严格对角占优Z-矩阵的多级预条件AOR迭代法

薛秋芳，肖燕婷，魏　峰
XUE Qiufang, XIAO Yanting, WEI Feng

西安理工大学 理学院 应用数学系，西安 710054
Department of Applied Mathematics, School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China

XUE Qiufang, XIAO Yanting, WEI Feng. Multistage preconditioned AOR iterative methods for strictly diagonally dominant Z-matrices. Computer Engineering and Applications, 2018, 54(22): 51-56.

Abstract: In order to improve the iterative solving speed of linear equations, a class of preconditioners are proposed and the convergence performance of the preconditioned AOR iterative methods with the proposed preconditioners is analyzed. The comparison results on the convergent speed between the AOR and the preconditioned AOR are obtained when the coefficient matrix is a strictly diagonally dominant Z-matrix. Meanwhile the comparison results for the multistage preconditioned methods are also given. The numerical example is provided to illustrate the obtained results.
Key words: preconditioner; preconditioned AOR iterative method; multistage preconditioned AOR iterative method; strictly diagonally dominant Z-matrix; spectral radius

摘　要: 为了加快线性方程组的迭代法求解速度，提出了一类新预条件子，分析了相应的预条件AOR迭代法的收敛性。给出了当系数矩阵为严格对角占优的Z-矩阵时，AOR和预条件AOR迭代法收敛速度的比较结论。同时也给出了多级预条件迭代法的相关比较结果，推广了现有的结论。数值算例验证了文中结果。
关键词: 预条件；预条件AOR迭代法；多级预条件AOR迭代法；严格对角占优Z-矩阵；谱半径
文献标志码: A　**中图分类号:** O241.6　doi: 10.3778/j.issn.1002-8331.1805-0404

1　引言

科学计算中的很多问题最后都归结为求解线性方程组：

$$Ax=b \tag{1}$$

这里，$A\in\mathrm{R}^{n\times n}$ 是非奇异矩阵；$x,b\in\mathrm{R}^n$，x 是未知向量，b 是给定的向量。这类方程组一般采用迭代法求解。如果令 $A=M-N$，其中 $M,N\in\mathrm{R}^{n\times n}$ 且 M 非奇异，则基本的迭代格式为：

$$x^{(k+1)}=Tx^{(k)}+c,\ k=0,1,\cdots \tag{2}$$

这里，$c=M^{-1}b$，$T=M^{-1}N$ 是迭代矩阵，其谱半径不仅决定了该迭代法是否收敛，还决定了迭代的收敛速度。尽管某些迭代法可求解方程组(1)，但很多时候，由于缓慢的收敛速度，求解效率往往很低。

为了改善迭代法的收敛性，研究者们提出了预条件技术[1-18]，即将原方程组(1)转化为预条件形式：

$$PAx=Pb \tag{3}$$

其中，P 为非奇异矩阵，被称为预条件子。该方程组的基本迭代格式为：

$$x^{(k+1)}=M_P^{-1}N_Px^{(k)}+M_P^{-1}b,\ k=0,1,\cdots \tag{4}$$

其中，$PA=M_P-N_P$，且 M_P 非奇异。迭代法(4)被称为预条件迭代法。

不同的分裂 $PA=M_P-N_P$ 可以得到不同的预条件方法，如预条件SOR迭代法、预条件Gauss-Seidel迭代法等。

文献[1]和[2]分别提出了如下两个经典的预条件子：

$$\tilde{P}=\begin{pmatrix}1 & -a_{12} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & -a_{23} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1,n}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

基金项目: 国家自然科学基金(No.11601419)；西安理工大学博士启动基金(No.109-451115003)。
作者简介: 薛秋芳(1978—)，女，理学博士，讲师，主要研究方向为数值线性代数，E-mail: qiufangxue@163.com；肖燕婷(1981—)，女，博士，副教授，主要研究方向为非参数统计。
收稿日期: 2018-05-25　**修回日期:** 2018-07-02　**文章编号:** 1002-8331(2018)22-0051-06

$$\tilde{P}_\alpha=\begin{pmatrix}1 & -\alpha_1a_{12} & 0 & \cdots & 0\\ 0&1&-\alpha_2a_{23}&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&-\alpha_{n-1}a_{n-1,n}\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

他们研究了预条件Gauss-Seidel迭代法的收敛性。不久之后，文献[3]探讨了带有预条件子 $\tilde{P}$ 的预条件SOR迭代法的收敛情况。

关于文献[1-2]的进一步研究和推广可参考文献[4-5]。另外，Evans等人在文献[6]中提出了预条件子：

$$\bar{P}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&-a_{1n}\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

