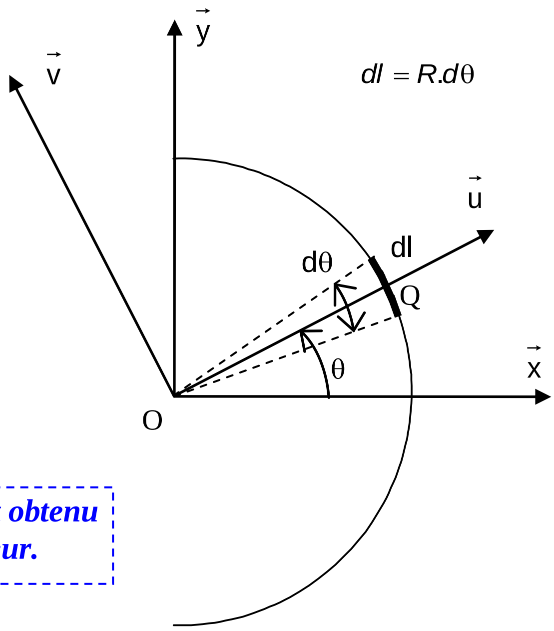
Demi-circonférence

Q1.

Par symétrie $y_G = 0$



$$L.\overrightarrow{OG} = \int_l \overrightarrow{OQ}.dl$$

$$L.x_G = \int_l x.dl$$

$$\pi.R.x_G = \int_\theta R.\cos\theta.R.d\theta$$

$$\pi.R.x_G = R.[\sin\theta]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

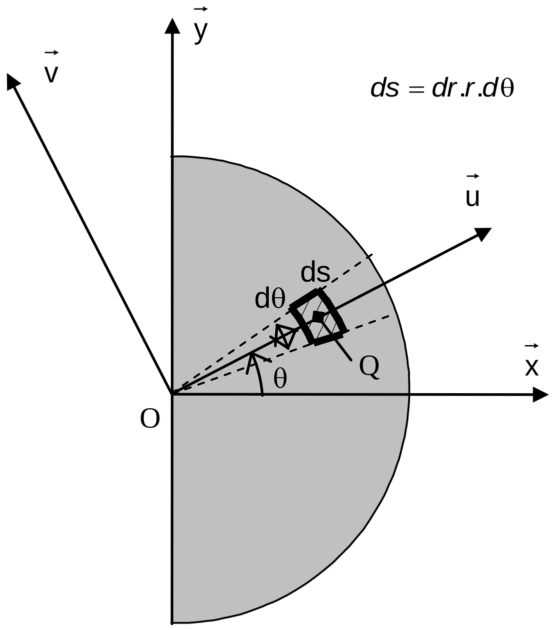
$$\boxed{x_G = \frac{2.R}{\pi}}$$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une longueur.

DEMI-DISQUE

Q1.

Par symétrie $y_G = 0$



$$S.\overrightarrow{OG} = \int_s \overrightarrow{OQ}.ds$$

$$\frac{\pi.R^2}{2}.x_G = \iint_{r,\theta} r.\cos\theta \cdot r.d\theta$$

$$\frac{\pi.R^2}{2}.x_G = \left(\int_r r^2.dr\right).\left(\int_\theta \cos\theta.d\theta\right)$$

car les 2 variables r et θ sont indépendantes

$$\frac{\pi.R^2}{2}.x_G = \left(\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R\right).\left([\sin\theta]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

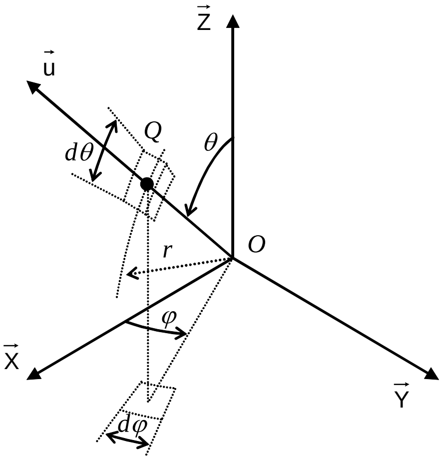
$$\frac{\pi.R^2}{2}.x_G = \frac{R^3}{3}.2$$

$$\boxed{x_G = \frac{4.R}{3.\pi}}$$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une longueur.

