Big-Line-Big-Clique Conjecture e Bloqueadores de Visibilidade

Gabriel K. Lasso
Orientador: Carlos E. Ferreira

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A teoria de Ramsey é um campo da combinatória que estuda questôes como "quão grande uma estrutura deve ser para que ela possua uma subestrutura com uma certa propriedade?". Um exemplo clássico é o problema da festa: quantas pessoas tem que ter em uma festa para que nela existam três pessoas que se conhecem duas a duas não conhecem nenhuma das outras duas. Essa teoria possui aplicações em diversos outros campos da matemática, como a topologia, a teoria ergódica e a geometria.[12]

Aqui fazemos um estudo de um problema geométrico ligado a teoria de Ramsey. Tal problema foi colocado em 2005 por Jan Kára, Attila Pór e David R. Wood enquanto estudavam o número cromático de grafos de visibilidade. O problema pode ser colocado da seguinte forma: "Quão grande deve ser um conjunto de pontos para que ele conhtenha l pontos colineares ou k pontos visíveis dois a dois?".

Uma observação sobre esse problema é que se dois pontos não são visíveis, então existe um terceiro que bloqueia a visibilidade deles. Outro problema estudado aqui é sobre o tamanho mínimo do conjunto de bloqueadores para um conjunto de pontos.

Todos esses conceitos serão definidos com mais formalidade mais pra frente. O primeiro problema é conhecido como **conjectura big-line-big-clique** e o segundo é uma questão natural sobre **bloqueadores de visibilidade**.

1.2 Estrutura do trabalho

No caítulo 2 vamos definir alguns conceitos que serão base para os demais, assim como demonstrar algumas propriedades chaves desses conceitos. No capítulo 3 vamos mostrar os resultados conhecidos sobre a conjectura big-line-big-clique, mostrar algumas dificuldades encontradas na tentativa de resolver esse problema e discutir alguns fatos sobre ele. No capítulo 4 vamos focar no problema dos bloqueadores de visibilidade, mostrando cotas superiores e inferiores conhecidas e discutindo algumas coisas em aberto que as pessoas acreditam que sejam verade.

Capítulo 2

Noções preliminares

2.1 Grafos

Um grafo é um par $G = (V, E)$ em que V é um conjunto enumerável (geralmente finito) e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos de V. Os elementos de V são chamados **vértices**, e os elementos de E são chamados **arestas**.

Se G é um grafo, chamamos de $V(G)$ seu conjunto de vértices e de $E(G)$ seu conjunto de arestas.

Chamamos **ordem** de um grafo a cardinalidade de seu conjunto de vértices.

Se uma aresta $e = \{u, v\} \in E(G)$, dizemos que u e v são **vizinhos** ou **adjacentes**.

Um grafo **completo** é um grafo em que todos dois vértices distintos são adjacentes. Chamamos o grafo completo de ordem n de K_n.

Se G é um grafo e $S \subset V(G)$ é um conjunto de vértices, chamamos de **subgrafo** de G induzido por S o grafo $G[S] = (S, E_S)$, em que $E_S = \{u, v \in E(G) | u, v \in S\}$. Nesse caso, dizemos que G contém uma cópia de $G[S]$ ou simplesmente que G contém $G[S]$, ou ainda que G possui $G[S]$.

Uma **k-clique** é um conjunto de vértices C tal que $G[C]$ é um grafo completo de ordem k.

Um grafo é **planar** se pode ser desenhado no plano sem que as curvas que representam as arestas se cruzem. Tal desenho é chamado de **imersão do grafo no plano**. Um grafo **plano** é um grafo planar com uma imersão no plano.

2.2 Grafo de visibilidade

Na sessão anterior, definimos conceitos básicos de teoria dos grafos. Aqui vamos estudar um caso bem particular.