并分析了相应的预条件AOR迭代法的收敛性，证明了对不可约L-矩阵，预条件迭代法优于标准迭代法。

受以上预条件子的启发，本文提出一类新预条件子，以上提到的预条件子均为其特殊情况。本文将该预条件子应用于AOR迭代法，从而将上面的预条件方法推广到更一般的情况。

不失一般性，设 $A=I-L-U$，其中 I 是 $n\times n$ 单位阵，$-L$ 和 $-U$ 分别是矩阵 A 的严格下三角和严格上三角矩阵。令：

$$M=\frac{1}{\omega}(I-\gamma L),N=\frac{1}{\omega}[(1-\omega)I+(\omega-\gamma)L+\omega U]$$

则AOR迭代矩阵为：

$$L_{\gamma,\omega}=(I-\gamma L)^{-1}[(1-\omega)I+(\omega-\gamma)L+\omega U] \tag{5}$$

其中，$\omega,\gamma\in[0,2),(\omega\neq0)$ 是松弛因子（参见文献[19]）。显然，当 (ω,γ) 分别取 (ω,ω)、$(1,1)$ 和 $(1,0)$ 时，可分别得到SOR迭代矩阵、Gauss-Seidel迭代矩阵和Jacobi迭代矩阵。

下面给出新预条件子。

设 $i\in S=\{1,2,\cdots,n-1\}$，定义 A 的一类预条件子 $P(i)$ 为：

$$P(i)=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&-\alpha_1a_{1,i+1}&&&\\&1&\cdots&0&-\alpha_2a_{2,i+2}&&\\&&\ddots&&&\ddots&\\&&&1&0&\cdots&-\alpha_{n-i}a_{n-i,n}\\&&&&1&\cdots&0\\&&&&&\ddots&\vdots\\&&&&&&1\end{pmatrix} \tag{6}$$

这里 $0\leqslant\alpha_j\leqslant1,j=1,2,\cdots,n-i$，且存在 j 使得 $\alpha_j\neq0$。

显然，式(6)中定义的预条件子 $P(i)$ 包含了预条件子 $\tilde{P}_\alpha$ 和 $\bar{P}$。从而，上文中的三种预条件子 $\tilde{P}(i=1$ 且 $\alpha_j=1,j=1,2,\cdots,n-1)$、$\tilde{P}_\alpha(i=1)$ 和 $\bar{P}(i=n-1$ 且 $\alpha_1=1)$ 均为 $P(i)$ 的特殊情况。

对应于该预条件子的方程组为：

$$P(i)A\boldsymbol{x}=P(i)\boldsymbol{b},i\in S \tag{7}$$

其中：

$$P(i)A=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n-i,1}&c_{n-i,2}&\cdots&c_{n-i,n}\\a_{n-i+1,1}&a_{n-i+1,2}&\cdots&a_{n-i+1,n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&1\end{pmatrix} \tag{8}$$

且当 $j=1,2,\cdots,n-i$ 但 $j\neq k$ 以及 $k=1,2,\cdots,n$ 但 $k\neq i+j$ 时，$c_{jk}=a_{jk}-\alpha_ja_{j,i+j}a_{i+j,k}$，而 $c_{j,i+j}=(1-\alpha_j)a_{j,i+j}$，$c_{jj}=1-\alpha_ja_{j,i+j}a_{i+j,j},j=1,2,\cdots,n-i$。

若令 $D(i)$、$-L(i)$ 和 $-U(i)$ 分别为 $P(i)A$ 的对角严格下三角和严格上三角矩阵，则 $P(i)A=D(i)-L(i)-U(i)$。假设 $D(i)-L(i)$ 非奇异，则预条件方程组(7)的AOR迭代矩阵为：

$$L_{\gamma,\omega}(i)=[D(i)-\gamma L(i)]^{-1}[(1-\omega)D(i)+(\omega-\gamma)L(i)+\omega U(i)],i\in S \tag{9}$$

这里 $\omega,\gamma\in[0,2),(\omega\neq0)$ 是松弛因子。

若对任意的 $j=1,2,\cdots,n-i,\alpha_j=0$，则式(6)中定义的预条件子 $P(i)$ 是 n 阶单位阵，因而式(9)中的 $L_{\gamma,\omega}(i)$ 即为标准AOR迭代矩阵。

本文给出了严格对角占优Z-矩阵的预条件AOR迭代法（带有预条件子 $P(i),i\in S$，简记为PAOR）收敛性分析，并提出了多级预条件AOR迭代法（简记MPAOR），详细研究了这些方法的收敛性。数值算例验证了相关结论，这些预条件子的确提高了原迭代的收敛速度。

2　定义及引理

本文令 I 表示单位矩阵，$\rho(A)$ 表示矩阵 A 的谱半径。对向量 $x\in\mathrm{R}^n$，令 $x\geqslant0(x>0)$ 表示 x 是非负的（正的），即 x 的每个分量都是非负的（正的）。对向量 x，$y\in\mathrm{R}^n$，令 $x\geqslant y(x>y)$ 表示 $x-y\geqslant0(x-y>0)$。对矩阵也有类似的约定。

