T.D. 1 – Corrigé
Systèmes de numération flottante

Exercice 1

Donnez la représentation flottante, en **simple précision**, des nombres suivants :

1. 128
   - **S = 0**
   - $|128| = 128 = 1000\ 0000_2$
   - $128 = (1{,}0)_2 \times 2^7$
     M = $00\ldots0_2$ et e = 7
   - E = e + biais = 7 + 127 = 6 + 128
     E = $1000\ 0110_2$
   - **128 → 0 10000110 00000000000000000000000**

2. –32,75
   - **S = 1**
   - $0{,}75 \times 2 = \mathbf{1}{,}5$
     $0{,}5 \times 2 = \mathbf{1}$
     $|-32{,}75| = 32{,}75 = 10\ 0000{,}11_2$
   - $32{,}75 = (1{,}0000011)_2 \times 2^5$
     M = $00000110\ldots0_2$ et e = 5
   - E = e + biais = 5 + 127 = 4 + 128
     E = $1000\ 0100_2$
   - **–32,75 → 1 10000100 00000110000000000000000**

3. 18,125
   - **S = 0**
   - $0{,}125 \times 2 = \mathbf{0}{,}25$
     $0{,}25 \times 2 = \mathbf{0}{,}5$
     $0{,}5 \times 2 = \mathbf{1}$
     $|18{,}125| = 18{,}125 = 1\ 0010{,}001_2$
   - $18{,}125 = (1{,}0010001)_2 \times 2^4$
     M = $00100010\ldots0_2$ et e = 4
   - E = e + biais = 4 + 127 = 3 + 128
     E = $1000\ 0011_2$
   - **18,125 → 0 10000011 00100010000000000000000**

4. 0,0625
   - **S = 0**
   - 0,0625 × 2 = **0**,125
     0,125 × 2 = **0**,25
     0,25 × 2 = **0**,5
     0,5 × 2 = **1**
     $|0{,}0625| = 0{,}0625 = 0{,}0001_2$
   - $0{,}0625 = (1{,}0)_2 \times 2^{-4}$
     M = 00…0$_2$ et e = –4
   - E = e + biais = –4 + 127
     E = 0111 1011$_2$
   - **0,0625 → 0 01111011 00000000000000000000000**

Exercice 2

Donnez la représentation flottante, en **double précision**, des nombres suivants :

1. 1
   - **S = 0**
   - $|1| = 1 = 1_2$
   - $1 = (1{,}0)_2 \times 2^0$
     M = 00…0$_2$ et e = 0
   - E = e + biais = 0 + 1023
     E = 011 1111 1111$_2$
   - **1 → 0 01111111111 00……0**

2. –64
   - **S = 1**
   - $|-64| = 64 = 100\ 0000_2$
   - $64 = (1{,}0)_2 \times 2^6$
     M = 00…0$_2$ et e = 6
   - E = e + biais = 6 + 1023 = 5 + 1024
     E = 100 0000 0101$_2$
   - **–64 → 1 10000000101 00……0**

3. 12,06640625
   - **S = 0**
   - 0,06640625 × 2 = **0**,1328125
     0,1328125 × 2 = **0**,265625
     0,265625 × 2 = **0**,53125
     0,53125 × 2 = **1**,0625
     0,0625 × 2 = **0**,125
     0,125 × 2 = **0**,25
     0,25 × 2 = **0**,5
     0,5 × 2 = **1**
     |12,06640625| = 12,06640625 = $1100{,}00010001_2$
   - 12,06640625 = $(1{,}10000010001)_2 \times 2^3$
     M = $100000100010\ldots0_2$ et e = 3
   - E = e + biais = 3 + 1023 = 2 + 1024
     E = $100\ 0000\ 0010_2$
   - **12,06640625 → 0 10000000010 100000100010……0**

4. 0,2734375
   - **S = 0**
   - 0,2734375 × 2 = **0**,546875
     0,546875 × 2 = **1**,09375
     0,09375 × 2 = **0**,1875
     0,1875 × 2 = **0**,375
     0,375 × 2 = **0**,75
     0,75 × 2 = **1**,5
     0,5 × 2 = **1**
     |0,2734375| = 0,2734375 = $0{,}0100011_2$
   - 0,2734375 = $(1{,}00011)_2 \times 2^{-2}$
     M = $000110\ldots0_2$ et e = –2
   - E = e + biais = –2 + 1023
     E = $011\ 1111\ 1101_2$
   - **0,2734375 → 0 01111111101 000110……0**