Seja P um conjunto de pontos no plano e $x, y \in P$. Dizemos que x e y são visíveis em P se $\overline{xy} \cap P = \{x, y\}$. $p_1, p_2, ..., p_n$ são visíveis se são visíveis dois a dois.[1]

O grafo de visibilidade de um conjunto P de pontos no plano é o grafo construído da seguinte forma: o conjunto de vértices é P e há uma aresta entre

[1] Vamos considerar só conjuntos que são densos em nenhum lugar, i.e. o interior de P é vazio.

dois vértices x e y se x e y são visíveis. Denotamos esse grafo por $\mathcal{V}(P)$ e se p, q é uma aresta, às vezes nos referimos a ela como o segmento aberto $\overline{pq}$.

Dizemos que um grafo de visibilidade é plano se suas arestas não se interceptam.

Teorema 1. *[8] Todo grafo de visibilidade finito é planar ou contém uma cópia de K_4.*

Demonstração. Seja $G = \mathcal{V}(P)$ um grafo de visibilidade finito. Suponha que G não seja planar. Vamos mostrar que G contém K_4.

Como G não é planar, existe alguma aresta $\overline{ab}$ que intercepta com outras (pelo menos uma outra). A reta $\overleftrightarrow{ab}$ separa o plano em dois semiplanos D e E. Seja p o ponto de D mais próximo do segmento $\overline{ab}$ e q o ponto de E mais próximo do segmento $\overline{ab}$. Pela escolha de p e q, os pontos a, b, p e q são visíveis, logo $G[\{a, b, p, q\}]$ é um K_4. □

2.3 Teoria de Ramsey

2.3.1 Problema da festa

2.3.2 Teorema de Ramsey

2.3.3 Generalizando para hipergrafos

2.4 Geometria combinatória

Vamos dar algumas definições a respeito de conjuntos de pontos no plano. Seja P um conjunto finito de pontos no plano e $conv(P)$ o casco convexo de P. Dizemos que P está em **posição geral** se não existirem três pontos colineares em P.

Dizemos que P está em **posição convexa** se todo ponto de P estiver na fronteira de $conv(P)$.

Um ponto $v \in P$ é um **vértice** de P se $conv(P) \neq conv(P \backslash v)$.

Se todos os pontos de P forem vértices, dizemos que P está em **posição estritamente convexa**.

Um k-**ágono** é o casco convexo de um conjunto de k pontos em posição estritamente convexa.

Se X for um subconjunto de P de k pontos em posição estritamente convexa tal que $conv(X) \cap P = X$, então $conv(X)$ é um k-**buraco** ou um k-**ágono vazio**.

Uma **triangulação** de um k-ágono T é um conjunto de 3-ágonos tal que os vértices dos 3-ágonos também são vértices de T, T é a união de todos os 3-ágonos e a interseção de quaiquer dois 3-ágonos é vazia ou um segmento de reta.

Chamamos 3-ágonos de triângulos, 4-ágonos de quadriláteros, 5-ágonos de pentágonos, etc.

2.4.1 Teorema de Erdős-Szekeres

Um resultado clássico da teoria de Ramsey na geometria combinatória é o seguinte:

Teorema 2 (Erdős-Szekeres, 1935). *Dado um inteiro positivo k, existe um inteiro $ES(k)$ tal que todo conjunto com pelo menos $ES(k)$ pontos em posição geral contém k pontos em posição estritamente convexa.*

Vamos mostrar uma demonstração dada por Yujia Pan em [12] e, para isso, primeiro vamos resolver um caso particular com $k = 5$:

Lema 1. *Todo conjunto com 5 pontos em posição geral contém quatro pontos em posição estritamente convexa.*

Demonstração. Seja P um conjunto com 5 pontos em posição geral. Se $conv(P)$ for um pentágono ou um quadrado, o lema é trivial. Então vamos supor que $conv(P)$ seja um triângulo. Tal triângulo possui dois pontos de P, u e v, em seu interior. A reta que contém esses dois pontos separa os vértices do triângulo, dois (p e q) de um lado e um (x) do outro lado. Então $\{u, v, p, q\}$ são quatro pontos em posição estritamente convexa. □

Agora podemos demonstrar o teorema:

Demonstração. (Teorema de Erdős-Szekeres) Dado um k inteiro positivo, considere P um conjunto com pelo menos $R^4(k, 5)$ pontos em posição geral. Para cada subconjunto X de P de tamanho 4, vamos colorir ele de vermelho se $conv(X)$ for um quadrilátero e de azul de $conv(X)$ for um triângulo. Pelo teorema de Ramsey para hipergrafos, uma das duas conddições é satisfeita:

- P tem um subconjunto de tamanho k tal que todo subconjunto dele com 4 elementos é vermelho.
- P tem um subconjunto de tamanho 5 tal que todo subconjunto dele com 4 elementos é azul.

