

Procesarea semnalelor

Filtre FIR

Paul Irofti

Universitatea din București

Facultatea de Matematică și Informatică

Departmentul de Informatică

Email: paul.irofti@fmi.unibuc.ro

Discretizare și eșantionare

Continuu:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \quad (1)$$

Discret:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi (f_0 + k f_s) n t_s) \quad (2)$$

unde

- ▶ f_0 – frecvența (Hz) măsoară numărul de oscilații într-o secundă
- ▶ n – eșantionul, indexul în șirul de timpi $0, 1, 2 \dots$
- ▶ t_s – perioada de eșantionare; constantă (ex. la fiecare secundă)
- ▶ $n t_s$ – orizontul de timp (s)
- ▶ $f_0 n t_s$ – numărul de oscilații măsurat
- ▶ $2\pi f_0 n t$ – unghiul măsurat în radiani (vezi note de curs)
- ▶ f_s – frecvența de eșantionare (Hz)
- ▶ $f_0 + k f_s$ – frecvența de aliare, $\forall k \in \mathbb{N}$

Transformata Fourier Discretă (DFT)

Definiție

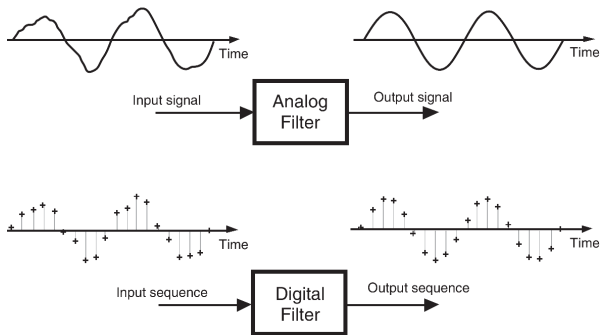
Transformata Fourier a unui semnal discret (aperiodic):

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N)] \end{aligned} \quad (3)$$

- ▶ $X(m)$ – componenta m DFT (ex. $X(0), X(1), X(2), \dots$)
- ▶ m – indicele componentei DFT în domeniul frecvenței ($m = 0, 1, \dots, N - 1$)
- ▶ $x(n)$ – eșantioanele în timp (ex. $x(0), x(1), x(2), \dots$)
- ▶ n – indicele eșantioanelor în domeniul timpului ($n = 0, 1, \dots, N - 1$)
- ▶ N – numărul eșantioanelor în timp la intrare și numărul componentelor în frecvență la ieșire

Definiție

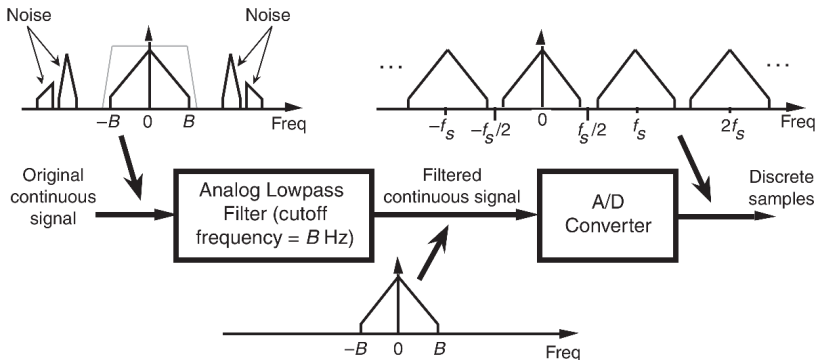
Filtrarea reprezintă prelucrarea unui semnal în domeniul timpului ce induce o schimbare în componența spectrală. Schimbarea constă în reducerea sau eliminare anumitor componente: filtrele permit anumitor frecvențe să treacă și le atenuează pe restul.



Exemplu filtrare

Definiție

Filtru trece-jos este un filtru care acceptă componentele în frecvență mai mică de o bandă B și le elimină sau atenuează pe cele mai mari decât B .



Tipuri de filtre

Filtrele digitale sunt în esență tot semnale discretizate și sunt notate cu $h(n)$.

Există două tipuri de filtre diferențiate prin modul în care răspund la semnalul de la intrare $x(n)$:

- ▶ *finite impulse response* (FIR)
 - ▶ consideră valorile precedente din $x(n)$
 - ▶ se stabilizează rapid la zero după încheierea intrării
 - ▶ folosesc operații simple de calcul
- ▶ *infinite impulse response* (IIR)
 - ▶ consideră valorile precedente din $x(n)$
 - ▶ iau în considerare **ieșirile precedente**
 - ▶ reprezintă relații de recurență
 - ▶ alcătuiesc bucle de *feedback*

Filtrele FIR sunt mai simplu de analizat și implementat, motiv pentru care sunt cel mai des întâlnite în practică.

Definiție

Dat un număr finit de intrări nenule $x(n)$, aplicarea unui filtru FIR $h(n)$ va duce tot timpul la o ieșire $y(n)$ ce conține un număr finit de eșantioane nenule.

Calculul mediei este un exemplu bun de filtru FIR.

Exemplu

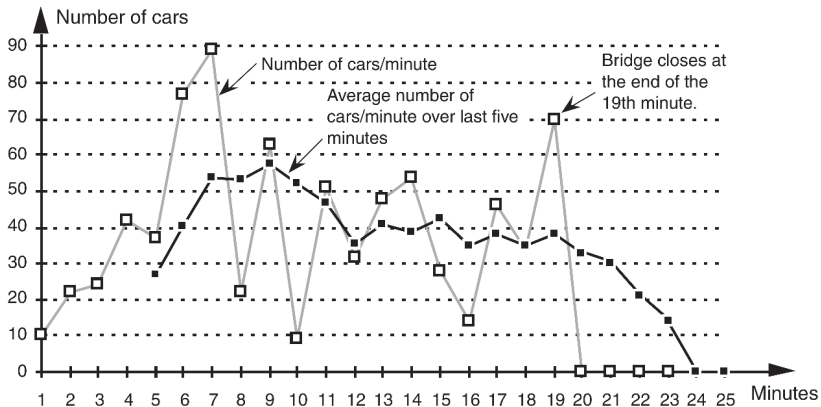
Fie o aplicație ce contorizează traficul pe un pod. În fiecare minut primim numărul de mașini ce au traversat podul. Vrem să calculăm media mobilă într-un interval de timp (fereastră) de 5 minute.

Exemplu: medie mobilă

Minut	Nr. mașini	Media per 5 min.
1	10	-
2	22	-
3	24	-
4	42	-
5	37	27
6	77	40,4
7	89	53,8
8	22	53,4
9	63	57,6
10	9	52

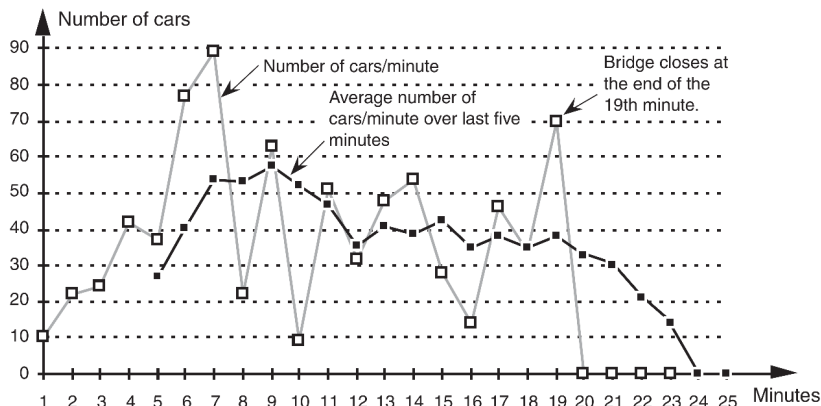
$$\begin{aligned}\frac{10}{5} &= 2 \\ \frac{10 + 22}{5} &= 6,4 \\ \frac{10 + 22 + 24}{5} &= 11,2 \\ \frac{10 + 22 + 24 + 42}{5} &= 19,6 \\ \frac{10 + 22 + 24 + 42 + 37}{5} &= 27 \\ \frac{22 + 24 + 42 + 37 + 77}{5} &= 40,4 \\ &\vdots \\ \frac{77 + 89 + 22 + 63 + 9}{5} &= 52\end{aligned}$$

Exemplu: medie mobilă



Observații medie mobilă

Variațiile mari în timp reprezintă componente de înaltă frecvență.



