

# Big-Line-Big-Clique Conjecture e Bloqueadores de Visibilidade

Gabriel K. Lasso  
Orientador: Carlos E. Ferreira



# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                   | <b>5</b>  |
| 1.1      | Motivação . . . . .                                 | 5         |
| 1.2      | Estrutura do trabalho . . . . .                     | 5         |
| <b>2</b> | <b>Noções preliminares</b>                          | <b>7</b>  |
| 2.1      | Convenções . . . . .                                | 7         |
| 2.2      | Grafos . . . . .                                    | 7         |
| 2.3      | Grafo de visibilidade . . . . .                     | 8         |
| 2.4      | Teoria de Ramsey . . . . .                          | 8         |
| 2.4.1    | Problema da festa . . . . .                         | 8         |
| 2.4.2    | Teorema de Ramsey . . . . .                         | 9         |
| 2.4.3    | Generalizando para hipergrafos . . . . .            | 10        |
| 2.5      | Geometria combinatória . . . . .                    | 10        |
| 2.5.1    | Teorema de Erdős-Szekeres . . . . .                 | 11        |
| 2.5.2    | Teorema de Sylvester-Gallai . . . . .               | 12        |
| <b>3</b> | <b>Big-Line-Big-Clique conjecture</b>               | <b>13</b> |
| 3.1      | Casos triviais . . . . .                            | 13        |
| 3.2      | Caso $k = 4$ . . . . .                              | 13        |
| 3.3      | Caso $k = 5$ . . . . .                              | 15        |
| 3.3.1    | Pontos em posição convexa . . . . .                 | 16        |
| 3.3.2    | Pentágonos vazios . . . . .                         | 17        |
| 3.4      | Para conjuntos infinitos de pontos . . . . .        | 20        |
| 3.5      | Dificuldades encontradas . . . . .                  | 21        |
| 3.5.1    | The orchard problem e o grafo de Turán . . . . .    | 21        |
| 3.5.2    | Conjuntos de pontos sem heptágonos vazios . . . . . | 21        |
| <b>4</b> | <b>Bloqueadores de visibilidade</b>                 | <b>23</b> |
| 4.1      | Ordem de crescimento de $b(n)$ . . . . .            | 23        |
| 4.2      | Conjuntos de pontos em posição convexa . . . . .    | 23        |



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

A teoria de Ramsey é um campo da combinatória que estuda questões como "quão grande uma estrutura deve ser para que ela possua uma subestrutura com uma certa propriedade?". Um exemplo clássico é o problema da festa: quantas pessoas tem que ter em uma festa para que nela existam ou três pessoas que se conhecem ou três pessoas que não se conhecem entre si. Nesse caso sabe-se que bastam 6 pessoas. Essa teoria possui aplicações em diversos outros campos da matemática, como a topologia, a teoria ergódica e a geometria.[?]

Aqui fazemos um estudo de um problema geométrico ligado a teoria de Ramsey. Tal problema foi colocado em 2005 por Jan Kára, Attila Pór e David R. Wood enquanto estudavam o número cromático de grafos de visibilidade. O problema pode ser colocado da seguinte forma: "Quão grande deve ser um conjunto de pontos para que ele contenha ou  $l$  pontos colineares ou  $k$  pontos visíveis dois a dois?".

Uma observação sobre esse problema é que se dois pontos não são visíveis, então existe um terceiro que bloqueia a visibilidade deles. Outro problema estudado aqui é sobre o tamanho mínimo do conjunto de bloqueadores para um conjunto de pontos.

Todos esses conceitos serão definidos com mais formalidade mais pra frente. O primeiro problema é conhecido como **conjectura big-line-big-clique** e o segundo é uma questão natural sobre **bloqueadores de visibilidade**.

### 1.2 Estrutura do trabalho

No capítulo 2 vamos definir alguns conceitos que serão base para os demais, assim como demonstrar algumas propriedades-chaves desses conceitos. No capítulo 3 vamos mostrar os resultados conhecidos na literatura sobre a conjectura big-line-big-clique, mostrar algumas dificuldades encontradas na tentativa de resolver esse problema e discutir alguns fatos sobre ele. No capítulo 4 vamos focar no problema dos bloqueadores de visibilidade, mostrando cotas superiores e inferiores conhecidas e discutindo algumas coisas em aberto que as pessoas acreditam que sejam verdade.



## Capítulo 2

# Noções preliminares

### 2.1 Convenções

Vamos começar definindo algumas convenções de notação:

- $|X|$  é a cardinalidade do conjunto  $X$ .
- $[n] = \{1, \dots, n\}$
- $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$
- $\overline{pq}$  é o segmento de reta com extremos em  $p$  e  $q$ .
- $\vec{pq}$  é o segmento de reta orientado com origem em  $p$  e extremidade em  $q$ .
- $\overleftrightarrow{pq}$  é a reta que passa pelos pontos  $p$  e  $q$ .
- $\Delta(a, b, c) = \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0\}$  é o triângulo aberto com vértices  $a$ ,  $b$  e  $c$ .
- $\Delta[a, b, c] = \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0\}$  é o triângulo fechado com vértices  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

### 2.2 Grafos

Um grafo é um par  $G = (V, E)$  em que  $V$  é um conjunto enumerável (geralmente finito) e  $E$  é um conjunto de pares não ordenados de elementos de  $V$ . Os elementos de  $V$  são chamados **vértices**, e os elementos de  $E$  são chamados **arestas**.

Se  $G$  é um grafo, chamamos de  $V(G)$  seu conjunto de vértices e de  $E(G)$  seu conjunto de arestas.

Chamamos **ordem** de um grafo a cardinalidade de seu conjunto de vértices.

Se uma aresta  $e = \{u, v\} \in E(G)$ , dizemos que  $u$  e  $v$  são **vizinhos** ou **adjacentes**.

Um grafo **completo** é um grafo em que todos dois vértices distintos são adjacentes. Chamamos o grafo completo de ordem  $n$  de  $K_n$ .

Se  $G$  é um grafo e  $S \subset V(G)$  é um conjunto de vértices, chamamos de **subgrafo** de  $G$  induzido por  $S$  o grafo  $G[S] = (S, E_S)$ , em que  $E_S = \{u, v \in$

$E(G)|u, v \in S\}$ . Nesse caso, dizemos que  $G$  contém uma cópia de  $G[S]$  ou simplesmente que  $G$  contém  $G[S]$ , ou ainda que  $G$  possui  $G[S]$ .

Uma  $k$ -**clique** é um conjunto de vértices  $C$  tal que  $G[C]$  é um grafo completo de ordem  $k$ .