Pelo lema, a segunda opção não é possível, pois ela implicaria que um conjunto com 5 pontos não tem 4 pontos em posição estritamente convexa. Então existe um subconjunto de tamanho k tal que todo subconjunto dele com 4 elementos é vermelho. Seja H tal conjunto.

Vamos mostrar que H está em posição estritamente convexa. Para isso, suponha o contrário. Então existe algum ponto x de H no interior de $conv(H)$. Considere uma triangulação de $conv(H)$. x está dentro de algum triângulo da triangulação. Os três vértices desse triângulo juntos com x formam um conjunto de 4 pontos que deveria ter sido pintado de azul, o que é uma contradição.

Logo H é um conjunto de k pontos em posição estritamente convexa. □

2.4.2 Teorema de Sylvester-Gallai

Todo contunto finito de pontos tem todos os pontos colineares ou existe uma reta que passa por exatamente dois desses pontos.

Capítulo 3

Big-Line-Big-Clique conjecture

A conjectura seguinte foi proposta por [9] em 2005, e ainda não se sabe se ela vale para valores a partir de $k = 6$ e $l = 4$.

Conjectura 1. *Dados dois inteiros $k, l \geq 2$, existe um $n = n(k, l)$ tal que todo conjunto finito P com pelo menos n pontos no plano contém k pontos visíveis (alternativamente, $\mathcal{V}(P)$ possui uma k-clique) ou l pontos colineares.*

Para nos habituarmos com o problema, vamos começar pelos casos mais básicos:

3.1 Casos triviais

Primeiramente, se $k = 2$ (ou $l = 2$), com certeza todo conjunto com pelo menos dois pontos tem dois pontos visíveis (e dois pontos colineares).

Se $k = 3$, ou se tem três pontos visíveis ou todos os pontos no conjunto são colineares, então $n(3, l) = max\{3, l\}$.

Se $l = 3$, ou todos os pontos são visíveis para todos os outros ou algum ponto não deixa outros dois se verem, se tendo três pontos colineares. $n(k, 3) = max\{k, 3\}$.

3.2 Caso $k = 4$

Vamos mostrar que os conjuntos que não possuem quatro pontos visíveis possuem muitos pontos colineares. Isto é, para todo l existe um n tal que todo conjunto P com pelo menos n pontos que não possui quatro pontos visívels possui pelo menos l pontos colineares.

Pelo teorema 1, um conjunto que não possui quatro pontos visíveis possui grafo de visibilidade planar. Vamos usar o seguinte lema que caracteriza os grafos de visibilidade planares:

Lema 2. *[3] Seja P um conjunto finito de pontos no plano. Então $\mathcal{V}(P)$ é plano se e somente se satisfaz uma das condições:*

