Universidade de Sao Paulo
Instituto de Matematica e Estatistica
Bachalerado em Ciencia da Computacao

Gabriel Kuribara Lasso

Big-Line-Big-Clique conjecture e bloqueadores de visibilidade

Sao Paulo
Novembro de 2018

Big-Line-Big-Clique conjecture e bloqueadores de visibilidade

Monografia final da disciplina
MAC0499 – Trabalho de Formatura Supervisionado.

Supervisor: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ferreira

São Paulo
Novembro de 2018

Resumo

Dado um conjunto P de pontos no plano, podemos definir o grafo de visibilidade desses pontos, colocando uma aresta entre dois pontos de P se, e somente se não houver nenhum ponto de P no segmento aberto que liga esses dois pontos. É natural pensar que para conjuntos grandes com poucos pontos colineares o número de clique do grafo de visibilidade associado seja alto. Essa é uma questão em aberto, conhecida como conjectura *big-line-big-clique*, que deu origem a algumas pesquisas interessantes na área.

Palavras-chave: grafos, grafos-de-visibilidade, geometria-combinatória, teoria-de-ramsey.

Abstract

For a set of points in the plane P, we can define the visibility graph of that set making two points adjacents if, and only if there is no point of P in the open segment that connects this two points. It is natural to think that for a big set of points without many colinearities the clique number of the associated visibility graph is big. That is an open question known as big-line-big-clique conjecture, witch gave rise to some interesting researches in the field.

Keywords: graphs, visibility-graphs, combinatorial-geometry, ramsey-theory.

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 Motivação . . . 1

1.2 Estrutura do trabalho . . . 1

2 Noções preliminares **3**

2.1 Convenções . . . 3

2.2 Grafos . . . 3

2.3 Grafo de visibilidade . . . 4

2.4 Teoria de Ramsey . . . 4

2.4.1 Problema da festa . . . 4

2.4.2 Teorema de Ramsey . . . 5

2.4.3 Generalizando para hipergrafos . . . 6

2.5 Geometria combinatória . . . 7

2.5.1 Teorema de Erdős-Szekeres . . . 7

2.5.2 Teorema de Sylvester-Gallai . . . 8

3 Big-Line-Big-Clique conjecture **11**

3.1 Casos triviais . . . 11

3.2 Caso $k = 4$ . . . 11

3.3 Caso $k = 5$ . . . 13

3.3.1 Pontos em posição convexa . . . 13

3.3.2 Pentágonos vazios . . . 15

3.4 Para conjuntos infinitos de pontos . . . 18

3.5 Conclusão . . . 19

3.5.1 Dificuldades encontradas . . . 19

3.5.2 Novas direções . . . 20

4 Bloqueadores de visibilidade **21**

4.1 Ordem de crescimento de $b(n)$ . . . 21

4.2 Conjuntos em posição convexa . . . 22

5 Conclusão **25**

Referências Bibliográficas **27**

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A teoria de Ramsey é um campo da combinatória que estuda questôes como "quão grande uma estrutura deve ser para que ela possua uma subestrutura com uma certa propriedade?". Um exemplo clássico é o problema da festa: quantas pessoas tem que ter em uma festa para que nela existam ou três pessoas que se conhecem ou três pessoas que não se conhecem entre si. Nesse caso sabe-se que bastam 6 pessoas. Essa teoria possui aplicações em diversos outros campos da matemática, como a topologia, a teoria ergódica e a geometria (Pan (2013)).

Aqui fazemos um estudo de um problema geométrico ligado à teoria de Ramsey. Tal problema foi colocado em 2005 por Jan Kára, Attila Pór e David R. Wood (Kára *et al.* (2005)) enquanto estudavam o número cromático de grafos de visibilidade. O problema pode ser colocado da seguinte forma: "Quão grande deve ser um conjunto de pontos para que ele conhtenha ou l pontos colineares ou k pontos visíveis dois a dois?".

Uma observação sobre esse problema é que se dois pontos não são visíveis, então existe um terceiro que bloqueia a visibilidade deles. Outro problema estudado aqui é sobre o tamanho mínimo do conjunto de bloqueadores para um conjunto de pontos.

Todos esses conceitos serão definidos com mais formalidade mais pra frente. O primeiro problema é conhecido como **conjectura big-line-big-clique** e o segundo é uma questão natural sobre **bloqueadores de visibilidade**.

1.2 Estrutura do trabalho

No capítulo 2 vamos definir alguns conceitos que serão base para os demais, assim como demonstrar algumas propriedades chaves desses conceitos. No capítulo 3 vamos mostrar os resultados conhecidos na literatura sobre a conjectura big-line-big-clique, mostrar algumas dificuldades encontradas na tentativa de resolver esse problema e discutir alguns fatos sobre ele. No capítulo 4 vamos focar no problema dos bloqueadores de visibilidade, mostrando cotas superiores e inferiores conhecidas.

Capítulo 2

Noções preliminares

2.1 Convenções

Vamos começar definindo algumas convenções de notação:

- $|X|$ é a cardinalidade do conjunto X.
- $[n] = \{1, ..., n\}$
- $A \setminus B = \{a \in A | a \notin B\}$
- Um k-conjunto é um conjunto de cardinalidade k (e um k-subconjunto é um subconjuto de cardinalidade k)
- $\overline{pq}$ é o segmento de reta com extremos em p e q.
- $\overrightarrow{pq}$ é o segmento de reta orientado com origem em p e extremidade em q.
- $\overleftrightarrow{pq}$ é a reta que passa pelos pontos p e q.
- $\Delta(a, b, c) = \{\alpha a + \beta b + \gamma c | \alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0\}$ é o triângulo aberto com vértices a, b e c se a, b, c não são colineares.
- $\Delta[a, b, c] = \{\alpha a + \beta b + \gamma c | \alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0\}$ é o triângulo fechado com vértices a, b e c se a, b, c não são colineares.

2.2 Grafos

Um grafo é um par $G = (V, E)$ em que V é um conjunto enumerável (geralmente finito) e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos de V. Os elementos de V são chamados **vértices**, e os elementos de E são chamados **arestas**.

Se G é um grafo, chamamos de $V(G)$ seu conjunto de vértices e de $E(G)$ seu conjunto de arestas.

Chamamos **ordem** de um grafo a cardinalidade de seu conjunto de vértices.

Se uma aresta $e = \{u, v\} \in E(G)$, dizemos que u e v são **vizinhos** ou **adjacentes**.

Um grafo **completo** é um grafo em que todos dois vértices distintos são adjacentes. Chamamos o grafo completo de ordem n de K_n.

Se G é um grafo e $S \subset V(G)$ é um conjunto de vértices, chamamos de **subgrafo** de G induzido por S o grafo $G[S] = (S, E_S)$, em que $E_S = \{u, v \in E(G) | u, v \in S\}$. Nesse caso, dizemos que G contém uma cópia de $G[S]$ ou simplesmente que G contém $G[S]$, ou ainda que G possui $G[S]$.

Uma k-**clique** é um conjunto de vértices C tal que $G[C]$ é um grafo completo de ordem k.

Um grafo é **planar** se pode ser desenhado no plano sem que as curvas que representam as arestas se cruzem. Tal desenho é chamado de **imersão do grafo no plano**. Um grafo **plano** é um grafo planar com uma imersão no plano.

2.3 Grafo de visibilidade

Na sessão anterior, definimos conceitos básicos de teoria dos grafos. Aqui vamos estudar um caso bem particular.

Seja P um conjunto de pontos no plano e $x, y \in P$. Dizemos que x e y são visíveis em P se $\overline{xy} \cap P = \{x, y\}$. $p_1, p_2, ..., p_n$ são visíveis se são visíveis dois a dois.[1]

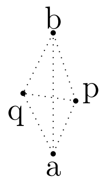
O grafo de visibilidade de um conjunto P de pontos no plano é o grafo construído da seguinte forma: o conjunto de vértices é P e há uma aresta entre dois vértices x e y se x e y são visíveis. Denotamos esse grafo por $\mathcal{V}(P)$ e se p, q é uma aresta, às vezes nos referimos a ela como o segmento aberto $\overline{pq}$.

Dizemos que um grafo de visibilidade é plano se suas arestas não se interceptam.

Teorema 1 (Horton (2003))**.** *Todo grafo de visibilidade finito é plano ou contém uma cópia de K_4.*

Demonstração. Seja $G = \mathcal{V}(P)$ um grafo de visibilidade finito. Suponha que G não seja plano. Vamos mostrar que G contém K_4.