Um grafo é **planar** se pode ser desenhado no plano sem que as curvas que representam as arestas se cruzem. Tal desenho é chamado de **imersão do grafo no plano**. Um grafo **plano** é um grafo planar com uma imersão no plano.

## 2.3 Grafo de visibilidade

Na sessão anterior, definimos conceitos básicos de teoria dos grafos. Aqui vamos estudar um caso bem particular.

Seja  $P$  um conjunto de pontos no plano e  $x, y \in P$ . Dizemos que  $x$  e  $y$  são visíveis em  $P$  se  $\overline{xy} \cap P = \{x, y\}$ .  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são visíveis se são visíveis dois a dois.<sup>1</sup>

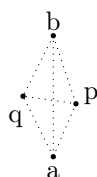
O grafo de visibilidade de um conjunto  $P$  de pontos no plano é o grafo construído da seguinte forma: o conjunto de vértices é  $P$  e há uma aresta entre dois vértices  $x$  e  $y$  se  $x$  e  $y$  são visíveis. Denotamos esse grafo por  $\mathcal{V}(P)$  e se  $p, q$  é uma aresta, às vezes nos referimos a ela como o segmento aberto  $\overline{pq}$ .

Dizemos que um grafo de visibilidade é plano se suas arestas não se interceptam.

**Teorema 1.** [?] *Todo grafo de visibilidade finito é planar ou contém uma cópia de  $K_4$ .*

*Demonstração.* Seja  $G = \mathcal{V}(P)$  um grafo de visibilidade finito. Suponha que  $G$  não seja planar. Vamos mostrar que  $G$  contém  $K_4$ .

Como  $G$  não é planar, existe alguma aresta  $\overline{ab}$  que intercepta com outras (pelo menos uma outra). A reta  $\overleftrightarrow{ab}$  separa o plano em dois semiplanos  $D$  e  $E$ . Seja  $p$  o ponto de  $D$  mais próximo do segmento  $\overline{ab}$  e  $q$  o ponto de  $E$  mais próximo do segmento  $\overline{ab}$  tal que  $\overline{pq}$  intercepta  $\overline{ab}$ . Pela escolha de  $p$  e  $q$ , os pontos  $a, b, p$  e  $q$  são visíveis, logo  $G[\{a, b, p, q\}]$  é um  $K_4$ .



□

## 2.4 Teoria de Ramsey

### 2.4.1 Problema da festa

Um bom problema para ilustrar a teoria de Ramsey é o problema da festa já mencionado:

<sup>1</sup>Vamos considerar só conjuntos que são densos em nenhum lugar, i.e. o interior de  $P$  é vazio.



**Problema 1.** Qual a quantidade mínima de pessoas que deve haver em uma festa para que três delas se conheçam ou três delas não se conheçam?

Vamos resolver esse problema usando teoria dos grafos.

Pessoas serão representadas por vértices e a relação entre elas por arestas coloridas. Se duas pessoas se conhecem, vamos colorir a aresta entre elas de azul, e se duas pessoas não se conhecem, vamos colorir a aresta entre elas de vermelho.

Reformulando a pergunta com essa formulação, temos:

**Problema 2.** Qual o menor  $n$  tal que toda coloração de arestas<sup>2</sup> de  $K_n$  em  $\{\text{azul}, \text{vermelho}\}$  possui uma 3-clique azul ou uma 3-clique vermelha (i.e. uma 3-clique com todas as arestas que ligam seus vértices azuis/vermelhas)?

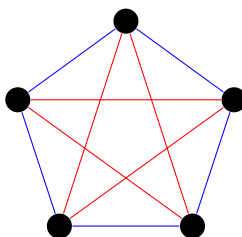
Vamos primeiro mostrar que  $n = 6$  resolve o problema e depois mostrar que  $n = 5$  não resolve, concluindo que  $n = 6$  é o mínimo.

**Proposição 1.** Toda coloração das arestas de  $K_6$  possui uma 3-clique azul ou uma 3-clique vermelha.

*Demonstração.* Seja  $x$  um vértice de  $K_6$ . Existem 5 arestas com extremidade em  $x$ . Por contagem, pelo menos 3 dessas arestas são da mesma cor, digamos, vermelhas. Sejam  $a, b, c$  vértices tais que  $xa, xb, xc$  são arestas coloridas de vermelho.

Vamos olhar para as arestas  $ab, bc, ca$ . Se alguma delas for vermelha, temos um triângulo vermelho. Se nenhuma delas for vermelha, temos um triângulo azul. Isso prova que  $n = 6$  é suficiente para resolver o problema.  $\square$

Para a seguinte coloração de  $K_5$ , não temos nenhuma 3-clique monocromática, logo  $n = 6$  é a solução desejada para o problema da festa.



## 2.4.2 Teorema de Ramsey

O teorema de Ramsey generaliza o resultado do problema da festa:

**Teorema 2.** Para quaisquer  $p, q \geq 2$  inteiros existe um inteiro  $N = R(p, q)$  tal que qualquer coloração de  $K_N$  em duas cores possui uma  $p$ -clique azul ou uma  $q$ -clique vermelha.

*Demonstração.* Vamos provar por indução em  $p$  e  $q$ .

Se  $p = 2$ , uma coloração  $K_N$  que não contém uma 2-clique azul deve conter todas as arestas vermelhas. Mas então, para um  $N \geq q$ , essa coloração possui uma  $q$ -clique vermelha. Então  $R(2, q) = q$ . Da mesma forma, vemos que  $R(p, 2) = p$ .

<sup>2</sup>Uma coloração de arestas de um grafo  $G$  é uma função de  $E(G)$  em um conjunto de cores, digamos  $\{\text{Azul}, \text{Vermelho}\}$

Para mostrar que  $R(p, q)$  existe para qualquer  $p$  e  $q$ , vamos mostrar um limitante superior.

Sejam  $p, q \geq 3$  e suponha que exista  $R(p, q-1)$  e  $R(p-1, q)$ . Vamos mostrar que  $R(p, q) \leq R(p, q-1) + R(p-1, q)$ .

Seja  $N = R(p, q-1) + R(p-1, q)$  e  $x$  um vértice de  $K_N$ . Considere os conjuntos dos vértices que são conectados a  $x$  por uma aresta azul e dos que são conectados a  $x$  por uma aresta vermelha. Chame-os de  $A$  e  $V$ .

Claramente  $|A| + |V| = N - 1 = R(p, q-1) + R(p-1, q) - 1$ . Isso implica que ou  $|A| \geq R(p, q-1) - 1$  ou  $|V| \geq R(p-1, q) - 1$ , pois caso contrário teríamos  $|A| + |V| < R(p, q-1) + R(p-1, q) - 2 = N - 2$ .

