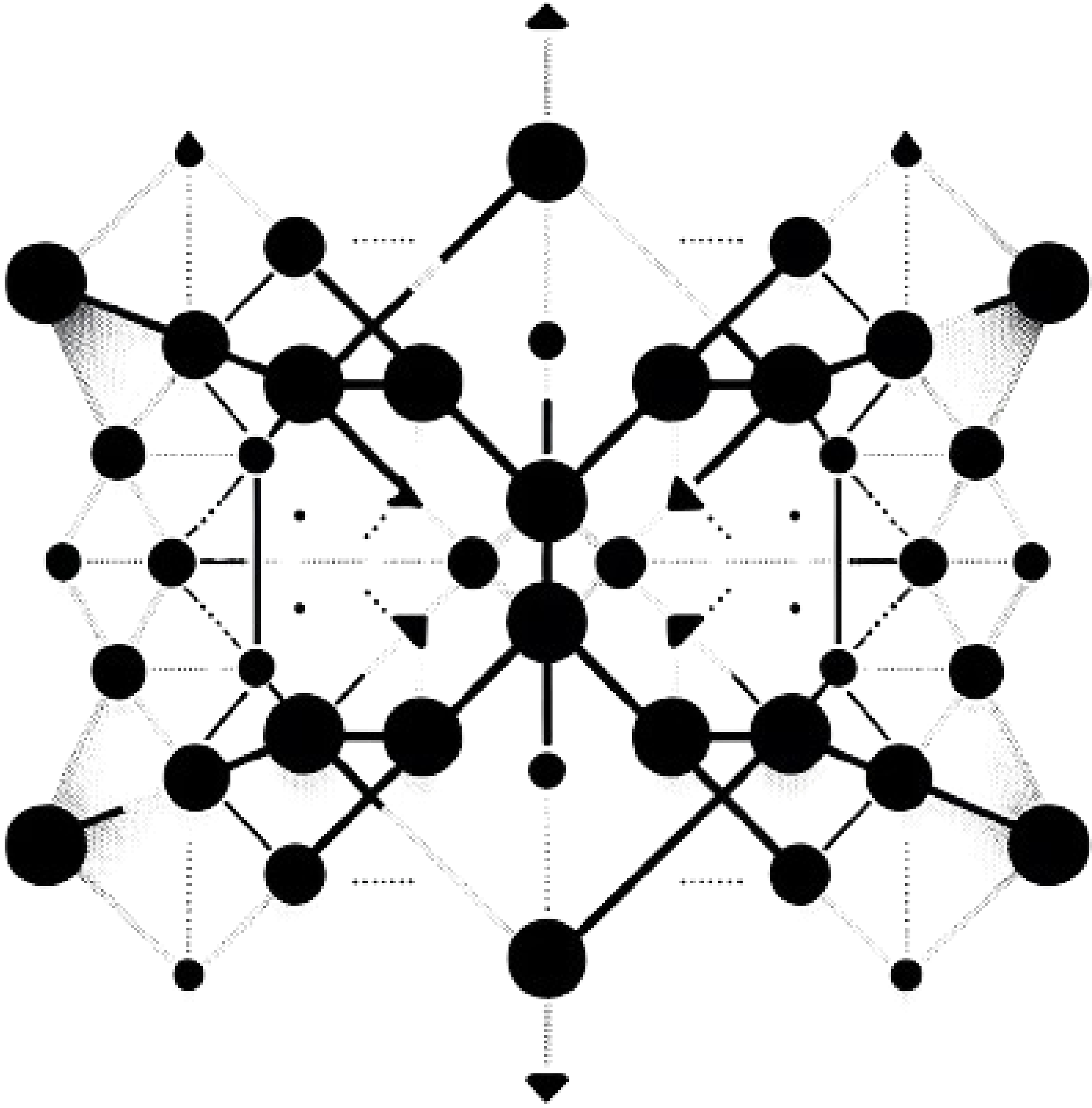
Licenciatura em Engenharia Informática
Algoritmos e Estruturas de Dados
Aveiro, 3 de Janeiro 2024



