Algorithmique

Les arbres généraux

Un **arbre général** ou **arbre** est une structure arborescente où le nombre de fils des nœuds n'est pas limité à deux (contrairement aux arbres binaires).

Par nature l'arbre général est une structure récursive. L'arbre $A = < \text{o}, A_1, \cdots, A_n >$ est constitué

— d'un nœud racine o,

— et d'une liste finie (éventuellement vide) d'arbres disjoints $\{A_1, \cdots, A_n\}$: la ***forêt*** *constituante de l'arbre.*

Terminologie

Les arbres dont les nœuds contiennent des informations, appelées **étiquettes**, sont **étiquetés**.

Parenté :

— On nomme **fils** les racines des sous-arbres d'un nœud. Le i^{ème} fils d'un nœud sera donc la racine de son i^{ème} sous-arbre.

— Et on donc **père** le nœud "au-dessus".

— Les nœuds de même père sont appelés **frères**.

Types de nœuds :

— Le premier nœud est la **racine**.

— Un nœud est une **feuille** si il n'a pas de fils, on parle alors également de **nœud externe**.

— Un nœud est donc dit **interne** si il possède au moins un fils.

Chemins :

— Un **chemin** est une succession de liens.

— Tout chemin de la racine de l'arbre à une feuille est appelé **branche** de l'arbre.
On remarque qu'il y a autant de branches que de feuilles !

Mesures

Taille :

Le nombre de nœuds de l'arbre.

- $\text{taille}(< \text{o}, A_1, \cdots, A_n >) = 1 + \sum \text{taille}(A_i)$

Hauteur / profondeur / niveau d'un nœud :

La longueur du chemin pour l'atteindre depuis la racine.

- $\text{h}(n) = 0$ si n est la racine
- $\text{h}(n) = 1 + \text{h}(p)$, p le père de n

Hauteur d'un arbre :

La longueur du plus long chemin (profondeur de la feuille la plus éloignée de la racine).

- $\text{hauteur}(< \text{o}, A_1, \cdots, A_n >) = \max\{\text{hauteur}(A_i) + 1\}$

Longueurs de cheminement :

La somme des hauteurs / profondeurs des nœuds.

- Longueur de cheminement : $\text{LC}(A) = \sum \text{h}(n)$, n : nœuds de A.
- Longueur de cheminement **externe** : $\text{LCE}(A) = \sum \text{h}(f)$, f : feuilles de A.
- Longueur de cheminement **interne** : $\text{LCI}(A) = \sum \text{h}(n_i)$, n_i : nœuds internes de A.

Profondeurs moyennes :

- Profondeur moyenne : $\text{PM}(A) = \text{LC}\ (A) \ / \ \text{taille}(A)$
- Profondeur moyenne **externe** : $\text{PME}(A) = \text{LCE}(A) \ /$ nombre de feuilles de A.
- Profondeur moyenne **interne** : $\text{PMI}(A) = \text{LCI}(A) \ /$ nombre de nœuds internes de A.

Annexe

Dans un souci de clarté, nous allons faire un léger abus de langage et utiliser directement les étiquettes des nœuds à leur place pour les identifier. Nous parlerons donc des nœuds 1, 5, 18, etc.

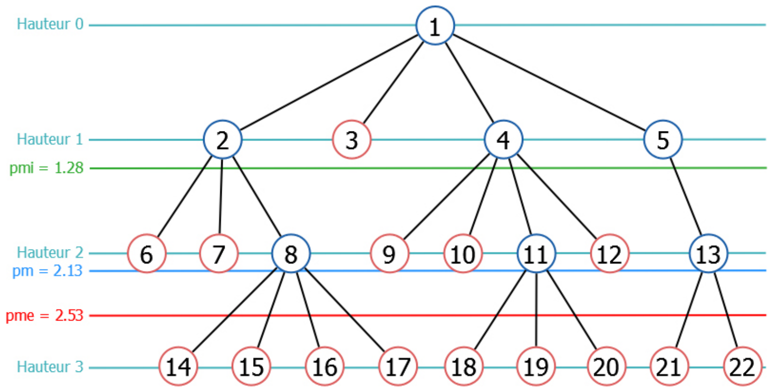
Dans l'arbre général A ci-dessous :

— 1 est la **racine** de A. 2, 3, 4 et 5 sont les **fils** de 1 (qui est donc leur père).

— les **fratries** de A sont $(2, 3, 4, 5)$, $(6, 7, 8)$, $(9, 10, 11, 12)$, $(14, 15, 16, 17)$, $(18, 19, 20)$, $(21, 22)$.

— A possède :
  — 7 **nœuds internes** : 1, 2, 4, 5, 8, 11 et 13.
  — 15 **nœuds externes (feuilles)** : 3, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 et 22.

— A possède donc 15 **branches** qui sont : $(1, 2, 6)$, $(1, 2, 7)$, $(1, 2, 8, 14)$, $(1, 2, 8, 15)$, $(1, 2, 8, 16)$, $(1, 2, 8, 17)$, $(1, 3)$, $(1, 4, 9)$, $(1, 4, 10)$, $(1, 4, 11, 18)$, $(1, 4, 11, 19)$, $(1, 4, 11, 20)$, $(1, 4, 12)$, $(1, 5, 13, 21)$ et $(1, 5, 13, 22)$



Arbre général A

— Les hauteurs/profondeurs des nœuds de l'arbre A sont :

h=0 : le nœud 1,

h=1 : les nœuds 2, 3, 4 et 5

h=2 : les nœuds 6 à 13

h=3 : les nœuds 14 à 22.

— la hauteur de l'arbre est hauteur$(A) = 3$

— la taille de l'arbre est taille$(A) = 22$

— Les longueurs de cheminement et profondeurs moyennes de l'arbre A sont :

$\text{LC}(A) = 47$	$\text{LCI}(A) = 9$	$\text{LCE}(A) = 38$
$\text{PM}(A) = 47/22 \simeq 2{,}13$	$\text{PMI}(A) = 9/7 \simeq 1{,}28$	$\text{PME}(A) = 38/15 \simeq 2{,}53$