

Procesarea semnalelor

Transformata Fourier.

Paul Irofti

Universitatea din București

Facultatea de Matematică și Informatică

Departmentul de Informatică

Email: paul.irofti@fmi.unibuc.ro

Discretizare și eșantionare

Continuu:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \quad (1)$$

Discret:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi (f_0 + k f_s) n t_s) \quad (2)$$

unde

- ▶ f_0 – frecvența (Hz) măsoară numărul de oscilații într-o secundă
- ▶ n – eșantionul, indexul în șirul de timpi $0, 1, 2 \dots$
- ▶ t_s – perioada de eșantionare; constantă (ex. la fiecare secundă)
- ▶ $n t_s$ – orizontul de timp (s)
- ▶ $f_0 n t_s$ – numărul de oscilații măsurat
- ▶ $2\pi f_0 n t$ – unghiul măsurat în radiani (vezi note de curs)
- ▶ f_s – frecvența de eșantionare (Hz)
- ▶ $f_0 + k f_s$ – frecvența de aliare, $\forall k \in \mathbb{N}$

Cum trecem în frecvență și înapoi în timp?

Transformata Fourier și Transformata Fourier Inversă ne ajută să trecem din domeniul timpului în domeniul frecvenței și vice-versa.

Transformata Fourier Continuă (TF)

Definiție

Transformata Fourier a unui semnal continuu:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} \quad (3)$$

transformă semnalul continuu din domeniul timpului $x(t)$ în semnalul continuu $X(f)$ din domeniul frecvenței.

Aici e este numărul lui Euler, baza logaritmului natural, și j reprezintă numărul complex $j = \sqrt{-1}$.

Definiție

Relația lui Euler

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad (4)$$

pune în legătură numerele complexe, funcțiile trigonometrice și funcțiile exponențiale.

Pentru un număr complex $z \in \mathbb{C}$:

$$z = a + jb = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = re^{j\varphi} \quad (5)$$

unde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ este mărimea și $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$

Pentru Transformata Fourier Continuă:

$$e^{-j\alpha} = \cos(-\alpha) + j \sin(-\alpha) = \cos \alpha - j \sin \alpha \quad (6)$$

Radiani

Definiție

Radianii descriu unghiul unui arc de cerc drept raportul dintre lungimea arcului împărțită la rază.

Exemplu

$$1 \text{ rad} = 180^\circ / \pi$$

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

Frecvența unghiulară și frecvența de eșantionare

Definiție

Frecvența unghiulară este frecvența exprimată în radiani pe secundă:

$$\Omega = \frac{\omega}{T} = \frac{[rad]}{[s]} = \omega f \quad (7)$$

Definiție

Frecvența de eșantionare în radiani este:

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s \quad (8)$$

Dacă un semnal este periodic, iar eşantioanele $x[n]$ se repetă o dată la fiecare N măsurători atunci discretizarea timp-frecvență devine:

- ▶ discretizarea timpului $t \rightarrow nt_s$ și
- ▶ frecvența $f \rightarrow \frac{1}{N}$
- ▶ frecvența unghiulară $\Omega \rightarrow \frac{\omega}{N}$
- ▶ frecvența unghiulară de eşantionare $\Omega \rightarrow \frac{2\pi}{N}$
- ▶ $e^{-j\Omega t} = e^{-j2\pi f t} \rightarrow e^{-j2\pi f_s n t_s} = e^{-j\frac{2\pi}{N} n t_s}$

Transformata Fourier Discretizată în Timp (DTFT)

Definiție

Transformata Fourier Continuă a unui semnal discretizat în timp:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \quad (9)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nt_s) e^{-j2\pi fnt_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nt_s) e^{-j\Omega nt_s} \quad (10)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi fnt_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega nt_s} \quad (11)$$

numită în literatură Discrete-Time Fourier Transform (DTFT).

Transformata Fourier Discretizată în Timp (DFS)

Fie un şir $x[n]$ cu perioadă N a.î. $x[n] = x[n + kN]$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$.