定义1　矩阵 $A=(a_{ij})\in\mathrm{R}^{n\times n}$ 被称为：

（1）Z-矩阵，如果对任意的 $i\neq j,a_{ij}\leqslant0$。

（2）L-矩阵，如果 A 是Z-矩阵且对任意的 $i=1,2,\cdots,n,a_{ii}>0$。

（3）M-矩阵，如果 $A=sI-B$，其中 $B\geqslant0$ 且 $\rho(B)\leqslant s$。

（4）严格对角占优矩阵，如果对任意的 $i=1,2,\cdots,n$ 均有 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$。

显然，严格对角占优的L-矩阵 A 一定是非奇异M-矩阵，因此 $A^{-1}\geqslant0$。

定义2　设 A 是实方阵，称分裂 $A=M-N$ 为：

（1）正规的，如果 $M^{-1}\geqslant0$ 且 $N\geqslant0$。

（2）弱正规的（第一型弱非负的），如果 $M^{-1}\geqslant0$ 且 $M^{-1}N\geqslant0$。

（3）第二型弱非负的，如果 $M^{-1}\geqslant0$ 且 $NM^{-1}\geqslant0$。

一般地，正规分裂 $\Rightarrow$ 两种类型的弱非负分裂。反之，则不对。

引理1[7] 设 A 是满足 $A^{-1}\geqslant 0$ 的非奇异矩阵。

（1）如果 $A=M-N$ 是弱非负分裂（第一型或第二型），那么 $\rho(M^{-1}N)<1$。

（2）如果 $A=M-N$ 是第二型弱非负分裂，那么存在向量 $x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$ 使得 $M^{-1}Nx=\rho(M^{-1}N)x$ 且 $Ax\geqslant 0$，同时 $Nx\geqslant 0$ 且 $Nx\neq 0$。

引理2[8] 设 $A_1,A_2\in\mathrm{R}^{n\times n},A_i=M_i-N_i,i=1,2$ 是非负分裂。如果Perron向量 $x_2\geqslant 0$ 且 $x_2\neq 0$（对应于 $\rho(T_2)$ 的向量 x_2）满足 $T_1x_2\leqslant T_2x_2$，那么 $\rho(T_1)\leqslant\rho(T_2)$，其中 $T_i=M_i^{-1}N_i,i=1,2$。

引理3[20] 设 $A\in\mathrm{R}^{n\times n}$ 是非负矩阵，那么：

（1）$\rho(A)$ 是 A 的一个特征值，如果 A 是不可约的，那么 $\rho(A)>0$。

（2）对特征值 $\rho(A)$ 存在相应的特征向量 $x\geqslant 0$，且 $x\neq 0$，被称为Perron向量，如果矩阵 A 不可约，那么 $x>0$。

引理4[20-21] 设 A 是非负矩阵。

（1）如果存在向量 $x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$，使得 $\alpha x\leqslant Ax$，那么 $\alpha\leqslant\rho(A)$。

（2）如果 A 不可约，并且存在向量 $x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$ 使得 $\alpha x\leqslant Ax\leqslant\beta x$，且等号不成立，那么 $\alpha<\rho(A)<\beta$ 且 $x>0$。

（3）$\alpha>\rho(A)$ 当且仅当 $\alpha I-A$ 非奇异且 $(\alpha I-A)^{-1}\geqslant 0$。

3　预条件AOR方法的收敛性分析

下面分两部分对预条件AOR迭代法的收敛性展开具体讨论。

3.1　严格对角占优Z-矩阵的PAOR迭代法

令 $(\cdot)_D$、$(\cdot)_L$ 和 $(\cdot)_U$ 分别表示矩阵 $(\cdot)$ 相应的对角、严格下三角和严格上三角矩阵。设 $P(i)=I+S(i),i\in S$，考虑 $P(i)A$ 的AOR分裂：

$$\begin{aligned}P(i)A=&(I+S(i))(I-L-U)=\\&[I-(S(i)L)_D-\gamma L-\gamma(S(i)L)_L]/\omega-\\&[(1-\omega)(I-(S(i)L)_D)+(\omega-\gamma)(L+(S(i)L)_L)+\\&\omega(U-S(i)+(S(i)L)_U+S(i)U)]/\omega=\\&M(i)-N(i)\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $M(i)=[I-(S(i)L)_D-\gamma L-\gamma(S(i)L)_L]/\omega$，$N(i)=M(i)-P(i)A$，因此 $P(i)A$ 的AOR迭代矩阵为 $L_{\gamma,\omega}(i)=M(i)^{-1}N(i)$。

引理5 若 $A=(a_{jk})\in\mathrm{R}^{n\times n}$ 是对角线元素为1的不可约严格对角占优Z-矩阵，则当 $\alpha_j\in[0,1),j=1,2,\cdots,n-i$ 时，$P(i)A,i\in S$ 也是不可约严格对角占优Z-矩阵。