Exercice 3

Donnez la représentation décimale des nombres codés en **simple précision** suivants :

1. $1011\ 1101\ 0100\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000_2$
   - S = 1 → **négatif**
   - $e = E - \text{biais} = 0111\ 1010_2 - 127$
     $e = 122 - 127$
     $\mathbf{e = -5}$
   - $\mathbf{m} = (1{,}M)_2 = \mathbf{(1{,}1)_2}$
   - $-m \times 2^e = -(1{,}1)_2 \times 2^{-5}$
   - $= -(11)_2 \times 2^{-6}$
     $\mathbf{= -3 \times 2^{-6} = -0{,}046875}$

2. $0101\ 0101\ 0110\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000_2$
   - S = 0 → **positif**
   - $e = E - \text{biais} = 1010\ 1010_2 - 127$
     $e = 170 - 127$
     $\mathbf{e = 43}$
   - $\mathbf{m} = (1{,}M)_2 = \mathbf{(1{,}11)_2}$
   - $+m \times 2^e = (1{,}11)_2 \times 2^{43}$
   - $= +(111)_2 \times 2^{41}$
     $\mathbf{= 7 \times 2^{41} \approx 1{,}5393 \times 10^{13}}$

3. $1100\ 0001\ 1111\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000_2$
   - S = 1 → **négatif**
   - $e = E - \text{biais} = 1000\ 0011_2 - 127$
     $e = 131 - 127$
     $\mathbf{e = 4}$
   - $\mathbf{m} = (1{,}M)_2 = \mathbf{(1{,}111)_2}$
   - $-m \times 2^e = -(1{,}111)_2 \times 2^4$
   - $= -(11110)_2 \times 2^0$
     $\mathbf{= -30}$

4. $1111\ 1111\ 1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000_2$
   - S = 1, E = 1…1 et M = 0…0 → **–∞**

5. $0000\ 0000\ 0100\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000_2$
   - E = 0…0 et M ≠ 0…0 → **représentation dénormalisée**
   - S = 0 → **positif**
   - $m = (0{,}M)_2 = (0{,}1)_2$
   - $+m \times 2^{1-\text{biais}} = (0{,}1)_2 \times 2^{-126}$
   - $= (1)_2 \times 2^{-127}$
     $\mathbf{= 2^{-127} \approx 5{,}877 \times 10^{-39}}$

Exercice 4

Donnez la représentation décimale des nombres codés en **double précision** suivants :

1. $403D\ 4800\ 0000\ 0000_{16}$
   = 0100 0000 0011 1101 0100 1000 0000……0
   - S = 0 → **positif**
   - $e = E - \text{biais} = 100\ 0000\ 0011_2 - 1023 = 1027 - 1023$
     e = 4
   - $\mathbf{m} = (1,M)_2 = \mathbf{(1,110101001)_2}$
   - $+m \times 2^e = (1,110101001)_2 \times 2^4$
   - $= (1110101001)_2 \times 2^{-5}$
     $\mathbf{= 937 \times 2^{-5} \approx 29,28125}$

2. $C040\ 0000\ 0000\ 0000_{16}$
   = 1100 0000 0100 0000……0
   - S = 1 → **négatif**
   - $e = E - \text{biais} = 100\ 0000\ 0100_2 - 1023 = 1028 - 1023$
     e = 5
   - $\mathbf{m} = (1,M)_2 = \mathbf{(1,0)_2}$
   - $-m \times 2^e = -(1,0)_2 \times 2^5$
   - $\mathbf{= -2^5 = -32}$

3. $BFC0\ 0000\ 0000\ 0000_{16}$
   = 1011 1111 1100 0000……0
   - S = 1 → **négatif**
   - $e = E - \text{biais} = 011\ 1111\ 1100_2 - 1023 = 1020 - 1023$
     e = –3
   - $\mathbf{m} = (1,M)_2 = \mathbf{(1,0)_2}$
   - $-m \times 2^e = -(1,0)_2 \times 2^{-3}$
   - $\mathbf{= -2^{-3} = -0,125}$

4. $8000\ 0000\ 0000\ 0000_{16}$
   = 1000 0000 0000 0000……0
   - S = 1, E = 0…0 et M = 0…0 → **–0**

5. $FFF0\ 0001\ 0000\ 0000_{16}$
   = 1111 1111 1111 0000 0000 0000 0001 0000……0
   - E = 1…1 et M ≠ 0…0 → **NaN**

Exercice 5

Pour chaque question, vous traiterez le cas des codages **simples et doubles précisions** du format à **mantisse normalisée**.