Definiție

Transformata Fourier a semnalului $x[n]$ cu perioadă N este:

$$X(m) = \sum_n x(n) e^{-j2\pi mn/N} \quad (12)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_m X(m) e^{j2\pi mn/N} \quad (13)$$

numită în literatură Discrete Fourier Sequence (DFS).

Remarcă

Dacă semnalul este periodic, observăm că informația se repetă o dată la N eşantioane a.î. putem limita capetele sumei la intervalul $0 \dots N - 1$.

Transformata Fourier Discretă (DFT)

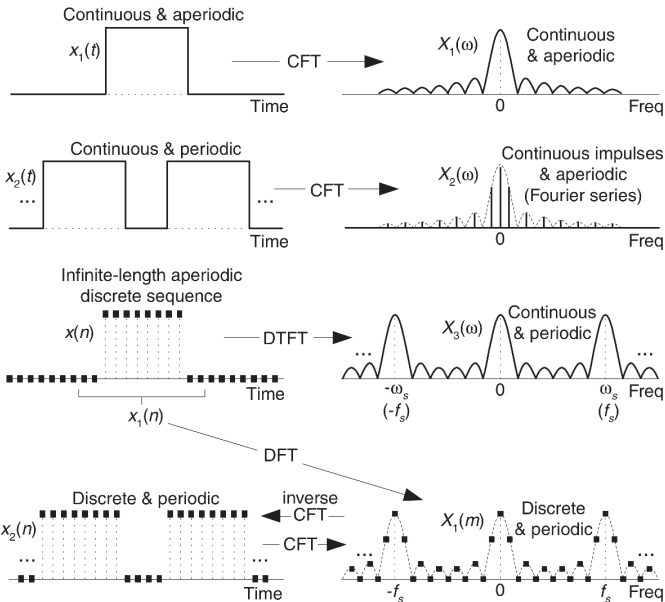
Definiție

Transformata Fourier a unui semnal discret (aperiodic):

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N)] \end{aligned} \tag{14}$$

- ▶ $X(m)$ – componenta m DFT (ex. $X(0), X(1), X(2), \dots$)
- ▶ m – indicele componentei DFT în domeniul frecvenței ($m = 0, 1, \dots, N - 1$)
- ▶ $x(n)$ – eșantioanele în timp (ex. $x(0), x(1), x(2), \dots$)
- ▶ n – indicele eșantioanelor în domeniul timpului ($n = 0, 1, \dots, N - 1$)
- ▶ N – numărul eșantioanelor în timp la intrare și numărul componentelor în frecvență la ieșire

CFT, DTFT, DFT



Exemplu DFT $N = 4$

Pentru $N = 4$ eșantioane, vom avea $n, m = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$X(m) = \sum_{n=0}^3 x(n) [\cos(2\pi mn/4) - j \sin(2\pi mn/4)] \quad (15)$$

Pentru $m = 0$:

$$\begin{aligned} X(0) = & x(0) \left[\cos(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot n} / 4) - j \sin(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot n} / 4) \right] \\ & + x(1) [\cos(2\pi 0 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 1/4)] \\ & + x(2) [\cos(2\pi 0 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 2/4)] \\ & + x(3) [\cos(2\pi 0 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 3/4)] \end{aligned}$$