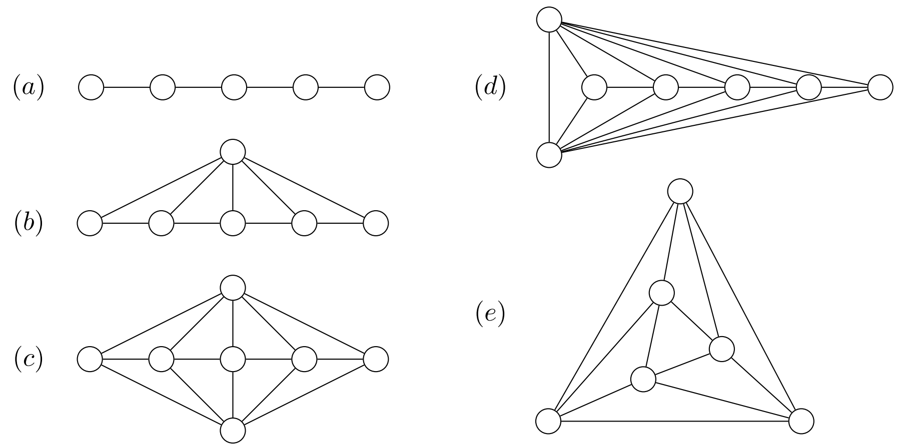


Figura 3.1: Tipos de grafos de visibilidade planares

(a) Todos os pontos de P são colineares.

(b) Todos os pontos de P são colineares exceto um.

(c) Todos os pontos de P são colineares exceto dois pontos não visíveis.

(d) Todos os pontos de P são colieares exceto dois pontos p e q tais que o segmento $\overline{pq}$ não intercepta o menor segmento que contém $P \setminus \{p, q\}$

(e) $\mathcal{V}(P)$ é o grafo (e) desenhado na figura 3.1

Demonstração. Como pode ser visto na figura 3.1 e pode ser facilmente demonstrado, se um grafo de visibilidade satisfaz alguma das condições $(a) - (e)$, ele é planar. Para mostrar a outra direção, seja P um conjunto finito de pontos no plano tal que $\mathcal{V}(P)$ é planar.

Se P contém no máximo dois pontos, P satisfaz (a). Então vamos supor que $|P| \geq 3$. Seja L um maior conjunto de pontos colineares em P e $\hat{L}$ a reta que contém L. $|L| \geq 2$. Se $|L| = 2$, então L satisfaz (a), (b) ou (e). Vamos supor então que $|L| \geq 3$.

A reta $\hat{L}$ divide o plano em dois semiplanos. Sejam S e T os conjuntos de vértices em cada um desses semiplanos tal que $|S| \geq |T|$. Se $|S|$ for no máximo 1, então P satisfaz algum de $(a) - (d)$. Então supor que $|S| \geq 2$. Seja v um ponto de S mais próximo de $\hat{L}$ e seja w um ponto de $S \setminus \{v\}$ mais próximo de $\hat{L}$. Note que a reta que contém v e w não é paralela a $\hat{L}$, pois, se fosse, para todos $x, y \in L$, as arestas $\overline{vx}$ e $\overline{wy}$ ou as arestas $\overline{vy}$ e $\overline{wx}$ se interceptariam e, como o grafo é planar, existiria um vértice nessa interseção que seria mais próximo de $\hat{L}$ do que v, contradizendo a escolha de v. Então a reta que contém v e w intercepta $\hat{L}$ em um ponto, digamos, p.

Vamos mostrar que em $\hat{L}$ se tem no máximo um vértice de cada lado de p. Para isso, suponha que existam dois vértices $x, y \in L$ tais que x esteja entre y e p. Então as arestas $\overline{vy}$ e $\overline{wx}$ se interceptam num ponto mais próximo de $\hat{L}$ do que v e, como o grafo é planar, deve existir um vértice nessa interseção, contradizendo a escolha de v. Mas como $|L| \geq 3$, L tem que possuir exatamente 3 pontos: p e um ponto de cada lado de p, que vamos chamar de x e y.

Agora vamos mostrar que $S = \{v, w\}$. Suponha que S contém um terceiro ponto u. u não está na mesma reta que p, v e w pois L tem tamanho máximo. Pela escolha de v e w, u está mais longe de $\hat{L}$ do que w. Então $\overline{uv}$ intercepta $\overline{wx}$ ou $\overline{wy}$ num ponto mais próximo de $\hat{L}$ do que w, contradizendo a escolha de w. Logo $|S| = 2$. Então $|T| \leq 2$.