1. Déterminez, en valeur absolue, le plus petit et le plus grand nombre flottant.

- **Simple précision**

  - **Minimum**
    $Min_{simple} = m_{min} \times 2^{emin}$
    $m_{min} = (1{,}0)_2 = 1$
    $e_{min} = E_{min} - biais$ avec $E_{min} = 1$
    $e_{min} = 1 - 127 = -126$
    $\mathbf{Min_{simple} = 2^{-126} \approx 1{,}1755 \times 10^{-38}}$

  - **Maximum**
    $Max_{simple} = m_{max} \times 2^{emax}$
    $m_{max} = (1{,}M_{max})_2 = 1 + (0{,}M_{max})_2 = 1 + M_{max} \times 2^{-23}$ avec $M_{max} = 2^{23} - 1$
    $m_{max} = 1 + (2^{23} - 1) \times 2^{-23} = 1 + 1 - 2^{-23} = 2 - 2^{-23} = 2 \times (1 - 2^{-24})$
    $e_{max} = E_{max} - biais$ avec $E_{max} = (2^8 - 1) - 1 = 254$
    $e_{max} = 254 - 127 = 127$
    $Max_{simple} = 2 \times (1 - 2^{-24}) \times 2^{127}$
    $\mathbf{Max_{simple} = (1 - 2^{-24}) \times 2^{128} \approx 3{,}4028 \times 10^{38}}$

- **Double précision**

  - **Minimum**
    $Min_{double} = m_{min} \times 2^{emin}$
    $m_{min} = (1{,}0)_2 = 1$
    $e_{min} = E_{min} - biais$ avec $E_{min} = 1$
    $e_{min} = 1 - 1023 = -1022$
    $\mathbf{Min_{double} = 2^{-1022} \approx 2{,}2251 \times 10^{-308}}$

  - **Maximum**
    $Max_{double} = m_{max} \times 2^{emax}$
    $m_{max} = (1{,}M_{max})_2 = 1 + (0{,}M_{max})_2 = 1 + M_{max} \times 2^{-52}$ avec $M_{max} = 2^{52} - 1$
    $m_{max} = 1 + (2^{52} - 1) \times 2^{-52} = 1 + 1 - 2^{-52} = 2 - 2^{-52} = 2 \times (1 - 2^{-53})$
    $e_{max} = E_{max} - biais$ avec $E_{max} = (2^{11} - 1) - 1 = 2046$
    $e_{max} = 2046 - 1023 = 1023$
    $Max_{double} = 2 \times (1 - 2^{-53}) \times 2^{1023}$
    $\mathbf{Max_{double} = (1 - 2^{-53}) \times 2^{1024} \approx 1{,}7977 \times 10^{308}}$

2. Quel est le plus petit nombre strictement positif qui, ajouté à 1, donne un résultat différent de 1 ?

- **Simple précision**

  On pose : $\mathbf{1 = m \times 2^e}$ avec $m = \mathbf{(1{,}0)_2}$ et $e = \mathbf{0}$.
  Le codage de la mantisse M contient donc 23 zéros.

  Observons maintenant l'addition ci-dessous :

```
  2^0 2^-1                         2^-23
  ↑   ↑                            ↑
  1,0000000000000000000000000000…       ← Nombre 1
+ 0,0000000000000000000000101010…       ← Petit nombre
= 1,0000000000000000000000101010…       ← Résultat
```

  23 chiffres

  Le codage de la mantisse du résultat doit contenir autre chose que 23 zéros si l'on souhaite obtenir une différence avec le codage de la mantisse du nombre 1. Le plus petit nombre possible pour obtenir cette différence est donc $\mathbf{2^{-23}}$.

- **Double précision**

  Avec un raisonnement identique à celui du codage en simple précision, on obtient $\mathbf{2^{-52}}$.

Exercice 6

Soit le programme suivant écrit en langage C :

```c
#include <stdio.h>

void main()
{
    float f1, f2, f3, r;

    f1 = 1E25;
    f2 = 16;

    f3 = f1 + f2;
    r = f3 - f1;

    printf("r = %f\n", r);
}
```

Indication : $10^{25} \approx 2^{83}$

1. Quelle est la valeur de *r* qui est affichée à la fin de l'exécution de la fonction **`main()`** ? Expliquez votre raisonnement.