Exemplu DFT $N = 4$

$$\begin{aligned} X(1) &= x(0) [\cos(2\pi \overbrace{1 \cdot 0}^{m \cdot n} / 4) - j \sin(2\pi \overbrace{1 \cdot 0}^{m \cdot n} / 4)] \\ &\quad + x(1) [\cos(2\pi 1 \cdot 1 / 4) - j \sin(2\pi 1 \cdot 1 / 4)] \\ &\quad + x(2) [\cos(2\pi 1 \cdot 2 / 4) - j \sin(2\pi 1 \cdot 2 / 4)] \\ &\quad + x(3) [\cos(2\pi 1 \cdot 3 / 4) - j \sin(2\pi 1 \cdot 3 / 4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(2) &= x(0) [\cos(2\pi 2 \cdot 0 / 4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 0 / 4)] \\ &\quad + x(1) [\cos(2\pi 2 \cdot 1 / 4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 1 / 4)] \\ &\quad + x(2) [\cos(2\pi 2 \cdot 2 / 4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 2 / 4)] \\ &\quad + x(3) [\cos(2\pi 2 \cdot 3 / 4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 3 / 4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(3) &= x(0) [\cos(2\pi 3 \cdot 0 / 4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 0 / 4)] \\ &\quad + x(1) [\cos(2\pi 3 \cdot 1 / 4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 1 / 4)] \\ &\quad + x(2) [\cos(2\pi 3 \cdot 2 / 4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 2 / 4)] \\ &\quad + x(3) [\cos(2\pi 3 \cdot 3 / 4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 3 / 4)] \end{aligned}$$

Transformata Fourier inversă

Transformata Fourier a unui semnal discret:

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N)] \end{aligned}$$

Definiție

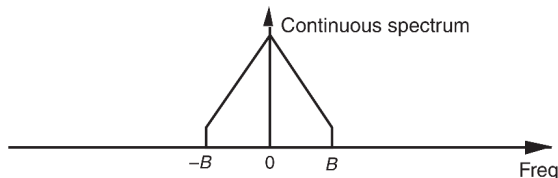
Transformata Fourier inversă a unui semnal discret (IDFT):

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{j2\pi mn/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) [\cos(2\pi mn/N) + j \sin(2\pi mn/N)] \end{aligned} \tag{16}$$

Recapitulare: Semnale trece-jos (lowpass)

Definiție

Un semnal trece-jos este un semnal limitat în bandă și centrat în jurul frecvenței zero.



Sursă: (Lyons 2004)

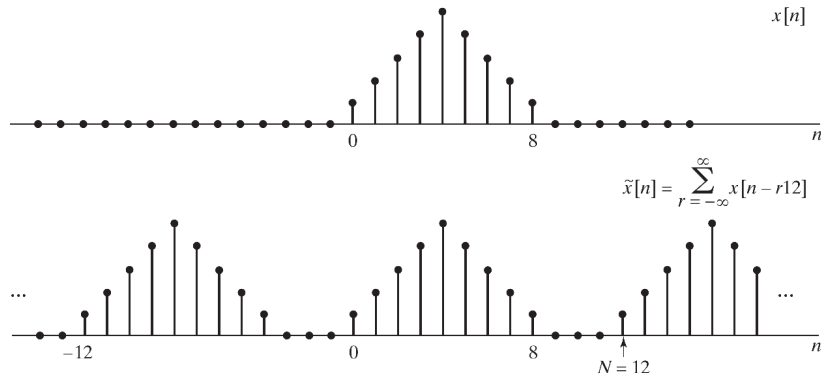
Remarcă

Din considerente didactice, aici am analizat spectrul continuu obținut din Transformata Fourier Continuă. În practică folosim Transformata Fourier Discretă.

Extinderea unui semnal discret

Dacă avem de a face cu un semnal discret aperiodic, îl putem extinde la un semnal periodic pentru a aplica DFT.

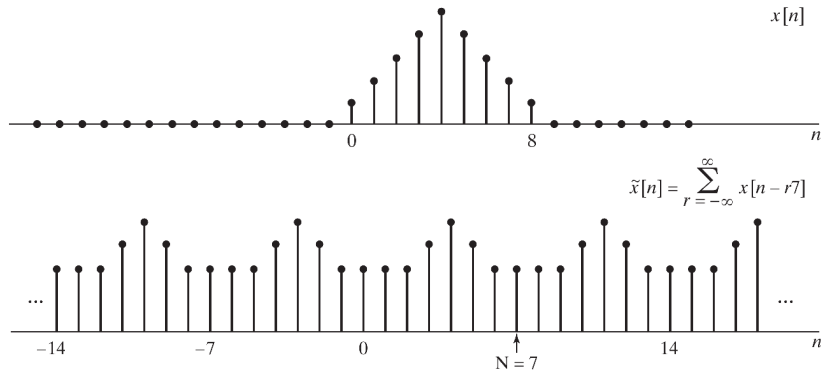
Exemplu eșantionare a transformatei Fourier cu $N = 12$:



Sursă: (Oppenheim and Schaffer 2014)

Extinderea unui semnal discret

Atenție la fenomenul de aliere când extindem (exemplu $N = 7$).