Se $T = \emptyset$, então P satisfaz (c). Suponha que $T \neq \emptyset$. Seja u um ponto de T e q a interseção da reta que contém u e v e da reta $\hat{L}$. Suponha que q não seja um vértice de L. Se q está entre x e y, então as arestas $\overline{vu}$ e $\overline{px}$ ou $\overline{py}$ se interceptam em q, e como o grafo é planar, q tem que ser um vértice do grafo, o que é uma contradição. Similarmente, se q não está entre x e y, as arestas $\overline{uv}$ e $\overline{wx}$ ou $\overline{wy}$ se interceptam no ponto q, gerando uma contradição. Então u intercepta $\hat{L}$ num vértice. Esse vértice não pode ser p, pois se fosse isso contradiria a escolha de L.

Suponha que existam dois pontos u_1 e u_2 em T. Se u_1 está na mesma reta que v e x e u_2 está na mesma reta que v e y. As arestas $\overline{u_1y}$ e $\overline{u_2x}$ se interceptam em um ponto de T que não está na mesma reta que v e x nem que v e y, o que é uma contradição. Se u_1 e u_2 estão na mesma reta que v e x, suponha sem perda de generalidade que u_1 está entre x e u_2, então as arestas $\overline{u_1y}$ e $\overline{u_2x}$ se interceptam em um ponto de T que não está na mesma reta que v e x nem que v e y, o que é uma contradição. Do mesmo jeito, se u_1 e u_2 estão na mesma reta que v e y também temos uma contradição. Portanto $|T| = 1$. Sem perda de generalidade, digamos que u é colinear com v e x. Assim $\{p, u, v, x, y, w\}$ forma o grafo (e) da figura 3.1 □

Teorema 3. *Seja P um conjunto finito de pontos no plano. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- *P satisfaz (a), (b), (c) ou (e) do teorema 2.*
- *$\mathcal{V}(P)$ não tem K_4.*

Demonstração. Se P satisfaz (a), (b), (c) ou (e) do teorema 2, é fácil ver que $\mathcal{V}(P)$ não tem K_4.

Se $\mathcal{V}(P)$ não tem K_4, pelo teorema 1, $\mathcal{V}(P)$ é planar. Logo, pelo lema 2, P satisfaz (a), (b), (c), (d) ou (e). Mas como (d) possui K_4, P satisfaz (a), (b), (c) ou (e). □

Corolário 3.1. *A conjectura 1 é verdadeira para $k = 4$ com $n(4, l) = max\{7, l + 2\}$ se $l > 3$.*

3.3 Caso $k = 5$

[1] [2] Para resolver esse caso, teremos que estudar quando que um conjunto de pontos em posição convexa tem muitos pontos em posição estritamente convexa com a finalidade de generalizar o teorema de Erdős-Szekeres para conjuntos com colinearidades.

3.3.1 Pontos em posição convexa

Considere o seguinte problema: dado um conjunto P de pontos em posição convexa no plano, ache um maior subconjunto de P de pontos em posição estritamente convexa.

Para k, l inteiros positivos, seja $q(k,l)$ o menor inteiro tal que todo conjunto com pelo menos $q(k,l)$ pontos em posição convexa no plano tenha l pontos colineares ou k pontos em posição estritamente convexa.

Lema 3. *Para $k, l \geq 3$,*

$$q(k,l) = \begin{cases} \frac{1}{2}(k-1)(l-1)+1 \text{ se } k \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{2}(k-2)(l-1)+2 \text{ se } k \text{ é par} \end{cases}$$

Demonstração. □

Com isso, podemos generalizar o teorema de Erdős-Szekeres como foi feito em [1].

Teorema 4. *Para todo inteiro k, todo conjunto com $ES(k)$ pontos contém k pontos em posição convexa (não necessariamente estrita).*

Demonstração. Sejam P e P' são dois conjuntos de pontos no plano com cada ponto de P associado a um único ponto de P'. Se para todos $v \in P$ e $v' \in P'$ associados vale que $dist(v, v') < \epsilon$, dizemos que P' é uma ϵ-perturbação de P. Dizemos que P' é uma perturbação de P se é uma ϵ-perturbação para algum ϵ.