Ordenação Topológica com Grafos

Henrique Teixeira - 114588
Gabriel Silva - 113786

Índice

Introdução

O objetivo deste trabalho foi desenvolver e testar o Tipo Abstrato de Dados (TAD) "Graph", destinado a representar e manipular grafos e grafos orientados, com ou sem pesos associados às suas arestas. Este TAD utiliza uma estrutura de dados baseada em listas de vértices e as suas respectivas listas de adjacências, implementadas através do tipo de dados genérico *SortedList*. A implementação do TAD "Graph" é essencial para a operação básica sobre grafos, além de ser a base para 3 algoritmos mais complexos implementados em módulos autónomos desenvolvidos. Os principais desafios deste trabalho incluem:

1. Completar o desenvolvimento do TAD GRAPH, com foco nas funções com seus objetivos:
   - *GraphFromFile* - A leitura de informações de grafos a partir de arquivos de texto;
   - *GraphCopy* - A criação de cópias de grafos;
   - *GraphRemoveEdge* - A remoção de arestas em grafos orientado;
   - *GraphCheckInvariants* - A verificação de invariantes;
2. Desenvolver e testar três algoritmos específicos para determinar a ordem topológica de vértices em um grafo orientado, se possível. Estes algoritmos são:
   - 1º - Utiliza uma cópia do grafo orientado e nele realiza sucessivas eliminações de arcos emergentes de vértices sem arcos incidentes.
   - 2º - Não necessita da cópia do grafo,em vez disso usa um array auxiliar para sucessivamente procurar o próximo vértice a juntar à ordenação topológica.
   - 3 º - Usa uma fila para manter o conjunto dos vértices que irão ser sucessivamente adicionados à ordenação topológica.

Além disso, caracterizamos também a complexidade algorítmica das nossas soluções de ordenação topológica.

TAD Graph

GraphFromFile

Esta função verifica se o grafo é *Weighted* ou não, de modo a fazer o preenchimento das arestas corretamente, para além disso, verifica também a existência de lacetes. Chegamos a esta solução:

```
int isDigraph;
int isWeighted;
int numVertices;
int numEdges;
Graph* g;
fscanf(f, "%d", &isDigraph);
fscanf(f, "%d", &isWeighted);
fscanf(f, "%d", &numVertices);
fscanf(f, "%d", &numEdges);
if (isWeighted == 0) {
 g = GraphCreate(numVertices, isDigraph, isWeighted);
 for (int i = 0; i < numEdges; i++) {
   int v, w;
   fscanf(f, "%d %d", &v, &w);
   if (v == w) {
     continue;
   }
   GraphAddEdge(g, v, w);
 }
```

No caso de o grafo ser *Weighted é apenas mudado:*

```
double weight;
fscanf(f, "%d %d %lf", &v, &w, &weight);
int intWeight = (int)(weight * 100);
GraphAddWeightedEdge(g, v, w, intWeight);
```

GraphCheckInvariants

Esta função verifica se o grafo é *Digraph* ou não, caso seja, é percorrida a lista de vértices e são calculadas as invariâncias de cada um, sendo depois comparadas aos seus parâmetros da *Struct*.

```
if (g->isDigraph){
 unsigned int inDegree = 0;
 unsigned int outDegree = 0;

 for (unsigned int i = 0; i < g->numVertices; i++) {
  ListMove(g->verticesList, i);
  struct _Vertex* vertex=ListGetCurrentItem(g->verticesList);
  if (vertex->id != i)
    return 0;
  inDegree += vertex->inDegree;
  outDegree += vertex->outDegree;
 }
 if (inDegree != outDegree)
  return 0;
 if (inDegree != g->numEdges)
  return 0;
 if (outDegree != g->numEdges)
  return 0;
}
```

Caso não seja é simplesmente retornado:

```
return (ListGetSize(g->verticesList) == g->numVertices) &&
       (g->isComplete == 1 || g->isComplete == 0) &&
       (g->isWeighted == 1 || g->isWeighted == 0) &&
       (g->isDigraph == 1 || g->isDigraph == 0);
```

GraphCopy

Esta função verifica se o grafo é *Complete*, se sim:

```
if (g->isComplete){
   return GraphCreateComplete(g->numVertices,g->isDigraph);
 }
```