Suponha, sem perda de generalidade, que  $|A| \geq R(p, q-1) - 1$ . Considere  $K_{|A|} = K_N[A]$  o subgrafo induzido por  $A$ . Então um dos dois casos vale:

- $K_{|A|}$  contém uma  $p$ -clique vermelha.
- $K_{|A|}$  contém uma  $(q-1)$ -clique azul.

Se o primeiro caso for verdade,  $K_N$  possui uma  $p$ -clique vermelha e não há nada a fazer.

Se o segundo caso for verdade, como todas as arestas de  $x$  a vértices de  $A$  são azuis, considere os vértices da  $(q-1)$ -clique azul juntos com  $x$ . Esses vértices formam uma  $q$ -clique azul, então  $K_N$  possui uma  $q$ -clique azul.  $\square$

### 2.4.3 Generalizando para hipergrafos

Assim como um grafo, um **hipergrafo  $k$ -uniforme** é um par  $(V, E)$  em que  $V$  é o conjunto de **vértices** e  $E$  é o conjunto de **arestas**, só que os elementos de  $E$  são  $k$ -uplas não ordenadas de elementos de  $V$ .

O teorema de Ramsey pode ser generalizado da seguinte forma:

**Teorema 3.** *Para quaisquer  $k, p, q \geq 2$  inteiro existe um inteiro  $N = R^k(p, q)$  tal que qualquer coloração dos subconjuntos de tamanho  $k$  de  $\{1, \dots, N\}$  possui  $p$  subconjuntos de tamanho  $k$  azuis ou  $q$  subconjuntos de tamanho  $k$  vermelhos.*

*Demonstração.*  $\square$

## 2.5 Geometria combinatória

Vamos dar algumas definições a respeito de conjuntos de pontos no plano. Seja  $P$  um conjunto finito de pontos no plano e  $\text{conv}(P)$  o casco convexo de  $P$ . Dizemos que  $P$  está em **posição geral** se não existirem três pontos colineares em  $P$ .

Dizemos que  $P$  está em **posição convexa** se todo ponto de  $P$  estiver na fronteira de  $\text{conv}(P)$ .

Um ponto  $v \in P$  é um **vértice** de  $P$  se  $\text{conv}(P) \neq \text{conv}(P \setminus v)$ .

Se todos os pontos de  $P$  forem vértices, dizemos que  $P$  está em **posição estritamente convexa**.

Um  **$k$ -ágono** é o casco convexo de um conjunto de  $k$  pontos em posição estritamente convexa.

Se  $X$  for um subconjunto de  $P$  de  $k$  pontos em posição estritamente convexa tal que  $\text{conv}(X) \cap P = X$ , então  $\text{conv}(X)$  é um  **$k$ -buraco** ou um  **$k$ -ágono vazio**.

Uma **triangulação** de um  $k$ -ágono  $T$  é um conjunto de 3-ágonos tal que os vértices dos 3-ágonos também são vértices de  $T$ ,  $T$  é a união de todos os 3-ágonos e a interseção de quaisquer dois 3-ágonos é vazia ou um segmento de reta.

Chamamos 3-ágonos de triângulos, 4-ágonos de quadriláteros, 5-ágonos de pentágonos, etc.

### 2.5.1 Teorema de Erdős-Szekeres

Um resultado clássico da teoria de Ramsey na geometria combinatória é o seguinte:

**Teorema 4** (Erdős-Szekeres, 1935). *Dado um inteiro positivo  $k$ , existe um inteiro  $ES(k)$  tal que todo conjunto com pelo menos  $ES(k)$  pontos em posição geral contém  $k$  pontos em posição estritamente convexa.*

Vamos mostrar uma demonstração dada por Yujia Pan[?] e, para isso, primeiro vamos resolver um caso particular com  $k = 5$ :

**Lema 1.** *Todo conjunto com 5 pontos em posição geral contém quatro pontos em posição estritamente convexa.*

*Demonstração.* Seja  $P$  um conjunto com 5 pontos em posição geral. Se  $\text{conv}(P)$  for um pentágono ou um quadrado, o lema é trivial. Então vamos supor que  $\text{conv}(P)$  seja um triângulo. Tal triângulo possui dois pontos de  $P$ ,  $u$  e  $v$ , em seu interior. A reta que contém esses dois pontos separa os vértices do triângulo, dois ( $p$  e  $q$ ) de um lado e um ( $x$ ) do outro lado. Então  $\{u, v, p, q\}$  são quatro pontos em posição estritamente convexa.  $\square$

Agora podemos demonstrar o teorema:

*Demonstração.* (Teorema de Erdős-Szekeres) Dado um  $k$  inteiro positivo, considere  $P$  um conjunto com pelo menos  $R^4(k, 5)$  pontos em posição geral. Para cada subconjunto  $X$  de  $P$  de tamanho 4, vamos colorir ele de vermelho se  $\text{conv}(X)$  for um quadrilátero e de azul de  $\text{conv}(X)$  for um triângulo. Pelo teorema de Ramsey para hipergrafos, uma das duas condições é satisfeita:

- $P$  tem um subconjunto de tamanho  $k$  tal que todo subconjunto dele com 4 elementos é vermelho.
- $P$  tem um subconjunto de tamanho 5 tal que todo subconjunto dele com 4 elementos é azul.

Pelo lema, a segunda opção não é possível, pois ela implicaria que um conjunto com 5 pontos não tem 4 pontos em posição estritamente convexa. Então existe um subconjunto de tamanho  $k$  tal que todo subconjunto dele com 4 elementos é vermelho. Seja  $H$  tal conjunto.

Vamos mostrar que  $H$  está em posição estritamente convexa. Para isso, suponha o contrário. Então existe algum ponto  $x$  de  $H$  no interior de  $\text{conv}(H)$ . Considere uma triangulação de  $\text{conv}(H)$ .  $x$  está dentro de algum triângulo da triangulação. Os três vértices desse triângulo juntos com  $x$  formam um conjunto de 4 pontos que deveria ter sido pintado de azul, o que é uma contradição.

Logo  $H$  é um conjunto de  $k$  pontos em posição estritamente convexa.  $\square$

### 2.5.2 Teorema de Sylvester-Gallai

Outro resultado interessante é o teorema de Sylvester-Gallai.