Vamos mostrar o seguinte: para todo conjunto de pontos P, existe uma perturbação P' de P em posição geral tal que se S' é um subconjunto de P' em posição estritamente convexa então $S \in P$ (associado a S') está em posição convexa. Daí, o teorema de Erdős-Szekeres garante que existe para todo k vai existir um P' com $ES(k)$ pontos e $S' \in P'$ em posição estritamente convexa e assim o teorema estará provado. Para cada tripla ordenada (u, v, w) de pontos de P, existe um $\mu > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \mu$ toda ϵ-perturbação mantém a orientação[1] desses pontos. Como a quantidade de triplas assim são finitas, pegamos μ^* o μ mínimo. Seja P' uma μ^*-perturbação de P em posição geral.

Seja S' um subconjunto de P' em posição estritamente convexa. Considere S' e sentido horário. Então a orientação de toda tripla de pontos seguidos de S' é para a direita. Como tal perturbação preservou a orientação das triplas não colineares, o conjunto S associado a S' só possuia triplas colineares e orientadas para a direita, quando olhadas da mesma ordem que vimos em S'.

Portanto S está em posição convexa. □

Teorema 5. *Dados inteiros $k \geq 3$ e $k \geq 2$, existe um inteiro $ES(k,l)$ tal que todo conjunto P com pelo menos $ES(k,l)$ contém*

- *l pontos colineares, ou*
- *k pontos em posição estritamente convexa.*

Demonstração. Basta mostrar que

$$ES(k,l) \leq \begin{cases} ES(\frac{1}{2}(k-1)(l-1)+1) \text{ se } k \text{ é ímpar} \\ ES(\frac{1}{2}(k-2)(l-1)+2) \text{ se } k \text{ é par} \end{cases}$$

Se k é ímpar, seja P um conjunto com $ES(\frac{1}{2}(k-1)(l-1)+1)$ pontos sem l pontos colineares. Pelo teorema 4, P possui $\frac{1}{2}(k-1)(l-1)+1$ pontos em

[1] A orientação de uma tripla ordenadada de pontos diz se eles são colineares, se viram para a esquerda ou se para a direita.

posição convexa. Assim, pelo lema 3, P possui k pontos em posição estritamente convexa.

Se k é par, a prova é análoga. □

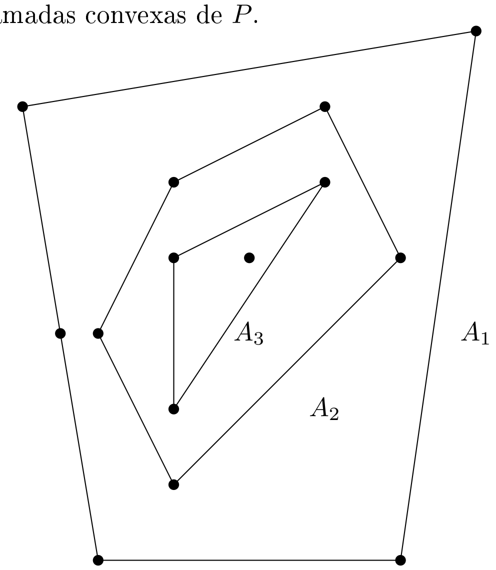
3.3.2 Pentágonos vazios

Teorema 6. *Para todo inteiro $l \geq 2$, todo conjunto finito com pelo menos $ES(\ )$ pontos no plano possui*

- *l pontos colineares, ou*
- *um pentágono vazio.*

Rascunho da prova

Considere um conjunto de pontos P. A imagem abaixo mostra o que são as camadas convexas de P.



Vamos supor que um conjunto sulficientemente grande de pontos não tem nenhum pentágono vazio e nem l pontos colineares e achar uma contradição. Para isso, faremos o seguinte:

1. Mostrar que tal conjunto tem l camadas convexas não vazias.
2. Fixar um ponto z que está dentro da l-ésima camada convexa.
3. Mostrar que, para que não tenham pentágonos vazios, muitos pontos tem que se alinhar com z usando um conceito que chamaremos de *arcos vazios*.

Demonstração. Seja $l \geq 3$ e $k = \frac{(2l-1)^l - 1}{2l-1}$ e considere um conjunto P com pelo menos $ES(k)$ pontos.