Caso não o seja, percorre as listas de vértices e suas respectivas arestas e acrescenta cada uma ao grafo.

```
Graph* g2=GraphCreate(g->numVertices,g->isDigraph, ->isWeighted);
for (unsigned int i = 0; i < g->numVertices; i++){
  ListMove(g->verticesList, i);
  struct _Vertex* v = ListGetCurrentItem(g->verticesList);
  List* edges = v->edgesList;
  ListMoveToHead(edges);
  for (unsigned int j = 0; j < ListGetSize(edges);
    ListMoveToNext(edges), j++){
    struct _Edge* e = ListGetCurrentItem(edges);
    if (g->isWeighted)
      GraphAddWeightedEdge(g2, i, e->adjVertex, e->weight);
    else
      GraphAddEdge(g2, i, e->adjVertex);
  }
}
```

GraphRemoveEdge

Esta função começa por encontrar o vértice escolhido e obter as suas arestas,

```
List* edges;
int count = 0;
// ir para o vértice v
ListMove(g->verticesList, v);
struct _Vertex* vertex_v =
ListGetCurrentItem(g->verticesList);
edges = vertex_v->edgesList;
```

Após isso, vai para o início da lista de arestas, percorrendo-a até encontrar a aresta pretendida,

```
ListMoveToHead(edges);
// percorrer a lista de arestas
for (unsigned int i = 0; i < ListGetSize(edges);
ListMoveToNext(edges), i++) {
 struct _Edge* e = ListGetCurrentItem(edges);
 if (e->adjVertex == w) {
   // remove da lista e decrementa
   ListRemoveCurrent(edges);
   vertex_v->outDegree --;
   count++;
   break;
 }
```

No caso da aresta não existir é retornado 0,

```
if (count == 0) return 0;
```

Para atualizar o vértice W, caso o grafo não seja orientado, o processo anterior é repetido apenas sem decrementar o *outDegree*, sendo este feito abaixo,

```
if (g->isDigraph)
   vertex_w->inDegree -= count;
 else
   vertex_w->outDegree -= count;
g->numEdges -= count;
g->isComplete = 0;
```

Todas estas funções terminam com `assert(GraphCheckInvariants(g));` e um valor de retorno adequado

Ordenação Topológica

A ordenação topológica de um gráfico é um arranjo linear de seus vértices. Para que a ordenação topológica seja possível, o gráfico deve ser um DAG (Grafo Acíclico Direcionado), garantindo que vai haver pelo menos uma maneira de ordenar os vértices sem quebrar a direção das arestas.

Primeiro Algoritmo - Cópia do Grafo

Este primeiro algoritmo consiste em operar sobre uma cópia do grafo, removendo, enquanto possível, os seus vértices sem arestas incidentes que não estejam *marked* e todas as suas arestas emergentes.

Análise da complexidade do Pior Caso

(n=nº de vértices, m = nº de arestas)

```
count++;
while (nVertices != verticesInSequence) {  - - - - - - - - - - - - - - - - ->
```
O(n)
```
 for (unsigned int i = 0; i < topoSort->numVertices; i++)  - - - - - - - - - - - - ->
```
O(n)
```
   if (GraphGetVertexInDegree(gCopy, i) == 0 && topoSort->marked[i] == 0) {
     // Remove outgoing edges
     if (GraphGetVertexOutDegree(gCopy, i) != 0) {
       unsigned int* adj = GraphGetAdjacentsTo(gCopy, i);
       unsigned int numEdges = GraphGetVertexOutDegree(gCopy, i);
       for (unsigned int j = 1; j < numEdges + 1; j++)
         GraphRemoveEdge(gCopy, i, adj[j]);
     }
     topoSort->marked[i] = 1;
     topoSort->vertexSequence[verticesInSequence++] = i;
     break;
   }
 }
 if (count == topoSort->numVertices)
   break;
}  - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
```
-> Complexidade Total = **O(n²)**

A resolução a que chegamos foi iterar sobre os vértices até todos estarem presentes na sequência, ou caso o grafo não seja possível de ordenar, sair do *loop* quando as iterações neste foram tantas quanto o número de vértices, visto que isso significa que já nenhum vértice tem vértices sem arestas incidentes.
A análise entre a complexidade obtida no estudo desta função e os valores práticos estão no Gráfico 1.

Segundo Algoritmo - *Array* auxiliar

Neste segundo algoritmo é calculado um *array* com o *inDegree* (número de arestas incidentes) de cada vértice.