Como G não é plano, existe alguma aresta $\overline{ab}$ que intercepta com outras (pelo menos uma outra). A reta $\overleftrightarrow{ab}$ separa o plano em dois semiplanos D e E. Seja p o ponto de D mais próximo do segmento $\overline{ab}$ e q o ponto de E mais próximo do segmento $\overline{ab}$ tal que $\overline{pq}$ intercepta $\overline{ab}$. Pela escolha de p e q, os pontos a, b, p e q são visíveis, logo $G[\{a, b, p, q\}]$ é um K_4.



□

2.4 Teoria de Ramsey

2.4.1 Problema da festa

Um bom problema para ilustrar a teoria de Ramsey é o problema da festa já mencionado:

Problema 1. *Qual a quantidade mínima de pessoas que deve haver em uma festa para que três delas se conheçam ou três delas não se conheçam?*

[1]Vamos considerar só conjuntos que são densos em nenhum lugar, i.e. o interior de P é vazio.

Vamos resolver esse problema usando teoria dos grafos.

Pessoas serão representadas por vértices e a relação entre elas por arestas coloridas. Se duas pessoas se conhecem, vamos colorir a aresta entre elas de azul, e se duas pessoas não se conhecem, vamos colorir a aresta entre elas de vermelho.

Reformulando a pergunta com essa formulação, temos:

Problema 2. *Qual o menor n tal que toda coloração de arestas*[2] *de K_n em $\{azul, vermelho\}$ possui uma 3-clique azul ou uma 3-clique vermelha (i.e. uma 3-clique com todas as arestas que ligam seus vértices azuis/vermelhas)?*

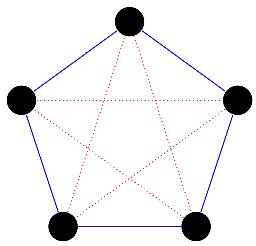
Vamos primeiro mostrar que $n = 6$ resolve o problema e depois mostrar que $n = 5$ não resolve, concluindo que $n = 6$ é o mínimo.

Proposição 1. *Toda coloração das arestas de K_6 possui uma 3-clique azul ou uma 3-clique vermelha.*

Demonstração. Seja x um vértice de K_6. Existem 5 arestas com extremidade em x. Por contagem, pelo menos 3 dessas arestas são da mesma cor, digamos, vermelhas. Sejam a, b, c vértices tais que xa, xb, xc são arestas coloridas de vermelho.

Vamos olhar para as arestas ab, bc, ca. Se alguma delas for vermelha, temos um triângulo vermelho. Se nenhuma delas for vermelha, temos um triângulo azul. Isso prova que $n = 6$ é suficiente para resolver o problema. □

Para a seguinte coloração de K_5, não temos nenhuma 3-clique monocromática, logo $n = 6$ é a solução desejada para o problema da festa.



2.4.2 Teorema de Ramsey

O teorema de Ramsey generaliza o resultado do problema da festa:

Teorema 2. *Para quaisquer $p, q \geq 2$ inteiros existe um inteiro $N = R(p, q)$ tal que qualquer coloração de K_N em duas cores possui uma p-clique azul ou uma q-clique vermelha.*

Demonstração. Vamos provar por indução em p e q.

Se $p = 2$, uma coloração K_N que não contém uma 2-clique azul deve conter todas as arestas vermelhas. Mas então, para um $N \geq q$, essa coloração possui uma q-clique vermelha. Então $R(2, q) = q$. Da mesma forma, vemos que $R(p, 2) = p$.

Para mostrar que $R(p, q)$ existe para qualquer p e q, vamos mostrar um limitante superior.

Sejam $p, q \geq 3$. Tome, como hipótese de indução, que $R(p, q-1)$ e $R(p, q-1)$ existam. Vamos mostrar que $R(p, q) \leq R(p, q-1) + R(p-1, q)$.

Seja $N = R(p, q-1) + R(p-1, q)$ e x um vértice de K_N. Considere os conjuntos dos vértices que são conectados a x por uma aresta azul e dos que são conectados a x por uma aresta vermelha. Chame-os de A e V.

[2]Uma coloração de arestas de um grafo G é uma função de $E(G)$ em um conjunto de cores, digamos $\{Azul, Vermelho\}$

Claramente $|A| + |V| = N - 1 = R(p, q-1) + R(p, q-1) - 1$. Isso implica que ou $|A| \geq R(p, q-1) - 1$ ou $|V| \geq R(p-1, q) - 1$, pois caso contrário teríamos $|A| + |V| < R(p, q-1) + R(p-1, q) - 2 = N - 2$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $|A| \geq R(p, q-1) - 1$. Considere $K_{|A|} = K_N[A]$ o subgrafo induzido por A. Então um dos dois casos vale:

- $K_{|A|}$ contém uma p-clique vermelha.
- $K_{|A|}$ contém uma $(q-1)$-clique azul.

Se o primeiro caso for verdade, K_N possui uma p-clique vermelha e não há nada a fazer.

Se o segundo caso for verdade, como todas as arestas de x a vértices de A são azuis, considere os vértices da $(q-1)$-clique azul juntos com x. Esses vértices formam uma q-clique azul, então K_N possui uma q-clique azul. □

2.4.3 Generalizando para hipergrafos

Assim como um grafo, um **hipergrafo k-uniforme** é um par (V, E) em que V é o conjunto de **vértices** e E é o conjunto de **arestas**, só que os elementos de E são k-subconjuntos de V.

O teorema de Ramsey pode ser generalizado da seguinte forma:

Teorema 3. *Para quaisquer $k > 0$, $p, q \geq k$ inteiros, existe um inteiro $N = R^k(p, q)$ tal que para qualquer coloração das k-arestas do hipergrafo k-uniforme completo de N vértices existe um conjunto de p vérices tal que todas as k-arestas entre eles são azuis ou um conjunto de q vértices tal que todas as k-arestas entre eles são vermelhas (alternativamente, para qualquer coloração dos k-subconjuntos de $\{1, ..., N\}$ existe um p-subconjunto cujos k-subconjuntos são azuis ou um q-subconjunto cujos k-subconjuntos são vermelhos).*

Demonstração. Vamos mostrar por indução em p, q e k.

Primeiramente, se $k = 1$, é fácil ver que $R^k(p, q) = max\{p, q\}$, já que as colorações são de vértices individuais.

Agora, se $p = k$, uma coloração que não contém um conjunto de $p = k$ vértices com as arestas azuis tem que conter todas as arestas vermelhas. Similarmente à base da indução no caso de grafos, temos que $R^k(k, q) = q$ e, por simetria, $R^k(p, k) = p$.

Sejam p, q, k como no enunciado do teorema. Pela hipótese de indução, para qualquer x, y existem:

- $R^{k-1}(x, y)$
- $R^k(p-1, y)$
- $R^k(x, q-1)$

Vamos mostrar que existe $R^k(p, q)$.

Seja $N = R^{k-1}(R^k(p-1, q), R^k(p, q-1)) + 1$. Considere K_k^N o hipergrafo k-uniforme completo de N vértices e uma coloração χ de suas arestas.

Escolha um vértice qualquer x e seja S a coleção de todas as $(k-1)$-arestas que não contêm x. S define um hipergrafo $(k-1)$-uniforme completo de $N-1$ vértices e possui uma coloração induzida por χ dada por $\chi'(e) = \chi(e \cup \{x\})$ para toda aresta e de S.

Pela escolha de N, podemos aplicar nossa hipótese de indução em S e colcluir que vale:

- Ou S tem um conjunto A de $R^k(p, q-1)$ vértices tal que toda (k-1) aresta de S em A é azul (para χ');
- Ou S tem um conjunto V de $R^k(p-1, q)$ vértices tal que toda (k-1) aresta de S em V é vermelha (para χ').

Sem perda de generalidade, suponha que o primeiro caso que vale.

Então, pela hipótese de indução, vale uma das seguintes afirmações:

- A tem um $(p-1)$-subconjunto T tal que toda k-aresta em T é azul (para χ)
- A tem um q-subconjunto T tal que toda k-aresta em T é vermelha (para χ)

□

No segundo caso o teorema está provado. Olhando para o primeiro caso, considere $T' = T \cup \{x\}$. Se uma aresta a em T' contém x, ela é azul por que $a \setminus x$ foi pintado de azul em S por χ'. Se uma aresta e T' não contém x, então ela também está em T e, por hipótese, é azul. Assim T' é um conjunto de p vértices com todas as arestas nele azuis.