DEMI-SPHÈRE

Q1.



$$V.\overrightarrow{OG} = \int_v \overrightarrow{OQ}.dv$$

$$\frac{2.\pi.R^3}{3}.\overrightarrow{OG} = \iiint_{r,\theta,\varphi} r.\vec{u}.r^2.\sin\theta.d\theta.d\phi.dr$$

$$\frac{2.\pi.R^3}{3}.\overrightarrow{OG} = \left(\int_r r^3.dr\right).\left(\iint_{\theta,\phi}\left(\cos\theta.\vec{z}+\sin\theta.(\cos\phi.\vec{x}+\sin\phi.\vec{y})\right).\sin\theta.d\theta.d\phi\right)$$

$$\frac{2.\pi.R^3}{3}.\overrightarrow{OG} = \left(\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R\right).\left(\iint_{\theta,\phi}\left(\cos\theta.\sin\theta.\vec{z}+\sin^2\theta.(\cos\phi.\vec{x}+\sin\phi.\vec{y})\right).d\theta.d\phi\right)$$

$$\frac{2.\pi.R^3}{3}.\overrightarrow{OG} = \frac{R^4}{4}.\iint_{\theta,\phi}\left(\frac{\sin 2\theta}{2}.\vec{z}+\frac{1-\cos 2\theta}{2}.(\cos\phi.\vec{x}+\sin\phi.\vec{y})\right).d\theta.d\phi$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3.R}{8.\pi}.\int_\phi\left(\left[\frac{-\cos 2\theta}{4}\right]_0^\pi.\vec{z}+\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^\pi.(\cos\phi.\vec{x}+\sin\phi.\vec{y})\right).d\phi$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3.R}{8.\pi}.\int_\phi\left(\frac{\pi}{2}.(\cos\phi.\vec{x}+\sin\phi.\vec{y})\right).d\phi$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3.R}{16}.\left[\sin\phi.\vec{x}-\cos\phi.\vec{y}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3.R}{16}.2.\vec{x}$$

donc $\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{3.R}{8}.\vec{x}}$

Attention aux bornes d'intégration :
r varie entre 0 et R
θ varie entre 0 et π
ϕ varie entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une longueur.

Barrage poids

Q1. Surface du triangle $S = \dfrac{a \cdot h}{2}$

On peut retrouver ce résultat par :

$$S = \int_s ds \qquad S = \iint_{x,z} dx.dz \qquad S = \int_x dx \cdot \int_z dz \qquad S = \left[x\right]_0^a . \left[z\right]_0^h \qquad S = a \cdot h \quad (\textit{ce qui est complètement faux})$$

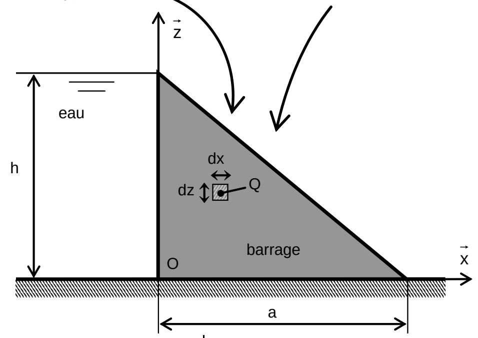
Attention, ici x et z ne sont pas indépendants. Voyons 2 méthodes pour calculer cette intégrale.

