SEM0530 Problemas de Engenharia Mecatrônica II

Aula 5: Aproximação numérica de EDOs de 2ª ordem

GABRIEL LUENEBERG - 14746439

Professor:

Marcelo A. Trindade

03/06/2024

Conteúdo

1 Introdução

Nem toda equação diferencial ordinária (EDO) pode ser resolvida analiticamente. Embora muitas EDOs tenham soluções exatas que podem ser expressas em termos de funções elementares, uma grande quantidade dessas equações não possui soluções que possam ser encontradas por métodos analíticos tradicionais. Isso se deve à complexidade das equações e às limitações dos métodos analíticos. A impossibilidade de resolver algumas EDOs analiticamente destaca a importância dos métodos numéricos e das ferramentas computacionais na análise e na solução de problemas de engenharia

2 Objetivos

Nesta prática, objetiva-se determinar a evolução do deslocamento angular de um pêndulo simples ao longo de um intervalo de tempo, considerando-se dadas condições iniciais. O cabo do pêndulo é considerado rígido, com massa desprezível e comprimento constante. O amortecimento (dissipação) é representado por um momento em relação ao pino, dado por $M = c\theta$, com uma constante c. Usando integração numérica, busca-se determinar a evolução do deslocamento angular a partir de uma posição inicial vertical $\theta(0) = 0rad$ com uma velocidade angular inicial $\dot{\theta}(0) = 15rad/s$. As evoluções deverão ser apresentadas em gráficos de θ em função do tempo $\theta \times t$, da velocidade angular em função do tempo $\dot{\theta} \times t$ e do deslocamento angular em função da velocidade angular $\theta \times \dot{\theta}$. Além disso, utilizando a aproximação numérica, pretende-se determinar quantas voltas completas o pêndulo executa antes de parar. Outros parâmetros relevantes, como a evolução da tração no cabo e a frequência de oscilação, também poderão ser extraídos.

3 Resultados e Discussão

3.1 Aceleração angular

Em primeira análise, pode-se fazer um estudo de uma posição genérica do pêndulo associado ao problema em questão, na qual o cabo está deslocado de um ângulo θ da vertical. Em busca da aceleração angular do sistema, faz-se possível chegar a uma relação de duas maneiras: compreendendo a dinâmica envolvida na direção tangencial do movimento ou observando o somatório de momentos.

Para o primeiro modo, tem-se:

$$\sum F_t = ma_t = mr\ddot{\theta},$$

onde a_t representa a aceleração tangencial do movimento. Para a resultante de forças, tem-se uma contribuição do peso do objeto e outra do momento dissipativo. No entanto, deve-se chegar a uma força que seja capaz de gerar tal momento. Para tal:

$$M = f_M r \Rightarrow cr^2\dot{\theta} = f_M r \Leftrightarrow f_M = cr\dot{\theta}$$

Vale ressaltar que tal força atua no sentido contrário ao eixo tangencial, já que tende a retardar o movimento. Desse modo:

$$\sum F_t = -f_M - W_t \Rightarrow mr\ddot{\theta} = -cr\dot{\theta} - mg\sin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{-g\sin\theta}{r} - \frac{c}{m}\dot{\theta} \tag{1}$$

Como dito, pode-se, também, chegar à Equação 1 a partir do somatório de momentos. Estabelecendo o somatório de momentos em relação ao ponto O (onde o pêndulo é fixo):

$$\sum M_O = I_O\ddot{\theta},$$

onde $I_O = mr^2$ é o momento de inércia do objeto em relação a O. Mas,

$$\sum M_O = -M - W_t r, \quad \text{o que implica:}$$

$$I_O\ddot{\theta} = mr^2\ddot{\theta} = -cr^2\dot{\theta} - mg\sin\theta \cdot r \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{-g\sin\theta}{r} - \frac{c}{m}\dot{\theta},$$

que é a própria Equação 1.

3.2 As equações diferenciais

A Equação 1 se mostra da forma

$$\ddot{\theta}(t) = g(\theta(t), \dot{\theta}(t)), \tag{1}$$

uma equação diferencial de segunda ordem não linear. Convém, nesse sentido, transformar o problema em um sistema de EDOs de 1ª ordem, no intuito de facilitar a utilização de algum algoritmo de integração numérica para a solução.

Definamos então $\dot{\theta} = \varphi \Rightarrow \dot{\varphi} = \ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\sin\theta - \frac{c}{m}\varphi$.

Assim, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \varphi \\ \dot{\varphi} = -\frac{g}{r}\sin\theta - \frac{c}{m}\varphi, \\ \theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 15 \text{ rad/s} \end{cases} \tag{2}$$

Assim, é possível utilizar algum método de integração numérica para obter a solução do sistema, a matriz solução definida por

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix},$$

e, consequentemente, obter a evolução do deslocamento angular $\theta(t)$.