2.5 Geometria combinatória

Vamos dar algumas definições a respeito de conjuntos de pontos no plano. Seja P um conjunto finito de pontos no plano e $conv(P)$ o casco convexo de P. Dizemos que P está em **posição geral** se não existirem três pontos colineares em P.

Dizemos que P está em **posição convexa** se todo ponto de P estiver na fronteira de $conv(P)$.

Um ponto $v \in P$ é um **vértice** de P se $conv(P) \neq conv(P \backslash v)$.

Se todos os pontos de P forem vértices, dizemos que P está em **posição estritamente convexa**.

Um **k-ágono** é o casco convexo de um conjunto de k pontos em posição estritamente convexa.

Se X for um subconjunto de P de k pontos em posição estritamente convexa tal que $conv(X) \cap P = X$, então $conv(X)$ é um **k-buraco** ou um **k-ágono vazio**.

Uma **triangulação** de um k-ágono T é um conjunto de 3-ágonos tal que os vértices dos 3-ágonos também são vértices de T, T é a união de todos os 3-ágonos e a interseção de quaisquer dois 3-ágonos tem área 0.

Chamamos 3-ágonos de triângulos, 4-ágonos de quadriláteros, 5-ágonos de pentágonos, etc.

2.5.1 Teorema de Erdős-Szekeres

Um resultado clássico da teoria de Ramsey na geometria combinatória é o seguinte:

Teorema 4 (Erdős-Szekeres, 1935). *Dado um inteiro positivo k, existe um inteiro $ES(k)$ tal que todo conjunto com pelo menos $ES(k)$ pontos em posição geral contém k pontos em posição estritamente convexa.*

Vamos mostrar uma demonstração dada por Pan (2013) e, para isso, primeiro vamos resolver um caso particular com $k = 5$:

Lema 1. *Todo conjunto com 5 pontos em posição geral contém quatro pontos em posição estritamente convexa.*

Demonstração. Seja P um conjunto com 5 pontos em posição geral. Se $conv(P)$ for um pentágono ou um quadrado, o lema é trivial. Então vamos supor que $conv(P)$ seja um triângulo. Tal triângulo possui dois pontos de P, u e v, em seu interior. A reta que contém esses dois pontos separa os vértices do triângulo, dois (p e q) de um lado e um (x) do outro lado. Então $\{u, v, p, q\}$ são quatro pontos em posição estritamente convexa. □

Agora podemos demonstrar o teorema:

Demonstração. (Teorema de Erdős-Szekeres) Dado um k inteiro positivo, considere P um conjunto com pelo menos $R^4(k, 5)$ pontos em posição geral. Para cada subconjunto X de P de tamanho 4, vamos colorí-lo de vermelho se $conv(X)$ for um quadrilátero e de azul de $conv(X)$ for um triângulo. Pelo teorema de Ramsey para hipergrafos, uma das duas condições é satisfeita:

- P tem um subconjunto de tamanho k tal que todo subconjunto dele com 4 elementos é vermelho.
- P tem um subconjunto de tamanho 5 tal que todo subconjunto dele com 4 elementos é azul.

Pelo lema, a segunda opção não é possível, pois ela implicaria que um conjunto com 5 pontos não tem 4 pontos em posição estritamente convexa. Então existe um subconjunto de tamanho k tal que todo subconjunto dele com 4 elementos é vermelho. Seja H tal conjunto.

Vamos mostrar que H está em posição estritamente convexa. Para isso, suponha o contrário. Então existe algum ponto x de H no interior de $conv(H)$. Considere uma triangulação de $conv(H)$. x está dentro de algum triângulo da triangulação. Os três vértices desse triângulo juntos com x formam um conjunto de 4 pontos que deveria ter sido pintado de azul, o que é uma contradição.

Logo H é um conjunto de k pontos em posição estritamente convexa. □

2.5.2 Teorema de Sylvester-Gallai

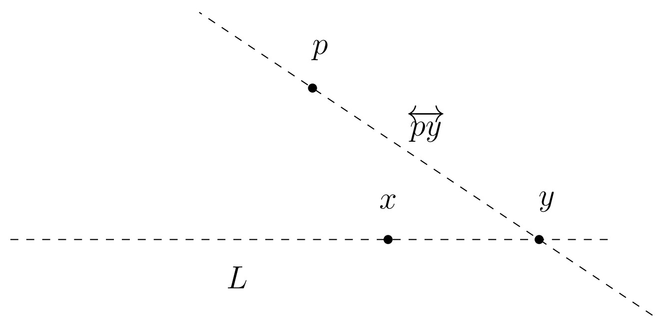
Outro resultado interessante é o teorema de Sylvester-Gallai. A seguinte demonstração é de Kelly (1986).

Teorema 5. *Todo conjunto finito de pontos tem todos os pontos colineares ou existe uma reta que passa por exatamente dois desses pontos.*

Demonstração. Seja P um conjunto finito de pontos no plano tal que P não tem todos os pontos colineares e seja $\mathcal{L}$ o conjunto ds retas com pelo menos dois pontos de P.

Como P é finito, existe $p \in P$ e $L \in \mathcal{L}$ tais que a distância de p a L é mínima.

Vamos mostrar que $|P \cap L| \leq 2$.



Suponha o contrário, que P contém pelo menos 3 pontos em L.

A reta perpendicular a L que passa por p separa L em duas semirretas. Uma dessas semirretas tem que conter pelo menos 2 pontos de P, pois caso contrário $|P \cap L| \leq 2$. Vamos nomear esses pontos de x e y, com x mais próximo de p do que y.

Mas então a distância x a $\overleftrightarrow{py}$ é menor que a distância de p a L, contrdizendo a escolha de p e L. $\square$

Capítulo 3

Big-Line-Big-Clique conjecture

A conjectura seguinte foi proposta por Kára *et al.* (2005):

Conjectura 1. *Dados dois inteiros $k, l \geq 2$, existe um $n = n(k, l)$ tal que todo conjunto finito P com pelo menos n pontos no plano contém ou k pontos visíveis entre si (alternativamente, $\mathcal{V}(P)$ possui uma k-clique) ou l pontos colineares.*

Embora seu enunciado seja simples, poucos resultados foram encontrados para ela, ainda estando em aberto para valores de k e l a partir de 6 e 4 respectivamente.

Para nos habituarmos com o problema, vamos começar pelos casos mais básicos:

3.1 Casos triviais

Primeiramente, se $k = 2$ (ou $l = 2$), com certeza todo conjunto com pelo menos dois pontos tem dois pontos visíveis (e dois pontos colineares).

Se $k = 3$, ou se tem três pontos visíveis ou todos os pontos no conjunto são colineares, então $n(3, l) = max\{3, l\}$.

Se $l = 3$, ou todos os pontos são visíveis para todos os outros ou algum ponto não deixa outros dois se verem, se tendo três pontos colineares. $n(k, 3) = max\{k, 3\}$.

3.2 Caso $k = 4$

Vamos mostrar que os conjuntos que não possuem quatro pontos visíveis possuem muitos pontos colineares. Isto é, para todo l existe um n tal que todo conjunto P com pelo menos n pontos que não possui quatro pontos visíveis possui pelo menos l pontos colineares.

Como visto no teorema 1 do capítulo anterior, um conjunto que não possui quatro pontos visíveis possui grafo de visibilidade plano. Vamos usar o seguinte lema que caracteriza os grafos de visibilidade planos:

Lema 2 (Dujmovic *et al.* (2008))**.** *Seja P um conjunto finito de pontos no plano. Então $\mathcal{V}(P)$ é plano se e somente se satisfaz uma das condições:*

(a) Todos os pontos de P são colineares.

(b) Todos os pontos de P são colineares exceto um.

(c) Todos os pontos de P são colineares exceto dois pontos não visíveis.