Pour un x fixé $\Rightarrow$ z varie de 0 à $\dfrac{-h}{a}.x + h$

Pour un z fixé $\Rightarrow$ x varie de 0 à $a - \dfrac{a}{h}.z$

équation de la droite enveloppe

$z = \dfrac{-h}{a}.x + h$ ou $x = \dfrac{a}{-h}.(z-h) = a - \dfrac{a}{h}.z$



Donc :

$$S = \iint_{x,z} dx.dz$$

$$S = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{-h}{a}.x+h} dz \right).dx$$

$$S = \int_0^a \left(\left[z\right]_0^{\frac{-h}{a}.x+h} \right).dx$$

$$S = \int_0^a \left(\frac{-h}{a}.x + h \right).dx$$

$$S = \left[\frac{-h}{a} \cdot \frac{x^2}{2} + h \cdot x \right]_0^a$$

$$S = \frac{-h}{a} \cdot \frac{a^2}{2} + h \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{S = \frac{h \cdot a}{2}}$$

$$S = \iint_{x,z} dx.dz$$

$$S = \int_0^h \left(\int_0^{a - \frac{a}{h}.z} dx \right).dz$$

$$S = \int_0^h \left(\left[x\right]_0^{a-\frac{a}{h}.z} \right).dz$$

$$S = \int_0^h \left(a - \frac{a}{h}.z \right).dz$$

$$S = \left[a \cdot z - \frac{a}{h} . \frac{z^2}{2} \right]_0^h$$

$$S = a \cdot h - \frac{a}{h} . \frac{h^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{S = \frac{a \cdot h}{2}}$$

Q2. $V.\overrightarrow{OG} = \displaystyle\int_V \overrightarrow{OQ}.dv$

$$l.\frac{a.h}{2}.\overrightarrow{OG} = \iiint_{x,y,z} (x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}).dx.dy.dz$$

$$l.\frac{a.h}{2}.\overrightarrow{OG} = \iint_{x,z} \left[x.y.\vec{x} + \frac{y^2}{2}.\vec{y} + z.y.\vec{z} \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx.dz$$

$$l.\frac{a.h}{2}.\overrightarrow{OG} = \iint_{x,z} \left(x.l.\vec{x} + z.l.\vec{z} \right).dx.dz$$

$$\frac{a.h}{2}.\overrightarrow{OG} = \int_{x} \left[x.z.\vec{x} + \frac{z^2}{2}.\vec{z} \right]_{0}^{\frac{-h}{a}.x+h} dx$$

$$\frac{a.h}{2}.\overrightarrow{OG} = \int_{x} \left(x.(\frac{-h}{a}.x+h).\vec{x} + \frac{(\frac{-h}{a}.x+h)^2}{2}.\vec{z} \right).dx$$

$$\frac{a.h}{2}.\overrightarrow{OG} = \left[(\frac{-h}{a}.\frac{x^3}{3} + h.\frac{x^2}{2}).\vec{x} + \frac{-a}{3.h}.\frac{(\frac{-h}{a}.x+h)^3}{2}.\vec{z} \right]_{0}^{a}$$

$$\frac{a.h}{2}.\overrightarrow{OG} = (\frac{-h}{a}.\frac{a^3}{3} + h.\frac{a^2}{2}).\vec{x} - \frac{-a}{3.h}.\frac{(h)^3}{2}.\vec{z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{a}{3}.\vec{x} + \frac{h}{3}.\vec{z}}$$

Toujours vérifier que le résultat obtenu est homogène à une longueur.

Disque percé

1. Il est utile de compléter les notations de l'énoncé :

- le disque plein est nommé D_A, de masse $m_A = \rho\pi R^2$ et de centre de masse A ;
- le disque creux est nommé D_B, de masse $m_B = \rho\pi r^2$ et de centre de masse B.

