DOI:10.13695/j.cnki.12-1222/o3.2012.04.003



**文章编号：**1005-6734(2012)04-0405-05

# 可观测度的探讨及其在捷联惯导系统可观测性分析中的应用

杨晓霞，阴玉梅

（中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所，长春 100033）

**摘要：**可观测度是为了分析线性系统中组合状态的可观测程度而提出来的，在卡尔曼滤波的滤波效果分析中得到了应用。文中先对已有的两种可观测度分析方法进行了简述，并且分析了两种方法的等价性；然后从理论上分析了此描述方法的不全面性。通过典型例子说明了理论分析的结果，给出了一种更全面的描述系统可观测组合状态可观测度的方法，并且用新的描述方式分析了捷联惯导系统的各状态可观测度。结果表明，该数值刻画方式能够定量的给出系统状态可观测的程度，是解析分析方法的很好的补充。

**关 键 词：**可观测度；捷联惯导系统；可观测组合状态；特征值；特征向量

**中图分类号：**U666.1 **文献标志码：**A

# Discussions on observability and its applications in SINS

YANG Xiao-xia, YIN Yu-mei

(Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

**Abstract:** The degree of observability was proposed to analyze the observable degree of the combined states of linear systems. It was applied in the analysis of the efficacy of the Kalman filter. Two existed methods for calculating the degree of observability were introduced, and the equivalence of the two methods was proved. The deficiencies of the existed methods were analyzed from a theoretical perspective, and a typical example was given to verify the theoretical results. A new method to determine the degree of observability of the combined states was given which was more comprehensive than that of the existed ones. In the end, the new method was applied to the observability analysis of strapdown inertial navigation systems. The results demonstrate that the new method can quantify the observable degree of the states of the system and is a great complement to the analytic method.

**Key words:** degree of observability; SINS; observable combined states; eigenvalue; eigenvector

系统状态的估计效果与系统的可观测性之间有着密切的联系，可观测性就是根据系统$[0,t]$上的已知输入输出是否能够唯一确定系统的初始状态，一旦系统的初始状态确定，就可以根据系统方程来确定系统任一时刻的状态值。对于线性定常系统，通常使用可观测矩阵的秩来判断系统的可观测性，若可观测矩阵是列满秩的，则系统是完全可观测的，否则系统是不完全可观测的。因此，关于系统的可观测性，可观测矩阵的秩只是给出了一个“是”或“否”的定性的回答，那么有没有一种定量的方式来刻画系统的可观测性呢？文献[1-3]等给出了基于可观测矩阵的奇异值或特征值来求状态可观测度的方法。文献[4]通过反例证明出当利用奇异值分解来进行系统状态可观测度分析时，由于状态空间坐标系的拉伸变换不具有不变性，在利用变量代换方法进行无量纲化处理时，变换前后状态可观测度分析的结果不一致。文献[5]给出了一种基于分段线性定常系统（PWCS）的可观测度分析方法，用可观测阶数和相对可观测度两个指标对可观测

**收稿日期：**2012-04-09；**修回日期：**2012-07-11

**基金项目：**中国科学院三期创新基金资助项目

**作者简介：**杨晓霞（1984—），女，助理研究员，从事精密跟踪控制及系统辨识研究。E-mail：yxxair@163.com

性进行量化。

本文首先简单介绍已有的可观测度方法，进而从理论上对已有可观测度分析方法的合理性进行分析，总结出已有方法的不足，并且给出了能更全面刻画线性系统可观测组合状态可观测度的分析方法，从根本上分析了线性系统状态可观测度的具体意义。

## 1 已有可观测度方法简介

### 1.1 基于特征值的分析方法

首先介绍基于可观测矩阵特征值[1]来确定系统状态可观测度的方法，考虑线性定常系统如下：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \tag{1}$$

其中，$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$，$C \in \mathbf{R}^{n\times n}$，则系统的可观测矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}} & (CA)^{\mathrm{T}} & \cdots & (CA^{n-1})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