- schimbările bruște sunt atenuate de către medie
- FIR: ieșirea curentă nu depinde de valori precedente ale ieșirii
- comportament de filtru trece-jos
- ultima intrare este 19; filtrul ajunge rapid la zero după aceasta

Ieșirea 5 este calculată în funcție de ultimele 5 intrări:

$$y(5) = \frac{1}{5}[x(1) + x(2) + x(3) + x(4) + x(5)] \quad (4)$$

În cazul general pentru ieșirea n notăm eșantionul k cu $x(k)$ iar formula rezultată este:

$$y(n) = \frac{1}{5}[x(n-4) + x(n-3) + x(n-2) + x(n-1) + x(n)] \quad (5)$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{k=n-4}^n x(k) \quad (6)$$

A ce miroase (6)?

Ieșirea 5 este calculată în funcție de ultimele 5 intrări:

$$y(5) = \frac{1}{5}[x(1) + x(2) + x(3) + x(4) + x(5)] \quad (4)$$

În cazul general pentru ieșirea n notăm eșantionul k cu $x(k)$ iar formula rezultată este:

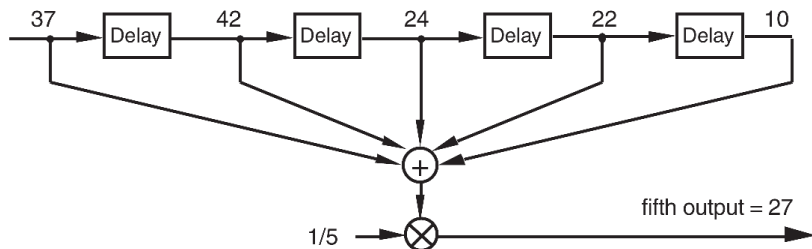
$$y(n) = \frac{1}{5}[x(n-4) + x(n-3) + x(n-2) + x(n-1) + x(n)] \quad (5)$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{k=n-4}^n x(k) \quad (6)$$

A ce miroase (6)? Răspuns: DFT!

Structura filtrului

Structura filtrului este reprezentată printr-o diagramă hardware (vezi primele cursuri).



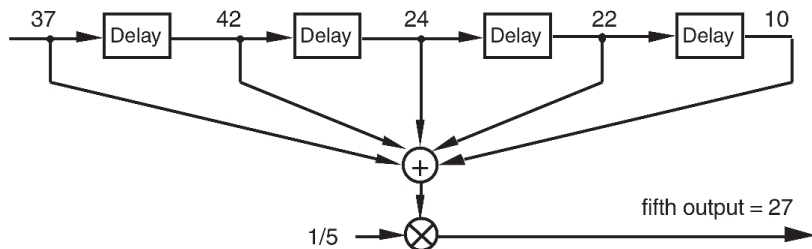
Putem la fel de bine să înmulțim cu $\frac{1}{5}$ și pe urmă să adunăm

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{5}x(n-4) + \frac{1}{5}x(n-3) + \frac{1}{5}x(n-2) + \frac{1}{5}x(n-1) + \frac{1}{5}x(n) \\ &= \sum_{k=n-4}^n \frac{1}{5}x(k) \end{aligned} \quad (7)$$

A ce miroase (7)?

Structura filtrului

Structura filtrului este reprezentată printr-o diagramă hardware (vezi primele cursuri).



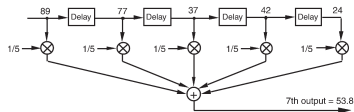
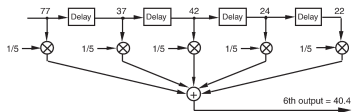
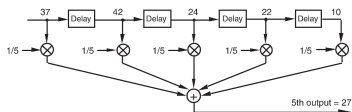
Putem la fel de bine să înmulțim cu $\frac{1}{5}$ și pe urmă să adunăm

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{5}x(n-4) + \frac{1}{5}x(n-3) + \frac{1}{5}x(n-2) + \frac{1}{5}x(n-1) + \frac{1}{5}x(n) \\ &= \sum_{k=n-4}^n \frac{1}{5}x(k) \end{aligned} \quad (7)$$

A ce miroase (7)? Răspuns: convoluție!

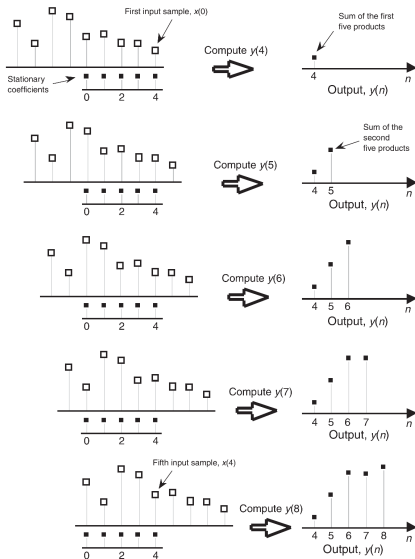
Calcul prin deplasare la dreapta

Observați efectul de deplasare de la stânga la dreapta:



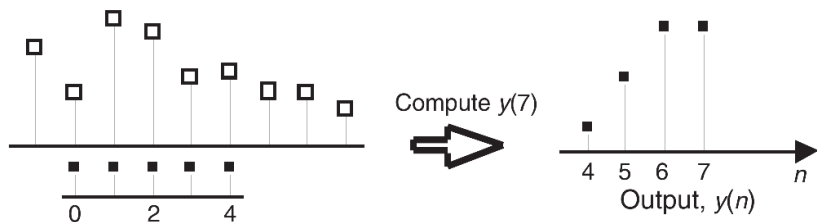
- ▶ *right shift*: filtrul aruncă cea mai veche intrare $x(n - 5)$
- ▶ procesul continuu de deplasare la dreapta → *filtru transversal*
- ▶ intrările active $x(k)$ se mai numesc și **taps**
- ▶ valorile folosite la înmulțire se numesc **coeficienții** filtrului
- ▶ răspunsul în frecvență este determinat de *taps* și coeficienți

Filtrarea este convoluție



Filtrarea este convoluție

Fie $x(0), x(1), \dots, x(n)$ eșantioanele semnalului $x(n)$ **reprezentate de la dreapta la stânga** ca în figură.



Notăm $h(0), h(1), h(2), h(3), h(4)$ semnalul a cărui eșantioane sunt coeficienții filtrului **reprezențați de la stânga la dreapta**.