**Teorema 5.** *Todo conjunto finito de pontos tem todos os pontos colineares ou existe uma reta que passa por exatamente dois desses pontos.*

*Demonstração.*

□

## Capítulo 3

# Big-Line-Big-Clique conjecture

A conjectura seguinte foi proposta por Jan Kára et al em 2005[?]:

**Conjectura 1.** *Dados dois inteiros  $k, l \geq 2$ , existe um  $n = n(k, l)$  tal que todo conjunto finito  $P$  com pelo menos  $n$  pontos no plano contém ou  $k$  pontos visíveis entre si (alternativamente,  $\mathcal{V}(P)$  possui uma  $k$ -clique) ou  $l$  pontos colineares.*

Embora seu enunciado seja simples, poucos resultados foram encontrados para ela, ainda estando em aberto para valores de  $k$  e  $l$  a partir de 6 e 4 respectivamente.

Para nos habituarmos com o problema, vamos começar pelos casos mais básicos:

### 3.1 Casos triviais

Primeiramente, se  $k = 2$  (ou  $l = 2$ ), com certeza todo conjunto com pelo menos dois pontos tem dois pontos visíveis (e dois pontos colineares).

Se  $k = 3$ , ou se tem três pontos visíveis ou todos os pontos no conjunto são colineares, então  $n(3, l) = \max\{3, l\}$ .

Se  $l = 3$ , ou todos os pontos são visíveis para todos os outros ou algum ponto não deixa outros dois se verem, se tendo três pontos colineares.  $n(k, 3) = \max\{k, 3\}$ .

### 3.2 Caso $k = 4$

Vamos mostrar que os conjuntos que não possuem quatro pontos visíveis possuem muitos pontos colineares. Isto é, para todo  $l$  existe um  $n$  tal que todo conjunto  $P$  com pelo menos  $n$  pontos que não possui quatro pontos visíveis possui pelo menos  $l$  pontos colineares.

Pelo teorema 1, um conjunto que não possui quatro pontos visíveis possui grafo de visibilidade planar. Vamos usar o seguinte lema que caracteriza os grafos de visibilidade planares:

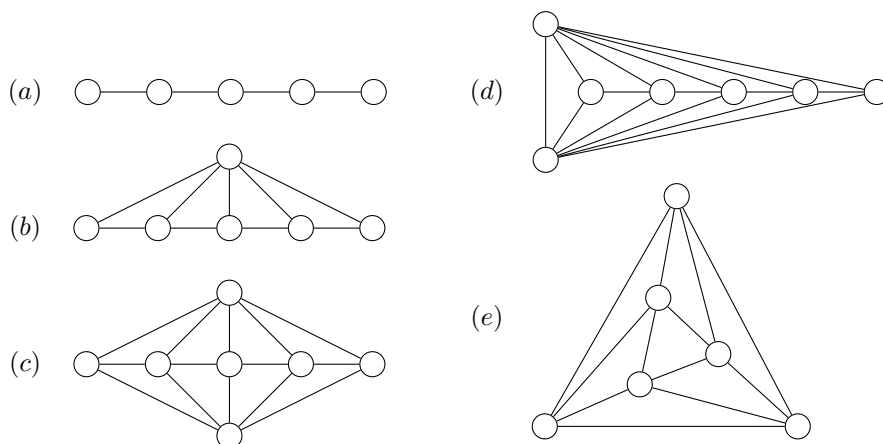


Figura 3.1: Tipos de grafos de visibilidade planares

**Lema 2.** *[?]* Seja  $P$  um conjunto finito de pontos no plano. Então  $\mathcal{V}(P)$  é plano se e somente se satisfaz uma das condições:

- (a) Todos os pontos de  $P$  são colineares.
- (b) Todos os pontos de  $P$  são colineares exceto um.
- (c) Todos os pontos de  $P$  são colineares exceto dois pontos não visíveis.
- (d) Todos os pontos de  $P$  são colineares exceto dois pontos  $p$  e  $q$  tais que o segmento  $\overline{pq}$  não intercepta o menor segmento que contém  $P \setminus \{p, q\}$ .
- (e)  $\mathcal{V}(P)$  é o grafo (e) desenhado na figura 3.1

*Demonstração.* Como pode ser visto na figura 3.1 e pode ser facilmente demonstrado, se um grafo de visibilidade satisfaz alguma das condições (a) – (e), ele é planar. Para mostrar a outra direção, seja  $P$  um conjunto finito de pontos no plano tal que  $\mathcal{V}(P)$  é planar.

Se  $P$  contém no máximo dois pontos,  $P$  satisfaz (a). Então vamos supor que  $|P| \geq 3$ . Seja  $L$  um maior conjunto de pontos colineares em  $P$  e  $\hat{L}$  a reta que contém  $L$ .  $|L| \geq 2$ . Se  $|L| = 2$ , então  $L$  satisfaz (a), (b) ou (e). Vamos supor então que  $|L| \geq 3$ .

A reta  $\hat{L}$  divide o plano em dois semiplanos. Sejam  $S$  e  $T$  os conjuntos de vértices em cada um desses semiplanos tal que  $|S| \geq |T|$ . Se  $|S|$  for no máximo 1, então  $P$  satisfaz algum de (a) – (d). Então supor que  $|S| \geq 2$ . Seja  $v$  um ponto de  $S$  mais próximo de  $\hat{L}$  e seja  $w$  um ponto de  $S \setminus \{v\}$  mais próximo de  $\hat{L}$ . Note que a reta que contém  $v$  e  $w$  não é paralela a  $\hat{L}$ , pois, se fosse, para todos  $x, y \in L$ , as arestas  $\overline{vx}$  e  $\overline{wy}$  ou as arestas  $\overline{vy}$  e  $\overline{wx}$  se interceptariam e, como o grafo é planar, existiria um vértice nessa interseção que seria mais próximo de  $\hat{L}$  do que  $v$ , contradizendo a escolha de  $v$ . Então a reta que contém  $v$  e  $w$  intercepta  $\hat{L}$  em um ponto, digamos,  $p$ .

Vamos mostrar que em  $\hat{L}$  se tem no máximo um vértice de cada lado de  $p$ . Para isso, suponha que existam dois vértices  $x, y \in L$  tais que  $x$  esteja entre  $y$  e  $p$ . Então as arestas  $\overline{vy}$  e  $\overline{wx}$  se interceptam num ponto mais próximo de  $\hat{L}$  do que  $v$  e, como o grafo é planar, deve existir um vértice nessa interseção,

contradizendo a escolha de  $v$ . Mas como  $|L| \geq 3$ ,  $L$  tem que possuir exatamente 3 pontos:  $p$  e um ponto de cada lado de  $p$ , que vamos chamar de  $x$  e  $y$ .