3.3 Outras análises relevantes

Pode-se, ainda, realizar uma análise da dinâmica associada à direção normal do movimento, e determinar, assim, a evolução da tração T_r no cabo do pêndulo. Estabelecendo o somatório de forças na direção normal:

$$\sum F_n = ma_n = m(\dot{\theta})^2 r = T_r - W_n \Rightarrow m(\dot{\theta})^2 r = T_r - mg\cos\theta \Leftrightarrow T_r = m(\dot{\theta}^2 r + g\cos\theta) \tag{3}$$

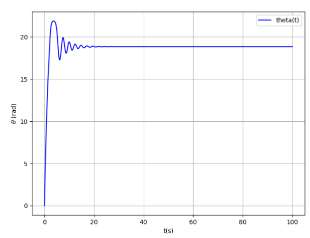
Dessa forma, é possível utilizar os valores obtidos para a velocidade angular ϕ e determinar a evolução da frequência f de oscilação, utilizando-se a relação

$$f = \frac{\dot{\theta}}{2\pi} \tag{4}$$

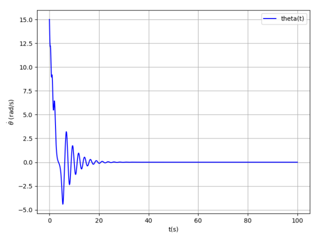
Por fim, é ainda possível notar que, tendo a velocidade angular um valor inicial elevado, não se deve descartar a possibilidade do pêndulo executar alguma(s) volta(s) completa(s) antes de começar, de fato, a oscilar em torno da posição vertical.

3.4 Gráficos e resultados

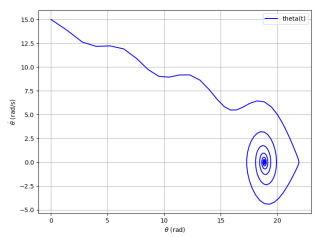
Para determinar a evolução do deslocamento angular, utilizou-se o método *solve_ivp* da biblioteca *scipy.integrate* para obter o vetor de valores de $\theta(t)$, considerando o vetor de tempo passado como argumento. A seguir são mostrados os gráficos correspondentes a algumas evoluções relacionadas ao movimento descrito pelo pendulo.



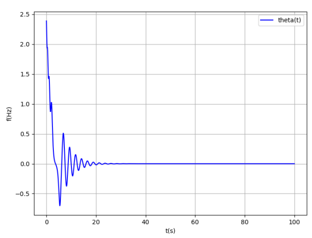
(a) Gráfico de θ vs t



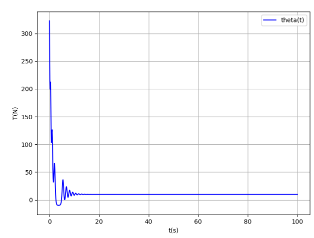
(b) Gráfico de $\dot{\theta}$ vs t



(c) Gráfico de $\dot{\theta}$ vs θ



(d) Gráfico de f vs t



(e) Gráfico de T vs t

Figura 1: Gráficos gerados

Os gráficos em questão permitem algumas analises relevantes. Primeiro, observa-se um trecho da curva, aproximadamente nos 4 primeiros segundos, no qual o deslocamento é estritamente crescente. Tem-se, em seguida, um comportamento oscilatório. Tal fato retrata justamente a etapa anterior as oscilações, quando o pendulo executa as voltas.

É possıvel fazer uma estimativa visual do deslocamento anterior a oscilação. Nota-se que na etapa de oscilação, a curva converge para o valor de 18.5 rad. Sendo assim, considerando esse valor percorrido no primeiro trecho, tem-se que n $= 18.5/2\pi \approx 3$ voltas.

3.5 Código

Os código utilizados para a obtenção das evoluções e seus gráficos encontra-se a seguir

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

N = 39
r = (1 + N/100)
m = 1
c = 0.5
g = 9.81

def sistema(y, t):
    theta, theta_ponto = y
    dydt = [theta_ponto, (-g*np.sin(theta))/r - (c*theta_ponto)/m]
    return dydt

y0 = [0, 15]

t = np.linspace(0, 100, 1000)

sol = odeint(sistema, y0, t)

plt.figure(figsize=(8,6))
plt.plot(t, sol[:, 0], 'b', label='theta(t)')
plt.legend(loc='best')
plt.ylabel(r'$\theta$ (rad)')
plt.xlabel('t(s)')
plt.grid()

plt.figure(figsize=(8,6))
plt.plot(t, sol[:, 1], 'b', label='theta(t)')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('t(s)')
plt.ylabel(r'$\dot{\theta}$ (rad/s)')
plt.grid()

plt.figure(figsize=(8,6))
plt.plot(sol[:,0], sol[:, 1], 'b', label='theta(t)')
```

```
plt.legend(loc='best')
plt.ylabel(r'$\dot{\theta}$ (rad/s)')
plt.xlabel(r'$\theta$ (rad)')
plt.grid()

frequencia = sol[:, 1] / (2 * np.pi)

plt.figure(figsize=(8,6))
plt.plot(t, frequencia, 'b', label='theta(t)')
plt.legend(loc='best')
plt.ylabel('f(Hz)')
plt.xlabel('t(s)')
plt.grid()

T = m*g*np.cos(sol[:,0]) + sol[:, 1]**2 * r

plt.figure(figsize=(8,6))
plt.plot(t, T, 'b', label='theta(t)')
plt.legend(loc='best')
plt.ylabel('T(N)')
plt.xlabel('t(s)')
plt.grid()

plt.show()
```

4 Conclusão

É possível dizer que foi feita uma análise minimamente razoável do problema proposto, de maneira que se pode obter resultados coerentes com o que se esperava e suspeitava acerca do movimento do pêndulo em questão.

Por fim, é notório o importante papel desempenhado pelo Python na construção e determinação dos resultados, utilizando a biblioteca `scipy.integrate` com a função `odeint`.