Atunci (7) devine convoluția filtrului cu taps-urile unde $h(k) = \frac{1}{5}$:

$$\begin{aligned} y(n) &= h(4)x(n-4) + h(3)x(n-3) + h(2)x(n-2) + \\ &+ h(1)x(n-1) + h(0)x(n) = \sum_{k=n-4}^n h(k)x(n-k) \quad (8) \end{aligned}$$

Pentru un filtru FIR cu M-tap-uri ieșirea n este:

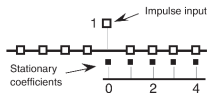
$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \quad (9)$$

Formula de calcul a convoluției pentru filtrele FIR discrete:

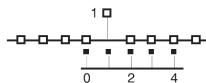
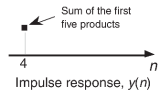
- ▶ inversarea ordinii axei timpului pentru $x(n)$
- ▶ iterația deplasează de la dreapta la stânga coeficienții filtrului
- ▶ pentru fiecare intrare nouă din $x(n)$ efectuăm suma produselor pentru a produce o ieșire $y(n)$
- ▶ similar cu operația DOT la înmulțirea matricelor

$$y(n) = h(k) * x(n) \quad (10)$$

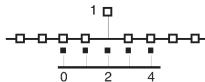
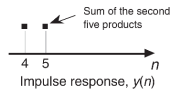
Răspunsul la impuls dirac



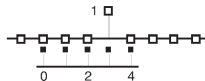
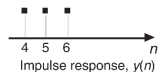
Compute $y(4)$



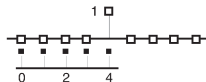
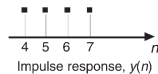
Compute $y(5)$



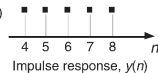
Compute $y(6)$



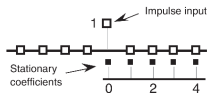
Compute $y(7)$



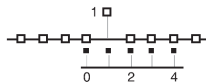
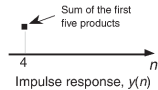
Compute $y(8)$



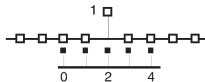
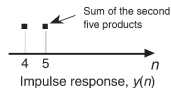
Răspunsul la impuls dirac



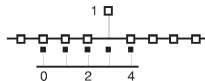
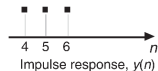
Compute $y(4)$



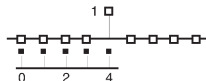
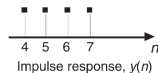
Compute $y(5)$



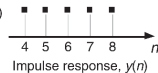
Compute $y(6)$



Compute $y(7)$



Compute $y(8)$



Răspunsul la impuls este identic cu coeficienții filtrului!

Teorema convoluției

Teoremă

Transformata Fourier Discretă (DFT) a convoluției dintre răspunsului la impuls a unui filtru (a coeficienților) și o secvență de M intrări (taps) este egală cu produsul dintre DFT-ul intrării și DFT-ul răspunsului la impuls a filtrului.

$$y(n) = h(k) * x(n) \xrightleftharpoons[\text{IDFT}]{\text{DFT}} H(m)X(m) = Y(m) \quad (11)$$

Convoluția în domeniul timpului este produs în domeniul frecvenței!

Componenta spectrală $Y(m)$ este DFT-ul semnalului $h(k) * x(n)$.

Semnalul $h(k) * x(n)$ este obținut din IDFT-ul bin-ului $Y(m)$.

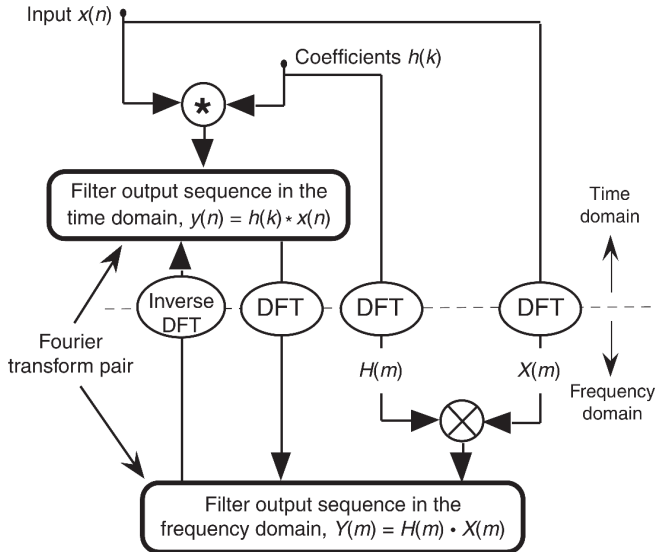
Demonstrație: Teorema convoluției

$$y(n) = h(k) * x(n) \xLeftrightarrow[\text{IDFT}]{\text{DFT}} H(m)X(m) = Y(m)$$

Demonstrație:

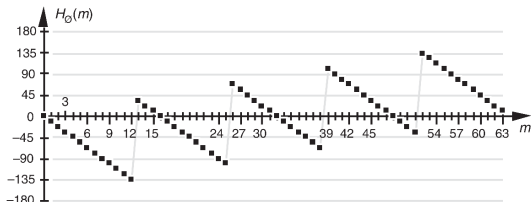
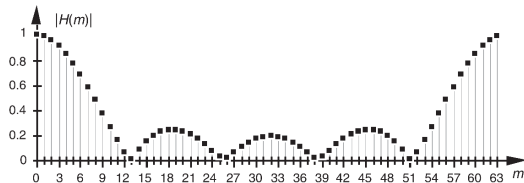
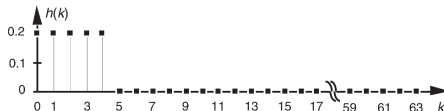
$$\begin{aligned} Y(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j2\pi mn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi mn/N} \sum_{k=0}^{M-1} h(k) x(n-k) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} h(k) x(n-k) e^{-j2\pi mn/N} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k) e^{-j2\pi mn/N} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n-k) e^{-j2\pi mn/N} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-j2\pi mk/N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} = H(m)Y(m) \end{aligned}$$

Teorema convoluției



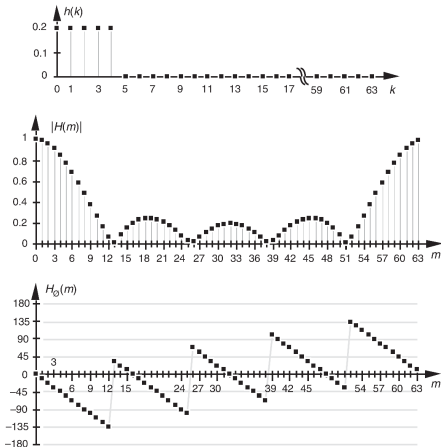
DFT a filtrului medie cu extensie la $N = 64$ puncte

Sunt adăugate 59 de zerouri, iar magnitudinea este normalizată.



DFT a filtrului medie cu extensie la $N = 64$ puncte

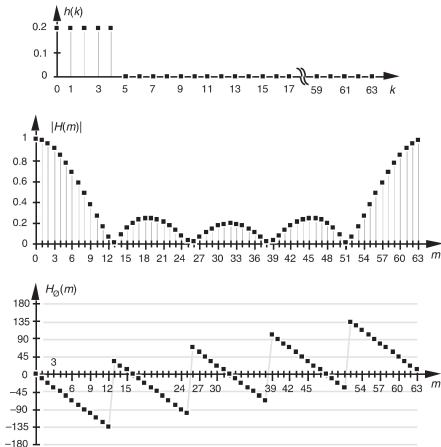
Trecerea bruscă a coeficienților de la 0,2 la 0 creează *sidelobes*.



- ▶ ce funcție este $H(m)$?
- ▶ care este frecvența de pliere (folding)?
- ▶ care este perioada în domeniul frecvenței?

