SEM0530 Problemas de Engenharia Mecatrônica II

Aula 2: Solução de sistemas lineares

GABRIEL LUENEBERG - 14746439

Professor:

Marcelo A. Trindade

15/04/2024

Conteúdo

1 Introdução

A análise de estruturas sujeitas a carregamentos é uma tarefa fundamental na engenharia. A compreensão dos deslocamentos e deformações que uma estrutura pode sofrer é crucial para garantir sua estabilidade e segurança. Nesse contexto, o uso de modelos discretos, como o modelo de molas em série, oferece uma abordagem eficaz para calcular esses deslocamentos.os modelos discretos permitem uma simplificação do problema, dividindo a estrutura em elementos menores que podem ser analisados individualmente, facilitando assim a avaliação do comportamento global da estrutura.

2 Objetivos

O objetivo desta prática é calcular os deslocamentos de uma estrutura sob carregamento de forças e deslocamentos, utilizando um modelo discreto de molas em série com coeficiente variável. Para isso, será construída a matriz de rigidez do sistema e serão resolvidos casos específicos de carregamento, como a aplicação simultânea de duas forças em diferentes pontos da estrutura e a imposição de um deslocamento em uma das extremidades.

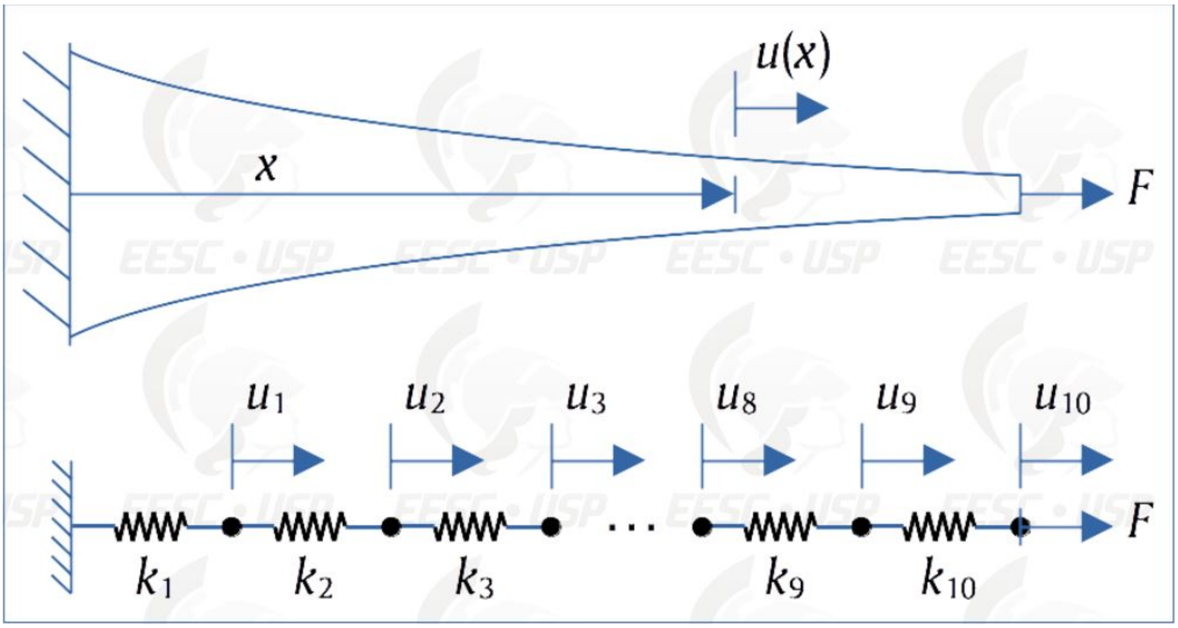

Figura 1: Modelo da estrutura utilizada

3 Resultados e Discussão

Inicialmente, considerou-se um sistema com apenas quatro molas e uma força F aplicada no ponto 2, visando facilitar a análise e determinar se existe algum padrão no problema. Para esse sistema, as equações que o definem são:

$$\begin{cases} k_1(u_1) - k_2(u_2) = 0 \\ k_2(u_2 - u_1) - k_3(u_3 - u_2) = F \\ k_3(u_3 - u_2) - k_4(u_4 - u_3) = 0 \\ k_4(u_4 - u_3) = 0 \end{cases}$$