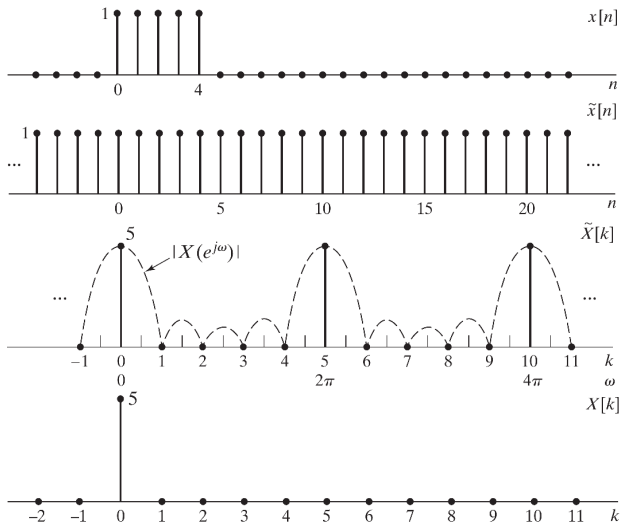
Sursă: (Oppenheim and Schaffer 2014)

Remarcă

Problema alierii este aceeași în frecvență ca și în timp. Metoda de discretizare și eșantionare fiind aceeași. Doar domeniul se schimbă.

Exemplu: treaptă

Atenție la efectele secundare extinderii unui semnal aperiodic.



Sursă: (Oppenheim and Schaffer 2014)

Frecvențe importante

Frecvența fundamentală este

$$f = \frac{f_s}{N} \quad (17)$$

Frecvențele analizate sunt:

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} \quad (18)$$

Componenta $m = 0$ este numită componenta curent continuu (*Direct Current (DC)*)

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)[\cos(0) - j\sin(0)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad (19)$$

Magnitudinea și puterea componentelor (*power spectrum (PS)*):

$$X(m) = X_{\text{real}}(m) + jX_{\text{imag}}(m) \quad (20)$$

$$X_{\text{mag}} = |X(m)| \quad X_{\text{PS}}(m) = X_{\text{mag}}(m)^2 \quad (21)$$

Exemplu: Frecvențe importante

Pentru un semnal continuu eșantionat cu 500 eșantioane pe secundă asupra căruia se aplică DFT în 16 puncte avem:

$$f = \frac{f_s}{N} = \frac{500}{16} = 31,25Hz$$

Frecvențele analizate sunt:

$$X(0) = 0 \cdot 31.25 = 0Hz \quad (\text{prima componentă în frecvență})$$

$$X(1) = 1 \cdot 31.25 = 31,25Hz \quad (\text{a doua componentă în frecvență})$$

$$X(2) = 2 \cdot 31.25 = 62,5Hz \quad (\text{a treia componentă în frecvență})$$

$$X(3) = 3 \cdot 31.25 = 93,75Hz \quad (\text{a patra componentă în frecvență})$$

\vdots

$$X(15) = 15 \cdot 31.25 = 468,75Hz \quad (\text{componenta 16 în frecvență})$$

Exemplu: Calcul DFT

Vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

pentru asta avem nevoie de $N = 8$ eșantioane în timp pentru care alegem frecvența de eșantionare $f_s = 8000$.

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} =$$

Exemplu: Calcul DFT

Vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

pentru asta avem nevoie de $N = 8$ eșantioane în timp pentru care alegem frecvența de eșantionare $f_s = 8000$.

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = \{0kHz, 1kHz, 2kHz, \dots, 7kHz\} \quad (22)$$

Exemplu: Calcul DFT

Vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

pentru asta avem nevoie de $N = 8$ eșantioane în timp pentru care alegem frecvența de eșantionare $f_s = 8000$.