Um conjunto $X \subset P$ em posição convexa com pelo menos k pontos é dito k-minimal se não existir outro conjunto $Y \subset P$ em posição convexa com pelo menos k pontos tal que $conv(Y) \subsetneq conv(X)$.

Pelo teorema 4, P possui algum conjunto de k pontos em posição convexa. Seja A_1 um conjunto assim k-minimal.

Vamos definir as camadas convexas A_i a partir de A_1. Para $i \in \{2, ..., l-1\}$, seja A_i os pontos de P da fronteira de $(P \cap A_{i-1}) \setminus A_{i-1}$ e seja $A_l = (P \cap A_{i-1}) \setminus A_{i-1}$.

Pelo lema 3 com $k = 5$, para cada $i \in \{2, ..., l\}$, quaisquer $2l - 1$ pontos consecutivos em A_i possuem 5 pontos em posição estritamente convexa. Para que P não tenha pentágonos vazios, o casco convexo desses $2l - 1$ pontos deve conter um ponto de A_{i-1}.

Como A_{i-1} contém $\lfloor \frac{|A_{i-1}|}{2l-1} \rfloor$ conjuntos distintos de $2l-1$ pontos consecutivos, afirmo que

$$|A_i| \geq \lfloor \frac{|A_{i-1}|}{2l-1} \rfloor > \frac{|A_{i-1}|}{2l-1} - 1$$

E disso concluímos

$$|A_{i-1}| < (|A_i| + 1)(2l - 1)$$

Suponha que para algum $i \in \{2, ..., l\}$ vale $A_i = \emptyset$. Então $|A_{i-1}| < (2l - 1)$, $|A_{i-2}| < (2l - 1)^2 + (2l - 1)$, $|A_{i-3}| < (2l - 1)^3(2l - 1)^2 + (2l - 1)$, ..., e é fácil mostrar por indução que

$$|A_1| < \sum_{j=1}^{i-1} (2l - 1)^j$$

□

Corolário 6.1. *A conjectura 1 é verdadeira para $k = 5$.*

3.4 Para conjuntos infinitos de pontos

Em 2010[14], Atila Pór e David Wood mostraram que a conjectura 1 não vale para conjuntos infinitos de pontos com a seguinte construção:

Teorema 7. *Existem conjuntos infinitos enumeráveis de pontos sem 4 pontos colineares e sem 3 pontos visíveis dois a dois.*

Demonstração. Vamos construir indutivamente um conjunto de pontos com tal propriedade.

Sejam x_1, x_2 e x_3 três pontos não colineares no plano.

Dados pontos $x_1, ..., x_{n-1}$ não conlineares, vamos definir o ponto x_n da seguinte forma: pelo teorema de Sylvester-Gallai, existe uma reta que passa por exatamente dois pontos de $x_1, ..., x_{n-1}$. Seja $\mathcal{L} = \overleftrightarrow{x_i x_j}$ a reta que passa or exatamente dois pontos de $x_1, ..., x_{n-1}$ com $i < j$ e com i mínimo entre as com j mínimo. Coloque x_n no segmento $\overline{x_i x_j}$ tal que ela seja a única reta que contenha x_n e mais dois pontos (isso é possível, já que somente uma quantidade finita de pontos de $\mathcal{L}$ não pode ser escolhida).

Vamos chamar de $P = \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$. Por construção, P não tem 4 pontos colineares e se x_i e x_k com $i < k$ são visíveis então existe um outro ponto colinear x_j com $j < k$ e x_k está no segmento $\overline{x_i x_j}$.

Suponha que x_i, x_j e x_k são dois a dois visíveis com $i < j < k$. Então existem pontos $x_{i'}$ e $x_{j'}$ com $i' < k$ e $j' < k$ tais que x_k está no segmento $\overline{x_i x_{i'}}$ e no segmento $\overline{x_j x_{j'}}$. Pela escolha de x_k, só existe uma reta que contém x_k e mais dois pontos entre $x_1, ... x_{k-1}$. Então $i = j'$ e $j = i'$. Mas então $P \cap \overline{x_i x_j} = \{x_i, x_j, x_k\}$, ou seja, x_i e x_j não são visíveis, ou seja, x_i e x_j não são visíveis.