定义 $Q^{\mathrm{T}}Q$ 单位化后的特征值 $\lambda_i$ 为其特征向量所对应的状态向量或状态向量线性组合的观测度，此处单位化是指 $\lambda_i = \lambda_i/\lambda_{\max}$，$\lambda_{\max} = \max\{\lambda_i | i = 1,2,\cdots,n\}$。

**注 1**：上述方法中的单位化没有什么实质意义，只是将所有的特征值同除以一个最大特征值，特征值之间的数量级的差异没有任何改变。

### 1.2 基于奇异值的分析方法

本节介绍基于可观测矩阵奇异值来确定系统状态可观测度的方法，由于此种定义比较复杂，文献[2]给出了它的一种等价的定义：首先将可观测矩阵 $Q$ 进行奇异值分解得

$$Q = U\Sigma V^{\tau} \tag{3}$$

其中，$U = [u_1\ u_2 ... u_{pn}]$、$V = [v_1\ v_2 ... v_n]$ 分别是 $pn\times pn$ 维和 $n\times n$ 维正交矩阵，$\Sigma = \begin{bmatrix} S \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$，$S = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant ... \geqslant \sigma_n \geqslant 0$ 为 $Q$ 的奇异值。若 $v_i$ 的第 $k$ 个分量最大，则 $\sigma_i$ 就定义为状态 $x_k$ 的可观测度。

### 1.3 两种定义方式的等价性

事实上，上面两种定义方式本质上是等价的，为说明方便，记基于特征值分解的方法为方法一，基于奇异值分解的方法为方法二。由于

$$Q^{\mathrm{T}}Q = \left(U\Sigma V^{\tau}\right)^{\mathrm{T}} U\Sigma V^{\tau} = V\Sigma^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}U\Sigma V^{\tau} \tag{4}$$

又

$$U^{\tau}U = I \tag{5}$$

故

$$\begin{aligned} Q^{\mathrm{T}}Q &= V\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma V^{\tau} = VS^{\mathrm{T}}SV^{\mathrm{T}} = \\ & V\cdot \mathrm{diag}(\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2)\cdot V^{\mathrm{T}} = \\ & V\cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)\cdot V^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{6}$$

按方法一的定义，$\lambda_i = \sigma_i^2$ 即是 $v_i X$ 的可观测度；按方法二的定义，$\sigma_i$ 是 $v_i X$ 的可观测度。进一步，若 $v_i$ 的第 $k$ 个分量最大，则将 $\sigma_i$ 定义为 $x_k$ 的可观测度，可见两种定义方式本质上是等价的，只是一个用了特征值，另一个用了奇异值。

## 2 已有可观测度定义方法合理性分析

### 2.1 理论分析

记 $Z = [y^{\mathrm{T}}, \dot{y}^{\mathrm{T}} ..., (y^{(n-1)})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，则：

$$Q^{\mathrm{T}}Z = Q^{\mathrm{T}}QX = V\cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)\cdot V^{\mathrm{T}}X \tag{7}$$

两边同乘以 $V^{\mathrm{T}}$ 得：

$$V^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}Z = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)V^{\mathrm{T}}X = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1^{\mathrm{T}} X \\ \vdots \\ \lambda_n v_n^{\mathrm{T}} X \end{bmatrix} \tag{8}$$

所以 $\lambda_i$ 代表了 $v_i^{\mathrm{T}}X$ 在观测量中反映出来的系数，那么 $\lambda_i$ 越大，说明 $v_i^{\mathrm{T}}X$ 在观测量中反映的权重越大，当 $\lambda_i \to 0$ 时，说明状态组合 $v_i^{\mathrm{T}}X$ 在观测量中的权重很小，从这种意义上讲，它从某种程度上反映了组合状态 $v_i^{\mathrm{T}}X$ 的可观测程度。但是应该注意到，当 $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0$ 时，即使 $\lambda_i >> \lambda_j$ 也并不能说明 $\lambda_i$ 的可观测度远远大于 $\lambda_j$，因为它们之间是没有可比性的，这在后面的例子中会更进一步看清。