Análise da complexidade do Pior Caso

```
for (unsigned int i = 0; i < topoSort->numVertices; i++)  - - - - - - - - - - - - -
```
->O(n)
```
 topoSort->numIncomingEdges[i] = GraphGetVertexInDegree(g, i);
```
Após isto, vai ser selecionado, enquanto possível, um vértice com *numIncomingEdges* == 0 e que não esteja *marked*,
```
while (verticesInSequence != nVertices) {- - - - - - - - - - - - - - - - -
```
->O(n)
```
   for (unsigned int v = 0; v < topoSort->numVertices; v++) {  - - - - - - - - - - -
```
->O(n)
```
     if (topoSort->numIncomingEdges[v] == 0 && topoSort->marked[v] == 0) {
       topoSort->marked[v] = 1;
       // inserir v no topoSort
       topoSort->vertexSequence[verticesInSequence++] = v;
```
O último passo é remover uma aresta a cada vértice adjacente ao vértice selecionado.
```
unsigned int* adj = GraphGetAdjacentsTo(g, v);
for (unsigned int w = 1; w < GraphGetVertexOutDegree(g, v) + 1  ; w++)  - - - - - - - - -
```
->O(m)
```
 topoSort->numIncomingEdges[adj[w]]--;
```
- - - - - - - - - - - - -> Complexidade Total = O(n+n×(n+m)) = O(n+n²+n×m) = **O(n²)**

A lógica para sair do loop é a mesma do primeiro Algoritmo.
A análise entre a complexidade obtida no estudo desta função e os valores práticos estão no Gráfico2.

Terceiro Algoritmo - Manter o conjunto de candidatos

O terceiro algoritmo é implementado usando Filas (*Queues*). Repetimos inicialmente o passo do segundo algoritmo de fazer um *array* com todos os *inDegree* dos vértices, isto irá ser usado para criar uma fila com todos os vértices com *numIncomingEdges* == 0.

Análise da complexidade do Pior Caso

->O(n)

```
for (unsigned int v = 0; v < topoSort->numVertices; v++) {
```

->O(n)

```
 if (topoSort->numIncomingEdges[v] == 0)
   QueueEnqueue(queue, v);
}
```

Enquanto esta fila não for vazia, retira-se o primeiro vértice dela e adiciona-se à sequência.

```
while ( !QueueIsEmpty(queue) ) {
```

-->O(n)

```
 // retirar próximo vértice da fila
 unsigned int v = QueueDequeue(queue);
 // inserir v no topoSort
 topoSort->vertexSequence[verticesInSequence++] = v;
```

Por último, para cada vértice adjacente ao vértice retirado da lista é decrementado o *outDegree*. Se isto significar que o *outDegree* de um vértice se vai tornar 0, este vértice irá ser adicionado à fila.

```
 // para cada vértice w adjacente a v
 unsigned int* adj = GraphGetAdjacentsTo(g, v);
 for (unsigned int w = 1; w < GraphGetVertexOutDegree(g, v) + 1 ; w++) {
```

->O(m)

```
   // decrementar numEdgesPerVertex[w]
   topoSort->numIncomingEdges[adj[w]]--;
   // se numEdgesPer Vertex[w] == 0
   if (topoSort->numIncomingEdges[adj[w]] == 0)
     // inserir w na fila
     QueueEnqueue(queue, adj[w]);
 }
}
```

-> Complexidade Total = O(n+n+n+m) = **O(n+m)**

NOTA: Todos estes algoritmos terminam com uma verificação sobre a validação do *sorting:*

```
if (verticesInSequence == nVertices) {topoSort->validResult = 1;}
```

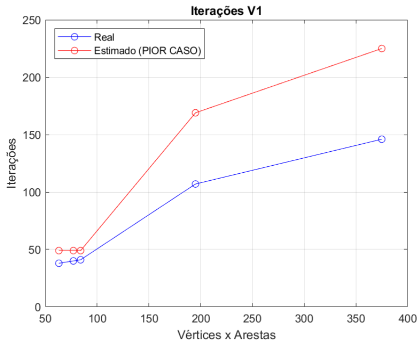
A análise entre a complexidade obtida no estudo desta função e os valores práticos estão no Gráfico 3.