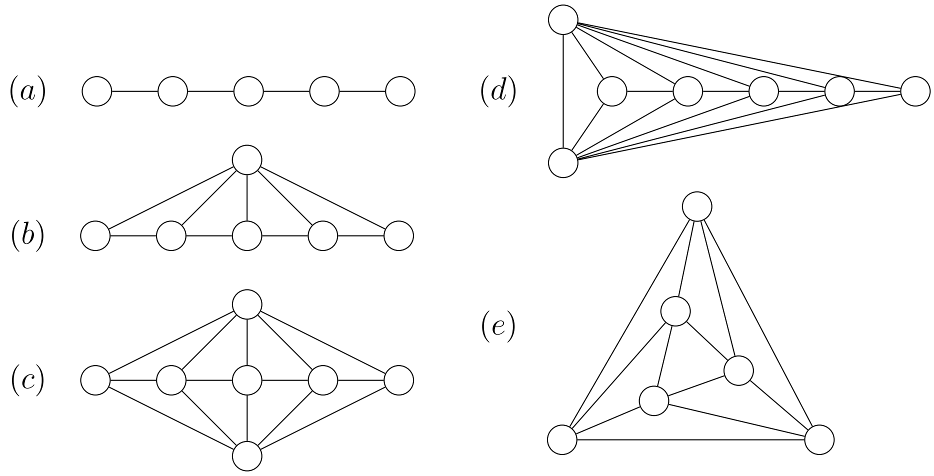


Figura 3.1: *Tipos de grafos de visibilidade planos*

(d) Todos os pontos de P são colieares exceto dois pontos p e q tais que o segmento $\overline{pq}$ não intercepta o menor segmento que contém $P \setminus \{p, q\}$

(e) $\mathcal{V}(P)$ é o grafo (e) desenhado na figura 3.1

Demonstração. Como pode ser visto na figura 3.1 e pode ser facilmente demonstrado, se um grafo de visibilidade satisfaz alguma das condições $(a) - (e)$, ele é plano. Para mostrar a outra direção, seja P um conjunto finito de pontos no plano tal que $\mathcal{V}(P)$ é plano.

Se P contém no máximo dois pontos, P satisfaz (a). Então vamos supor que $|P| \geq 3$. Seja L um maior conjunto de pontos colineares em P e $\hat{L}$ a reta que contém L. $|L| \geq 2$. Se $|L| = 2$, então L satisfaz (a), (b) ou (e). Vamos supor então que $|L| \geq 3$.

A reta $\hat{L}$ divide o plano em dois semiplanos. Sejam S e T os conjuntos de vértices em cada um desses semiplanos tal que $|S| \geq |T|$. Se $|S|$ for no máximo 1, então P satisfaz algum de $(a) - (d)$. Então supor que $|S| \geq 2$. Seja v um ponto de S mais próximo de $\hat{L}$ e seja w um ponto de $S \setminus \{v\}$ mais próximo de $\hat{L}$. Note que a reta que contém v e w não é paralela a $\hat{L}$, pois, se fosse, para todos $x, y \in L$, as arestas $\overline{vx}$ e $\overline{wy}$ ou as arestas $\overline{vy}$ e $\overline{wx}$ se interceptariam e, como o grafo é plano, existiria um vértice nessa interseção que seria mais próximo de $\hat{L}$ do que v, contradizendo a escolha de v. Então a reta que contém v e w intercepta $\hat{L}$ em um ponto, digamos, p.

Vamos mostrar que em $\hat{L}$ se tem no máximo um vértice de cada lado de p. Para isso, suponha que existam dois vértices $x, y \in L$ tais que x esteja entre y e p. Então as arestas $\overline{vy}$ e $\overline{wx}$ se interceptam num ponto mais próximo de $\hat{L}$ do que v e, como o grafo é plano, deve existir um vértice nessa interseção, contradizendo a escolha de v. Mas como $|L| \geq 3$, L tem que possuir exatamente 3 pontos: p e um ponto de cada lado de p, que vamos chamar de x e y.

Agora vamos mostrar que $S = \{v, w\}$. Suponha que S contém um terceiro ponto u. u não está na mesma reta que p, v e w pois L tem tamanho máximo. Pela escolha de v e w, u está mais longe de $\hat{L}$ do que w. Então $\overline{uv}$ intercepta $\overline{wx}$ ou $\overline{wy}$ num ponto mais próximo de $\hat{L}$ do que w, contradizendo a escolha de w. Logo $|S| = 2$. Então $|T| \leq 2$.

Se $T = \emptyset$, então P satisfaz (c). Suponha que $T \neq \emptyset$. Seja u um ponto de T e q a interseção da reta que contém u e v e da reta $\hat{L}$. Suponha que q não seja um vértice de L. Se q está entre x e y, então as arestas $\overline{vu}$ e $\overline{px}$ ou $\overline{py}$ se interceptam em q, e como o grafo é plano, q tem que ser um vértice do grafo, o que é uma contradição. Similarmente, se q não está entre x e y, as arestas $\overline{uv}$ e $\overline{wx}$ ou $\overline{wy}$ se interceptam no ponto q, gerando uma contradição.

Então u intercepta $\hat{L}$ num vértice. Esse vértice não pode ser p, pois se fosse isso contradiria a escolha de L.

Suponha que existam dois pontos u_1 e u_2 em T. Se u_1 está na mesma reta que v e x e u_2 está na mesma reta que v e y. As arestas $\overline{u_1y}$ e $\overline{u_2x}$ se interceptam em um ponto de T que não está na mesma reta que v e x nem que v e y, o que é uma contradição. Se u_1 e u_2 estão na mesma reta que v e x, suponha sem perda de generalidade que u_1 está entre x e u_2, então as arestas $\overline{u_1y}$ e $\overline{u_2x}$ se interceptam em um ponto de T que não está na mesma reta que v e x nem que v e y, o que é uma contradição. Do mesmo jeito, se u_1 e u_2 estão na mesma reta que v e y também temos uma contradição. Portanto $|T| = 1$. Sem perda de generalidade, digamos que u é colinear com v e x. Assim $\{p, u, v, x, y, w\}$ forma o grafo (e) da figura 3.1 $\square$

Teorema 6. *Seja P um conjunto finito de pontos no plano. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- *P satisfaz (a), (b), (c) ou (e) do lema 2.*
- *$\mathcal{V}(P)$ não tem K_4.*

Demonstração. Se P satisfaz (a), (b), (c) ou (e) do lema 2, é fácil ver que $\mathcal{V}(P)$ não tem K_4.

Se $\mathcal{V}(P)$ não tem K_4, pelo teorema 1, $\mathcal{V}(P)$ é plano. Logo, pelo lema 2, P satisfaz (a), (b), (c), (d) ou (e). Mas como (d) possui K_4, P satisfaz (a), (b), (c) ou (e). $\square$

Corolário 6.1. *A conjectura 1 é verdadeira para $k = 4$ com $n(4, l) = max\{7, l+2\}$ se $l > 3$.*

3.3 Caso $k = 5$

Para resolver esse caso, teremos que estudar quando que um conjunto de pontos em posição convexa tem muitos pontos em posição estritamente convexa com a finalidade de generalizar o teorema de Erdős-Szekeres para conjuntos com colinearidades.

3.3.1 Pontos em posição convexa

Considere o seguinte problema: dado um conjunto P de pontos em posição convexa no plano, ache um maior subconjunto de P de pontos em posição estritamente convexa.

Para k, l inteiros positivos, seja $q(k, l)$ o menor inteiro tal que todo conjunto com pelo menos $q(k, l)$ pontos em posição convexa no plano tenha l pontos colineares ou k pontos em posição estritamente convexa.

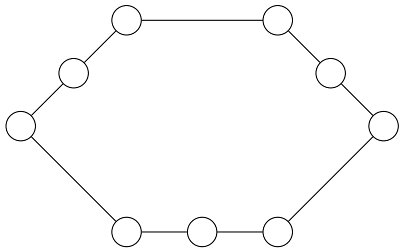
Lema 3 (Abel *et al.* (2009))**.** *Para $k, l \geq 3$,*

$$q(k,l) = \begin{cases} \frac{1}{2}(k-1)(l-1)+1 & \textit{se } k \textit{ é ímpar} \\ \frac{1}{2}(k-2)(l-1)+2 & \textit{se } k \textit{ é par} \end{cases}$$

Demonstração. Vamos primeiro mostrar para $k = 3$ e para $l = 3$. Como todo conjunto de pontos sem 3 pontos em posição estritamente convexa é colinear, $q(3, l) = l$. Como todo conjunto de pontos em posição convexa sem 3 pontos colineares está em posição estritamente convexa, $q(k, 3) = k$.