DFT a filtrului medie cu extensie la $N = 64$ puncte

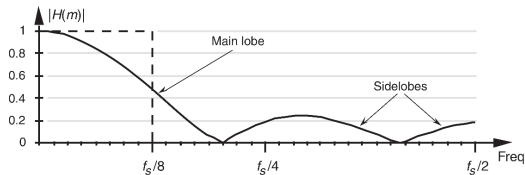
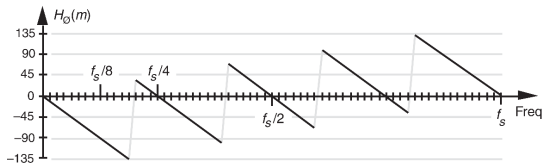
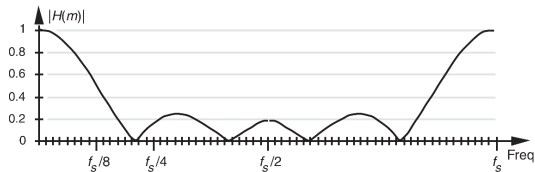
Trecerea bruscă a coeficienților de la 0,2 la 0 creează *sidelobes*.



- ▶ ce funcție este $H(m)$? Răspuns: $\text{sinc}(\cdot)$
- ▶ care este frecvența de pliere (folding)? Răspuns: $m = 32$
- ▶ care este perioada în domeniul frecvenței? Răspuns: f_s

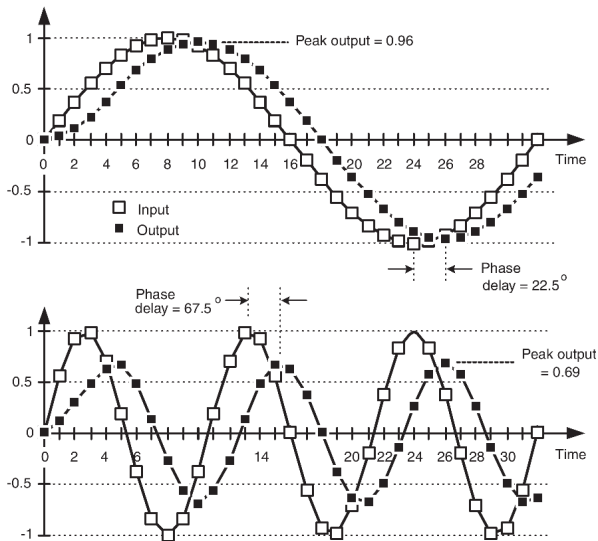
Analiza răspunsului în frecvență a filtrului

Media se comportă ca un filtru trece-jos

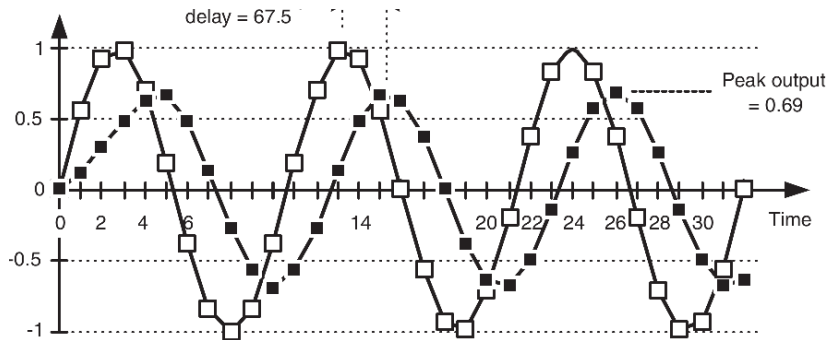


Exemplu $\sin(\cdot)$: intrarea sinusoide $f_s/32$ și $3f_s/32$

Atenuează componentele cu frecvență înaltă și păstrează joasele.



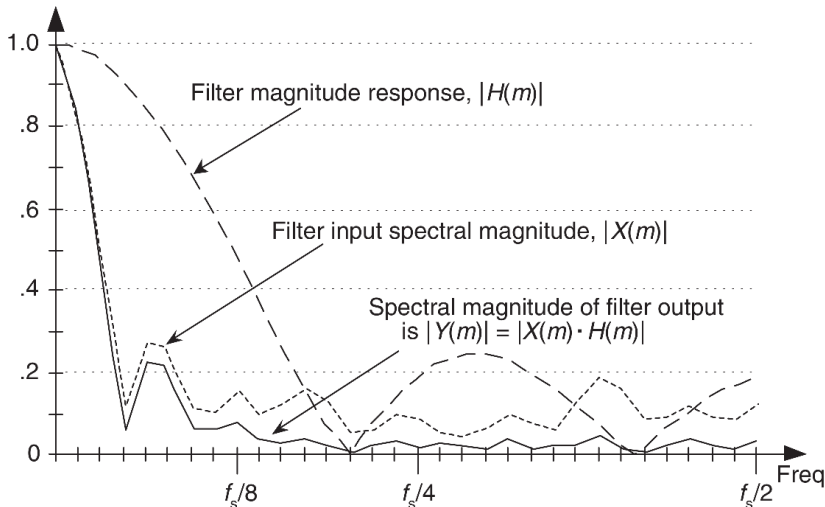
Observații exemplu sinusoidă



- ▶ primele 4 ieșiri nu sunt sinusoidale → *răspuns tranzitoriu*
- ▶ numărul de eșantioane de tranziție este egal cu numărul D de unități de întârziere ale filtrului (nu cu numărul de coeficienți nenuli!)
- ▶ ieșirile nu sunt valide până la $y(D + 1)$

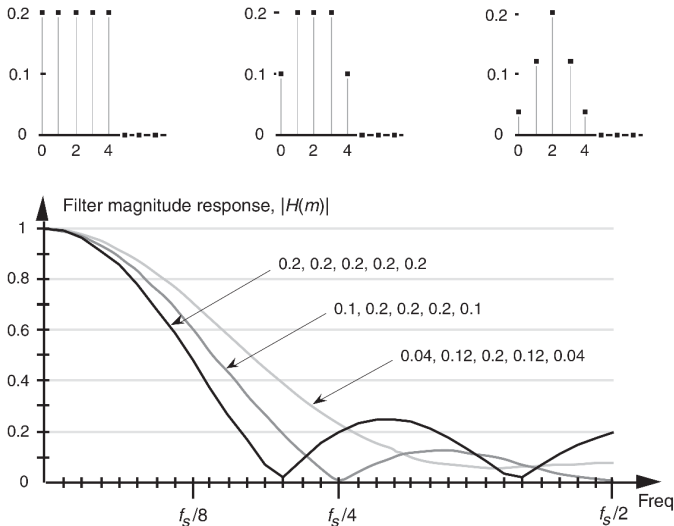
Exemplu pod: răspunsul în frecvență

Atenuază componentele cu frecvență înaltă și păstrează joasele.



Efectul coeficienților asupra filtrului

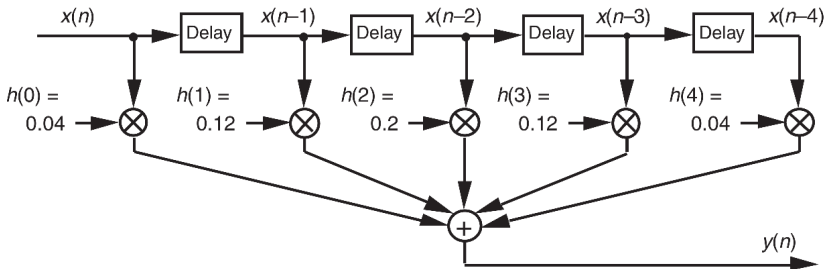
Trecerea bruscă a coeficienților de la 0,2 la 0 creează *sidelobes*.



Reducerea *sidelobes* lărgeste *mainlobe*.

Generalizare

Construcția filtrelor FIR transversale implică schimbarea coeficienților și a numărului de tap-uri, dar nu schimbă altfel structura filtrului medie studiat.