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = \{0kHz, 1kHz, 2kHz, \dots, 7kHz\} \quad (22)$$

Transformata Fourier devine:

$$X(m) = \sum_{n=0}^7 x(n) [\cos(2\pi mn/8) + j \sin(2\pi mn/8)]$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^7 x(n) [\cos(2\pi n/8) + j \sin(2\pi n/8)]$$

\vdots

Exemplu: Calcul DFT

Fie cele 8 eșantioane în timp:

$$x[0] = 0,3535,$$

$$x[1] = 0,3535$$

$$x[2] = 0,6464,$$

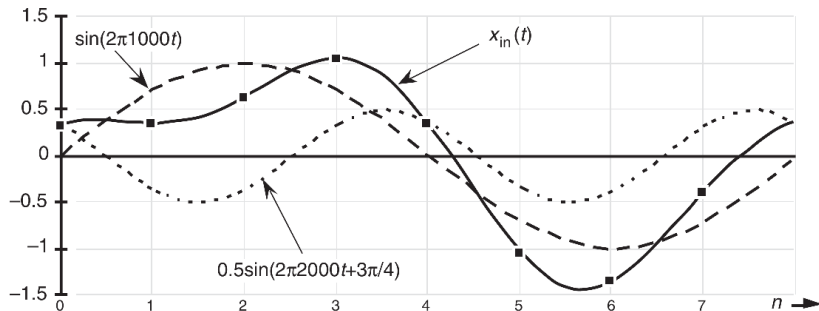
$$x[3] = 1,0607$$

$$x[4] = 0,3535,$$

$$x[5] = -1,0607$$

$$x[6] = -1,3535,$$

$$x[7] = -0,3535$$



Sursă: (Lyons 2004)

Exemplu: Calcul DFT

$$\begin{aligned} X(1) &= \sum_{n=0}^7 x(n) [\cos(2\pi n/8) + j \sin(2\pi n/8)] = \\ &= x(0) \cos(0) - jx(0) \sin(0) + \\ &+ x(1) \cos(\pi/4) - jx(1) \sin(\pi/4) + \\ &+ x(2) \cos(\pi/2) - jx(2) \sin(\pi/2) + \\ &+ x(3) \cos(3\pi/4) - jx(3) \sin(3\pi/4) + \\ &+ x(4) \cos(\pi) - jx(4) \sin(\pi) + \\ &+ x(5) \cos(5\pi/4) - jx(5) \sin(5\pi/4) + \\ &+ x(6) \cos(3\pi/2) - jx(6) \sin(3\pi/2) + \\ &+ x(7) \cos(7\pi/4) - jx(7) \sin(7\pi/4) = \\ &= \dots = 0, 0 - j4, 0 \end{aligned}$$

Exemplu: Calcul DFT

Aplicăm formula pentru calculul celorlalte componente:

$$X(1) = 0,0 - j4,0$$

$$X(2) = 1,414 + j1,414$$

$$X(3) = 0,0 + j0,0$$

$$X(4) = 0,0 + j0,0$$

$$X(5) = 0,0 + j0,0$$

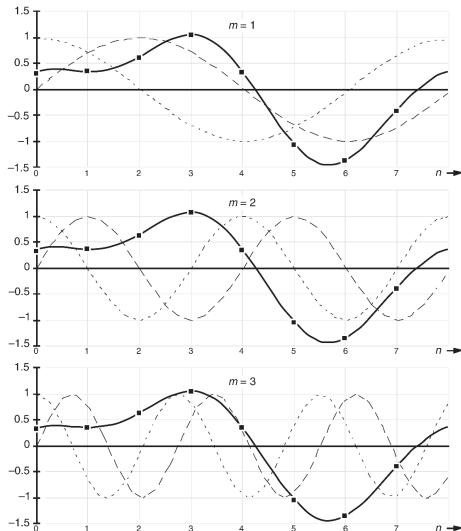
$$X(6) = 1,414 - j1,414$$

$$X(7) = 0,0 + j4,0$$

Cât este $X(0)$?