另一方面，作者在文献[3]中从系统方程出发直接计算出了可观测组合状态对应的系统量测量，并且指出可观测组合状态对应的系统量测量的最高阶导数越高，系统对该可观测组合状态的估计速度就会越慢，而且受观测噪声的影响程度会越大，这实际上就是文献[5]中给出的可观测阶数的概念。因此，要全面刻画组合状态 $v_i^{\mathrm{T}}X$ 的可观测度，还应该求得它对应的观测量 $v_i^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}Z$，其中向量 $Z$ 是由直接观测量 $y$ 和它的各阶导数组成的。

另外，由于状态向量 $X$ 代表系统的状态，它的各个分量之间的量纲和数量级可能差别很大，比如在捷联惯性导航系统中姿态误差角(rad)和速度误差(m/s)

都作为状态分量，但是他们的数量级之间是有很大差别的，因此对于组合状态 $\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$，即使 $\boldsymbol{v}_i$ 的第 $k$ 个分量最大，$\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 并不一定主要反映 $\boldsymbol{x}_k$ 的信息，因为系数小的 $\boldsymbol{X}$ 的分量可能本身的数量级比 $\boldsymbol{x}_k$ 大很多。所以说，方法二中确定 $\boldsymbol{x}_k$ 的方法只能在系统的状态各分量数量级相近的情况下才适用。

### 2.2 典型例子

为了对前面的理论分析有一个更直观的了解，下面举一个简单直观的例子来说明。为此考虑如下系统：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{X} \end{cases}, \quad (a \neq 0, c_1 \neq 0, c_2 \neq 0) \tag{9}$$

从系统的量测方程可以直接得出：

$$x_1 = \frac{y_1}{c_1}; \quad x_2 = \frac{y_2}{c_2} \tag{10}$$

因此，只要，$c_1 \neq 0,\ c_2 \neq 0$，状态 $x_1$、$x_2$ 都是可以由直接观测量求得的，而且可观测度是一样的。又由于

$$x_3 = \frac{\dot{x}_1}{a} = \frac{y_1}{ac_1} \tag{11}$$

即 $x_3$ 是由观测量的一阶导数求得的，因此它的可观测度肯定低于 $x_1$、$x_2$。

另一方面，按照基于可观测矩阵特征值的方法求系统状态的可观测度，系统的可观测矩阵为

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & ac_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} c_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2c_1^2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

因此 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$ 的特征值是 $\lambda_1 = c_1^2,\ \lambda_2 = c_2^2,$，$\lambda_3 = a^2c_1^2$，相应特征向量是

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

所以按基于可观测矩阵特征值求系统状态可观测度的方法 $x_1$ 的可观测度是 $\lambda_1 = c_1^2$，$x_2$ 的可观测度是 $\lambda_2 = c_2^2$，$x_3$ 的可观测度是 $\lambda_3 = a^2c_1^2$。可以看出，若 $c_1 >> c_2$，则结论是 $x_1$ 的可观测度远大于 $x_2$ 的可观测度；若 $a > 1$，则 $x_3$ 的可观测度大于 $x_1$ 的可观测度。这些结果与前面的直接分析方法给出的结论是有差异的，作者认为仅通过特征值的大小来定义组合状态的可观测度的方法是不全面的。

事实上，特征值 $\lambda_i$ 的大小可以反映同一个状态在不同情况下可观测度的大小。例如在状态方程不变的前提下，增大参数 $a$ 的取值可以提高状态 $x_3$ 的观测效果，即状态 $x_3$ 的可观测度提高，但是仅通过不同状态对应特征值大小的比较并不能全面反映不同状态分量之间可观测度的大小。基于以上分析，第 3 节将给出一种更全面的比较系统组合状态可观测度的方法。