证明 首先证明 $P(i)A,i\in S$ 是严格对角占优Z-矩阵。令 $B=P(i)A=(b_{jk})\in\mathrm{R}^{n\times n}$，则对任意的 $j=1,2,\cdots,n-i$，$k=1,2,\cdots,n$ 且 $j\neq k$，$b_{jj}=1-\alpha_j a_{j,i+j}a_{i+j,j}>1-\alpha_j\geqslant 0$ 而 $b_{jk}=a_{jk}-\alpha_j a_{j,i+j}a_{i+j,k}\leqslant 0$。因而 $P(i)A$ 是L-矩阵，且由 $\sum_{k=1}^{n}a_{jk}>0,\sum_{k=1}^{n}a_{i+j,k}>0$ 和 $a_{j,i+j}\leqslant 0$ 可知：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}b_{jk}=&\sum_{k=1}^{n}(a_{jk}-\alpha_j a_{j,i+j}a_{i+j,k})=\\&\sum_{k=1}^{n}a_{jk}-\alpha_j a_{j,i+j}\sum_{k=1}^{n}a_{i+j,k}>0\end{aligned}$$

进而 $P(i)A$ 是严格对角占优Z-矩阵。

下面证明 $P(i)A,i\in S$ 不可约。显然：

$$\begin{aligned}P(i)A=&(I+S(i))(I-L-U)=\\&I-L-U+S(i)-S(i)L-S(i)U=\\&(I-(S(i)L)_D)-(L+(S(i)L)_L-\\&(U-S(i)+(S(i)L)_U+S(i)U)\end{aligned}\tag{11}$$

令 $F=U-S(i)=(f_{jk}),E=L+(S(i)L)_L=(e_{jk}),L=(l_{jk}),U=(u_{jk})$，则由 $P(i)$ 的定义可知：

$$\begin{cases}f_{jk}=u_{jk}-\alpha_j u_{jk},当1\leqslant j\leqslant n-i且k-j=i时\\f_{jk}=u_{jk},当k>j且k-j\neq i时\\f_{jk}=0,当k\leqslant j时\end{cases}$$

因此，若 $u_{jk}\neq 0$，则对 $j=1,2,\cdots,n-i$，$\alpha_j\in[0,1)$，$f_{jk}\neq 0$；若 $l_{jk}\neq 0$，则由 $(S(i)L)_L\geqslant 0$ 可知 $e_{jk}\neq 0$，再由 $(S(i)L)_U\geqslant 0$ 和 $S(i)U$ 的非负性，容易得到当 $\alpha_j\in[0,1)$，$j=1,2,\cdots,n-i$ 时，$P(i)A$ 是不可约的。

由引理5，分裂（10）是正规的，从而由引理1（1）可知，该分裂是收敛的。

定理1 设 A 是对角线元素均为1的严格对角占优Z-矩阵，$L_{\gamma,\omega}$ 和 $L_{\gamma,\omega}(i)\ (i\in S)$ 分别是由式（5）和（9）定义的矩阵 A 的AOR和预条件AOR迭代矩阵，且 $0\leqslant\gamma\leqslant\omega\leqslant 1(\omega\neq 0)$，则对任意的 $\alpha_j\in[0,1],j=1,2,\cdots,n-i$，均有：

$$\rho(L_{\gamma,\omega}(i))\leqslant\rho(L_{\gamma,\omega})<1$$

证明 因为 $A=(I-\gamma L)/\omega-[(1-\omega)I+(\omega-\gamma)L+\omega U]/\omega$ 是正规分裂，所以由引理1知 $\rho(L_{\gamma,\omega})<1$，且在向量 $x\geqslant 0\ (x\neq 0)$，使得 $L_{\gamma,\omega}x=\rho(L_{\gamma,\omega})x$ 并且 $Ax\geqslant 0$。因此：

$$P(i)Ax=(I+S(i))Ax=Ax+S(i)Ax\geqslant Ax\geqslant 0$$

由 $S(i)L\geqslant 0$ 可知：

$$M(i)=[I-(S(i)L)_D-\gamma(L+(S(i)L)_L)]/\omega\leqslant(I-\gamma L)/\omega$$

又 $(I-\gamma L)^{-1}\geqslant 0$ 且 $(M(i))^{-1}\geqslant 0$，故 $(M(i))^{-1}\geqslant\omega(I-\gamma L)^{-1}$，因而：

$$\begin{aligned}&(I-\gamma L)^{-1}[(1-\omega)I+(\omega-\gamma)L+\omega U]x=\rho(L_{\gamma,\omega})x=\\&\quad x-\omega(I-\gamma L)^{-1}Ax\geqslant x-(M(i))^{-1}Ax\geqslant\\&\quad x-(M(i))^{-1}P(i)Ax=(I-(M(i))^{-1}P(i)A)x=\\&\quad (M(i))^{-1}N(i)x\end{aligned}\tag{12}$$

从而，由 $(M(i))^{-1}N(i)\geqslant 0$ 及引理2可知 $\rho(L_{\gamma,\omega}(i))\leqslant\rho(L_{\gamma,\omega})<1$。