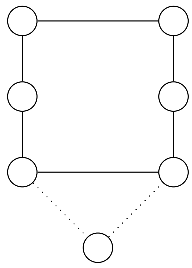
Agora seja $f(k, l)$ o lado direito da igualdade. Primeiro vamos mostrar que $q(k, l) \geq f(k, l)$.

Se $k \geq 5$ é ímpar, seja P o conjunto de $(l-1)$ pontos a cada dois lados do $(k-1)$-ágono convexo, como mostrado na figura ($l = 4$, $k = 7$):



P tem $\frac{1}{2}(l-1)(k-1)$ pontos sem k pontos em posição estritamente convexa e nem l pontos colineares. Então $q(k,l) > \frac{1}{2}(l-1)(k-1)$, ou seja, $q(k,l) \geq f(k,l)$.

Se k é par, caso $k=4$, o conjunto de $l-1$ pontos colineares e mais um ponto tem l pontos sem k pontos em posição estritamente convexa. Então $q(4,l) \geq l+1$. Caso $k \geq 6$, seja P o conjunto de $(l-1)$ pontos a cada dois lados do $(k-2)$-ágono convexo e mais um ponto que não é colinear com nenhum conjunto de outros dois pontos, como mostrado na figura ($l=4$, $k=6$):



P tem $\frac{1}{2}(l-1)(k-2)+1$ pontos sem k pontos em posição estritamente convexa e nem l pontos colineares. Então $q(k,l) > \frac{1}{2}(l-1)(k-2)+1$, ou seja, $q(k,l) \geq f(k,l)$.

Agora nós provamos que $q(k,l) \leq f(k,l)$ por indução.

« Não entendi essa parte da prova... »

□

Com isso, podemos generalizar o teorema de Erdős-Szekeres como foi feito por Abel *et al.* (2009).

Teorema 7. *Para todo inteiro k, todo conjunto com $ES(k)$ pontos contém k pontos em posição convexa (não necessariamente estrita).*

Demonstração. Sejam P e P' dois conjuntos de pontos no plano com cada ponto de P associado a um único ponto de P'. Se para todos $v \in P$ e $v' \in P'$ associados vale que $dist(v,v') < \epsilon$, dizemos que P' é uma ϵ-perturbação de P.

Vamos mostrar o seguinte: para todo conjunto de pontos P, existe uma ϵ-perturbação P' de P em posição geral para algum $\epsilon > 0$ tal que se S' é um subconjunto de P' em posição estritamente convexa então $S \in P$ (associado a S') está em posição convexa.

Daí, o teorema de Erdős-Szekeres garante que existe para todo k vai existir um P' com $ES(k)$ pontos e $S' \in P'$ em posição estritamente convexa e assim o teorema estará provado.

Para cada tripla ordenada (u,v,w) de pontos de P, existe um $\mu > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \mu$ toda ϵ-perturbação mantém a orientação[1] desses pontos. Como a quantidade de triplas assim são finitas, pegamos μ^* o μ mínimo. Seja P' uma μ^*-perturbação de P em posição geral.

Seja S' um subconjunto de P' em posição estritamente convexa. Considere S' e sentido horário. Então a orientação de toda tripla de pontos seguidos de S' é para a direita. Como

[1]A orientação de uma tripla ordenada de pontos diz se eles são colineares, se viram para a esquerda ou se para a direita.

tal perturbação preservou a orientação das triplas não colineares, o conjunto S associado a S' só possuia triplas colineares e orientadas para a direita, quando olhadas da mesma ordem que vimos em S'.

Portanto S está em posição convexa. □

Teorema 8. *Dados inteiros $k \geq 3$ e $k \geq 2$, existe um inteiro $\widehat{ES}(k,l)$ tal que todo conjunto P com pelo menos $\widehat{ES}(k,l)$ contém:*

- *l pontos colineares, ou*
- *k pontos em posição estritamente convexa.*

Demonstração. Basta mostrar que

$$\widehat{ES}(k,l) \leq \begin{cases} ES(\frac{1}{2}(k-1)(l-1)+1) & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ ES(\frac{1}{2}(k-2)(l-1)+2) & \text{se } k \text{ é par} \end{cases}$$

Se k é ímpar, seja P um conjunto com $ES(\frac{1}{2}(k-1)(l-1)+1)$ pontos sem l pontos colineares. Pelo teorema 7, P possui $\frac{1}{2}(k-1)(l-1)+1$ pontos em posição convexa. Assim, pelo lema 3, P possui k pontos em posição estritamente convexa.

Se k é par, a prova é análoga. □

3.3.2 Pentágonos vazios

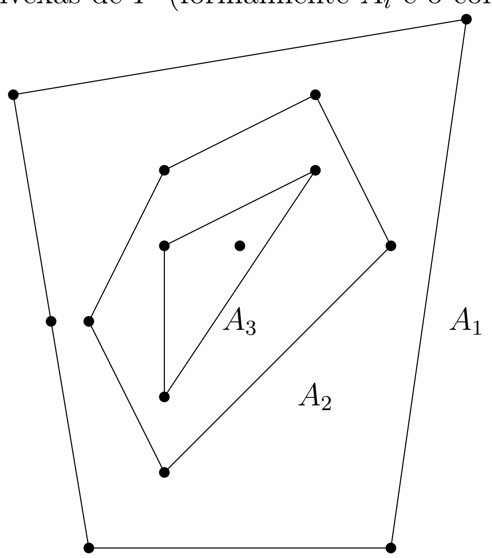
Agora que sabemos como achar conjuntos em posição estritamente convexa, vamos mostrar o seguinte teorema de Abel *et al.* (2009):

Teorema 9. *Para todo inteiro $l \geq 2$, todo conjunto finito com pelo menos $ES(\frac{(2l-1)^l-1}{2l-1})$ pontos no plano possui*

- *l pontos colineares, ou*
- *um pentágono vazio.*

Rascunho da prova

Considere um conjunto de pontos P. A imagem abaixo mostra o que são as camadas convexas de P (formalmente A_i é o conjunto dos vértices de $(P \cap conv(A_{i-1})) \setminus A_{i-1}$).



Vamos supor que um conjunto suficientemente grande de pontos não tem nenhum pentágono vazio e nem l pontos colineares e achar uma contradição. Para isso, faremos o seguinte:

1. Mostrar que tal conjunto tem l camadas convexas não vazias.

2. Fixar um ponto z que está dentro da l-ésima camada convexa.

3. Mostrar que, para que não tenham pentágonos vazios, muitos pontos têm que se alinhar com z usando um conceito que chamaremos de *arcos vazios*.

Demonstração. Seja $l \geq 3$ e $k = \frac{(2l-1)^l - 1}{2l-1}$ e considere um conjunto P com pelo menos $ES(k)$ pontos.

Suponha que P não contém l pontos colineares nem um pentágono vazio.

Um conjunto $X \subset P$ em posição convexa com pelo menos k pontos é dito k-minimal se não existir outro conjunto $Y \subset P$ em posição convexa com pelo menos k pontos tal que $conv(Y) \subsetneq conv(X)$.

Pelo teorema 7, P possui algum conjunto de k pontos em posição convexa. Seja A_1 um conjunto assim k-minimal.

Vamos definir as camadas convexas A_i a partir de A_1. Para $i \in [l-1] \setminus \{1\}$, seja A_i os vértices de $(P \cap conv(A_{i-1})) \setminus A_{i-1}$ e seja $A_l = (P \cap conv(A_{l-1})) \setminus A_{l-1}$.

Pelo lema 3 com $k = 5$, para cada $i \in [l-1] \setminus \{1\}$, quaisquer $2l-1$ pontos consecutivos em A_i possuem 5 pontos em posição estritamente convexa. Para que P não tenha pentágonos vazios, o casco convexo desses $2l-1$ pontos deve conter um ponto de A_{i-1}.