## 3 判断系统组合状态可观测度的方法

确定系统的可观测度可以按以下步骤进行：

1）确定零特征值对应的组合状态 $\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{X}$，这些组合状态是完全不可观测的。

2）对于非零特征值 $\lambda_i$ 对应的状态组合 $\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{X}$，若 $\lambda_i \to 0$，则可以确定 $\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{X}$ 的可观测度低。

3）若 $\lambda_i \neq 0$，则根据 $\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{X}$ 对应的观测量导数的最高阶数 $\beta_i$ 来确定它的可观测度，$\beta_i$ 越大，该组合状态的可观测度越低，反之可观测度越高，其中 $\beta_i$ 可由 $(\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z})_i$ 来确定，$(\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z})_i$ 代表向量 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}$ 的第 $i$ 个分量。

**注 2:** 以上确定可观测度的方法都是针对组合状态 $\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{X}$ 进行的，并不能简单地通过找出特征向量 $\boldsymbol{v}_i$ 中最大的分量后就将 $\{\lambda_i, \beta_i\}$ 看作该最大分量对应的状态向量的可观测度描述，这是因为各个状态变量之间的量纲差异很大，因此组合状态并不一定主要反映系数最大状态分量的信息。

## 4 捷联惯性导航系统状态可观测度分析

本节根据一个典型的捷联惯性导航系统的例子来进一步理解上面的分析。捷联惯性导航系统静基座下的系统误差方程为[3]：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} \\ \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{HX} \end{cases} \tag{13}$$

其中状态向量为：

$$\boldsymbol{X} = [\delta\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \quad \delta\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{\varepsilon}^p)^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{\Delta}^p)^{\mathrm{T}}]_{15\times1}^{\mathrm{T}},$$

$\delta\boldsymbol{V} = [\delta V_N\ \delta V_W\ \delta V_U]^{\mathrm{T}}$ 是速度误差向量，$\delta\boldsymbol{P} = [\delta L\ \delta\lambda\ \delta h]^{\mathrm{T}}$ 是位置误差向量，$\boldsymbol{\phi} = [\phi_N\ \phi_W\ \phi_U]^{\mathrm{T}}$ 是姿态误差向量，观测向量为速度误差和位置误差，即 $\boldsymbol{Z} = [\delta\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \quad \delta\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}^p$、$\boldsymbol{\Delta}^p$ 分别是陀螺和加表测量误差

在导航系中的等效值，系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的具体形式见文献[3]。下面对系统的各状态（或组合状态）的可观测度进行分析。

首先写出系统的可观测矩阵：

$$\boldsymbol{Q}=\left[\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\ (\boldsymbol{HA})^{\mathrm{T}}\cdots(\boldsymbol{HA}^{14})^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

对 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$ 做特征值分解得：

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{VDV}^{T} \tag{15}$$

其中，$\boldsymbol{D}$ 是由 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$ 的特征值组成的对角矩阵，$\boldsymbol{V}$ 的各列是对应的特征向量，它们的具体形式见表 1。

根据表 1 可以得出与各特征值对应的组合状态 $\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 如表 2 所示。