Le centre de masse G du solide S est alors le barycentre des centres de masse des disques D_A et D_B affectés respectivement des coefficients $+m_A$ et $-m_B$. Cela s'écrit, à partir d'un point quelconque Q

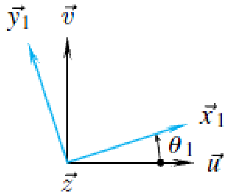
$$(m_A - m_B)\overrightarrow{QG} = m_A\overrightarrow{QA} - m_B\overrightarrow{QB}$$

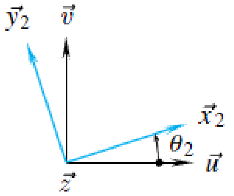
On choisit A comme point de référence et on pose $\overrightarrow{AB} = e\vec{u}$ pour écrire en définitive

$$\overrightarrow{AG} = -\frac{r^2}{R^2 - r^2}e\,\vec{u}$$

2. On caractérise la position des points P_1 et P_2 par leurs coordonnées cylindriques exprimées dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$

$$\overrightarrow{AP}_1 = r_1\vec{x}_1 \qquad \overrightarrow{AP}_2 = r_2\vec{x}_2$$





On souhaite le barycentre des points B, P_1 et P_2 affectés des coefficients respectifs $-m_B$, m_1 et m_2 au point A. Cela se traduit par

$$-m_B\overrightarrow{AB} + m_1\overrightarrow{AP}_1 + m_2\overrightarrow{AP}_2 = \vec{0}$$

On exprime cette équation vectorielle dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ pour obtenir un système de deux équations à six inconnues

$$\begin{cases} m_1 r_1\cos\theta_1 + m_2 r_2\cos\theta_2 &= m_B e \\ m_1 r_1\sin\theta_1 + m_2 r_2\sin\theta_2 &= 0 \end{cases}$$

Ce système d'équations est à compléter par les inégalités traduisant la valeur maximale des rayons et les zones à éviter.

Une solution un peu particulière mérite attention. On choisit $m_1 = m_2 = m_0$ et $r_1 = r_2 = r_0$. On obtient alors le système de deux équations à quatre inconnues suivant

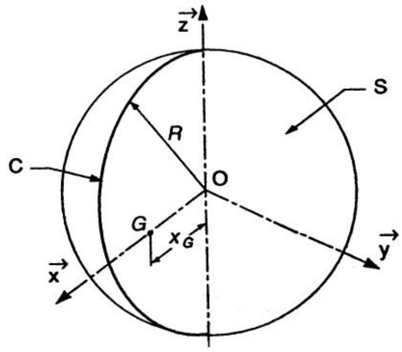
$$\begin{cases} \theta_1 &= -\theta_2 \\ 2m_0 r_0\cos\theta_1 &= m_B e \end{cases}$$

Les deux masses sont nécessairement symétriques par rapport à la droite $(A, \vec{u})$, et il faut un apport de matière $(m_0 > 0)$ pour un angle θ_1 compris entre 0 et 90°, ou percer des trous $(m_0 < 0)$ pour θ_1 compris entre 90° et 180°.

Sphère

Position du centre d'inertie de la demi-circonférence (C)

On cherche la position du centre de gravité de la ligne qui par rotation engendre la surface de la sphère :



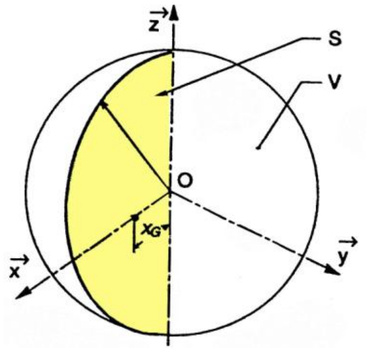
D'après Guldin $S = X_{G_L} \cdot \theta \cdot L \Rightarrow X_{G_L} = \dfrac{S}{\theta \cdot L}$

Avec $S = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \quad L = \pi \cdot R$ **et** $\theta = 2 \cdot \pi$

$$\Rightarrow X_{G_L} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^2}{2\pi \cdot \pi R} = \frac{4 \cdot R}{2\pi} \Rightarrow \boxed{X_{G_L} = \frac{2 \cdot R}{\pi}}$$

Position du centre d'inertie du demi disque (S)

On cherche la position du centre de gravité de la surface qui par rotation engendre le volume de la sphère :