Essas equações podem ser reescritas como um sistema de matrizes $KU = F$:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Percebe-se que a matriz de rigidez apresenta um padrão que pode ser generalizado para o caso 10×10 que se deseja estudar. Todos os elementos da diagonal principal a_{ii} seguem o padrão $(k_i + k_{i+1})$, enquanto os elementos fora da diagonal principal seguem o padrão $-k_i$ à esquerda e $-k_{i+1}$ à direita, exceto nos casos dos extremos. Além disso, nota-se que as forcas externas ao sistema aplicadas ao sistema estão representadas na matriz F. Com base nisso, encontra-se que a matriz de rigidez do sistema é:

$$\mathrm{K}_1 = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 + k_6 & -k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & k_6 + k_7 & -k_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_7 & k_7 + k_8 & -k_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_8 & k_8 + k_9 & -k_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_9 & k_9 + k_{10} & -k_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{10} & k_{10} \end{bmatrix}$$

Para a encontrar os deslocamentos em cada ponto da estrutura para o caso no qual duas forças são aplicadas simultaneamente, sendo uma de 100N na extremidade livre e outra de -50 na metade do comprimento , precisa-se resolver o sistema $KU = F$, onde K é a matriz de rigidez deduzida e u e F são dados por :

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ \vdots \\ u_{10} \end{bmatrix} \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \\ \vdots \\ 100 \end{bmatrix}$$

Para abordar o caso em que um deslocamento de 3cm é imposto na extremidade livre, pode-se considerar que a força na extremidade, dada por $F = (0.03)k_{10}$, seja uma força externa ao sistema composto por 9 molas, tendo o mesmo módulo da força no ponto 9. Nesse cenário, podemos utilizar a mesma matriz de rigidez do cenário com 10 molas, porém em sua versão 9x9. Isso ocorre porque tanto a força na extremidade quanto o deslocamento são conhecidos, o que permite remover a linha inferior e a coluna à direita da matriz de rigidez sem afetar o resto do sistema. Então,resolve-se o sistema $F = Ku$, onde:

$$\mathrm{K}_2 = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 & -k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5+k_6 & -k_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & k_6+k_7 & -k_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_7 & k_7+k_8 & -k_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_8 & k_8+k_9 & -k_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_9 & k_9+k_{10} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ \vdots \\ u_9 \end{bmatrix} \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (0,03)k_{10} \end{bmatrix}$$