Proiectarea filtrelor presupune determinarea coeficienților după nevoile proprii, punctuale, aplicației cu care avem de a face.

Determinăm răspunsul în frecvență **dorit** și calculăm coeficienții filtrelor în funcție de acesta!

Algoritmii de calcul prin

- ▶ metoda ferestrei
- ▶ metoda optimum

Pornim de la un răspuns în frecvență ideal și analog $H(f)$.

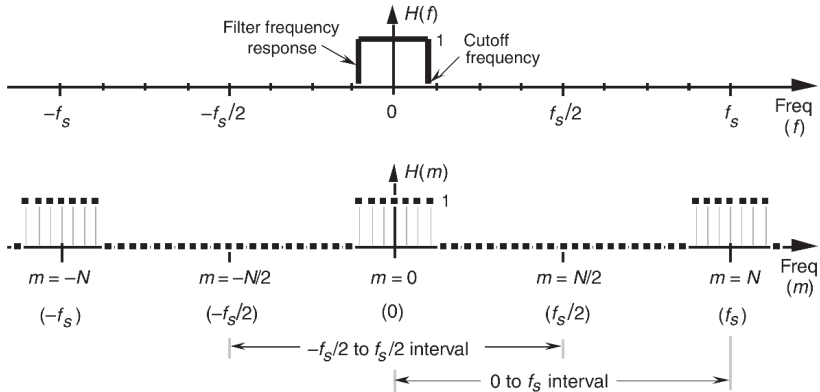
Definiție

Un filtru ideal reprezintă un filtru trece-jos cu gain unitar la frecvențe joase și gain nul (atenuare infinită) după o anumită frecvență de tăiere (cutoff frequency)

Metoda algebrică de calcul al coeficienților în domeniul timpului:

1. construcția unei expresii $H(m)$ ce reprezintă răspunsul dorit în frecvență
2. aplicarea transformatei IDFT pentru a obține $h(k)$
3. evaluarea expresiei $h(k)$ drept o funcție în domeniul timpului de indice k

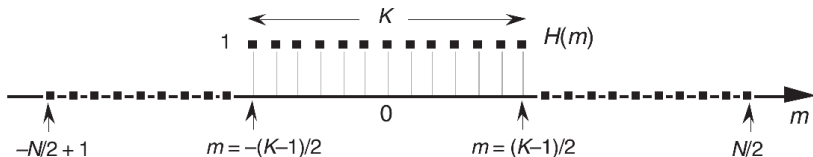
Exemplu: filtru ideal



Metoda algebrică: construcție

Fie răspunsul $H(m)$ cu N eșantioane în intervalul $\pm \frac{f_s}{2}$ și K eșantioane unitare pentru zona de trece-bandă.

$$h(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=-(N/2)+1}^{N/2} H(m) e^{j2\pi mk/N} \quad (13)$$

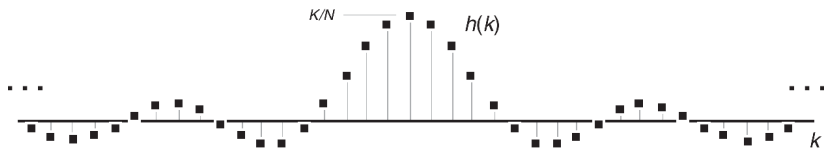


Soluția este cunoscută, și anume funcția sinc:

$$h(k) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi k K / N)}{\sin(\pi k / N)} \quad (14)$$

Soluția este cunoscută, și anume funcția sinc:

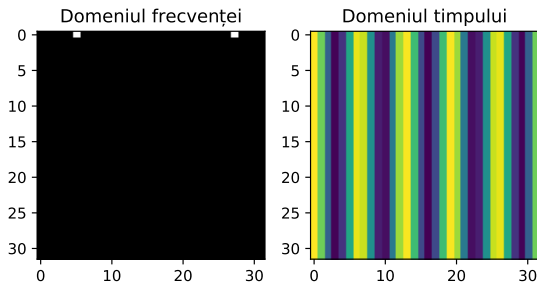
$$h(k) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi k K / N)}{\sin(\pi k / N)} \quad (16)$$



Metoda programatică

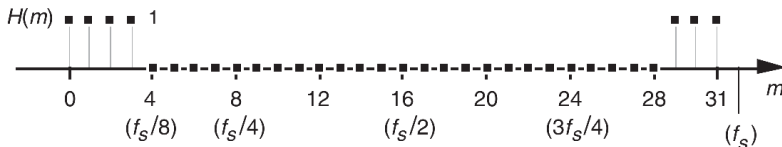
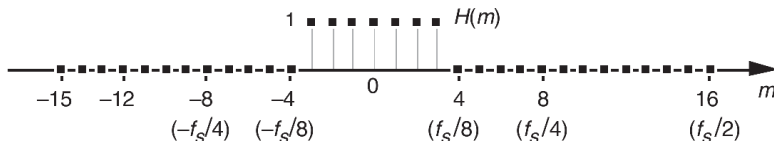
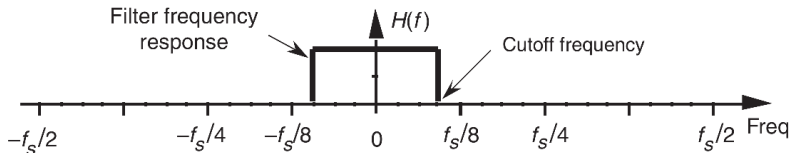
Metoda programatică de calcul al coeficienților în domeniul timpului:

1. definim individual eșantioanele în domeniul frecvenței ce reprezintă $H(m)$
2. folosim un program să calculeze IDFT pentru a obține $h(k)$
3. evaluarea expresiei $h(k)$ drept o funcție în domeniul timpului de indice k



Metoda programatică: indecși negativi

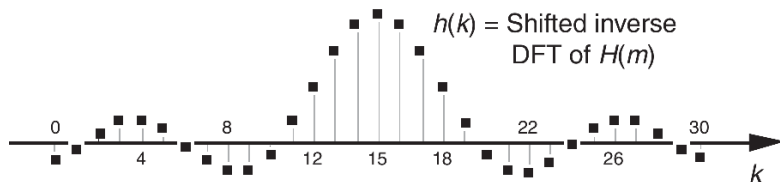
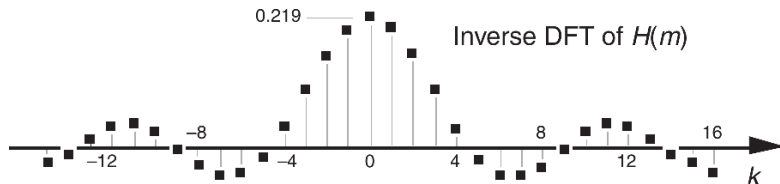
Pentru $N = 32$, dorim evitarea celor 16 eșantioane din stânga.



Profităm de simetrie și dorim intervalul $[0, f_s - 1]$ înloc de $\pm f_s/2$.