Agora vamos mostrar que  $S = \{v, w\}$ . Suponha que  $S$  contém um terceiro ponto  $u$ .  $u$  não está na mesma reta que  $p$ ,  $v$  e  $w$  pois  $L$  tem tamanho máximo. Pela escolha de  $v$  e  $w$ ,  $u$  está mais longe de  $\hat{L}$  do que  $w$ . Então  $\overline{uv}$  intercepta  $\overline{wx}$  ou  $\overline{wy}$  num ponto mais próximo de  $\hat{L}$  do que  $w$ , contradizendo a escolha de  $w$ . Logo  $|S| = 2$ . Então  $|T| \leq 2$ .

Se  $T = \emptyset$ , então  $P$  satisfaz (c). Suponha que  $T \neq \emptyset$ . Seja  $u$  um ponto de  $T$  e  $q$  a interseção da reta que contém  $u$  e  $v$  e da reta  $\hat{L}$ . Suponha que  $q$  não seja um vértice de  $L$ . Se  $q$  está entre  $x$  e  $y$ , então as arestas  $\overline{vu}$  e  $\overline{px}$  ou  $\overline{py}$  se interceptam em  $q$ , e como o grafo é planar,  $q$  tem que ser um vértice do grafo, o que é uma contradição. Similarmente, se  $q$  não está entre  $x$  e  $y$ , as arestas  $\overline{uv}$  e  $\overline{wx}$  ou  $\overline{wy}$  se interceptam no ponto  $q$ , gerando uma contradição. Então  $u$  intercepta  $\hat{L}$  num vértice. Esse vértice não pode ser  $p$ , pois se fosse isso contradiria a escolha de  $L$ .

Suponha que existam dois pontos  $u_1$  e  $u_2$  em  $T$ . Se  $u_1$  está na mesma reta que  $v$  e  $x$  e  $u_2$  está na mesma reta que  $v$  e  $y$ . As arestas  $\overline{u_1y}$  e  $\overline{u_2x}$  se interceptam em um ponto de  $T$  que não está na mesma reta que  $v$  e  $x$  nem que  $v$  e  $y$ , o que é uma contradição. Se  $u_1$  e  $u_2$  estão na mesma reta que  $v$  e  $x$ , suponha sem perda de generalidade que  $u_1$  está entre  $x$  e  $u_2$ , então as arestas  $\overline{u_1y}$  e  $\overline{u_2x}$  se interceptam em um ponto de  $T$  que não está na mesma reta que  $v$  e  $x$  nem que  $v$  e  $y$ , o que é uma contradição. Do mesmo jeito, se  $u_1$  e  $u_2$  estão na mesma reta que  $v$  e  $y$  também temos uma contradição. Portanto  $|T| = 1$ . Sem perda de generalidade, digamos que  $u$  é colinear com  $v$  e  $x$ . Assim  $\{p, u, v, x, y, w\}$  forma o grafo (e) da figura 3.1  $\square$

**Teorema 6.** *Seja  $P$  um conjunto finito de pontos no plano. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- $P$  satisfaz (a), (b), (c) ou (e) do lema 2.
- $\mathcal{V}(P)$  não tem  $K_4$ .

*Demonstração.* Se  $P$  satisfaz (a), (b), (c) ou (e) do lema 2, é fácil ver que  $\mathcal{V}(P)$  não tem  $K_4$ .

Se  $\mathcal{V}(P)$  não tem  $K_4$ , pelo teorema 1,  $\mathcal{V}(P)$  é planar. Logo, pelo lema 2,  $P$  satisfaz (a), (b), (c), (d) ou (e). Mas como (d) possui  $K_4$ ,  $P$  satisfaz (a), (b), (c) ou (e).  $\square$

**Corolário 6.1.** *A conjectura 1 é verdadeira para  $k = 4$  com  $n(4, l) = \max\{7, l + 2\}$  se  $l > 3$ .*

### 3.3 Caso $k = 5$

Para resolver esse caso, teremos que estudar quando que um conjunto de pontos em posição convexa tem muitos pontos em posição estritamente convexa com a finalidade de generalizar o teorema de Erdős-Szekeres para conjuntos com colinearidades.

### 3.3.1 Pontos em posição convexa

Considere o seguinte problema: dado um conjunto  $P$  de pontos em posição convexa no plano, ache um maior subconjunto de  $P$  de pontos em posição estritamente convexa.

Para  $k, l$  inteiros positivos, seja  $q(k, l)$  o menor inteiro tal que todo conjunto com pelo menos  $q(k, l)$  pontos em posição convexa no plano tenha  $l$  pontos colineares ou  $k$  pontos em posição estritamente convexa.

**Lema 3.** Para  $k, l \geq 3$ ,

$$q(k, l) = \begin{cases} \frac{1}{2}(k-1)(l-1) + 1 & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{2}(k-2)(l-1) + 2 & \text{se } k \text{ é par} \end{cases}$$

*Demonstração.* □

Com isso, podemos generalizar o teorema de Erdős-Szekeres como foi feito por Abel et al.[?].

**Teorema 7.** Para todo inteiro  $k$ , todo conjunto com  $ES(k)$  pontos contém  $k$  pontos em posição convexa (não necessariamente estrita).

*Demonstração.* Sejam  $P$  e  $P'$  dois conjuntos de pontos no plano com cada ponto de  $P$  associado a um único ponto de  $P'$ . Se para todos  $v \in P$  e  $v' \in P'$  associados vale que  $dist(v, v') < \epsilon$ , dizemos que  $P'$  é uma  $\epsilon$ -perturbação de  $P$ .

Vamos mostrar o seguinte: para todo conjunto de pontos  $P$ , existe uma  $\epsilon$ -perturbação  $P'$  de  $P$  em posição geral para algum  $\epsilon > 0$  tal que se  $S'$  é um subconjunto de  $P'$  em posição estritamente convexa então  $S \in P$  (associado a  $S'$ ) está em posição convexa. i Daí, o teorema de Erdős-Szekeres garante que existe para todo  $k$  vai existir um  $P'$  com  $ES(k)$  pontos e  $S' \in P'$  em posição estritamente convexa e assim o teorema estará provado.

Para cada tripla ordenada  $(u, v, w)$  de pontos de  $P$ , existe um  $\mu > 0$  tal que para todo  $0 < \epsilon < \mu$  toda  $\epsilon$ -perturbação mantém a orientação<sup>1</sup> desses pontos. Como a quantidade de triplas assim são finitas, pegamos  $\mu^*$  o  $\mu$  mínimo. Seja  $P'$  uma  $\mu^*$ -perturbação de  $P$  em posição geral.

