SEM0530 Problemas de Engenharia Mecatrônica II

Aula 3: Integrais numéricas

GABRIEL LUENEBERG - 14746439

Professor:

Marcelo A. Trindade

8/05/2024

Conteúdo

1 Introdução

Dada uma função $f(x)$, muitos problemas de engenharia necessitam vezes encontrar a solução de uma integral definida $\int_a^b f(x)dx$. Dependendo da forma de $f(x)$, soluções exatas ou analíticas podem não existir ou serem difíceis de calcular. Nesses casos, métodos numéricos de aproximação de integrais são úteis.

2 Objetivos

O objetivo desta prática experimental é estudar o movimento de um veículo que se desloca com trajetória circular de raio $r = 100\,m$ e velocidade inicial de $v_0 = (10 + 0.1N)\,m/s$ e acelera com $a_t = (4 + 0.01Ns - 0.01s^2)\,m/s^2$ (onde $N = 39 \Rightarrow v_0 = 13.9\,m/s$): Primeiramente, busca-se determinar o gráfico da velocidade em função do espaço percorrido (v vs s), permitindo a visualização da variação da velocidade ao longo do percurso. Além disso, calcula-se a velocidade alcançada pelo veículo após percorrer uma distância de 20 metros. Então, cria-se um gráfico da aceleração em função do espaço percorrido (a vs s), e também calcula-se a aceleração quando s = 20m. Adicionalmente , será empregado um método numérico de integração para calcular o tempo necessário para o veículo percorrer 20 metros.

3 Resultados e Discussão

3.1 Velocidade

Em primeira instância, tendo em vista a dinâmica do problema em questão, vale relembrar alguns princípios da cinemática escalar, os quais auxiliarão nas determinações requeridas.

Tem-se que o módulo da velocidade v de um ponto material em uma dada trajetória correponde à taxa de variação da posição s em função do tempo t:

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{1}$$

A seu turno, o módulo da aceleração tangencial a_t, responsável por alterar o módulo de v, é dada por:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \tag{2}$$

Comparando as eq. 3 e 4:

$$\frac{1}{v}\,ds = \frac{1}{a_t}\,dv \Longleftrightarrow a_t\,ds = v\,dv$$

$$\Longleftrightarrow \int a_t(s)\,ds = \int v\,dv \tag{3}$$

Desse modo, se a aceleração tangencial é conhecida como função da posição, consegue-se encontrar v em função de s. Então, substitui-se a função $a(s)$ na equação e encontra-se que:

$$\int_0^s (4 + 0.01Ns - 0.01s^2)\, ds = \int_{v_0}^{v(s)} v\, dv \tag{4}$$

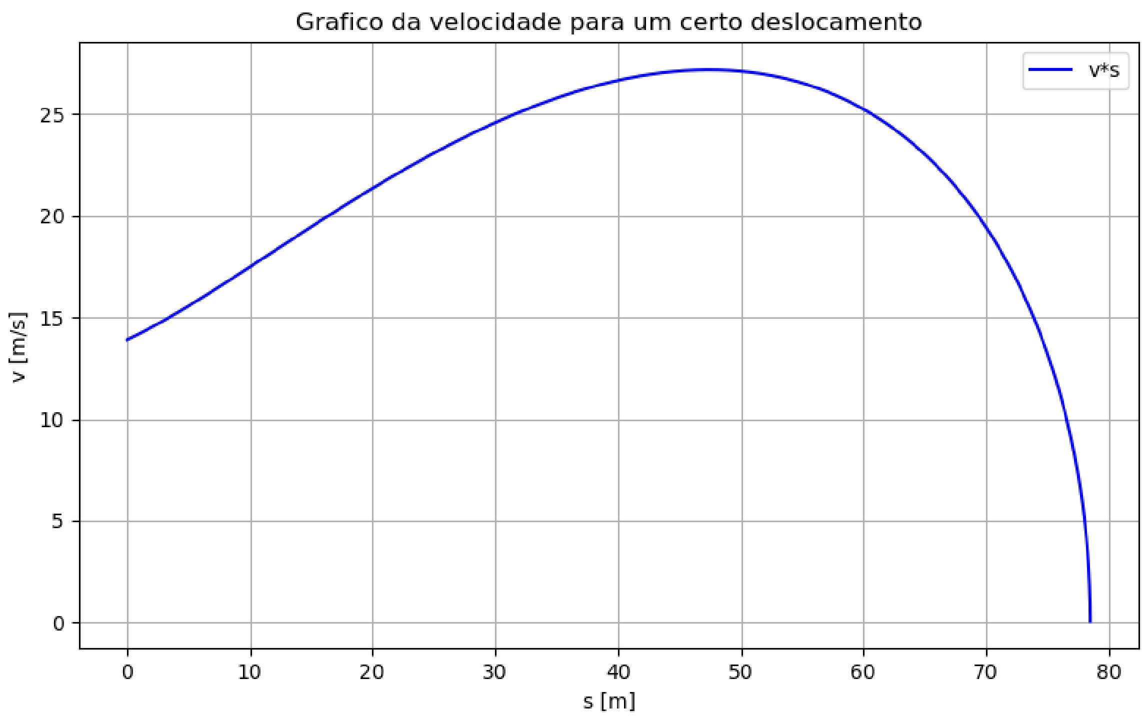
e por fim tem-se que

$$v(s) = \sqrt{8s + 0.01Ns^2 - \frac{0.02}{3}s^3 + v_0^2} \tag{5}$$

Com essa expressão calcula-se o valor da velocidade quando o deslocamento é igual a 20m, ou seja:

$$v(20) = 21.351m/s \tag{6}$$

Adicionalmente plotou-se o gráfico da velocidade contra o deslocamento com o código em Python listado posteriormente.