注1 (1)定理1表明当 $0\leqslant\gamma\leqslant\omega\leqslant 1(\omega\neq 0)$ 时，严格对角占优Z-矩阵的预条件AOR迭代法是收敛的，且无需条件 $\rho(L_{\gamma,\omega})<1$，对任意的 $i\in S$，均有 $\rho(L_{\gamma,\omega}(i))\leqslant\rho(L_{\gamma,\omega})<1$ 成立。

(2)在定理1中，选择特殊的 ω 和 γ 即可得到，当 A 为严格对角占优Z-矩阵时，对任意的 $i\in S$ 均有 $\rho(L_{\omega}(i))\leqslant\rho(L_{\omega})<1$，$\rho(G(i))\leqslant\rho(G)<1$ 且 $\rho(J(i))\leqslant\rho(J)<1$，这里 L_{ω}、G、J 和 $L_{\omega}(i)$、$G(i)$、$J(i)$ 分别为 A 的SOR、Gauss-Seidel和Jacobi迭代矩阵以及相应的预条件迭代矩阵。

定理2 设 A 是对角元素为1的不可约严格对角占优L-矩阵，$L_{\gamma,\omega}$ 和 $L_{\gamma,\omega}(i)\,(i\in S)$ 分别是由式(5)和(9)定义的矩阵 A 的AOR和预条件AOR迭代矩阵，且 $0\leqslant\gamma\leqslant\omega\leqslant 1(\omega\neq 0,\gamma\neq 1)$，则对任意的 $\alpha_j\in[0,1),j=1,2,\cdots,n-i$ 且 α_j 不全为0，均有 $\rho(L_{\gamma,\omega}(i))<\rho(L_{\gamma,\omega})<1$。

证明 由式(5)和引理4(3)可知下面的等式成立：

$$L_{\gamma,\omega}=(1-\omega)I+\omega(1-\gamma)L+\omega U+T$$

其中 $T\geqslant 0$。因为 A 不可约，所以当 $0\leqslant\gamma\leqslant\omega\leqslant 1(\omega\neq 0,\gamma\neq 1)$ 时，$(1-\omega)I+\omega(1-\gamma)L+\omega U$ 也不可约。又 $T\geqslant 0$，容易得到 $L_{\gamma,\omega}$ 不可约。

由引理5知当 $\alpha_j\in[0,1),\ j=1,2,\cdots,n-i$ 时，$P(i)A$ 是不可约严格对角占优L-矩阵，因而 $M(i)$ 非奇异，$L_{\gamma,\omega}(i)$ 是定义好的，与上面类似可证 $L_{\gamma,\omega}(i)$ 不可约。

由引理1的证明过程可知，存在向量 $x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$ 使得 $(M(i))^{-1}N(i)x\leqslant\rho(L_{\gamma,\omega})x$（见式(12)）。从而，由 α_j 不全为0，$j=1,2,\cdots,n-i$ 及引理4(2)可得 $\rho(L_{\gamma,\omega}(i))<\rho(L_{\gamma,\omega})<1$。

由定理2，类似的结论对SOR和Jacobi迭代法也成立，这里不再列出。

3.2 严格对角占优Z-矩阵的MPAOR迭代法

本节讨论多级预条件AOR方法。

显然，可将预条件子 $P(i),i=1,2,\cdots,n-1$，逐步应用于方程组。对任意的 $i\in S$，令 $U(i)=P(i)\cdots P(1)$，用 $U(i)$ 左乘以方程组(1)可得：

$$U(i)Ax=U(i)b \tag{13}$$

该方程组等价于(1)。因而方程组(1)的多级预条件AOR迭代法，即方程组(13)的AOR迭代法可由如下的迭代格式定义：

$$x^{(k+1)}=\hat{L}_{\gamma,\omega}x^{(k)}+\omega[\hat{D}(i)-\gamma\hat{L}(i)]^{-1}b,k=0,1,\cdots$$

这里 $\hat{L}_{\gamma,\omega}(i)=[\hat{D}(i)-\gamma\hat{L}(i)]^{-1}[(1-\omega)\hat{D}(i)+(\omega-\gamma)\hat{L}(i)+\omega\hat{U}(i)]$ 是多级预条件AOR迭代矩阵；$\hat{D}(i)$、$-\hat{L}(i)$ 和 $-\hat{U}(i)$ 分别是矩阵 $U(i)A$ 对应的对角、严格下三角和严格上三角矩阵。

为了方便，记 $Q(i)=[D(i)]^{-1}$，且对任意的 $i=2,3,\cdots,n-1$，$B(i)=P(i)B(i-1)Q(i)$，而 $B(1)=P(1)AQ(1)$，则式(13)可转化为如下等价形式：

$$\begin{cases}B(1)=P(1)AQ(1)\\ B(i)=P(i)B(i-1)Q(i),\ i=2,3,\cdots,n-1\\ P(i)B(i-1)y(i-1)=U(i)b,\ i=2,3,\cdots,n-1\\ y(i-1)=Q(i)y(i),\ x=Q(1)y(1)\end{cases}$$