Seja  $S'$  um subconjunto de  $P'$  em posição estritamente convexa. Considere  $S'$  e sentido horário. Então a orientação de toda tripla de pontos seguidos de  $S'$  é para a direita. Como tal perturbação preservou a orientação das triplas não colineares, o conjunto  $S$  associado a  $S'$  só possuía triplas colineares e orientadas para a direita, quando olhadas da mesma ordem que vimos em  $S'$ .

Portanto  $S$  está em posição convexa. □

**Teorema 8.** Dados inteiros  $k \geq 3$  e  $l \geq 2$ , existe um inteiro  $ES(k, l)$  tal que todo conjunto  $P$  com pelo menos  $ES(k, l)$  contém

- $l$  pontos colineares, ou
- $k$  pontos em posição estritamente convexa.

---

<sup>1</sup>A orientação de uma tripla ordenada de pontos diz se eles são colineares, se viram para a esquerda ou se para a direita.



*Demonstração.* Basta mostrar que

$$ES(k, l) \leq \begin{cases} ES(\frac{1}{2}(k-1)(l-1) + 1) & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ ES(\frac{1}{2}(k-2)(l-1) + 2) & \text{se } k \text{ é par} \end{cases}$$

Se  $k$  é ímpar, seja  $P$  um conjunto com  $ES(\frac{1}{2}(k-1)(l-1) + 1)$  pontos sem  $l$  pontos colineares. Pelo teorema 7,  $P$  possui  $\frac{1}{2}(k-1)(l-1) + 1$  pontos em posição convexa. Assim, pelo lema 3,  $P$  possui  $k$  pontos em posição estritamente convexa.

Se  $k$  é par, a prova é análoga.  $\square$

### 3.3.2 Pentágonos vazios

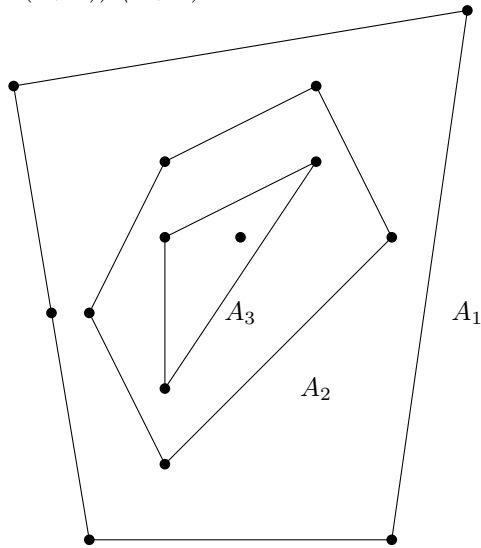
Agora que sabemos como achar conjuntos em posição estritamente convexa, vamos mostrar o seguinte teorema de Abel et al[?]:

**Teorema 9.** *Para todo inteiro  $l \geq 2$ , todo conjunto finito com pelo menos  $ES(\frac{(2l-1)^l - 1}{2l-1})$  pontos no plano possui*

- $l$  pontos colineares, ou
- um pentágono vazio.

#### Rascunho da prova

Considere um conjunto de pontos  $P$ . A imagem abaixo mostra o que são as camadas convexas de  $P$  (formalmente  $A_i$  é o conjunto dos vértices de  $(P \cap \text{conv}(A_{i-1})) \setminus A_{i-1}$ ).



Vamos supor que um conjunto suficientemente grande de pontos não tem nenhum pentágono vazio e nem  $l$  pontos colineares e achar uma contradição. Para isso, faremos o seguinte:

1. Mostrar que tal conjunto tem  $l$  camadas convexas não vazias.
2. Fixar um ponto  $z$  que está dentro da  $l$ -ésima camada convexa.

3. Mostrar que, para que não tenham pentágonos vazios, muitos pontos tem que se alinhar com  $z$  usando um conceito que chamaremos de *arcos vazios*.

*Demonstração.* Seja  $l \geq 3$  e  $k = \frac{(2l-1)^l - 1}{2l-1}$  e considere um conjunto  $P$  com pelo menos  $ES(k)$  pontos.

Suponha que  $P$  não contém  $l$  pontos colineares nem um pentágono vazio.

Um conjunto  $X \subset P$  em posição convexa com pelo menos  $k$  pontos é dito  $k$ -minimal se não existir outro conjunto  $Y \subset P$  em posição convexa com pelo menos  $k$  pontos tal que  $\text{conv}(Y) \subsetneq \text{conv}(X)$ .

Pelo teorema 7,  $P$  possui algum conjunto de  $k$  pontos em posição convexa. Seja  $A_1$  um conjunto assim  $k$ -minimal.

Vamos definir as camadas convexas  $A_i$  a partir de  $A_1$ . Para  $i \in [l-1] \setminus \{1\}$ , seja  $A_i$  os vértices de  $(P \cap \text{conv}(A_{i-1})) \setminus A_{i-1}$  e seja  $A_l = (P \cap \text{conv}(A_{l-1})) \setminus A_{l-1}$ .

Pelo lema 3 com  $k = 5$ , para cada  $i \in [l-1] \setminus \{1\}$ , quaisquer  $2l-1$  pontos consecutivos em  $A_i$  possuem 5 pontos em posição estritamente convexa. Para que  $P$  não tenha pentágonos vazios, o casco convexo desses  $2l-1$  pontos deve conter um ponto de  $A_{i-1}$ .

Como  $A_{i-1}$  contém  $\lfloor \frac{|A_{i-1}|}{2l-1} \rfloor$  conjuntos distintos de  $2l-1$  pontos consecutivos,

$$|A_i| \geq \lfloor \frac{|A_{i-1}|}{2l-1} \rfloor > \frac{|A_{i-1}|}{2l-1} - 1$$

E disso concluímos

$$|A_{i-1}| < (|A_i| + 1)(2l-1)$$

Suponha que para algum  $i \in [l-1]$  vale  $A_i = \emptyset$ . Então  $|A_{i-1}| < (2l-1)$ ,  $|A_{i-2}| < (2l-1)^2 + (2l-1)$ ,  $|A_{i-3}| < (2l-1)^3 + (2l-1)^2 + (2l-1)$ , ..., e, por indução,

$$|A_1| < \sum_{j=1}^{i-1} (2l-1)^j$$

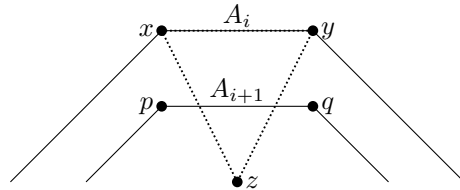
Somando os elementos da PG, obtemos:

$$|A_1| = \frac{(2l-1)^i - (2l-1)}{2l-2} < \frac{(2l-1)^i - 1}{2l-2} \leq \frac{(2l-1)^l - 1}{2l-2} = k$$

O que é uma contradição. Logo  $A_i \neq \emptyset, \forall i \in [l]$ . Se  $|A_i| < 3$ , então  $A_{i+1} = \emptyset$ . Portanto  $|A_i| \geq 3, \forall i \in [l-1]$ .