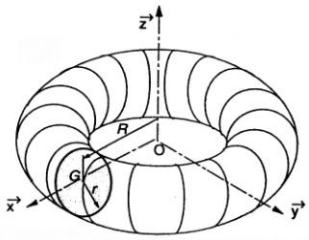
D'après Guldin $V = X_{G_S} \cdot \theta \cdot S \Rightarrow X_{G_S} = \dfrac{V}{\theta \cdot S}$

Avec $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \quad S = \dfrac{\pi \cdot R^2}{2}$ **et** $\theta = 2 \cdot \pi$

$$\Rightarrow X_{G_S} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3 \cdot 2\pi \cdot \dfrac{\pi R^2}{2}} \Rightarrow \boxed{X_{G_S} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}}$$

Tore

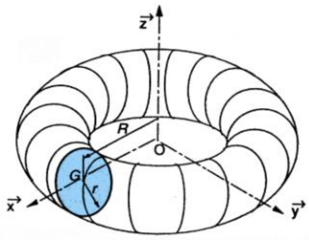
Surface du tore :



D'après Guldin $S = X_{G_L} \cdot \theta \cdot L$

$$S = R \cdot 2\pi \cdot 2\pi r \Rightarrow S = 4\pi^2 \cdot R \cdot r$$

Volume du tore :

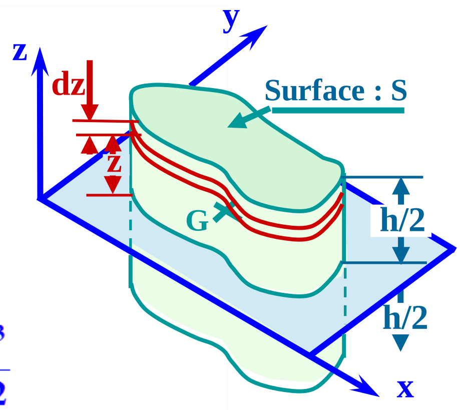


D'après Guldin $V = X_{G_S} \cdot \theta \cdot S$

$$V = R \cdot 2\pi \cdot \pi r^2 \Rightarrow V = 2\pi^2 \cdot r^2 \cdot R$$

Inertie d'un solide extrudé par rapport à son plan de symétrie

Q1. Calculer le moment d'inertie du solide extrudé ci-contre par rapport au plan $(G, \vec{x}, \vec{y})$.



Recherche du moment d'inertie par rapport au plan $(\vec{x}, G, \vec{y})$.

Le moment d'inertie s'écrit : $I_{xGy} = \int_s z^2 \cdot dm$

On choisit pour volume de matière élémentaire, une plaque de section S et d'épaisseur dz.

Il s'écrit : $dm = \rho \cdot dv = \rho \cdot S \cdot dz$ **d'où :**

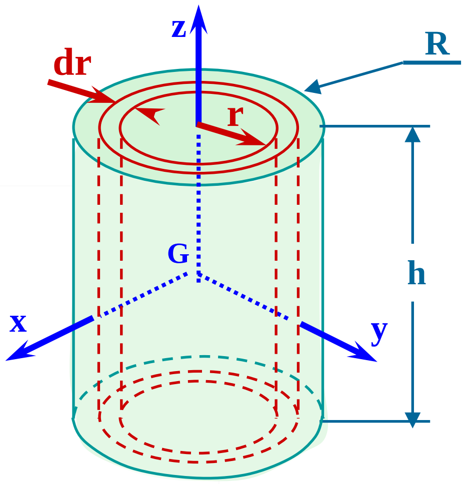
$$I_{xGy} = \rho \cdot S \cdot \int_s z^2 \cdot dz = \rho \cdot S \cdot \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} \Rightarrow I_{xGy} = \rho \cdot S \cdot \frac{h^3}{12}$$

On fait intervenir la masse dans l'expression de I_{xGy} **avec** $m = \rho \cdot S \cdot h$

$$I_{xGy} = \cancel{\rho} \cdot \cancel{S} \cdot \frac{h^3}{12} \cdot \frac{m}{\cancel{\rho} \cdot \cancel{S} \cdot h} \Rightarrow \boxed{I_{xGy} = m \cdot \frac{h^2}{12}}$$

Inertie d'un cylindre

Q1. Déterminer le moment d'inertie C du cylindre de rayon R et de hauteur h par rapport à l'axe $(G\vec{z})$.