Como A_{i-1} contém $\lfloor \frac{|A_{i-1}|}{2l-1} \rfloor$ conjuntos distintos de $2l-1$ pontos consecutivos,

$$|A_i| \geq \lfloor \frac{|A_{i-1}|}{2l-1} \rfloor > \frac{|A_{i-1}|}{2l-1} - 1$$

E disso concluímos

$$|A_{i-1}| < (|A_i| + 1)(2l-1)$$

Suponha que para algum $i \in [l-1]$ vale $A_i = \emptyset$. Então $|A_{i-1}| < (2l-1)$, $|A_{i-2}| < (2l-1)^2 + (2l-1)$, $|A_{i-3}| < (2l-1)^3 + (2l-1)^2 + (2l-1)$, ..., e, por indução,

$$|A_1| < \sum_{j=1}^{i-1} (2l-1)^j$$

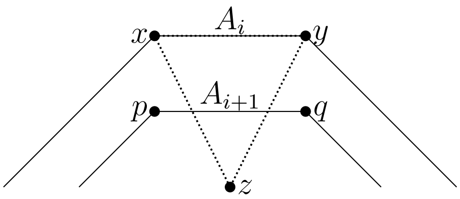
Somando os elementos da PG, obtemos:

$$|A_1| = \frac{(2l-1)^i - (2l-1)}{2l-2} < \frac{(2l-1)^i - 1}{2l-2} \leq \frac{(2l-1)^l - 1}{2l-2} = k$$

O que é uma contradição. Logo $A_i \neq \emptyset, \forall i \in [l]$. Se $|A_i| < 3$, então $A_{i+1} = \emptyset$. Portanto $|A_i| \geq 3, \forall i \in [l-1]$.

Fixe $z \in A_l$. Para i em $[l-2]$, considere os pontos de A_i em sentido horário. Se x e y são dois pontos consecutivos nessa ordem, dizemos que o segmento orientado $\overrightarrow{xy}$ é um arco vazio se $\Delta(x, y, z) \cap A_{i+1} = \emptyset$.

Se $\overrightarrow{xy}$ é um arco vazio em A_i, p e q são consecutivos em A_{i+1} em sentido horário e $\overrightarrow{pq}$ é o segmento orientado de A_{i+1} que intercepta com $\Delta(x, y, z)$, então dizemos que $\overrightarrow{pq}$ é o arco seguinte a $\overrightarrow{xy}$.



Fato 1. *Se $\overrightarrow{xy}$ é um arco vazio de A_i e $\overrightarrow{pq}$ é o arco seguinte a $\overrightarrow{xy}$, então $conv(\{x, y, p, q\})$ é um quadrilátero vazio e $\overrightarrow{pq}$ também é um arco vazio.*

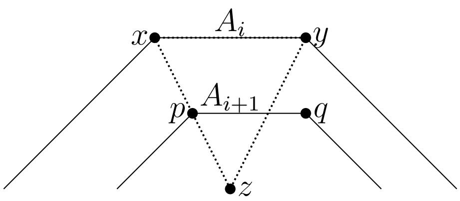
Demonstração. Seja $Q = \{x, y, p, q\}$. Como $p, q \in conv(A_i)$, x e y são vértices de Q e como $\overrightarrow{xy}$ é um arco vazio p e q também são vértices de Q. Logo Q é um quadrilátero. Q é vazio pela definição das camadas convexas.

Suponha que $\overrightarrow{pq}$ não seja um arco vazio. Então existe algum ponto em $\Delta p, q, z \setminus \Delta(x, y, z)$. Seja t um ponto desses mais próximo a $\overline{pq}$. Como $\{x, y, p, q\}$ é um quadrilátero vazio, então $\{x, y, p, q, t\}$ é um pentágono vazio, o que é uma contradição.

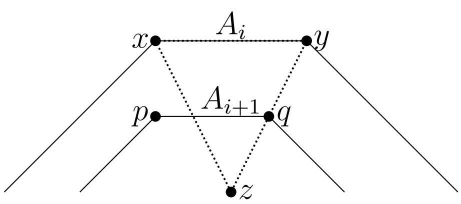
Logo $\overrightarrow{pq}$ é um arco vazio. □

Seja $\overrightarrow{pq}$ o arco seguinte ao arco vazio $\overrightarrow{xy}$, então $\overrightarrow{pq}$ é:

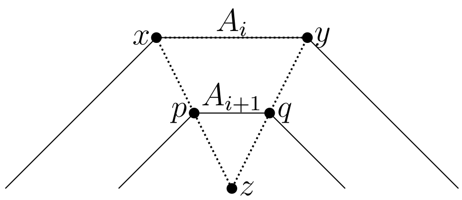
- **alinhado à esqueda** se $p \in \Delta[x, y, z]$ e $q \notin \Delta[x, y, z]$
- **alinhado à direita** se $p \notin \Delta[x, y, z]$ e $q \in \Delta[x, y, z]$
- **alinhado duplamente** se $p \in \Delta[x, y, z]$ e $q \in \Delta[x, y, z]$



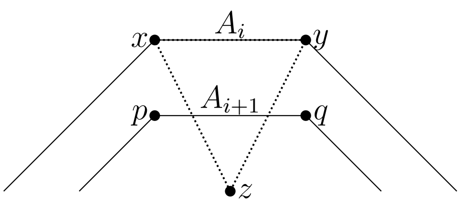
Alinhado à esquerda



Alinhado à direita



Duplamente alinhado



Nenhum

Fato 2. *Se $\overrightarrow{pq}$ o arco seguinte ao arco vazio $\overrightarrow{xy}$, então $\overrightarrow{pq}$ é alinhado à esquerda ou alinhado à direita ou alinhado duplamente.*

Demonstração. Suponha que $\overrightarrow{pq}$ não seja nenhum desses casos.

Então seja t o ponto em $D = P \cap (\Delta[p, q, z] \setminus \overline{pq})$ mais próximo a $\overline{pq}$. Tal ponto existe pois $z \in D$ e D é finito.

Como $\overrightarrow{xy}$ é um arco vazio e $\{x, y, p, q\}$ é um quadrilátero vazio, então $\{x, y, p, q, t\}$ é um pentágono vaio, o que é uma contradição.

Logo $\overrightarrow{pq}$ é alinhado à esquerda ou alinhado à direita ou alinhado duplamente □

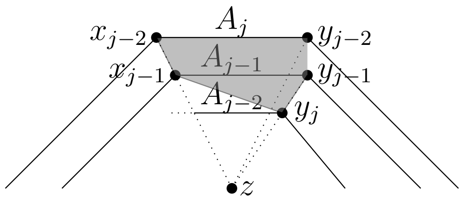
Suponha que A_1 não contenha arcos vazios. Então para dois pontos consecutivos x e y em A_1 temos pelo menos um ponto de A_2 em $\Delta(x, y, z)$. Como para todos pares de pontos concecutivos x, y e u, v em A_1, $\Delta(x, y, z) \cap \Delta(u, v, z) = \emptyset$, teríamos $|A_2| \geq |A_1|$, o que contradiz a minimalidade de A_1.

Seja $\overrightarrow{x_1y_1}$ um arco vazio em A_1 e, para $i \in [l-2]$, seja $\overrightarrow{x_{i+1}y_{i+1}}$ o arco seguinte a $\overrightarrow{x_iy_i}$. Pelo fato 1, $\overrightarrow{x_{i+1}y_{i+1}}$ é um arco vazio.

Se todos os $\overrightarrow{x_iy_i}$ fossem duplamente alinhados, teríamos $\{x_1, x_2, ..., x_{l-1}, z\}$ colineares e $\{y_1, y_2, ..., y_{l-1}, z\}$ colineares e, pelo fato 2, $\{x_1, x_2, ..., x_{l-1}, x_l, z\}$ ou $\{y_1, y_2, ..., y_{l-1}, y_l, z\}$ seriam colineares, o que é uma contradição.

Então algum $\overrightarrow{x_iy_i}$ não é duplamente alinhado. Fixe o menor $i \in [l-2] \setminus \{1\}$ que isso acontece. Pelo fato 2, $\overrightarrow{x_iy_i}$ é alinhado à esquerda ou à direita. Sem perda de generalidade, suponha que é alinhado à esquerda. Existe algum $j \in \{i+1, ...l-1\}$ tal que $\overrightarrow{x_jy_j}$ não é alinhado à esquerda, pois caso contrário $\{x_1, x_2, ..., x_l, z\}$ seriam colineares. Fixe o menor $j \in \{i+1, ..., l-1\}$ que isso acontece.

Temos que $\{x_{j-2}, y_{j-2}, x_{j-1}, y_{j-1}, y_j\}$ estão em posição estritamente convexa. Portanto P contém um pentágono vazio.



□

Como a melhor cota superior para a ordem de crescimento de $ES(k)$ conhecida é exponencial em k (Toth e Valtr (2004)), esse teorema nos garante a existência de pentágonos vazios em conjuntos de tamanho muito grandes por conter um exponencial duplo.

De fato, Barát *et al.* (2012) mostraram que o resultado vale para $328l^2$ pontos construindo mais de l camadas convexas com alguma delas com arco vazio e usou o mesmo argumento do teorema a cima.