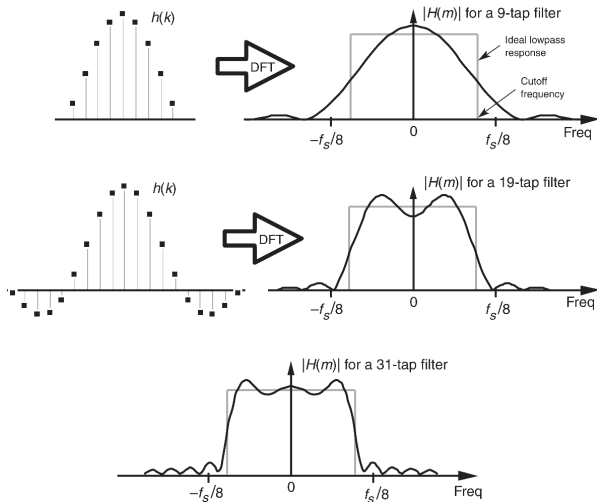
Metoda programatică: *shift* în domeniul timpului

Pentru că ne dorim simetrie în jurul lobului principal, putem aplica o operație de *shift* la stânga care, cf. teoremei de shifting (vezi cursurile anterioare), păstrează magnitudinea eşantioanelor.



Proiectare: numărul de *taps*

Cu cât avem mai mulți termeni $h(k)$ cu atât aproximăm mai bine răspunsul ideal în frecvență.



Apare efectul de **ripples** în banda de trecere (*passband*)!

Teorema convoluției 2

Convoluția în domeniul timpului este multiplicare în frecvență.

$$h(k) * x(n) \xrightleftharpoons[\text{IDFT}]{\text{DFT}} H(m)X(m)$$

Remarcă

Precum știm, componentele n și m sunt indexate de la 0 la $N - 1$. Deci nu contează domeniile de dedesubt, teorema convoluției (11) ne spune de fapt că operația de convoluție dintr-un domeniu este echivalentă cu multiplicarea în celălalt domeniu. Astfel putem scrie și relația invers:

$$h(k)x(n) \xrightleftharpoons[\text{IDFT}]{\text{DFT}} H(m) * X(m) \quad (17)$$

Fie h^∞ un filtru ideal trece-jos $\text{sinc}(x)$ infinit de lung și $w(k)$ o fereastră cu care trunchiem termenii h^∞ .

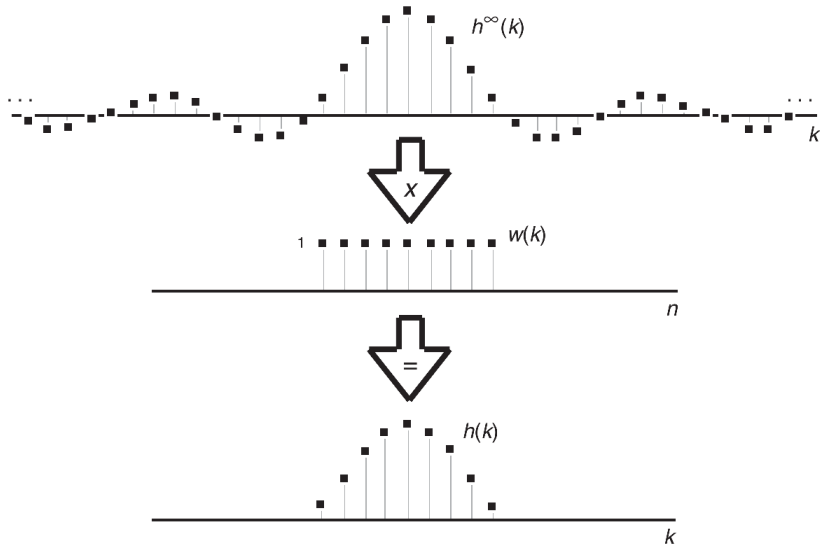
Atunci putem rescrie (17) pentru a obține filtrul discretizat dorit astfel:

$$h^\infty(k)w(k) \xrightleftharpoons[\text{IDFT}]{\text{DFT}} H(m)^\infty * W(m) \quad (18)$$

Lungimea lui $w(k)$ reprezintă efectiv numărul de *taps* dorite în filtrul proiectat $H(m)$:

$$H(m) = H^\infty(m) * W(m) \quad (19)$$

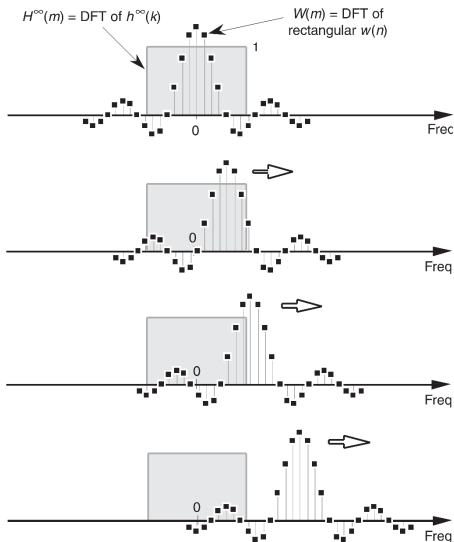
Exemplu: metoda ferestrei



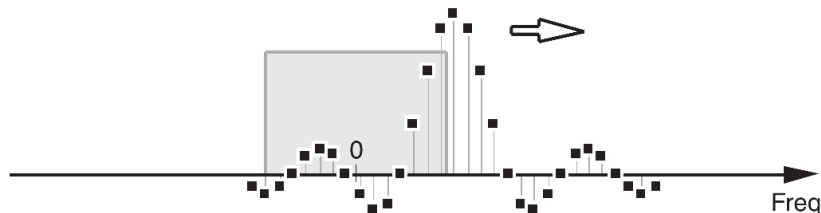
Lungimea lui $w(k)$ reprezintă efectiv numărul de *taps* dorite.

Convoluția în frecvență

Pașii necesari pentru a efectua calcul ecuației (19):



Observații: convoluția în frecvență

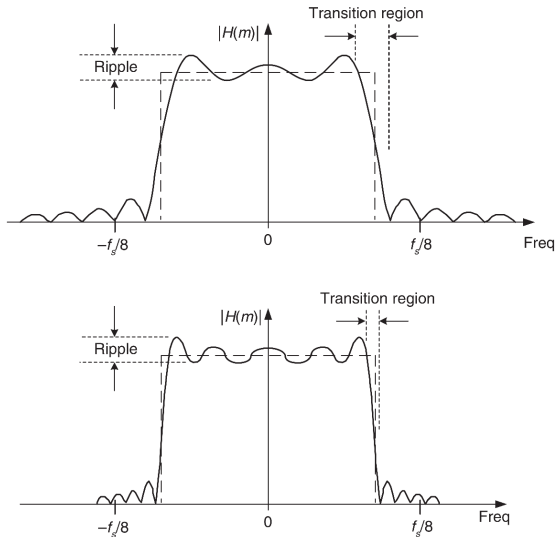


- ▶ $H(m)$ este construit din suma produselor H^∞ și $W(m)$ pentru o deplasare dată a lui $W(m)$
- ▶ $H(m)$ pentru un m dat reprezintă suma eșantioanelor din $W(m)$ care se suprapun cu H^∞
- ▶ când lobul principal părăsește fereastra, începe perioada de atenuare a frecvențelor
- ▶ pe măsură ce deplasarea ferestrei continuă peste frecvența de *cutoff*, efectul de *ripple* continuă

Cum putem elimina efectul de ripple?

Ripple în funcție de numărul de *taps*: $N = 32$ vs. $N = 64$

Numărul de *taps* micșorează perioada de tranziție.



Dar efectul de ripple rămâne neafectat!

Fenomenul lui Gibbs

Deși îngustăm perioada de tranziție, nu putem elimina efectul de ripple în zona trece-bandă datorită fenomenului Gibbs.

Teoremă

Fenomenul lui Gibbs apare de fiecare dată când o funcție cu discontinuități de speța întâi (jump discontinuity) este reprezentată cu ajutorul transformatei Fourier.

Nici o secvență finită de sinusoidă nu va putea să acopere această discontinuitate!

⇒ tot timpul va apărea efectul de ripple.