表 1　特征值与特征向量

**Tab.1　Eigenvalues and eigenvectors**

| | 特征值 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 | 4e-7 |
| 特征向量 | -1.0E-01 | 2.0E-02 | -1.5E-05 | 5.0E-11 |
| | -2.0E-02 | -1.0E-01 | -2.8E-05 | 6.6E-07 |
| | -2.0E-04 | -2.4E-04 | 1.0 | -1.1E-12 |
| | 8.0E-17 | 1.0E-16 | 1.3E-16 | 2.1E-21 |
| | -6.9E-16 | 1.0E-15 | -3.9E-18 | -3.3E-14 |
| | 9.9E-17 | -7.6E-17 | 2.1E-19 | -1.4E-17 |
| | -8.5E-17 | 4.9E-17 | 1.4E-17 | 2.5E-11 |
| | 4.2E-16 | -1.4E-17 | -1.8E-17 | 6.2E-23 |
| | -1.9E-16 | -1.7E-15 | -6.9E-17 | -3.0E-23 |
| | -6.8E-07 | -3.4E-06 | -9.7E-10 | 6.7E-09 |
| | 3.4E-06 | -6.9E-07 | 6.4E-05 | -1.7E-15 |
| | 1.3E-06 | 6.4E-06 | 1.8E-09 | 1.0 |
| | -1.9E-01 | -9.8E-01 | -2.8E-04 | 6.5E-06 |
| | 9.8E-01 | -1.9E-01 | 1.5E-04 | -4.9E-10 |
| | -2.1E-19 | 1.6E-19 | -1.0E-21 | 1.4E-12 |

| 特征值 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| -9.5E-17 | 8.7E-17 | 7.0E-06 | -3.3E-14 | -1.3E-05 |
| 7.0E-06 | -1.2E-09 | 2.0E-17 | -1.4E-16 | 6.3E-18 |
| 4.0E-18 | 0.0 | -1.0E-11 | 6.0E-17 | 2.7E-17 |
| -3.1E-14 | 8.6E-12 | 1.0 | -5.4E-06 | -4.7E-09 |
| 1.0 | -1.7E-04 | 3.2E-14 | 5.4E-14 | 1.0E-16 |
| 1.8E-18 | -1.1E-16 | -9.2E-11 | 5.0E-16 | -3.9E-17 |
| 1.7E-04 | 1.0 | -8.6E-12 | -3.3E-10 | -6.2E-13 |
| 2.3E-20 | 3.7E-15 | -5.3E-09 | -1.8E-03 | 1.0 |
| 2.1E-15 | 3.3E-10 | 5.4E-06 | 1.0 | 1.8E-03 |
| -1.6E-07 | -3.5E-05 | 3.0E-16 | 1.2E-14 | 2.2E-17 |
| 1.4E-17 | 1.5E-18 | 1.6E-07 | -8.6E-13 | -7.5E-16 |
| 3.1E-14 | -2.5E-11 | -3.8E-21 | 1.8E-20 | -7.7E-22 |
| -7.2E-07 | 2.5E-10 | 1.9E-16 | -1.3E-15 | 6.1E-17 |
| 9.2E-16 | -1.7E-16 | 7.2E-07 | -3.9E-12 | -3.8E-15 |
| 2.6E-04 | -4.4E-08 | 8.3E-18 | 1.4E-17 | 2.6E-20 |

| 特征值 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 95.9 | 95.9 | 96.9 | 96.9 |
| -1.9E-16 | 1.0E-02 | -1.7E-15 | 1.7E-13 | 9.9E-01 |
| -1.9E-18 | -1.8E-09 | 1.5E-15 | 1.0E-02 | -9.9E-01 |
| -3.1E-14 | 3.4E-21 | 6.4E-05 | 1.2E-22 | -1.2E-20 |
| 1.9E-10 | 1.7E-21 | 8.9E-08 | 1.2E-20 | -1.2E-18 |
| -1.2E-18 | -2.6E-04 | 4.2E-17 | 9.0E-08 | 7.1E-06 |
| 1.0 | 2.4E-17 | 1.3E-07 | -2.3E-20 | 2.3E-18 |
| 9.6E-17 | 9.2E-10 | 6.2E-18 | 3.5E-05 | 3.4E-07 |
| 4.8E-17 | 1.4E-32 | 2.9E-19 | -1.2E-38 | 1.0E-36 |
| -4.4E-19 | 0.0 | 2.7E-16 | 3.4E-34 | -3.2E-32 |
| -7.3E-19 | 1.3E-05 | 2.1E-19 | 1.0 | 9.9E-03 |
| 4.9E-10 | -5.6E-17 | -1.0 | -1.9E-18 | 1.8E-16 |
| 1.4E-17 | -1.5E-12 | 1.7E-17 | -6.6E-09 | -1.6E-10 |
| -2.0E-17 | 1.4E-10 | -1.8E-16 | -1.0E-03 | 1.0E-01 |
| -1.4E-06 | -2.1E-17 | 1.0E-03 | 1.1E-18 | 1.7E-14 |
| -2.4E-17 | 1.0 | 5.6E-17 | -1.3E-05 | -1.3E-07 |