Corolário 9.1. *A conjectura 1 é verdadeira para* $k = 5$ *com* $n(5, l) = \Theta(l^2)$.

Demonstração. O resultado de Barát *et al.* (2012) garante que $n(5, l) = O(l^2)$. Para ver que $n(5, l) = \Omega(l^2)$ basta ver que uma grade $(l-1)$x$(l-1)$ contém $(l-1)^2$ pontos e não contém pentágonos vazios nem l pontos colineares. □

3.4 Para conjuntos infinitos de pontos

Pór e Wood (2010) mostraram que a conjectura 1 não vale para conjuntos infinitos de pontos com a seguinte construção:

Teorema 10. *Existem conjuntos infinitos enumeráveis de pontos sem 4 pontos colineares e sem 3 pontos visíveis dois a dois.*

Demonstração. Vamos construir indutivamente um conjunto de pontos com tal propriedade.

Sejam x_1, x_2 e x_3 três pontos não colineares no plano.

Dados pontos $x_1, ..., x_{n-1}$ não conlineares, vamos definir o ponto x_n da seguinte forma: pelo teorema de Sylvester-Gallai, existe uma reta que passa por exatamente dois pontos de $x_1, ..., x_{n-1}$. Seja $\mathcal{L} = \overleftrightarrow{x_ix_j}$ a reta que passa por exatamente dois pontos de $x_1, ..., x_{n-1}$ com $i < j$ e com i mínimo entre as com j mínimo. Coloque x_n no segmento $\overline{x_ix_j}$ tal que ela seja a única reta que contenha x_n e mais dois pontos (isso é possível, já que somente uma quantidade finita de pontos de $\mathcal{L}$ não pode ser escolhida).

Vamos chamar de $P = \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$. Por construção, P não tem 4 pontos colineares e se x_i e x_k com $i < k$ são visíveis então existe um outro ponto colinear x_j com $j < k$ e x_k está no segmento $\overline{x_i x_j}$.

Suponha que x_i, x_j e x_k são dois a dois visíveis com $i < j < k$. Então existem pontos $x_{i'}$ e $x_{j'}$ com $i' < k$ e $j' < k$ tais que x_k está no segmento $\overline{x_i x_{i'}}$ e no segmento $\overline{x_j x_{j'}}$. Pela escolha de x_k, só existe uma reta que contém x_k e mais dois pontos entre $x_1, ... x_{k-1}$. Então $i = j'$ e $j = i'$. Mas então $P \cap \overline{x_i x_j} = \{x_i, x_j, x_k\}$, ou seja, x_i e x_j não são visíveis, ou seja, x_i e x_j não são visíveis.

Portanto não existem 3 pontos visíveis dois a dois em P.

$\square$

3.5 Conclusão

Embora essa seja uma conjectura com o enunciado relativamente simples, ela é recente e ainda está longe de ser provada. Nos primeiros anos após ser proposta ela recebeu uma atenção considerável entre vários pesquisadores da área, mas não encontramos nenhuma publicação sobre ela de depois de 2014, o que mostra a dificuldade de se obter qualquer avanço nela atualmente.

Com tamanha dificuldade, Jan Kara propôs o seguinte enfraquecimento da conjectura em uma conversa com Atilla Pór e David R. Wood em 2005, mas também não houve avanços.

Conjectura 2. *Dados $k, l \geq 2$, existe um $n = n(k, l)$ tal que todo conjunto finito P com pelo menos n pontos com cada ponto colorido em alguma cor dentre $k-1$ cores ou tem l pontos colineares ou tem um par de pontos da mesma cor visíveis entre si ($\mathcal{V}(P)$ tem número cromático pelo menos k).*

Vamos falar de alguns resultados que dificultaram tentativas mais diretas de provar a conjectura e depois vamos falar de algumas áreas que surgiram a partir de outras tentativas de mostrá-la.

3.5.1 Dificuldades encontradas

Conjuntos de pontos sem heptágonos vazios

Dado que o teorema de Erdős-Szekeres vale, Erdős colocou o problema de determinar se para um dado n existe um $g(n)$ tal que todo conjunto com $g(n)$ pontos em posição geral contém um n-ágono vazio.

Se essa questão fosse respondida afirmativamente, a conjectura 1 sairia como corolário.

Para $n = 3$ e $n = 4$ é fácil ver que $g(3) = 3$ e $g(4) = 5$. Harborth (1978) provou que $g(5) = 10$ e Gerken (2008) e Nicolas (2007) provaram que $g(6)$ existe.

No entanto, Horton (1983) mostrou uma construção de conjuntos arbitrariamente grandes sem heptágonos vazios.

The orchard problem e o grafo de Turán

Turán (1941) provou que todo grafo com n vértices e mais arestas que o grafo de Turán

$T_{n,k}$[2] tem um subgrafo K_{n+1}, então se mostrássemos que todo grafo de visibilidade sem retas com muitos pontos possui muitas arestas conseguiríamos provar a conjectura.

Mas, tentando resolver o *orchard problem*[3], Burr *et al.* (1974) e Füredi e Palásti (1984) construiram conjuntos de pontos sem quatro pontos colineares cujo grafo de visibilidade tem menos arestas que o grafo de Turán.

3.5.2 Novas direções

Em 2009, enquato tentava provar a conjectura 1, Matoušek (2009) se perguntou quantos pontos são necessário para bloquear a visibilidade de um conjunto de pontos dado. Os resultados obtidos por ele serão vistos no próximo capítulo, mas a partir disso surgiram várias outras questões sobre visibilidade de pontos e bloqueadores de visibilidade.

[2] $T_{n,k}$ é o grafo com n vértices, k cores, dois vértices adjacentes se e somente se têm cores diferentes e a diferença da quantidade de vértices de cada cor no máximo 1.

[3] Problema do pomar em tradução livre. Dados n, k inteiros, queremos achar o conjunto de n pontos com o máximo de retas que contém k pontos em cada uma delas.

Capítulo 4

Bloqueadores de visibilidade

São dados um conjunto de pontos P em posição geral e um outro conjunto de pontos B. Dizemos que B bloqueia a visibilidade de P (ou só que B bloqueia P) se para cada par p_1, p_2 de pontos de P existir um ponto de B no segmento aberto de p_1 a p_2. Vamos definir:

$$b(P) = min\{|B| : B \text{ bloqueia } P\}$$

$$b(n) = min\{b(P) : |P| = n, P \text{ está em posição geral}\}$$

Matoušek (2009) chegou a essas definições tentando provar a conjectura 1 do capítulo anterior e tentou estimar o crescimento assintótico de $b(n)$.

Conjectura 3.

$$\frac{b(n)}{n} \to \infty$$

Ou seja, $b(n)$ é superlinear

São conhecidos limitantes inferiores lineares e limintantes superiores superlineares para $b(n)$, que serão mostrados na sessão seguinte.

4.1 Ordem de crescimento de $b(n)$

Dado um conjunto P de pontos no plano, seja $\mu(P)$ a quantidade de pontos médios:

$$\mu(P) = |\{(\frac{(p+q)}{2} : p, q \in P, p \neq q\}|$$

E seja

$$\mu(n) = min\{\mu(P) : |P| = n\}$$

Claramente $b(n) \leq \mu(n)$, pois o conjunto dos pontos médios é um conjunto bloqueador. Então vamos estimar $\mu(n)$.

O resultado seguinte foi obtido por Pach J. em 2003, mas aqui mostraremos uma prova de Matoušek (2009).

Teorema 11. $\mu(n) \leq ne^{C\sqrt{logn}}$ *para alguma constante C.*

Demonstração. Dado n, sejam m, n inteiros, $G = \{0, 1, 2, ..., s-1\}^m$ e $S_k = \{x \in G : ||x||^2 = k\}$ ($||x||$ representa a norma euclidiana de x).

$$G = \bigcup_{k=0}^{m(s-1)^2} S_k$$

Por contagem, existe pelo menos um k tal que $|S_k| \geq \frac{s^m}{m(s-1)^2} \geq \frac{s^{m-2}}{m}$. Seja $P = S_k$ para algum k assim.

P está em um octante de uma esfera, logo P está em posição geral. O conjunto dos pontos médios de P é subconjunto de $G' = \{0, 0.5, 1, 1.5, ..., s-1\}^m$. Então $\mu(n) \leq |G| - |P|$.