On considère un tube de diamètre r et d'épaisseur dr
Ce volume de matière élémentaire a pour masse :

$$dm = \rho \cdot dv = \rho \cdot dS \cdot \theta \cdot X_{G_S} = \rho \cdot h \cdot dr \cdot 2\pi \cdot r$$

Le moment d'inertie I_{GZ} s'écrit :

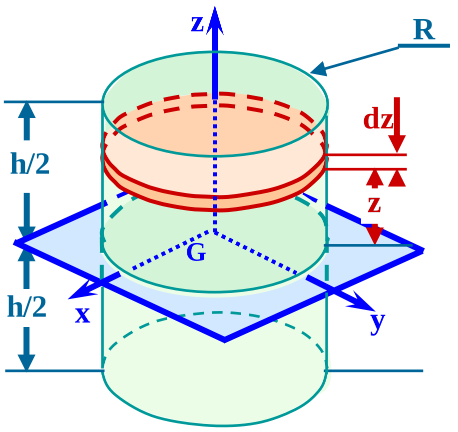
$$C = \int_s r^2 \cdot dm = \rho \cdot 2\pi \cdot h \cdot \int_{r=0}^{r=R} r^3 \cdot dr$$

$$= \rho \cdot 2\pi \cdot h \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=R} = \rho \cdot 2\pi \cdot h \cdot \frac{R^4}{4}$$

On fait intervenir ma masse dans l'expression de I_{GZ} avec $m = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$

$$\text{d'où} \quad C = \cancel{\rho} \cdot 2\cancel{\pi} \cdot \cancel{h} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{m}{\cancel{\rho} \cdot \cancel{\pi} \cdot R^2 \cdot \cancel{h}} \Rightarrow \boxed{C = \frac{m \cdot R^2}{2}}$$

Q2. Déterminer le moment d'inertie A par rapport à l'axe $(G\vec{x})$.



$$\boxed{C = I_{Gz} = \frac{m \cdot R^2}{2}}$$

On détermine ensuite $I_{Gx} = \int_s (y^2 + z^2) \cdot dm$

$I_{Gz} = \int_s (x^2 + y^2) \cdot dm$

Or par raison de symétrie de révolution, $\int_s x^2 \cdot dm = \int_s y^2 \cdot dm = \frac{I_{Gz}}{2} = \frac{m \cdot R^2}{4}$

d'où $I_{Gx} = \int_s (y^2 + z^2) \cdot dm = \int_s y^2 \cdot dm + \int_s z^2 \cdot dm = \frac{m \cdot R^2}{4} + \frac{m \cdot h^2}{12}$

On s'appuie sur le résultat obtenu pour le solide extrudé : $\boxed{I_{xGy} = m \cdot \frac{h^2}{12}}$ $\boxed{I_{Gx} = m \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)}$

Q3. Déterminer les produits d'inertie D, E et F.

Ils sont nuls.

Inertie d'un parallélépipède

Q1. Déterminer le moment d'inertie A par rapport à l'axe $(G\vec{x})$.
En déduire les moments d'inertie B et C.

Recherche des moments d'inertie par rapport aux trois plans parallèles aux axes du repère et

Pour le plan (x, G, y), on extrude un rectangle a×b entre –c/2 et +c/2.