表 2　与各特征值对应的组合状态

**Tab.2 Combined states corresponding to each eigenvalue**

| 特征值 | 对应可观测组合 |
|---|---|
| $\lambda_1=0$ | $s_1=-0.1\phi_N-0.19\Delta_N+0.98\Delta_W$ |
| $\lambda_2=0$ | $s_2=-0.1\phi_W-0.19\Delta_W-0.98\Delta_N$ |
| $\lambda_3=0$ | $s_3=\phi_U$ |
| $\lambda_4=4\times10^{-7}$ | $s_4=\varepsilon_U+6.5\times10^{-6}\Delta_N$ |
| $\lambda_5=1$ | $s_5=\delta V_W$ |
| $\lambda_6=1$ | $s_6=\delta L$ |
| $\lambda_7=1$ | $s_7=\delta V_N$ |
| $\lambda_8=1$ | $s_8=\delta h$ |
| $\lambda_9=1$ | $s_9=\delta\lambda$ |
| $\lambda_{10}=2$ | $s_{10}=\delta V_U$ |
| $\lambda_{11}=2$ | $s_{11}=\Delta_U$ |
| $\lambda_{12}=95.9$ | $s_{12}=6.4\times10^{-5}\phi_U-0.01\phi_N-\varepsilon_W-0.001\Delta_W$ |
| $\lambda_{13}=95.9$ | $s_{13}=0.01\phi_W+\varepsilon_N-0.001\Delta_N$ |
| $\lambda_{14}=96.9$ | $s_{14}=-0.99\phi_W+0.1\Delta_N$ |
| $\lambda_{15}=96.9$ | $s_{15}=0.99\phi_N+0.1\Delta_W$ |

由表 2 中可以看出，$\lambda_1 \sim \lambda_3$ 均为零，所以 $s_1 \sim s_3$ 完全不可观。由于 $\lambda_4 \to 0$，所以在可观组合状态中 $s_4$ 可观测度最低（$s_4$ 主要对应文献[3]中的组合状态 $t_6$）。$\lambda_5 \sim \lambda_{15}$ 都远大于零，而且 $\lambda_5 \sim \lambda_{10}$ 对应的 $\beta_{i=5\sim10}=0$，所以 $s_5 \sim s_{10}$ 在可观组合状态中可观测度最高；$\lambda_{11}$、$\lambda_{14}$、$\lambda_{15}$ 对应的 $\beta_{i=11,14,15}=1$，所以 $s_{11}$、$s_{14}$、$s_{15}$ 可观测度较 $s_5 \sim s_{10}$ 低（$s_{11}$、$s_{14}$、$s_{15}$ 主要对应文献[3]中的组合状态 $t_1 \sim t_3$）；$\lambda_{12}$、$\lambda_{13}$ 对应的 $\beta_{i=12,13}=2$，故 $\lambda_{12}$、$\lambda_{13}$ 可观测度更低（$\lambda_{12}$、$\lambda_{13}$ 主要对应文献[3]中的组合状态 $t_4$、$t_5$）。

另一方面，以 $s_{14}$ 为例，虽然在 $s_{14}$ 中 $\Delta_N$ 的系数远小于 $\phi_W$ 的系数，但由于对于捷联惯性导航系统在初始对准时有 $\phi_W(0) \approx O(\Delta_N(0)/g)$，因此在 $s_{14}$ 中 $\Delta_N$ 与 $\phi_W$ 占的比重是相当的。所以若按已有方法将 $s_{14}$ 认为成主要反映 $\phi_W$ 的信息也是不合理的，作者在文献[3]中也对此进行了说明。