Atenuarea efectului de ripple

Efectul de ripple apare datorită loburilor secundare ce duc implicit la discontinuitățile de speță întâi din $w(k)$.

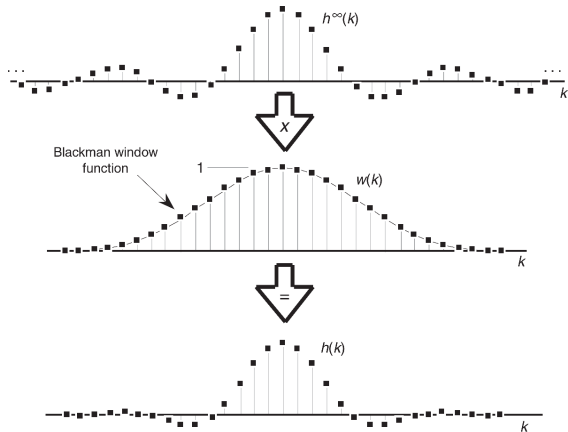
Minimizăm ripples precum am făcut la fenomenul de leakage!

Folosim ferestre particulare ca cele prezentate până acum, dar introducem și altele întâlnite în practică precum:

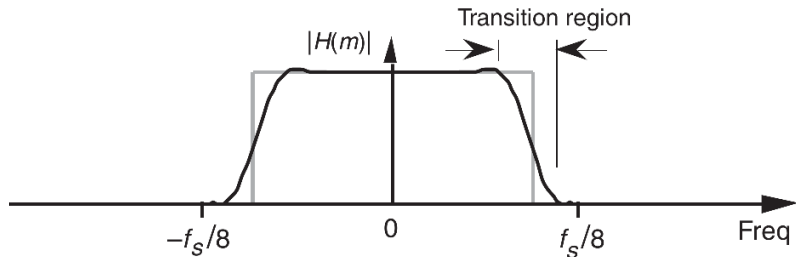
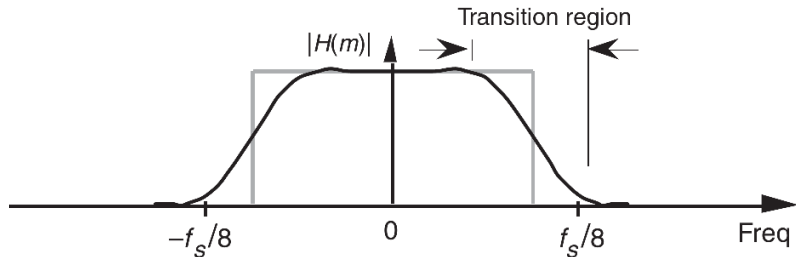
- ▶ Blackman
- ▶ Cebîșev
- ▶ Kaiser

Fereastra Blackman

$$w(k)_{k \in \{0 \dots N-1\}} = 0,42 - 0,5 \cos \left(\frac{2\pi k}{N-1} \right) + 0,08 \cos \left(\frac{4\pi k}{N-1} \right) \quad (21)$$

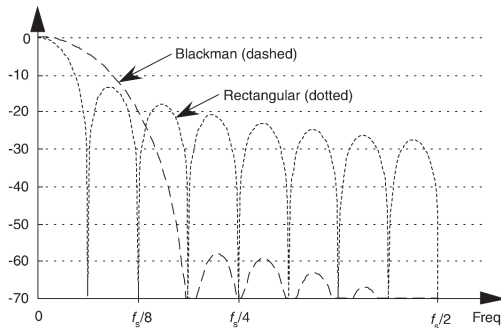
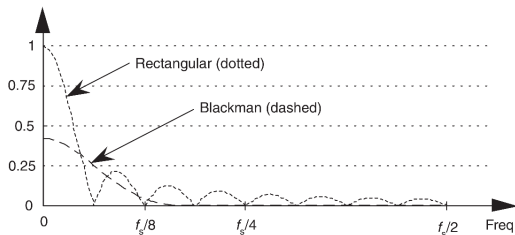


Blackman: răspuns în frecvență pentru $N = 32$ și $N = 64$



Atenuuează semnificativ ripples, dar prelungește tranziția.

Blackman versus dreptunghiular



Normalizarea scalei logaritmice: $W_{dB}(m) = 20 \log_{10} \left(\frac{\|W(m)\|}{\|W(0)\|} \right)$

Parametrizare

Blackman face parte tot din categoria de filtre cu coeficienți ficși: nu putem controla răspunsul ferestrei în frecvență, el este dat.

Pentru a putea controla noi compromisul între lobul principal și cei secundari, avem nevoie de ferestre cu parametrizare precum:

Fereastra Cebîșev

$$W(m) = \frac{\cos [N \cos^{-1} [\alpha \cos(\pi m / N)]]}{\cosh[N \cosh(\alpha)]} \quad (22)$$

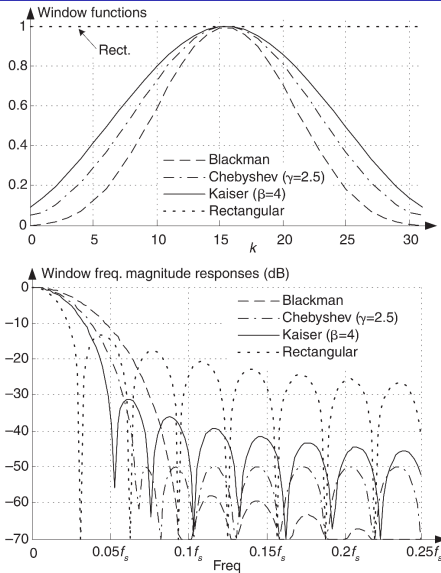
$$\alpha = \cosh \left(\frac{1}{N} \cosh^{-1}(10^\gamma) \right) \quad (23)$$

Fereastra Kaiser

$$w(k) = \frac{I_0 \left[\beta \sqrt{1 - \frac{k-p^2}{p}} \right]}{I_0(\beta)}, \quad p = (N-1)/2 \quad (24)$$

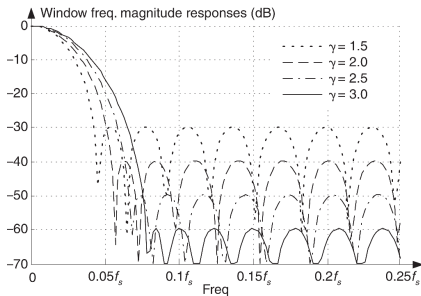
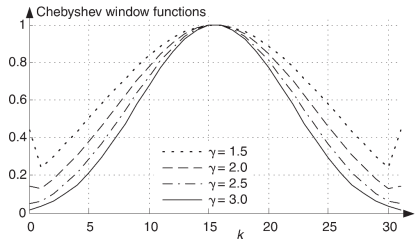
unde I_0 este funcția [Bessel](#) de ordin zero.

Comparație: răspunsul în frecvență



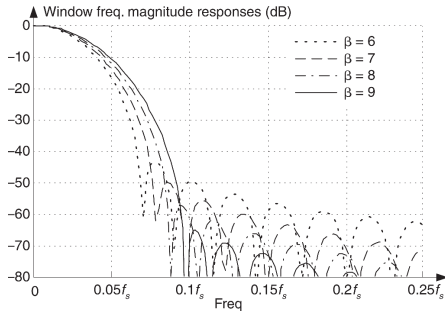
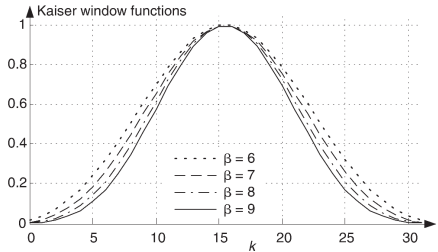
Cebîșev are lobi secundari constanți, Kaiser îi are mai mari dar scad.