Com $m = \lfloor logn \rfloor$ e s o menor inteiro tal que $\frac{s^{m-2}}{m} \geq n$, temos que $|P| \geq n$ e $(s-1)^{m-2} < mn$. Então:

$$\mu(n) \leq |G'| = (2s-1)^m \leq (3(s-1))^m \leq 3^m(s-1)^2 mn < ne^{O(\sqrt{logn})}$$

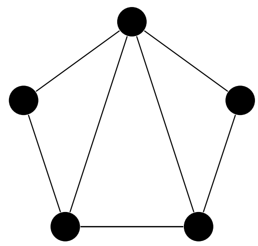
Agora basta projetar G em um espaço bidimensional para se obter o resultado. □

Corolário 11.1. *$b(n) \leq ne^{C\sqrt{logn}}$ para alguma constante C.*

Matousek só conseguiu o seguinte limitante inferior trivial (Matoušek (2009)), mas não houveram muitos avanços desde então, só uma pequena melhora por Dumitrescu *et al.* (2009).

Teorema 12. $b(n) \geq 2n - 3$

Demonstração. Se P é um conjunto de n pontos e $conv(P)$ tem c pontos, uma triangulação de P tem $3n - c - 3$ segmentos de reta. Como precisamos de pelo menos um ponto para bloquear cada uma desses segmentos, temos que $b(P) \geq 3n - c - 3 \geq 2n - 3$.



Exemplo com $n = 5$.

□

Dumitrescu *et al.* (2009) ainda mostrou que $b(n) \geq \frac{25}{8}n - o(1)$.

4.2 Conjuntos em posição convexa

Para conjuntos de pontos e posição estritamente convexa, pode-se obter resultados melhores. Matoušek (2009) mostrou que, nesse caso, $b(P) = \omega(nlogn)$.

Teorema 13 (Matoušek (2009))**.** *Se P é um conjunto de n pontos em posição geral e estritamente convexa, então:*

$$b(P) \geq \begin{cases} n\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} & \text{se } n = 2m+1 \text{ é ímpar} \\ 1 + n\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} & \text{se } n = 2m \text{ é par} \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $p_1, p_2, ..., p_n$ os pontos de P em nomeados em sentido horário. Definimos o comprimento $l(p_i, p_j)$ como a quantidade de arestas de p_i a p_j em $conv(P)$, ou seja, $l(p_i, p_j) = min\{j - i, n + i - j\}$.

Seja Q um conjunto que bloqueia a vizibilidade de P e $q \in Q$. Percebam que se q bloqueia os segmentos $\overline{p_{i_k} p_{j_k}}$, com $l = min_k l(p_{i_k}, p_{j_k})$, então q bloqueia no máximo l pares de pontos de P.

Assim, se dermos pesos $\frac{1}{l(p_i,p_j)}$ para cada segmento $\overline{p_i p_j}$, cada $q \in Q$ bloqueia segmentos com soma no máximo 1. Mas para bloquear todos, precisamos de pelo menos pontos que bloqueiem a soma de todos os pesos. Assim:

$$b(P) \geq |Q| \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{l(p_i, p_j)}$$

Listando os segmentos em outra ordem e sendo $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, podemos escrever a mesma soma como

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{l(p_i, p_j)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{i+m} \frac{1}{l(p_i,p_j)} \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{i+m-1} \frac{1}{l(p_i,p_j)} + 1 \text{ se } n \text{ é par} \end{cases} = \begin{cases} n \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \text{ se } n = 2m+1 \text{ é ímpar} \\ 1 + n \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \text{ se } n = 2m \text{ é par} \end{cases}$$

$\square$

Capítulo 5

Conclusão

Como visto, ainda há muito a ser feito nesse campo de visibilidade de pontos. Além dos resultados apresentados aqui, existem estudos sobre bloqueadores de conjuntos com até l pontos colineares, sobre coloração de conjuntos bloqueadores entre outros (Pór e Wood (2009)).

Essa monografia mostrou apenas alguns reultados relacionados a um problema importante na área. Espero que tenha despertado o interesse e a curiosidade e que mais trabalho continue sendo feito nessa área.

Referências Bibliográficas

Abel *et al.*(**2009**) Zachary Abel, Brad Ballinger, Prosenjit Bose, Sébastien Collette, Vida Dujmović, Ferran Hurtado, Scott D. Kominers, Stefan Langerman, Attila Pór e David R. Wood. Every large point set contains many collinear points or an empty pentagon. https://arxiv.org/abs/0904.0262, 2009. Citado na pág. 13, 14, 15

Barát *et al.*(**2012**) János Barát, Vida Dujmović, Gwenaël Joret, Michael S. Payne, Ludmila Scharf, Daria Schymura, Pavel Valtr e David R. Wood. Empty pentagons in point sets with collinearities. https://arxiv.org/abs/1207.3633, 2012. Citado na pág. 18

Burr *et al.*(**1974**) Stefan A. Burr, Branko Grünbaum e N. J. A. Sloane. The orchard problem. *Geometriae Dedicata*, 2(4):397–424. ISSN 1572-9168. doi: 10.1007/BF00147569. URL https://doi.org/10.1007/BF00147569. Citado na pág. 20

Dujmovic *et al.*(**2008**) Vida Dujmovic, David Eppstein, Matthew Suderman e David R. Wood. Drawings of planar graphs with few slopes and segments. https://arxiv.org/abs/math/0606450, 2008. Citado na pág. 11

Dumitrescu *et al.*(**2009**) Adrian Dumitrescu, János Pach e Géza Tóth. A note on blocking visibility between points. http://www.cs.uwm.edu/faculty/ad/blocking.pdf, 2009. Citado na pág. 22

Füredi e Palásti(1984) Z. Füredi e I. Palásti. Arrangements of lines with a large number of triangles. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 92(4):561–566. ISSN 00029939, 10886826. URL http://www.jstor.org/stable/2045427. Citado na pág. 20

Gerken(2008) Tobias Gerken. Empty convex hexagons in planar point sets. https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-007-9018-x, 2008. Citado na pág. 19

Harborth(1978) Heiko Harborth. Konvexe fünfecke in ebenen punktmengen. *Elemente der Mathematik*, 33:116–118. URL http://eudml.org/doc/141217. Citado na pág. 19

Horton(1983) J. D. Horton. Sets with no empty 7-gons. https://cms.math.ca/10.4153/CMB-1983-077-8, 1983. Citado na pág. 19

Horton(2003) J. D. Horton. A general notion of visibility graphs. https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-003-2773-4, 2003. Citado na pág. 4

Kelly(1986) L. M. Kelly. A resolution of the sylvester-gallai problem of j.-p. serre. *Discrete & Computational Geometry*, 1(2):101–104. ISSN 1432-0444. doi: 10.1007/BF02187687. URL https://doi.org/10.1007/BF02187687. Citado na pág. 8

Kára *et al.*(**2005**) Jan Kára, Attila Pór e David R. Wood. On the chromatic number of the visibility graph of a set of points in a plane. http://dx.doi.org/10.1007/s00454-005-1177-z, 2005. Citado na pág. 1, 11

Matoušek(2009) Jiří Matoušek. Blocking visibility for points in general position. https://doi.org/10.1007/s00454-009-9185-z, 2009. Citado na pág. 20, 21, 22

Nicolas(2007) Carlos M. Nicolas. The empty hexagon theorem. https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-007-1343-6, 2007. Citado na pág. 19

Pan(2013) Yujia Pan. The Erdős-Szekeres theorem: a geometric application of Ramsey's theorem. http://math.uchicago.edu/~may/REU2013/REUPapers/Pan.pdf, 2013. Citado na pág. 1, 7

Pór e Wood(2009) Atila Pór e David R. Wood. On visibility and blockers. https://arxiv.org/abs/0912.1150, 2009. Citado na pág. 25

Pór e Wood(2010) Attila Pór e David R. Wood. The big-line-big-clique conjecture is false for infinite point sets. https://arxiv.org/abs/1008.2988, 2010. Citado na pág. 18

Toth e Valtr(2004) Geza Toth e Pavel Valtr. The erdös-szekeres theorem: upper bounds and related results. Em *in Combinatorial and Computational Geometry*, páginas 557–568. Press. Citado na pág. 18

Turán(1941) Paul Turán. On an extremal problem in graph theory. *Matematikai és Fizikai Lapok*, 43:436–452. Citado na pág. 19