将AOR迭代法应用于方程组：

$$\begin{cases}B(i)y(i)=U(i)b\\ y(i-1)=Q(i)y(i),\ i=2,3,\cdots,n-1\\ x=Q(1)y(1)\end{cases}$$

容易得到 $\tilde{L}_{\gamma,\omega}(i)=\hat{L}_{\gamma,\omega}(i)$，这里 $\tilde{L}_{\gamma,\omega}(i)$ 是上述方程组的AOR迭代矩阵。

基于引理5和定理1、定理2的分析，容易得到关于多级预条件AOR迭代法的如下结论。

定理3 设 A 是对角线元素均为1的严格对角占优Z-矩阵，$L_{\gamma,\omega}$ 和 $\hat{L}_{\gamma,\omega}(i),(i=1,2,\cdots,n-1)$ 分别是矩阵 A 的AOR和多级预条件AOR迭代矩阵，且 $0\leqslant\gamma\leqslant\omega\leqslant 1(\omega\neq 0)$，则对任意的 $\alpha_j\in[0,1],j=1,2,\cdots,n-i$，均有：

$$\rho(\hat{L}_{\gamma,\omega}(n-1))\leqslant\rho(\hat{L}_{\gamma,\omega}(n-2))\leqslant\cdots\leqslant\rho(\hat{L}_{\gamma,\omega}(1))\leqslant\rho(L_{\gamma,\omega})<1$$

证明 由引理5可知，对任意的 $i\in S$，$U(i)A$ 均为严格对角占优Z-矩阵。因为方程组 $U(n-1)Ax=U(n-1)b$ 可以通过对 $Ax=b$ 依次左乘 $P(i),i=2,3,\cdots,n-1$ 得到，所以由定理1知，对任意的 $i=1,2,\cdots,n-1$ 均有 $\rho(\hat{L}_{\gamma,\omega}(i))\leqslant\rho(\hat{L}_{\gamma,\omega}(i-1))$，其中 $\hat{L}_{\gamma,\omega}(0)=L_{\gamma,\omega}$，故：

$$\rho(\hat{L}_{\gamma,\omega}(n-1))\leqslant\rho(\hat{L}_{\gamma,\omega}(n-2))\leqslant\cdots\leqslant\rho(\hat{L}_{\gamma,\omega}(1))\leqslant\rho(L_{\gamma,\omega})<1$$

注2 (1)定理3表明对任意的 $j=1,2,\cdots,n-i$，当 $\alpha_j\in[0,1]$ 时，严格对角占优Z-矩阵的多级预条件子能够逐步加快AOR迭代法的收敛速度。

(2)在定理3中选择特殊的参数可得类似的结论对SOR、Gauss-Seidel和Jacobi迭代法也同样成立。

定理4 设 A 是对角元素为1的不可约严格对角占优Z-矩阵，$L_{\gamma,\omega}$ 和 $\hat{L}_{\gamma,\omega}(i)(i=1,2,\cdots,n-1)$ 分别是 A 的AOR和多级预条件AOR迭代矩阵，且 $0\leqslant\gamma\leqslant\omega\leqslant 1(\omega\neq 0,\gamma\neq 1)$，则对任意的 $\alpha_j\in[0,1),j=1,2,\cdots,n-i$ 且 α_j 不全为0，均有：

$$\rho(\hat{L}_{\gamma,\omega}(n-1))<\rho(\hat{L}_{\gamma,\omega}(n-2))<\cdots<\rho(\hat{L}_{\gamma,\omega}(1))<\rho(L_{\gamma,\omega})<1$$

4 数值算例

考虑具有Dirichlet边界条件的二维对流扩散方程：

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}+\xi\dfrac{\partial u}{\partial t_1}-\dfrac{\partial u}{\partial t_2}+4\sigma u=f(t_1,t_2),(t_1,t_2)\in\Omega\\ u(t_1,t_2)=0,(t_1,t_2)\in\partial\Omega\end{cases} \tag{14}$$

其中，$\Omega=(0,1)\times(0,1)$；ξ 和 σ 是常数；$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界；$f(t_1;t_2):\Omega\to R^1$ 是给定的函数。令步长为 $h=\dfrac{1}{N+1}$，使

表1　AOR及预条件AOR迭代法的迭代次数、CPU运行时间、谱半径及误差等

n	AOR				PAOR				MPAOR			
	IT	CPU	ρ	RES	IT	CPU	ρ	RES	IT	CPU	ρ	RES
36	19	0	0.765 2	0.004 0	17	0	0.727 8	0.003 0	14	0	0.691 9	0.003 8
64	33	0	0.848 0	0.002 1	27	0	0.820 2	0.002 4	24	0.031 3	0.793 1	0.002 0
100	49	0.062 5	0.894 5	0.001 6	41	0.031 3	0.873 9	0.001 6	35	0	0.853 5	0.001 6
144	70	0.031 3	0.922 9	0.001 1	58	0.031 3	0.907 2	0.001 1	50	0.031 3	0.891 6	0.001 1
256	122	0.281 3	0.953 9	6.72E－4	101	0.109 4	0.944 1	6.71E－4	86	0.109 4	0.934 3	6.77E－4
400	189	0.421 9	0.969 5	4.50E－4	156	0.359 4	0.962 8	4.53E－4	133	0.343 8	0.956 2	4.52E－4
576	272	1.109 4	0.978 3	3.18E－4	225	1.000 0	0.973 6	3.14E－4	191	0.953 1	0.953 1	3.20E－4