综上讨论，要确定系统状态（或组合状态）的可观测度，要在综合考虑状态（或组合状态）对应可观测矩阵特征值、对应量测量的导数最高阶数以及状态分量的数量级等因素下才能进行。

本文的分析与文献[3]中给出的仿真结果是相吻合的。文献[3]是从系统方程出发，直接来看系统状态与观测量之间的关系，我们可以称之为解析的方法。而本文是从可观测矩阵的特征值分解出发来对系统状态的可观测性进行分析，这实际上是一种数值分析的方法。在解决实际问题时，可以两种方法结合进行，对于用直接解析方法不容易分析的系统，可以借助数值分析的方法来对系统状态或组合状态的可观测度有一个大体的估计。

## 5　小 结

本文从已有的分析系统可观测度的方法出发，分析了已有方法存在的问题和不足，给出了一种新的确定系统组合状态可观测度的方法。必须注意到，运用可观测矩阵特征值分解的方法来确定的可观测度，只能决定系统的组合状态的可观测度，并不一定能确定每一个状态分量的可观测度。本文最后分析了典型的静基座条件下捷联惯性导航系统的可观测度，说明了新的分析方法的可行性和合理性。

**参考文献（References）：**

[1] 冯绍军，袁信. 观测度及其在卡尔曼滤波器设计中的应用[J]. 中国惯性技术学报，1999，7(2)：18-21.
FENG Shao-jun, YUAN Xin. Observability and its application in Kalman filter design[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 1999, 7(2): 18-21.

[2] 帅平，陈定昌，江涌. GPS/SINS组合导航系统状态的可观测度分析方法[J]. 宇航学报，2004，12(2)：219-224.
SHUAI Ping, Chen Ding-chang, JIANG Yong. Observable degree analysis method of integrated GPS/SINS navigation system[J]. Journal of Astronautics, 2004, 12(2): 219-224.

[3] 杨晓霞，黄一. 外场标定条件下捷联惯导系统误差状态可观测性分析[J]. 中国惯性技术学报，2008，16 (6)：1-8.
YANG Xiao-xia, HUANG Yi. Observability analysis for the error states of SINS under the outer field conditions[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16 (6): 1-8.

[4] 马艳红，胡军. 基于 SVD 理论的可观测度分析方法的几个反例[J]. 中国惯性技术学报，2008，16(4)：448-452.
MA Yan-hong, HU Jun. Counterexamples for degree of observability analysis method based on SVD theory[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(4): 448-452.

[5] 孔星炜，董景新，吉庆昌，等. 一种基于 PWCS 的惯导系统可观测度分析方法[J]. 中国惯性技术学报，2011，19( 6)：631-636.
KONG Xing-wei, DONG Jing-xin, JI Qing-chang, et ac. INS observable degree analysis method based on PWCS[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2011, 19( 6): 631-636.

[6] Ham F M, Brown R G. Observability, eigenvalues and Kalman filtering[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems, 1983, 19 (2):269-273.

[7] Goshen-Meskin D, Bar-Itzhack I Y. Observability analysis of piece-wise constant systems[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System, 1992, 28(4): 1056-1075.

[8] LI Yao, Li Yong, Rizos C, et al. Observability analysis of SINS/GPS during in-motion alignment using singular value decomposition[C]//International Conference on Electrical Engineering and Automatic Control. Zibo, China, 2010, Vol.1: 97-101.

[9] Dafis C J, Nwankpa C O. Characteristics of degree of observability measure for nonlinear power systems[C]// Proceedings of the 38th Hawaii International Conference on System Sciences. 2005: 1-6.

[10] LONG Rui, QIN Yong-yuan, JIA Ji-chao. Observable degree analysis of SINS initial alignment based on singular value decomposition[C]//IEEE International Symposium on Knowledge Acquisition and Modeling Workshop. 2008: 444 – 448.