   - On pose : $\mathbf{f1 = (1{,}M1)_2 \times 2^{e1}}$
     Sachant que $\mathbf{f1 \approx 2^{83}}$, on en déduit que $\mathbf{f1 \approx (1{,}0)_2 \times 2^{83}}$ avec **e1 = 83** et ***M1* = 0…0**

   - On pose : $\mathbf{f3 = (1{,}M3)_2 \times 2^{e3}}$

   - Observons maintenant l'addition ci-dessous :

```
  2^83 2^82                      2^60      2^4
  ↑ ↑                            ↑        ↑
  1,00000000000000000000000000……0000…  ×2^83 → f1 = 10^25 ≈ 2^83
+ 0,00000000000000000000000000……0100…  ×2^83 → f2 = 16 = 2^4
= 1,00000000000000000000000000……0100…  ×2^83 → f3 = 2^83 + 2^4
                 M3
```

   On constate que la plus petite valeur de *f2* pouvant modifier la valeur de *M3* est la valeur 2^{60}. Or dans le programme, *f2* possède la valeur 16 : aucun changement n'apparaît donc sur le résultat de l'addition.

   L'instruction ***f3* = *f1* + *f2*** est équivalente à ***f3* = *f1***.
   La soustraction ***r* = *f3* – *f1*** devient alors ***r* = *f3* – *f3* = 0**.

   La valeur affichée à la fin de l'exécution de la fonction `main()` est donc 0.

2. Dans le programme, on a `f1=10`^{25}. Supposons maintenant que `f1=10`^{n} avec *n* entier positif. Jusqu'à quelle valeur de *n* un résultat correct apparaîtra-t-il sur *r* ?

   - Pour que l'addition *f3* = *f1* + *f2* soit valide, il faut que la valeur 16, contenue dans *f2*, puisse modifier le codage de la mantisse du résultat *M3*. La valeur du poids le plus faible de *M1* doit donc être au maximum de 2^4, car à partir de 2^5, la valeur de *f2* sera trop petite pour être prise en compte.

```
  2^28                           2^5
  ↑                              ↑
  1,00000000000000000000000000…  ×2^28 → f1 = 2^28
+ 0,00000000000000000000000100…  ×2^28 → f2 = 16 = 2^4
= 1,00000000000000000000000100…  ×2^28 → f3 = 2^28 + 2^4
                 M3
```

   - La variable *f1* doit donc être strictement inférieure à 2^{28} afin que l'addition avec la variable *f2* puisse entraîner un changement dans le codage de la mantisse *M3*.

- Ce qui donne :
  $f1 < 2^{28}$
  $10^n < 2^{28}$
  $n < Log(2^{28})$
  $n < 8,42$

  $\mathbf{n_{max} = 8}$

3. Même question si les variables *f1*, *f2*, *f3* et *r* sont déclarées en double précision.

   Avec un raisonnement identique à celui du codage en simple précision, on obtient :
   $f1 < 2^{5+52}$
   $10^n < 2^{57}$
   $n < Log(2^{57})$
   $n < 17,15$

   $\mathbf{n_{max} = 17}$

Il ne faut jamais sous-estimer les risques d'erreur liés à la manipulation de variables entières ou flottantes. Des débordements ou des problèmes de précision peuvent survenir à tout moment et déjouer la vigilance de n'importe quel développeur, même expérimenté.

À propos de la fusée Ariane

Voici un exemple célèbre d'erreur de programmation minime aux conséquences énormes. Lors de son tout premier vol le 4 juin 1996, la fusée Ariane 5 a explosé quarante secondes seulement après son décollage de la base de Kourou en Guyane. La perte financière fut estimée à environ 500 millions de dollars. Le CNES (Centre National d'Études Spatiales) et l'ESA (*European Space Agency*) ont immédiatement lancé une enquête. Un comité d'experts internationaux fut réuni et un rapport sans équivoque fut livré un mois plus tard : l'explosion était due à une erreur de logiciel.

En cause, les SRI ou Systèmes de Référence Inertiels. Cette partie du logiciel, qui provenait du lanceur Ariane 4, n'avait pas été adaptée à la plus grande vitesse horizontale d'Ariane 5. Du coup, lors d'une conversion d'un nombre flottant sur 64 bits, contenant la vitesse horizontale, en un entier sur 16 bits, l'opération a provoqué un débordement et une exception a été générée. Malheureusement, aucune routine de traitement de cette exception n'ayant été prévue, c'est le traitement d'exception par défaut qui fut exécuté et le programme tout entier termina son exécution.

Depuis, les concepteurs du logiciel d'Ariane ont mis en place un plan de programmation défensive qui est reconnu comme une référence en la matière.

Jean-Christophe Arnulfo, *Métier Développeur*, Paris, Dunod, 2003