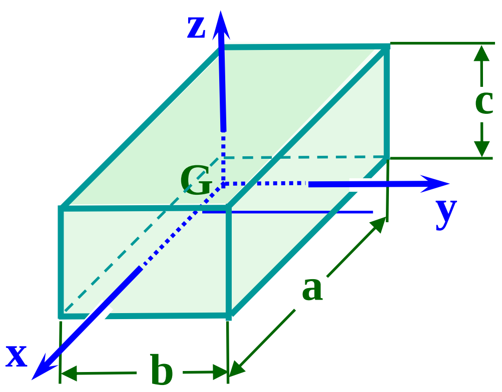
On obtient : $I_{xGy} = \frac{m \cdot c^2}{12}$

Pour le plan (y, G, z), on extrude un rectangle de section b×c entre –a/2 et +a/2.

On obtient : $I_{yGz} = \frac{m \cdot a^2}{12}$

Pour le plan (z, G, x), on extrude un rectangle de section c×a entre –b/2 et +b/2.

On obtient : $I_{zGx} = \frac{m \cdot b^2}{12}$



Recherche des moments d'inertie par rapport aux trois axes passant par G.

Pour l'axe (G, x),

$$\int_s (y^2 + z^2)\cdot dm = \int_s y^2 \cdot dm + \int_s z^2 \cdot dm$$

On obtient : $I_{Gx} = I_{zGx} + I_{xGy} \Rightarrow \boxed{I_{Gx} = A = m\cdot\frac{b^2+c^2}{12}}$

Pour l'axe (G, y),

$$\int_s (z^2 + x^2)\cdot dm = \int_s z^2 \cdot dm + \int_s x^2 \cdot dm$$

On obtient : $I_{Gy} = I_{xGy} + I_{yGz} \Rightarrow \boxed{I_{Gy} = B = m\cdot\frac{c^2+a^2}{12}}$

Pour l'axe (G, z),

$$I_{Gz} = \int_s (x^2 + y^2)\cdot dm = \int_s x^2 \cdot dm + \int_s y^2 \cdot dm$$

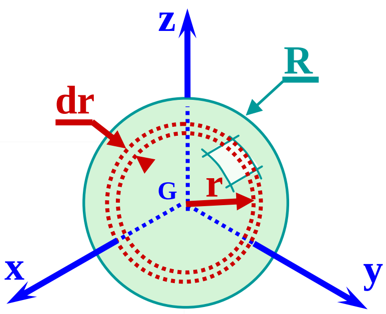
On obtient : $I_{Gz} = I_{yGz} + I_{zGx} \Rightarrow \boxed{I_{Gz} = C = m\cdot\frac{a^2+b^2}{12}}$

Q2. Déterminer les produits d'inertie D, E et F.

Ils sont nuls.

Inertie d'une sphère

Q1. Déterminer l'opérateur d'inertie d'une sphère de rayon R par rapport à un repère situé en son centre.



On remarque que tous les points situés sur une sphère d'épaisseur dr, de rayon r et centrée en G sont équidistants du centre G.

On cherche donc le moment d'inertie par rapport au point G.

$$\int_s r^2 \cdot dm = \int_s (x^2 + y^2 + z^2)\cdot dm \qquad \text{avec : } dm = \rho\cdot dv = \rho\cdot 4\cdot\pi r^2 dr$$

$$I_G = \int_s r^2\cdot\rho\cdot 4\cdot\pi r^2 dr = \rho\cdot 4\cdot\pi\cdot\int_s r^4 dr = \rho\cdot 4\cdot\pi\cdot\left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{R} = \rho\cdot 4\cdot\pi\cdot\frac{R^5}{5}$$

On fait intervenir la masse dans l'expression de I_G avec $m = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot R^3$

On remarque une symétrie sphérique

$$\int_s x^2\cdot dm = \int_s y^2\cdot dm = \int_s z^2\cdot dm = \frac{1}{3}\cdot I_G$$

$$I_{Gx} = \int_s (y^2 + z^2)\cdot dm = \frac{2}{5}\cdot m\cdot R^2 = I_{Gy} = I_{Gz}$$

Q2. Déterminer les produits d'inertie D, E et F.

Ils sont nuls.