Fixe  $z \in A_l$ . Para  $i$  em  $[l-2]$ , considere os pontos de  $A_i$  em sentido horário. Se  $x$  e  $y$  são dois pontos consecutivos nessa ordem, dizemos que o segmento orientado  $\overrightarrow{xy}$  é um arco vazio se  $\Delta(x, y, z) \cap A_{i+1} = \emptyset$ .

Se  $\overrightarrow{xy}$  é um arco vazio em  $A_i$ ,  $p$  e  $q$  são consecutivos em  $A_{i+1}$  em sentido horário e  $\overrightarrow{pq}$  é o segmento orientado de  $A_{i+1}$  que intercepta com  $\Delta(x, y, z)$ , então dizemos que  $\overrightarrow{pq}$  é o arco seguinte a  $\overrightarrow{xy}$ .



**Fato 1.** Se  $\overrightarrow{xy}$  é um arco vazio de  $A_i$  e  $\overrightarrow{pq}$  é o arco seguinte a  $\overrightarrow{xy}$ , então  $\text{conv}(\{x, y, p, q\})$  é um quadrilátero vazio e  $\overrightarrow{pq}$  também é um arco vazio.

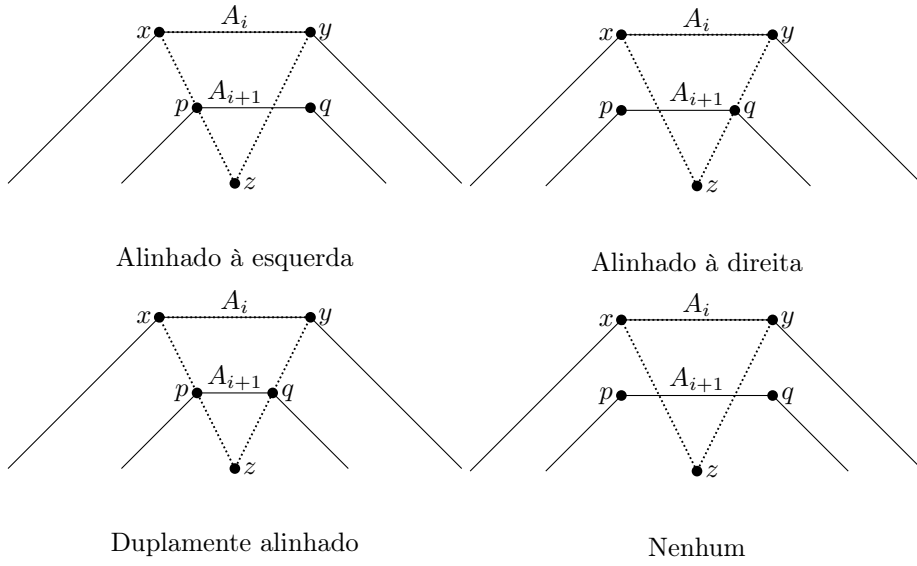
*Demonstração.* Seja  $Q = \{x, y, p, q\}$ . Como  $p, q \in \text{conv}(A_i)$ ,  $x$  e  $y$  são vértices de  $Q$  e como  $\overrightarrow{xy}$  é um arco vazio  $p$  e  $q$  também são vértices de  $Q$ . Logo  $Q$  é um quadrilátero.  $Q$  é vazio pela definição das camadas convexas.

Suponha que  $\overrightarrow{pq}$  não seja um arco vazio. Então existe algum ponto em  $\Delta p, q, z \setminus \Delta(x, y, z)$ . Seja  $t$  um ponto desses mais próximo a  $\overrightarrow{pq}$ . Como  $\{x, y, p, q\}$  é um quadrilátero vazio, então  $\{x, y, p, q, t\}$  é um pentágono vazio, o que é uma contradição.

Logo  $\overrightarrow{pq}$  é um arco vazio.  $\square$

Seja  $\overrightarrow{pq}$  o arco seguinte ao arco vazio  $\overrightarrow{xy}$ , então  $\overrightarrow{pq}$  é:

- **alinhado à esquerda** se  $p \in \Delta[x, y, z]$  e  $q \notin \Delta[x, y, z]$
- **alinhado à direita** se  $p \notin \Delta[x, y, z]$  e  $q \in \Delta[x, y, z]$
- **alinhado duplamente** se  $p \in \Delta[x, y, z]$  e  $q \in \Delta[x, y, z]$



**Fato 2.** Se  $\overrightarrow{pq}$  o arco seguinte ao arco vazio  $\overrightarrow{xy}$ , então  $\overrightarrow{pq}$  é alinhado à esquerda ou alinhado à direita ou alinhado duplamente.

*Demonstração.* Suponha que  $\overrightarrow{pq}$  não seja nenhum desses casos.

Então seja  $t$  o ponto em  $D = P \cap (\Delta[p, q, z] \setminus \overrightarrow{pq})$  mais próximo a  $\overrightarrow{pq}$ . Tal ponto existe pois  $z \in D$  e  $D$  é finito.

Como  $\overrightarrow{xy}$  é um arco vazio e  $\{x, y, p, q\}$  é um quadrilátero vazio, então  $\{x, y, p, q, t\}$  é um pentágono vazio, o que é uma contradição.

Logo  $\overrightarrow{pq}$  é alinhado à esquerda ou alinhado à direita ou alinhado duplamente  $\square$

Suponha que  $A_1$  não contenha arcos vazios. Então para dois pontos consecutivos  $x$  e  $y$  em  $A_1$  temos pelo menos um ponto de  $A_2$  em  $\Delta(x, y, z)$ . Como para

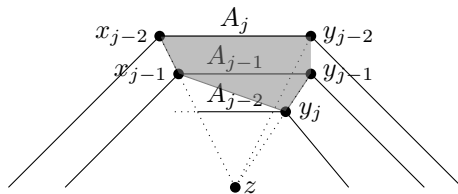
todos pares de pontos consecutivos  $x, y$  e  $u, v$  em  $A_1$ ,  $\Delta(x, y, z) \cap \Delta(u, v, z) = \emptyset$ , teríamos  $|A_2| \geq |A_1|$ , o que contradiz a minimalidade de  $A_1$ .

