de pontos sem heptágonos vazios de [4]

Capítulo 4

Bloqueadores de visibilidade

4.1 Ordem de crescimento de $b(n)$

[3, 7]

4.2 Conjuntos de pontos em posição convexa

[3, 7]

Referências Bibliográficas

[1] Zachary Abel, Brad Ballinger, Prosenjit Bose, Sébastien Collette, Vida Dujmović, Ferran Hurtado, Scott D. Kominers, Stefan Langerman, Attila Pór, and David R. Wood. Every large point set contains many collinear points or an empty pentagon. https://arxiv.org/abs/0904.0262, 2009.

[2] Vida Dujmovic, David Eppstein, Matthew Suderman, and David R. Wood. Drawings of planar graphs with few slopes and segments. https://arxiv.org/abs/math/0606450, 2008.

[3] Adrian Dumitrescu, János Pach, and Géza Tóth. A note on blocking visibility between points. http://www.cs.uwm.edu/faculty/ad/blocking.pdf, 2009.

[4] J. D. Horton. Sets with no empty 7-gons. https://cms.math.ca/10.4153/CMB-1983-077-8, 1983.

[5] J. D. Horton. A general notion of visibility graphs. https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-003-2773-4, 2003.

[6] Jan Kára, Attila Pór, and David R. Wood. On the chromatic number of the visibility graph of a set of points in a plane. http://dx.doi.org/10.1007/s00454-005-1177-z, 2005.

[7] Jiří Matoušek. Blocking visibility for points in general position. https://doi.org/10.1007/s00454-009-9185-z, 2009.

[8] Atila Pór and David R. Wood. On visibility and blockers. https://arxiv.org/abs/0912.1150, 2009.

[9] Attila Pór and David R. Wood. The big-line-big-clique conjecture is false for infinite point sets. https://arxiv.org/abs/1008.2988, 2010.