3.2 Aceleração

Como o problema em questão analisa um movimento circular, há também uma componente normal a_n da aceleração, a qual é dada por:

$$a_n = \frac{v^2}{r} \tag{7}$$

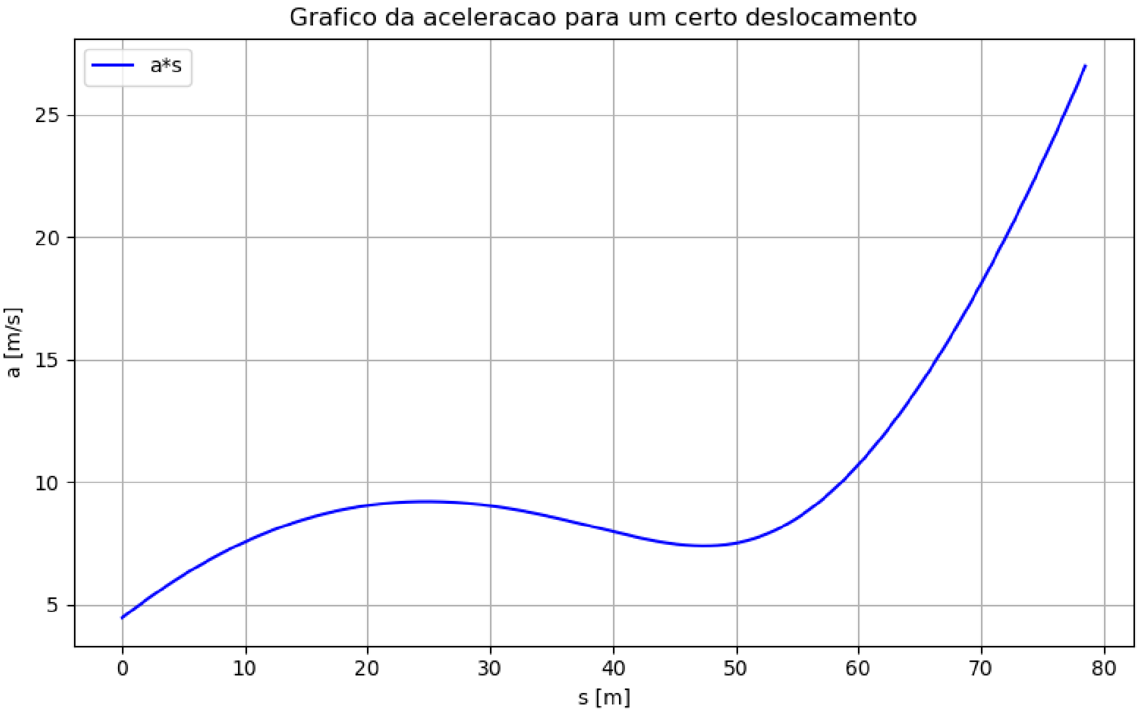
O módulo da aceleração do ponto material é, por conseguinte, composição das duas componentes:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \tag{8}$$

De forma análoga ao procedimento realizado para a velocidade, a aceleração quando $s = 20m$ foi calculada , encontrando-se:

$$a(20) = 9.035m/s^2 \tag{9}$$

Então, usando a equação 8, o gráfico da aceleração foi plotado, como visto na figura a seguir



3.3 Tempo

Da eq. 1 ainda é possível obter:

$$dt = \frac{1}{v} ds \Longleftrightarrow \int dt = \int \frac{1}{v(s)} ds \tag{10}$$

Portanto, obtém-se o tempo em função da posição se é conhecida a expressão de v em função de s. Entretanto, quando substitui-se $v(s)$ na equação, percebe-se que a integral neste caso não é trivial.Assim, optou-se pelo emprego de algumas ferramentas computacionais proporcionadas pelo linguagem *Python*, no intuito de aproximar seu resultado por meio de métodos numéricos. Com isso, encontrou-se que:

$$t_{20} = 1.16s \tag{11}$$

3.4 Codigo

O código utilizado encontra-se listado a seguir:

```
import scipy.integrate as integrate
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N = 39
r = 100
v0 = (10 + 0.1 * N)

def a_t(s):
    return (4 + 0.01 * N * s - 0.01 * s * s)

def v(s):
    return np.sqrt(8 * s + 0.01 * N * s**2 - (0.02 * s**3)/3 + v0**2)

def a_r(s):
    return v(s)**2/r

def a(s):
    return np.sqrt(a_t(s)**2 + a_r(s)**2)

tempo = integrate.quad(lambda s: 1/v(s), 0, 20)

print("A velocidade do ve culo ao percorrer 20 metros  :", v(20))
print("A acelera  o do ve culo ao percorrer 20 metros  :", a(20))
print("O tempo necess rio para percorrer 20 metros   aproximadamente
    :", tempo[0])

s = np.linspace(0, 1000, 1000000)
v_s = v(s)

plt.figure(figsize=(8, 10))
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(s, v(s), label='v*s', color='blue')
plt.xlabel('s [m]')
plt.ylabel('v [m/s]')
plt.title('Grafico da velocidade para um certo deslocamento')
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(s, a(s), label='a*s', color='blue')
plt.xlabel('s [m]')
plt.ylabel('a [m/s]')
plt.title('Grafico da aceleracao para um certo deslocamento')
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

4 Conclusão

É possível afirmar que uma análise razoável do problema proposto pôde ser executada,de modo que as formulações matemáticas puderam ir ao encontro dos princípios físicos envolvidos na dinâmica do problema, possibilitando a determinação de valores confiáveis para as grandezas solicitadas. Do mesmo modo, a alternativa de análise numérica encontrada para solucionar a integral a que se chegou no contexto da determinação do valor de tempo decorrido mostrou-se robusta.