Seja  $\overrightarrow{x_1 y_1}$  um arco vazio em  $A_1$  e, para  $i \in [l-2]$ , seja  $\overrightarrow{x_{i+1} y_{i+1}}$  o arco seguinte a  $\overrightarrow{x_i y_i}$ . Pelo fato 1,  $\overrightarrow{x_{i+1} y_{i+1}}$  é um arco vazio.

Se todos os  $\overrightarrow{x_i y_i}$  fossem duplamente alinhados, teríamos  $\{x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, z\}$  colineares e  $\{y_1, y_2, \dots, y_{l-1}, z\}$  colineares e, pelo fato 2,  $\{x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, x_l, z\}$  ou  $\{y_1, y_2, \dots, y_{l-1}, y_l, z\}$  seriam colineares, o que é uma contradição.

Então algum  $\overrightarrow{x_i y_i}$  não é duplamente alinhado. Fixe o menor  $i \in [l-2] \setminus \{1\}$  que isso acontece. Pelo fato 2,  $\overrightarrow{x_i y_i}$  é alinhado à esquerda ou à direita. Sem perda de generalidade, suponha que é alinhado à esquerda. Existe algum  $j \in \{i+1, \dots, l-1\}$  tal que  $\overrightarrow{x_j y_j}$  não é alinhado à esquerda, pois caso contrário  $\{x_1, x_2, \dots, x_l, z\}$  seriam colineares. Fixe o menor  $j \in \{i+1, \dots, l-1\}$  que isso acontece.

Temos que  $\{x_{j-2}, y_{j-2}, x_{j-1}, y_{j-1}, y_j\}$  estão em posição estritamente convexa. Portanto  $P$  contém um pentágono vazio.



□

Como a melhor cota superior para a ordem de crescimento de  $ES(k)$  conhecida é exponencial em  $k$ [?], esse teorema nos garante a existência de pentágonos vazios em conjuntos de tamanho muito grandes por conter um exponencial duplo.

De fato, em 2012 Brát et al[?] mostraram que o resultado vale para  $328l^2$  pontos construindo mais de  $l$  camadas convexas com alguma delas com arco vazio e usou o mesmo argumento do teorema acima.

**Corolário 9.1.** A conjectura 1 é verdadeira para  $k = 5$  com  $n(5, l) = \Theta(l^2)$ .

*Demonstração.* O resultado de Brát et al[?] garante que  $n(5, l) = O(l^2)$ . Para ver que  $n(5, l) = \Omega(l^2)$  basta ver que uma grade  $(l-1) \times (l-1)$  contém  $(l-1)^2$  pontos e não contém pentágonos vazios nem  $l$  pontos colineares. □

### 3.4 Para conjuntos infinitos de pontos

Em 2010[?], Atila Pór e David Wood mostraram que a conjectura 1 não vale para conjuntos infinitos de pontos com a seguinte construção:

**Teorema 10.** Existem conjuntos infinitos enumeráveis de pontos sem 4 pontos colineares e sem 3 pontos visíveis dois a dois.

*Demonstração.* Vamos construir indutivamente um conjunto de pontos com tal propriedade.

Sejam  $x_1, x_2$  e  $x_3$  três pontos não colineares no plano.

Dados pontos  $x_1, \dots, x_{n-1}$  não colineares, vamos definir o ponto  $x_n$  da seguinte forma: pelo teorema de Sylvester-Gallai, existe uma reta que passa por exatamente dois pontos de  $x_1, \dots, x_{n-1}$ . Seja  $\mathcal{L} = \overleftrightarrow{x_i x_j}$  a reta que passa por

exatamente dois pontos de  $x_1, \dots, x_{n-1}$  com  $i < j$  e com  $i$  mínimo entre as com  $j$  mínimo. Coloque  $x_n$  no segmento  $\overline{x_i x_j}$  tal que ela seja a única reta que contenha  $x_n$  e mais dois pontos (isso é possível, já que somente uma quantidade finita de pontos de  $\mathcal{L}$  não pode ser escolhida).

Vamos chamar de  $P = \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$ . Por construção,  $P$  não tem 4 pontos colineares e se  $x_i$  e  $x_k$  com  $i < k$  são visíveis então existe um outro ponto colinear  $x_j$  com  $j < k$  e  $x_k$  está no segmento  $\overline{x_i x_j}$ .

Suponha que  $x_i$ ,  $x_j$  e  $x_k$  são dois a dois visíveis com  $i < j < k$ . Então existem pontos  $x_{i'}$  e  $x_{j'}$  com  $i' < k$  e  $j' < k$  tais que  $x_k$  está no segmento  $\overline{x_i x_{i'}}$  e no segmento  $\overline{x_j x_{j'}}$ . Pela escolha de  $x_k$ , só existe uma reta que contém  $x_k$  e mais dois pontos entre  $x_1, \dots, x_{k-1}$ . Então  $i = j'$  e  $j = i'$ . Mas então  $P \cap \overline{x_i x_j} = \{x_i, x_j, x_k\}$ , ou seja,  $x_i$  e  $x_j$  não são visíveis, ou seja,  $x_i$  e  $x_j$  não são visíveis.

Portanto não existem 3 pontos visíveis dois a dois em  $P$ .

□

## 3.5 Dificuldades encontradas

### 3.5.1 The orchard problem e o grafo de Turán

Problema citado em [?], solução do orchard problem tem menos arestas do que o grafo de Turán para  $k \geq 5$

### 3.5.2 Conjuntos de pontos sem heptágonos vazios

Dado que o teorema de Erdős-Szekeres vale, Erdős colocou o problema de determinar se para um dado  $n$  existe um  $g(n)$  tal que todo conjunto com  $g(n)$  pontos em posição geral contém um  $n$ -ágono vazio.

Se essa questão fosse respondida afirmativamente, a conjectura 1 sairia como corolário.

Para  $n = 3$  e  $n = 4$  é fácil ver que  $g(3) = 3$  e  $g(4) = 5$ . Harborth[?] provou que  $g(5) = 10$  e Gerken[?] e Nicolas[?] provaram que  $g(6)$  existe.

No entanto, Horton[?] mostrou uma construção de conjuntos arbitrariamente grandes sem heptágonos vazios.

**Teorema 11.** *Existem conjuntos arbitrariamente grandes sem heptágonos.*

*Demonstração.*

□



## Capítulo 4

# Bloqueadores de visibilidade

### 4.1 Ordem de crescimento de $b(n)$

[?, ?]

### 4.2 Conjuntos de pontos em posição convexa

[?, ?]