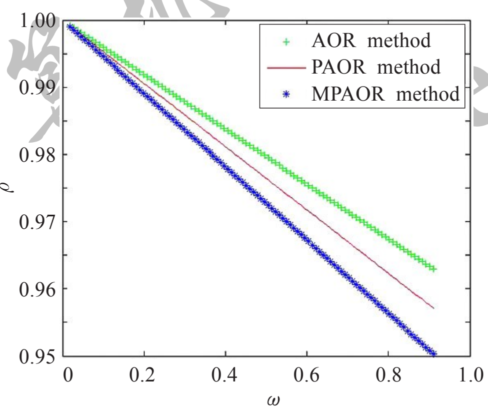

图1　（预条件）AOR迭代矩阵谱半径曲线

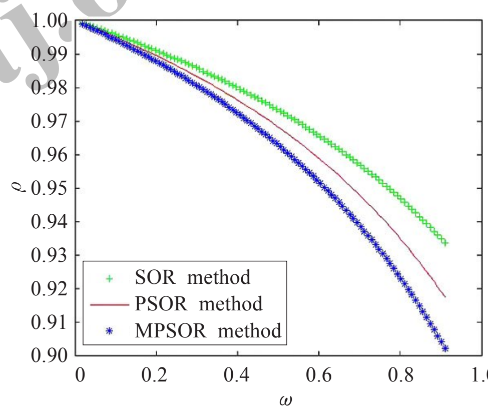

图2　（预条件）SOR迭代矩阵谱半径曲线

用五点差分格式将方程（14）离散化，得到系数矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} T & \mu_2 \boldsymbol{I} & & & \\ \eta_2 \boldsymbol{I} & T & \mu_2 \boldsymbol{I} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \eta_2 \boldsymbol{I} & T & \mu_2 \boldsymbol{I} \\ & & & \eta_2 \boldsymbol{I} & T \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^{n\times n}$$

这里 $n=N^2$，T 是 $N\times N$ 是三对角矩阵，即 $T=\mathrm{tridiag}(\eta_1,\mu_0,\mu_1)$，其中：

$$\mu_0=4(1+\sigma h^2),\mu_1=-(1-\frac{1}{2}\xi h),\mu_2=-(1-\frac{1}{2}\zeta h)$$

$$\eta_1=-(1+\frac{1}{2}\xi h),\eta_2=-(1+\frac{1}{2}\zeta h)$$

显然当 ξ、ζ 和 σ 取不同值时，会得到不同矩阵。

令初始向量为零向量，迭代终止条件为：

$$RES=\frac{\left\|b-Ax^{(k)}\right\|_2}{\left\|b\right\|_2}\leqslant\varepsilon$$

其中 $\varepsilon=h^2/5$，而 b 是使得线性方程组的精确解为 $(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^n$ 的向量。

在此方程组中，令 $\xi=\zeta=\sigma=0$，并分别应用AOR迭代法、预条件AOR迭代法（PAOR）及多级预条件AOR迭代法（MPAOR）求解。在表1中，令 ρ 表示相应迭代矩阵的谱半径。对任意的 $j,\alpha=\alpha_j=0.5,\omega=0.9,\gamma=0.7$。

以下实验均使用MATLAB程序完成。

由表1可见，无论是迭代次数、求解速度，还是谱半径，PAOR方法明显优于AOR迭代法，而MPAOR迭代法则是这三种方法中收敛最快的方法。该例表明，相比标准的AOR迭代法，预条件AOR迭代法较大地加快了方程的求解速度，而多级预条件AOR迭代法则可进一步提高预条件方法的收敛速度。

图1和图2分别是相应的AOR和SOR迭代法的谱半径曲线。图1给出了当 $\gamma=0.01,\omega\in(0.01,1)$ 时，AOR、PAOR和MPAOR迭代法的谱半径曲线。图2给出了当 $\omega\in(0.01,1)$ 时，SOR、PSOR和MPSOR迭代法的谱半径曲线。

由图1可见，文中迭代法谱半径由小到大的排列顺序依次为MPAOR、PAOR和AOR，由图2可见，类似的结果对相应的（预条件）SOR迭代法也成立。

参考文献：

[1] Snyder J L.Modified iterative methods for consistent linear systems[J].Linear Algebra and Its Applications，1991，154/156：123-143.

[2] Kohno T，Kotakemori H，Niki H，et al.Improving the modified Gauss-Seidel method for Z-matrices[J].Linear Algebra and Its Applications，1997，267（1）：113-123.