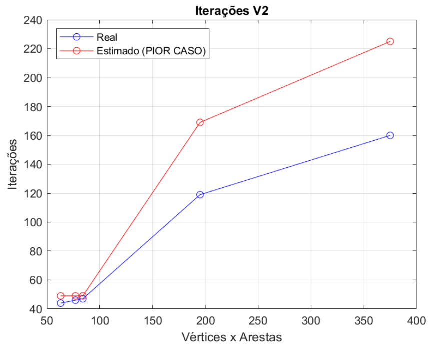
Análise dos resultados obtidos

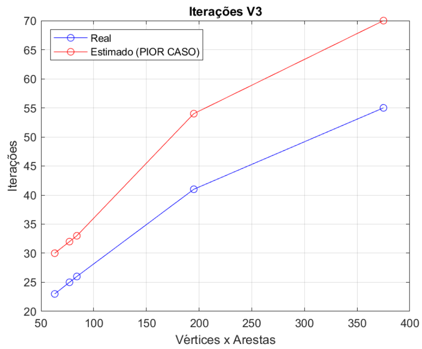
Para avaliar a complexidade dos algoritmos, comparamos vários elementos obtidos ao executar o nosso código e o valor por nós calculado teoricamente.

Iterações

A fim de ver a complexidade comparamos as iterações obtidas com os valores da complexidade teórica (obtida na explicação de cada algoritmo explicado acima).





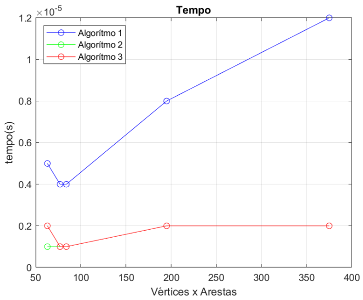


. Gráfico 1 Gráfico 2 Gráfico 3

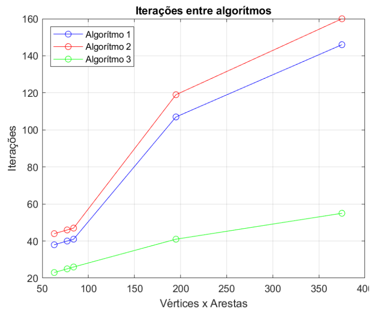
Podemos observar uma leve discrepância entre os [resultados teóricos] e os práticos. Isto acontece devido ao valor teórico calculado ter sido o pior caso. O pior caso é apenas obtido quando o grafo não é computável, o que não aconteceu nos nossos testes, visto que decidimos apresentar apenas resultados de dígrafos acíclicos.

Comparação entre algoritmos

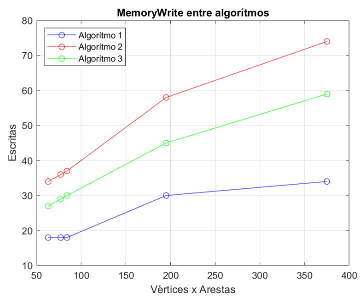
Decidimos também apresentar vários elementos de comparação entre os 3 algoritmos

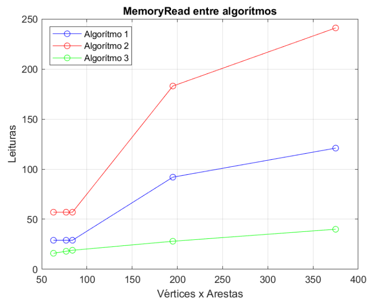


Tempo de execução



Iterações





Vezes de modificação de *data structures* Vezes de acesso a *data structures*

Conclusão

Os resultados obtidos neste projeto vão de encontro com as expectativas iniciais. A análise feita demonstra que os algoritmos implementados se adequam aos requisitos de um DAG (Directed Acyclic Graph), respeitando a aciclicidade necessária para a ordenação topológica. Através dos testes e estudo realizados, verificamos que a complexidade dos algoritmos está alinhada com os valores teóricos, tendo a complexidade esperada.

Para ainda mais confirmar a construção do nosso código fizemos ainda múltiplas verificações com o *valgrind*, confirmando que não existe nenhuma fuga de memória no uso das funções e algoritmos por nós desenvolvidos. A mensagem para todos os grafos testados foi a mesma:

All heap blocks were freed -- no leaks are possible

Este projeto proporcionou um aprofundamento significativo no nosso entendimento dos conceitos de grafos e algoritmos em C, além de reforçar habilidades de programação e resolução de problemas. Além disso, contribuiu para melhorar nosso trabalho em equipa e fortaleceu a nossa capacidade de solucionar problemas complexos através de algoritmos, um desafio fundamental neste projeto.