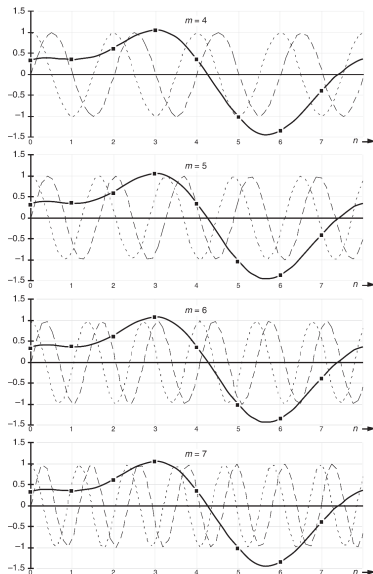
Exemplu: Componentele DFT

Cum arată componentele cos și sin în funcție de m ?



Sursă: (Lyons 2004)

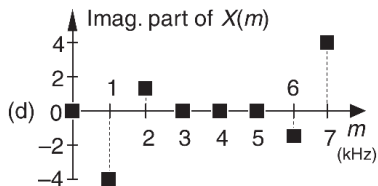
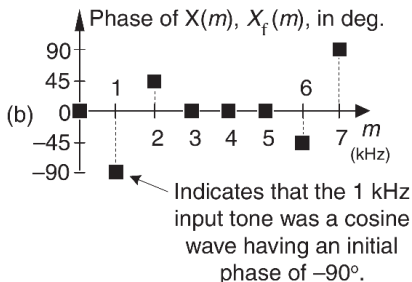
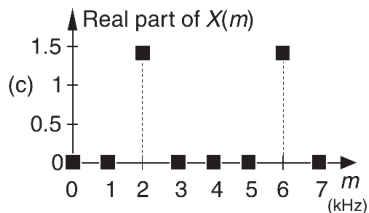
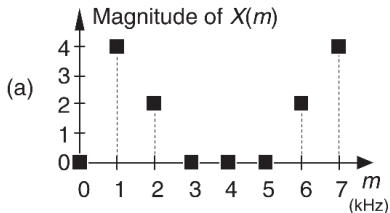
Exemplu: Componentele DFT



Sursă: (Lyons 2004)

Exemplu: Rezultate DFT

Simetrie și anti-simetrie în componentele spectrale:

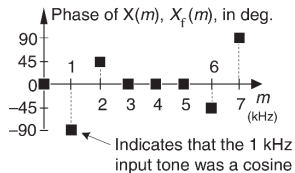


Recapitulare:

$$z = r [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)] = re^{j\varphi}$$

$$\bar{z} = r [\cos(\varphi) - j \sin(\varphi)] = re^{-j\varphi}$$

unde r este mărimea iar φ este faza.



Recapitulare:

$$z = r [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)] = re^{j\varphi}$$

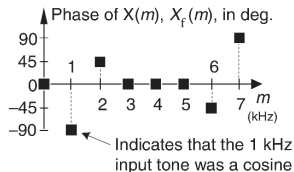
$$\bar{z} = r [\cos(\varphi) - j \sin(\varphi)] = re^{-j\varphi}$$

unde r este mǎgnitudinea iar φ este faza.

Atunci pentru DFT

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N}$$

avem faza $\varphi = 2\pi nm/N$.



Recapitulare:

$$z = r [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)] = re^{j\varphi}$$

$$\bar{z} = r [\cos(\varphi) - j \sin(\varphi)] = re^{-j\varphi}$$

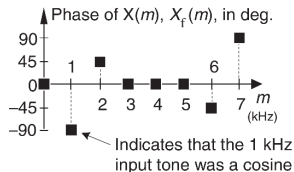
unde r este mărimea iar φ este faza.

Atunci pentru DFT

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N}$$

avem faza $\varphi = 2\pi nm/N$.

Cum ajungem de la fază la figura în grade de mai sus?