Por meio da linguagem Python, foram determinados o os deslocamentos em cada ponto da estrutura. Adicionalmente, os gráficos dessas funções foram plotados para uma melhor compreensão do problema.

```
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

b = 0.2
delta_k = (50 + 0.5 * 39) * 1000
k_min = 10 * 1000
k = []

F1 = np.zeros((10, 1))
K1 = np.zeros((10, 10))

F1[4][0] = -50
F1[9][0] = 100

for i in range(10):
```

```
    kn = k_min + delta_k * math.exp(-b * (i + 1))
    k.append(kn)

for i in range(10):
    if i == 0:
        K1[i][i] = k[i] + k[i + 1]
        K1[i][i + 1] = -k[i + 1]
    elif i == 9:
        K1[i][i - 1] = -k[i]
        K1[i][i] = k[i]
    else:
        K1[i][i - 1] = -k[i]
        K1[i][i] = k[i] + k[i + 1]
        K1[i][i+1] = -k[i + 1]

u1 = np.linalg.solve(K1, F1)
print("Caso 1: \n",np.round(u1,4))

K2 = K1[:-1, :-1]
F2 = np.zeros((9, 1))

F2[8][0] = 0.03*k[9]

u2 = np.linalg.solve(K2, F2)

print("Caso 2: \n",np.round(u2,4))

n = np.linspace(0, 10, 10)

plt.figure(figsize=(8, 10))

plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(n, u1, label='u1', color='blue')
plt.xlabel('x [m]')
plt.ylabel('u(x) [m]')
plt.title('Deslocamento para um ponto x')
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(n[:-1], u2, label='u2', color='green')
plt.xlabel('x [m]')
plt.ylabel('u(x) [m]')
plt.title('Deslocamento para um ponto x')
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Do código, encontrou-se que:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0.0007 \\ 0.0016 \\ 0.0027 \\ 0.0039 \\ 0.0053 \\ 0.0085 \\ 0.0122 \\ 0.0164 \\ 0.021 \\ 0.0262 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 0.0014 \\ 0.0031 \\ 0.0051 \\ 0.0074 \\ 0.0101 \\ 0.0132 \\ 0.0167 \\ 0.0206 \\ 0.0251 \end{bmatrix}$$

Além disso, plotou-se os gráficos a seguir

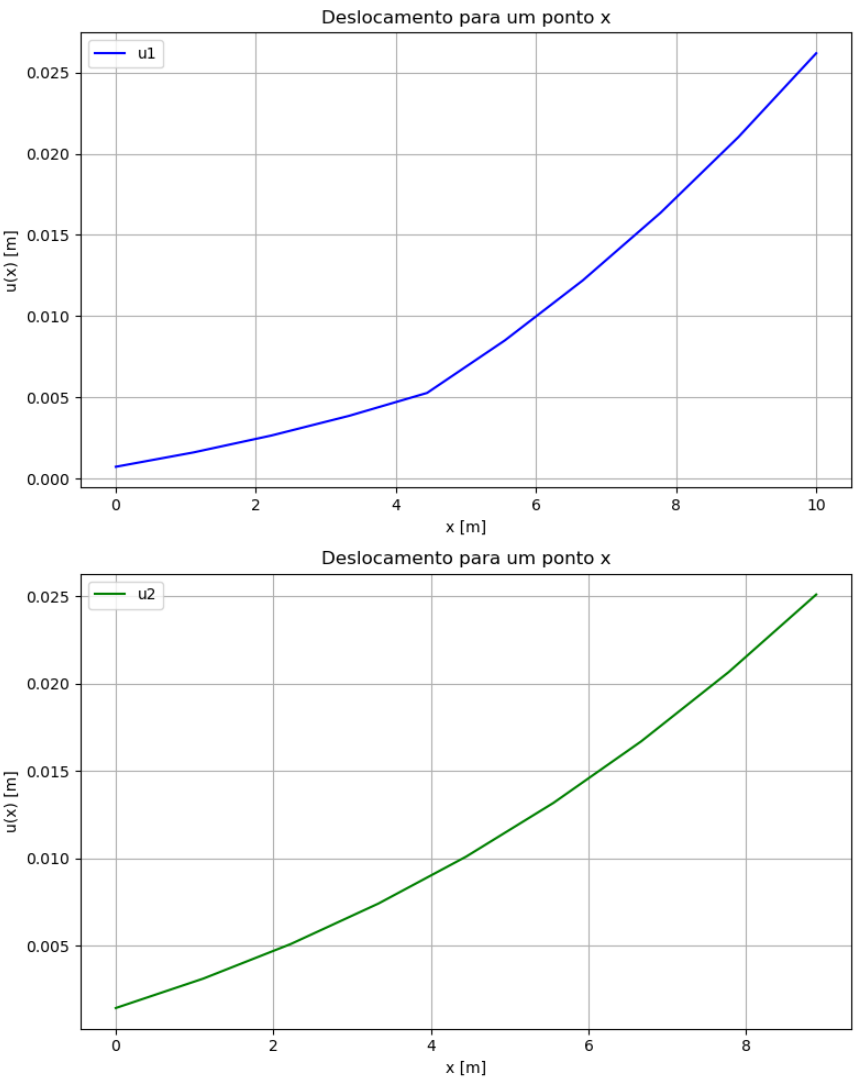

Figura 2: Resultados do problema

4 Conclusão

Com base na análise realizada, utilizou-se a matriz de rigidez deduzida para cada caso, assim como os deslocamentos calculados que foram numericamente por meio da resolução do sistema de equações lineares. Os resultados obtidos foram confirmados por meio de gráficos que demonstram os deslocamentos em função da posição ao longo da estrutura. Portanto, a abordagem adotada proporcionou uma compreensão abrangente do problema, fornecendo informações valiosas sobre o comportamento estrutural sob diferentes condições de carga e deslocamento.