Portanto não existem 3 pontos visíveis dois a dois em P.

□

3.5 Dificuldades encontradas

3.5.1 The orchard problem e o grafo de Turán

Problema citado em [13], solução do orchard problem tem menos arestas do que o grafo de Turán para $k \geq 5$

3.5.2 Conjuntos de pontos sem heptágonos vazios

Dado que o teorema de Erdős-Szekeres vale, Erdős colocou o problema de determinar se para um dado n existe um $g(n)$ tal que todo conjunto com $g(n)$ pontos em posição geral contém um n-ágono vazio.

Se essa questão fosse respondida afirmativamente, a conjectura 1 sairia como corolário.

Para $n = 3$ e $n = 4$ é fácil ver que $g(3) = 3$ e $g(4) = 5$. Harborth[6] provou que $g(5) = 10$ e Gerken[5] e Nicolas[11] provaram que $g(6)$ existe.

No entanto, Horton[7] mostrou uma constrção de conjuntos arbitrariamente grandes sem heptágonos vazios.

Teorema 8. *Existem conjuntos arbitrariamente grandes sem heptágonos.*

Demonstração. □

Capítulo 4

Bloqueadores de visibilidade

4.1 Ordem de crescimento de $b(n)$

[4, 10]

4.2 Conjuntos de pontos em posição convexa

[4, 10]

Referências Bibliográficas

[1] Zachary Abel, Brad Ballinger, Prosenjit Bose, Sébastien Collette, Vida Dujmović, Ferran Hurtado, Scott D. Kominers, Stefan Langerman, Attila Pór, and David R. Wood. Every large point set contains many collinear points or an empty pentagon. https://arxiv.org/abs/0904.0262, 2009.

[2] János Barát, Vida Dujmović, Gwenaël Joret, Michael S. Payne, Ludmila Scharf, Daria Schymura, Pavel Valtr, and David R. Wood. Empty pentagons in point sets with collinearities. https://arxiv.org/abs/1207.3633, 2012.

[3] Vida Dujmovic, David Eppstein, Matthew Suderman, and David R. Wood. Drawings of planar graphs with few slopes and segments. https://arxiv.org/abs/math/0606450, 2008.

[4] Adrian Dumitrescu, János Pach, and Géza Tóth. A note on blocking visibility between points. http://www.cs.uwm.edu/faculty/ad/blocking.pdf, 2009.

[5] Tobias Gerken. Empty convex hexagons in planar point sets. https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-007-9018-x, 2008.

[6] Heiko Harborth. Konvexe fünfecke in ebenen punktmengen. *Elemente der Mathematik*, 33:116–118, 1978.

[7] J. D. Horton. Sets with no empty 7-gons. https://cms.math.ca/10.4153/CMB-1983-077-8, 1983.

[8] J. D. Horton. A general notion of visibility graphs. https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-003-2773-4, 2003.

[9] Jan Kára, Attila Pór, and David R. Wood. On the chromatic number of the visibility graph of a set of points in a plane. http://dx.doi.org/10.1007/s00454-005-1177-z, 2005.

[10] Jiří Matoušek. Blocking visibility for points in general position. https://doi.org/10.1007/s00454-009-9185-z, 2009.

[11] Carlos M. Nicolas. The empty hexagon theorem. https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-007-1343-6, 2007.

[12] Yujia Pan. The Erdős-Szekeres theorem: a geometric application of Ramsey's theorem. http://math.uchicago.edu/~may/REU2013/REUPapers/Pan.pdf, 2013.

[13] Atila Pór and David R. Wood. On visibility and blockers. https://arxiv.org/abs/0912.1150, 2009.

[14] Attila Pór and David R. Wood. The big-line-big-clique conjecture is false for infinite point sets. https://arxiv.org/abs/1008.2988, 2010.