Chapitre 1 : Equations différentielles

I. Equations différentielles linéaires du premier ordre

A/ Définition

Une équation différentielle linéaire du premier ordre a la forme, $(E) : a(t)y' + b(t)y = c(t)$

ou les fonctions a, b et c sont définies sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$.

Résoudre cette équation, c'est chercher l'intervalle $I \subset J$ le plus grand possible (si possible J tout entier) et l'ensemble des fonctions réelles définies sur I telles que, pour tout $t \in I$, l'égalité (E) soit vérifiée.

B/ Equation linéaire homogène

Une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre a la forme, $(E) : a(t)y' + b(t)y = 0$

ou les fonctions a et b sont définies sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$.

C/ Méthodes de résolution

Etape 1 : Résolution de l'homogène $(E_0) : ay' + by = 0$.

$y_0(x) = ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$

Etape 2 : Solution particulière y_p de (E).

Etape 3 : Conclusion

$S = \{x \longmapsto y_0(x) + y_p(x) \qquad I \longrightarrow J \qquad k \in \mathbb{R}\}$

D/ Exercice type

$(E) : y' + y = e^x - 1$

$I = \mathbb{R}$

Etape 1 : Resolution de $(E_0) : y' + y = 0$

$y_0(x) = ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} = ke^{-\int \frac{1}{1}dx} = ke^{-x}$

donc $y_0(x) = ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$

Etape 2 : Solution particulière de (E)

On cherche une solution particulière (SP) de (E). On cherche y_p de la forme :

$y_p(x) = k(x)e^{-x}$

$y_p'(x) = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}$

y_p sol de (E)

$\iff y_p'(x) + y_p(x) = e^x - 1$

$\iff k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = e^x - 1$

$\iff k'(x)e^{-x} = e^x - 1$

$\iff k'(x) = \frac{e^x - 1}{e^{-x}}$

$\iff k'(x) = (e^x - 1)e^x$

$\iff k'(x) = e^{2x} - e^x$

Prenons $k(x) = \int e^{2x} - e^x = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x$

Ainsi $y_p(x) = (\frac{1}{2}e^{2x} - e^x)e^{-x} = \frac{e^x}{2} - 1$

Etape 3 : Conclusion

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ke^{-x} + \frac{e^x}{2} - 1 \end{array} ; k \in \mathbb{R} \right\}$$

II. Equations différentielles linéaires du second ordre

A/ Définition

Une équation différentielle linéaire du premier ordre a la forme, $(E) : a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$

ou les fonctions a, b, c et d sont définies sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$.

B/ Equation linéaire homogène

Une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre a la forme, $(E) : a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$

ou les fonctions a, b et c sont définies sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$.

C/ Méthodes de résolution

Etape 1 : Résolution de l'homogène $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$.

On résout l'équation caractéristique $(C) : ar^2 + br + c = 0$

1e cas : $\Delta > 0$, racines : r_1, r_2

$y_0 : x \longmapsto k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x},\ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$

2e cas : $\Delta = 0$, racine : r_1

$y_0 : x \longmapsto (k_1 x + k_2)e^{r_1 x},\ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$

3e cas : $\Delta < 0$, racines : $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \overline{r_1}$

$y_0 : x \longmapsto e^{\alpha x}(k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)),\ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$

Etape 2 : Solution particulière y_p de (E).

Etape 3 : Conclusion

$S = \{x \longmapsto y_0(x) + y_p(x) \qquad I \longrightarrow J \qquad k \in \mathbb{R}\}$

D/ Exercice type

- $(E) : a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$, avec $d(t) = Q(X)$, $Q \in \mathbb{R}[X]$

  $(E) : y'' - y' - 2y = -x^2 - 3x$

  $I = \mathbb{R}$

  Etape 1 : Resolution de $(E_0) : y'' - y' - 2y = 0$

  $(C) : r^2 - r - 2 = 0$

  $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$ sont solutions évidentes de (C)

  donc $y_0(x) = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x}$, $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$

  Etape 2 : SP de (E)

  On cherche une solution sous la forme $y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

  $y'_p(x) = 2\alpha x + \beta$

  $y''p(x) = 2\alpha$

  y_p sol de (E)

  $\iff y''(x) - y'(x) - 2y = -x^2 - 3x$

  $\iff 2\alpha - 2\alpha x - \beta - 2\alpha x^2 - 2\beta x - 2\gamma = -x^2 - 3x$

  $\iff x^2(-2\alpha) + x(-2\alpha - 2\beta) + (2\alpha - \beta - 2\gamma) = -x^2 - 3x$

$$\iff \begin{cases} -2\alpha = -1 \\ -2\alpha - 2\beta = -3 \\ 2\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ -2\alpha - 2\beta = -3 \\ 2\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ 2\beta = -2 \\ -\beta - 2\gamma = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 1 \\ -2\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

donc $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$,

Etape 3 : Conclusion

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 + x \end{array} ; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

▼ $(E) : a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$, avec $d(t) = Q(X)e^{mx}$, $m \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{R}[X]$

$(E) : y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$

$I = \mathbb{R}$

Etape 1 : Resolution de $(E_0) : y'' - 4y' + 4y = 0$

$(C) : r^2 - 4r + 4 = 0$

$\Delta = 0$, $r_1 = 2$

donc $y_0(x) = (k_1 x + k_2)e^{2x}$, $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$

Etape 2 : SP de (E)

On cherche une solution sous la forme $y_p(x) = Q(x)e^{2x}$

$y_p'(x) = (Q'(x) + 2Q(x))e^{2x}$

$y_p''(x) = (Q''(x) + 4Q'(x) + 4Q(x))e^{2x}$

y_p sol de (E)

$$\iff y_p'' - 4y_p' + 4y_p = xe^{2x}$$
$$\iff e^{2x}(Q'' + 4Q' + 4Q - 4Q' - 8Q + 4Q) = xe^{2x}$$
$$\iff Q'' = x$$
$$\iff Q' = \frac{x^2}{2}$$
$$\iff Q = \frac{x^6}{6}$$

d'où $y_p(x) = \frac{x^6}{6}e^{2x}$.

Etape 3 : Conclusion

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (k_1 x + k_2)e^{2x} + \frac{x^6}{6}e^{2x} \end{array} ; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$