[3] Li C，Evans D J.Improving the SOR method[J].International Journal of Computer Mathematics，1994，54（3/4）：207-213.

[4] Kotakemori H，Niki H，Okamoto N.Accelerated iterative method for Z-matrices[J].Journal of Computational and Applied Mathematics，1996，75（1）：87-97.

[5] Usui M，Niki H，Kohno T.Adaptive Gauss-Seidel method for linear systems[J].International Journal of Computer

Mathematics,1994,51(1/2):119-125.
[6] Evans D J,Martins M M,Trigo M E.The AOR iterative method for new preconditioned linear systems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2001, 132(2):461-466.
[7] Li J C,Li W.The optimal preconditioner of strictly diagonally dominant Z-matrix[J].Acta Mathematicae Applicatae Sinica English,2008,24(2):305-312.
[8] Hadjidimos A,Noutsos D,Tzoumas M.More on modifications and improvements of classical iterative schemes for M-matrices[J].Linear Algebra and Its Applications, 2003,364(3):253-279.
[9] Bai Z Z,Chen F,Wang Z Q.Additive block diagonal preconditioning for block two-by-two linear systems of skew-Hamiltonian coefficient matrices[J].Numerical Algorithms,2013,62(4):655-675.
[10] Gander M J,Loisel S,Szyld D B.An optimal block iterative method and preconditioner for banded matrices with applications to PDEs on irregular domains[J].SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,2012,33(2): 653-680.
[11] Zhang Y,Huang T Z,Liu X P.Modified iterative methods for nonnegative matrices and M-matrices linear systems[J]. Computers and Mathematics with Applications,2005,50 (10):1587-1602.
[12] Wang L,Song Y.Preconditioned AOR iterative methods for M-matrices[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2009,226(1):114-124.
[13] Xue Q F,Gao X B,Liu X G.Comparison theorems for a class of preconditioned AOR iterative methods[J]. Journal of Mathematics,2014,34(3):448-460.
[14] Sun L Y.A comparison theorem for the SOR iterative method[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2005,181(2):336-341.
[15] Yun J H.A note on the improving modified Gauss-Seidel (IMGS) method[J].Applied Mathematics and Computation,2007,184(2):674-679.
[16] Li Y T,Li C X,Wu S L.Improving AOR method for consistent linear systems[J].Applied Mathematics and Computation,2007,186(1):379-388.
[17] Niki H,Harada K,Morimoto M,et al.The survey of preconditioners used for accelerating the rate of convergence in the Gauss-Seidel method[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2004,164/165(1): 587-600.
[18] Li W,Sun W.Modified Gauss-Seidel type methods and Jacobi type methods for Z-matrices[J].Linear Algebra and Its Applications,2007,317(1):227-240.
[19] Hadjidimos A.Accelerated overrelaxation method[J].Mathematics of Computation,1978,32(141):149-157.
[20] Varga R S.Matrix iterative analysis[M].Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall,Inc,1962.
[21] Berman A,Plemmons R J.Nonnegative matrices in the mathematical sciences[M].Philadelphia:SIAM Press,1994.
[22] Naumov M.Preconditioned block iterative methods on GPUs[J].PAMM,2012,12(1):11-14.
[23] Meng G Y.A practical asymptotical optimal SOR method[J].Applied Mathematics and Computation,2014, 242:707-715.

(上接第50页)

[13] Van Der Werf J,Van Dongen B,Hurkens C,et al.Process discovery using integer linear programming[C]// International Conference on Applications and Theory of Petri Nets.Berlin,Heidelberg:Springer,2008:368-387.
[14] Leemans S,Fahland D,Van Der Aalst W.Discovering block-structured process models from event logs-a constructive approach[C]//International Conference on Applications and Theory of Petri Nets and Concurrency.Berlin,Heidelberg:Springer,2013:311-329.
[15] Lekić J,Milićev D.Discovering block-structured parallel process models from causally complete event logs[J].Journal of Electrical Engineering,2016,67(2): 111-123.
[16] Wang L,Du Y Y,Liu W.Aligning observed and modeled behavior based on workflow decomposition[J]. Enterprise Information Systems,2017,11(8):1207-1227.
[17] 祁宏达,杜玉越,刘伟.一种高精确度的过程模型修复方法[J].计算机集成制造系统,2017,23(5):931-940.
[18] Du Y Y,Qi L,Zhou M C.Analysis and application of logical Petri nets to e-commerce systems[J].IEEE Transactions on Systems,Man,and Cybernetics:Systems,2014, 44(4):468-481.
[19] Du Y Y,Qi L,Zhou M C.A vector matching method for analysing logic Petri nets[J].Enterprise Information Systems,2011,5(4):449-468.
[20] Sun Y N,Du Y Y,Li M Z.A repair method of workflow models based on mirroring matrixes[J].International Journal of Parallel Programming,2017,45(4):1001-1020.