Frecvența de atenuare (*stopband*): $Atten_{\text{Cheb}} = -20\gamma \text{ dB}$



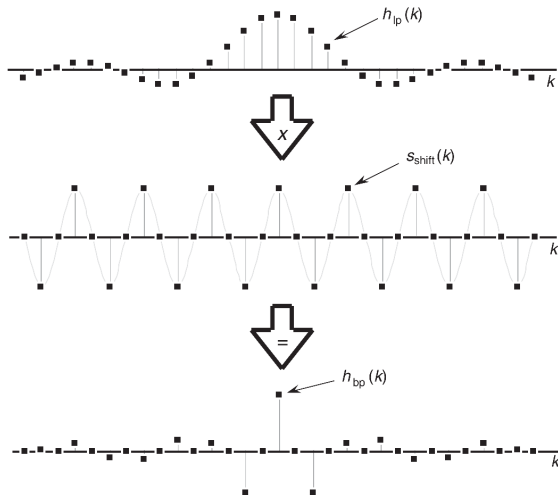
Exemplu: pentru lobi secundari mai mici de -60 dB avem $\gamma = 3$.

Parametrizare Kaiser



Proiectare filtru trece-bandă

Pornim de la un filtru trece-jos și deplasăm cu o sinusoidă de $f_s/4$

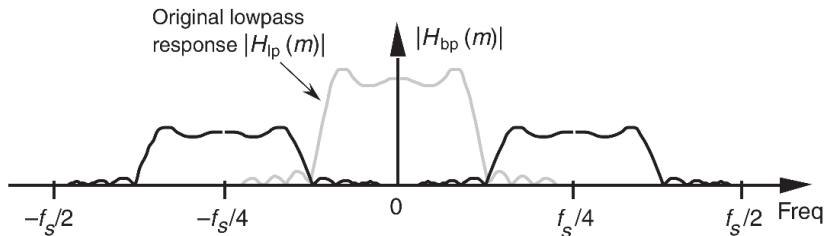


$$h_{bp}(k) = h_{lp}(k)s_{shift}(k)$$

(25)

Trece-bandă: răspunsul în frecvență cu $\sin(f_s/4)$

$$h_{bp}(k) = h_{lp}(k)s_{\text{shift}}(k)$$

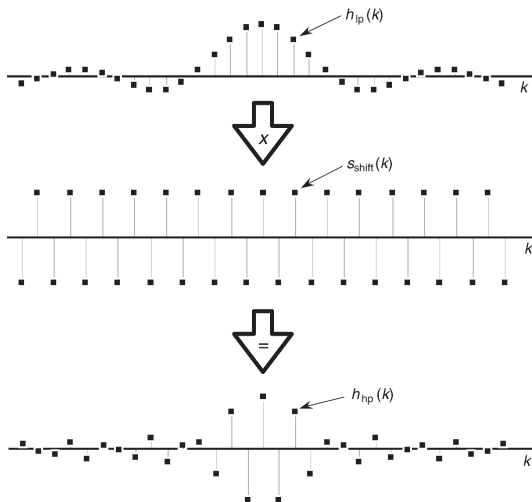


Magnitudinea $\|H_{bp}(m)\|$ este jumătate din cea a lui $\|H_{lp}(m)\|$ pentru că jumătate din valorile lui $h_{bp}(k)$ sunt nule.

Pentru a centra în altă frecvență decât $f_s/4$, pur și simplu înmulțim cu o sinusoidă de frecvență dorită.

Proiectare filtru trece-sus

Pur și simplu înmulțim cu o sinusoidă de frecvență $f_s/2$



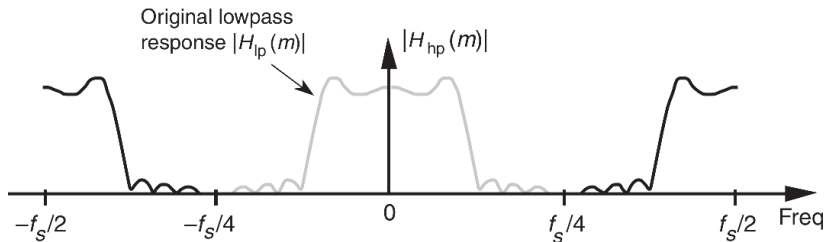
$$h_{hp}(k) = h_{lp}(k)s_{shift}(k)$$

(26)

Trece-sus: răspunsul în frecvență cu $\sin(f_s/2)$

Produsul cu sinusoida este echivalentul schimbării de semn din două în două eșantioane.

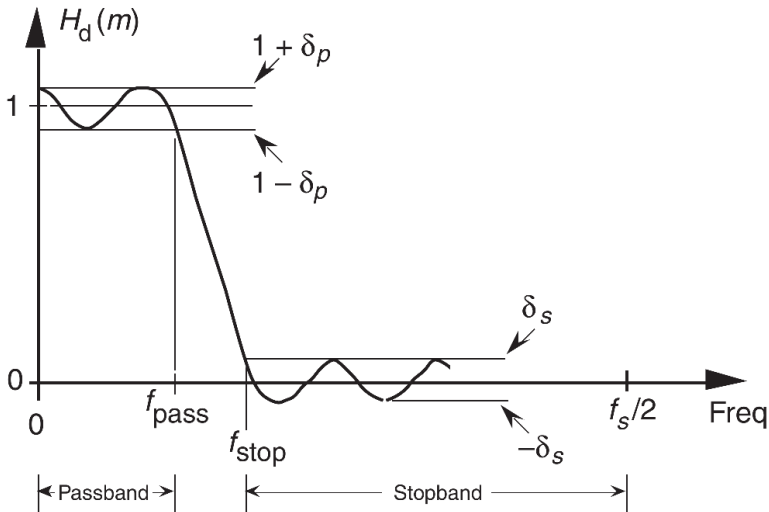
$$h_{hp}(k) = h_{lp}(k)s_{\text{shift}}(k)$$



Magnitudinea $\|H_{hp}(m)\|$ este egală cu cea a lui $\|H_{lp}(m)\|$.

Metoda optimă sau Parks-McClellan Exchange

Produce frecvența dorită $H_d(m)$ date f_{pass} și f_{stop} . Foarte populară în practică.

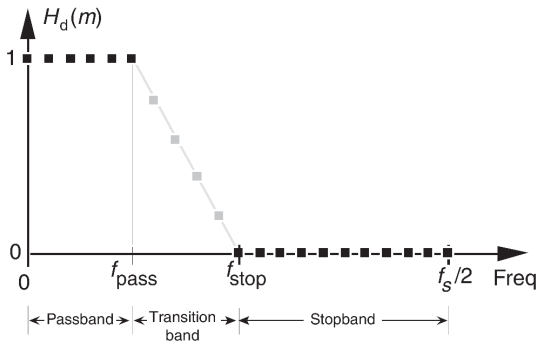


Opțional se pot defini și parametri de ripple δ_p și δ_s .

Metoda optimă cu parametrii δ_p și δ_s calculați automat

$$\text{Passband ripple} = 20 \log_{10}(1 + \delta_p) \quad (27)$$

$$\text{Stopband ripple} = -20 \log_{10}(-\delta_s) \quad (28)$$



Presupunem că dorim un efect de ripple minim: lășăm o metodă de optimizare să minimizeze δ_p și δ_s pentru noi.

Proiectare

Metoda optimă produce un filtru de tip Cebîșev dar mai apropiat de frecvența dorită $H_d(m)$.

