# Arbres binaires (généralités)

**Vidéo 1 :** https://www.youtube.com/watch?v=VLc9Ri8PL40&t=269s

**Vidéo 2 :** https://www.youtube.com/watch?v=i8_Uru2YM08

## ▼ Notion d'arbre binaire

Un arbre binaire est une structure **récursive**.

Par définition, un arbre peut être soit :

- *vide* (sans aucun nœud)
- constitué d'un nœud (**racine**) et de deux sous-arbres disjoints (**sous-arbre gauche** et **sous-arbre droit**)

Un arbre **étiqueté** est un arbre dont les nœuds contiennent des valeurs.

## ▼ Parenté

On nomme **fils** les racines des sous-arbres d'un nœud. Ce nœud est appelé **père**. Un arbre binaire **possède au plus deux nœuds**. Deux nœuds de même père sont **frères**.

## ▼ Types de nœuds

Le premier nœud est la **racine**.

Un nœud est une **feuille / nœud externe** si il n'a pas de fils.

Un **nœud interne** est un nœud qui possède au moins un fils.

Un **point double** est un nœud possédant deux sous-arbres non-vides.

Un **point simple** est un nœud possédant un seul sous-arbre non-vide.

## ▼ Liens et chemins

Le lien reliant le père à son fils gauche est appelé **lien gauche** (et donc **lien droit** pour le lien reliant le père à son fils droit).

Un **chemin** est une succession de liens.

Tout chemin de la racine de l'arbre à une feuille est appelé **branche** de l'arbre.

Le chemin obtenu en partant de la racine en ne suivant que les liens gauches est appelé **bord gauche** (et donc **bord droit** lorsqu'on ne suit que les liens droits).

*On remarque qu'il y a autant de branches que de feuilles !*

### ▼ Arbres binaires particuliers

- Les **arbres dégénérés** ne contiennent aucun point double. ils ne sont donc constitués que de points simples à gauche ou à droite et d'une seule feuille.
- Les **arbres complets** ont tous leurs niveaux remplis. Donc : les nœuds internes sont tous des points doubles et les feuilles sont toutes au même niveau.
- Les **arbres parfaits** ont tous leurs niveaux remplis sauf éventuellement le dernier niveau qui est rempli de gauche à droite :
- Les **arbres localement complets** ne sont constitués que de points doubles et de feuilles.
- Il existe des arbres localement complets particuliers dont tous les fils gauches (ou droits) sont des feuilles : on les appelle des **peignes** droits (ou gauches)

### ▼ Mesures

- **Taille :** le nombre de nœuds de l'arbre.
  - $taille(arbrevide) = 0$
  - $taille(< r, G, D >) = 1 + taille(G) + taille(D)$

- **Hauteur/Profondeur d'un nœud :** la longueur du chemin pour l'atteindre.
  - $prof(n) = 0 \ si \ n \ est \ la \ racine$
  - $prof(n) = 1 + prof(p), p \ le \ père \ de \ n$

- **Hauteur d'un arbre :** le nombre de nœuds de l'arbre.
  - $hauteur(arbrevide) = -1$

- $hauteur(< r, G, D >) = 1 + max(hauteur(G),\ hauteur(D))$

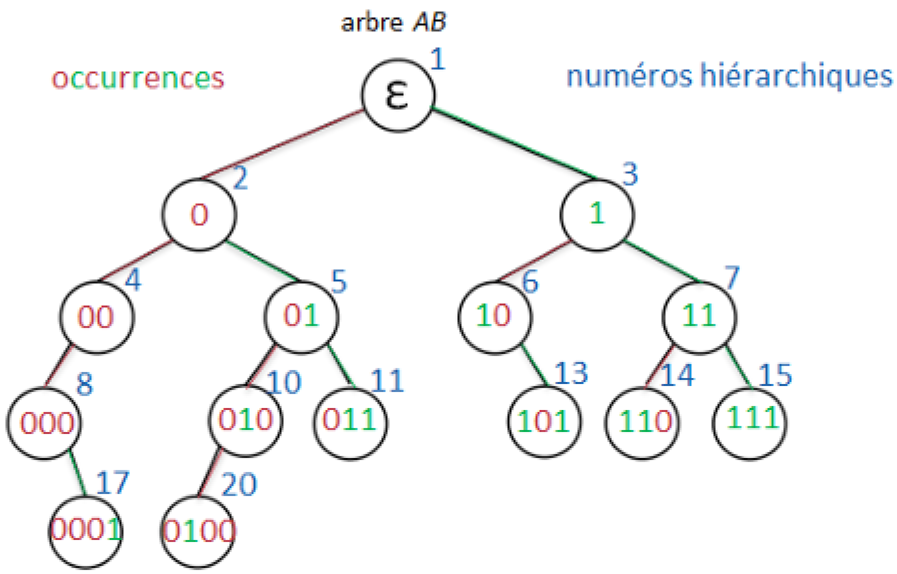
- **Longueurs de cheminement :** somme des profondeurs des nœuds.
  - Longueur de cheminement : $LC(B) = \Sigma\, prof(n),\ n : nœuds\ de\ B.$
  - Longueur de cheminement **externe** : $LCE(B) = \Sigma\, prof(f),\ f : feuilles\ de\ B.$
  - Longueur de cheminement **interne** : $LCI(B) = \Sigma\, prof(n_i),\ n_i : nœuds\ internes\ de\ B.$

- **Profondeurs moyennes :**
  - Profondeur moyenne : $PM(B) = LC(B)/taille(B)$
  - Profondeur moyenne **externe** : $PME(B) = LCE(B)$ / nombre de feuilles de B.
  - Profondeur moyenne **interne** : $PMI(B) = LCI(B)$ / nombre de nœuds internes de B.

### ▼ Occurrences et Numérotation hiérarchique

Une façon de décrire un nœud d'un arbre binaire est de lui associer un mot formé de 0 et de 1. Ce mot est appelé **occurrence** du nœud. Par définition, la racine d'un arbre est noté ε (représentant le mot vide) et si un nœud a pour occurrence le mot µ alors, son fils gauche à pour occurrence µ0 et son fils droit µ1. On peut voir l'occurrence comme une description du chemin allant de la racine à ce nœud : à chaque fois que l'on descend à gauche, on ajoute 0, 1 lorsque l'on descend à droite. Un arbre non étiqueté peut alors être représenté par la liste des occurrences de ses nœuds (généralement données par niveaux).

**Les nœuds peuvent être numérotés de façon hiérarchique.** Sur un arbre parfait, on numérote les nœuds par niveau de haut en bas et de gauche à droite. Sur un arbre quelconque si un nœud est numéroté i alors son fils gauche sera le nœud de numéro 2i et son fils droit le nœud de numéro 2i+1, la racine ayant toujours le numéro 1.




$$AB = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 010, 011, 101, 110, 111, 0001, 0100\}$$

### ▼ Type abstrait

**TYPES** arbrebinaire **UTILISE** nœud, élément **OPERATIONS** arbrevide : → arbrebinaire <_,_,_> : nœud x arbrebinaire x arbrebinaire → arbrebinaire racine : arbrebinaire → nœud g : arbrebinaire → arbrebinaire d : arbrebinaire → arbrebinaire contenu : nœud → élément **PRECONDITIONS** racine(B) est-défini-ssi B ≠ arbrevide g(B) est-défini-ssi B ≠ arbrevide d(B) est-défini-ssi B ≠ arbrevide **AXIOMES** racine(<r, G, D>) = r g(<r, G, D>) = G d(<r, G, D>) = D **AVEC** nœud r arbrebinaire B, G, D