# Chapitre 0 : Les polynômes

## Définition

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n,$$
$$n \in \mathbb{N},\ (a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$$

## Polynomes particuliers

**Polynôme constant :** $P(X) = c + 0X + 0X^2 + ...$

**Polynôme nul :** $P(X) = 0$

**Monôme :** polynôme de la forme $aX^n$, où $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.

**Polynôme à coefficients réels :** Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

**Polynôme à coefficients complexes :** Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.

**Polynôme de degré inférieur ou égal à $n$ :** $\mathbb{K}_n[X]$

## Degrés

Soit $P \in \mathbb{K}[X],\ P \neq 0$.

On appelle **degré** de $P$, le plus grand $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k \neq 0$, on le note $deg(P)$:

$$deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N};\ a_k \neq 0\}$$

$d^\circ(P \times Q) = d^\circ(P) + d^\circ(Q)$

$d^\circ(P+Q) \leq \max(d^\circ(P), d^\circ(Q))$

$d^\circ(0) = -\infty$

## Opérations

### Addition :

$$P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k,\ \forall k \in [\![0, n]\!]$$

### Multiplication :

$$PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k,\ \forall k \in [\![0, n+m]\!], c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-k}$$

## Divisibilité

$P|Q \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ F(X) = E(X) \times Q(X)$

## Division euclidienne

Soit $(A, B) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tq $B \neq 0$

Alors $\exists!(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tq $A = BQ + R$ avec $d^\circ(R) < d^\circ(B)$

▼ *Méthode division euclidienne*

$A = 2X^4 - X^2 + X - 5$

$B = X^2 + X - 2$

$$
\begin{array}{r|l}
2X^4 + (0X^3) - X^2 + X - 5 & X^2 + X - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-2X^4 + \ 2X^3 \ - 4X^2} \qquad\qquad & 2X \ - 2X + 5 \\
-2X^3 + 3X^2 + X - 5 & \\
\underline{-2X^3 - 2X^2 + 4X} \quad\; & \\
5X^2 - 3X - 5 & \\
\underline{5X^2 + 5X - 10} & \\
-8X + 5 &
\end{array}
$$

$A = B(X^2 - 2X + 5) - 8X + 5$

## Racines et ordre de multiplicité

$a$ racine de $P$

$\iff \ (X - a)|P$

$\iff \ P(a) = 0$

$a$ racine de $P$ d'ordre de multiplicité d'ordre exactement $n$

$\iff \ (X - a)^n|P$ et $(X - a)^{n+1}|P$

$\iff \ \exists Q \in \mathbb{R}[X], \ P = (X - a)^n Q$ et $Q(a) \neq 0$