Recapitulare:

$$z = r [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)] = re^{j\varphi}$$

$$\bar{z} = r [\cos(\varphi) - j \sin(\varphi)] = re^{-j\varphi}$$

unde r este magnitudinea iar φ este faza.

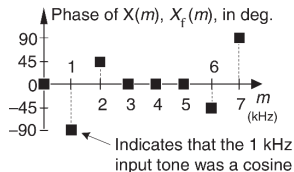
Atunci pentru DFT

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N}$$

avem faza $\varphi = 2\pi nm/N$.

Cum ajungem de la fază la figura în grade de mai sus?

$$2\pi \text{ rad} = 360; \quad 2\pi mn/N = x; \quad x = 360mn/N$$



Pentru semnale $x(n)$ reale, DFT este simetrică în jurul $N/2$.

$$X(m) = |X(m)|e^{j\varphi} = |X(N-m)|e^{-j\varphi} = \overline{X}(N-m) \quad (23)$$

Putem arăta ușor această proprietate folosind forma exponențială:

$$\begin{aligned} X(N-m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi n(N-m)/N} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \underbrace{e^{-j2\pi nN/N}}_{\cos(2\pi n) - j\sin(2\pi n)} e^{j2\pi nm/N} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j2\pi nm/N} = \overline{X}(m) \end{aligned}$$

Fie $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$, atunci DFT este suma DFT-urilor pe componente:

$$X(m) = X_1(m) + X_2(m) \quad (24)$$

Putem demonstra din nou ușor folosind forma exponențială:

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{[x_1(n) + x_2(n)]}_{x(n)} e^{-j2\pi nm/N} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) e^{-j2\pi nm/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) e^{-j2\pi nm/N} \\ &= X_1(m) + X_2(m) \end{aligned}$$

Magnitudine

De ce nu corespunde amplitudinea în timp cu cea în frecvență?

Magnitudine

De ce nu corespunde amplitudinea în timp cu cea în frecvență?

Dacă avem o sinusoidă cu

- ▶ frecvența $f < f_s/2$
- ▶ amplitudinea A_0
- ▶ cu număr întreg de perioade de-alungul celor N eșantioane

atunci amplitudinea în frecvență este:

$$M_r = A_0 N/2 \quad (25)$$

dacă semnalul este complex:

$$M_c = A_0 N \quad (26)$$

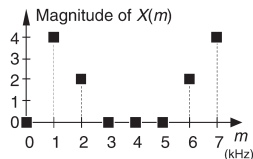
Din această cauză întâlnim în practică DFT scalat cu $\frac{1}{N}$ sau $\frac{1}{\sqrt{N}}$:

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nm/N} \quad (27)$$

Explicația când ajungem la ferestre și convoluție: $x[n] = x(nt_s)w[n]$

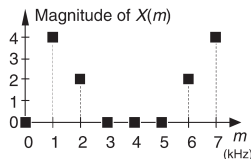
Axa frecvenței

Care este frecvența cu cea mai mare magnitudine $|X(m)|$ în Hz din figură? (în figură pe axa frecvenței avem valorile lui m)



Axa frecvenței

Care este frecvența cu cea mai mare magnitudine $|X(m)|$ în Hz din figură? (în figură pe axa frecvenței avem valorile lui m)



Răspuns: Depinde de rata de eșantionare f_s . În figură ne interesează $m = 1$ pentru care aplicăm (22) cu $f_s = 8000\text{Hz}$:

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = f_a(1) = \frac{1 \cdot 8000}{8} = 1000\text{Hz} \quad (28)$$

Pentru frecvența de eșantionare $f_s = 75\text{Hz}$ obținem altă frecvență:

$$f_a(1) = \frac{1 \cdot 75}{8} = 9,375\text{Hz} \quad (29)$$

pentru că rezoluția (spațiul între eșantioanele frecvenței) este f_s/N .

Teoremă

O deplasare k în timp a semnalului periodic $x(n)$ rezultă într-o deplasare constantă a fazei în domeniul frecvenței cu $2\pi km/n$ radiani (sau $360km/N$ grade).

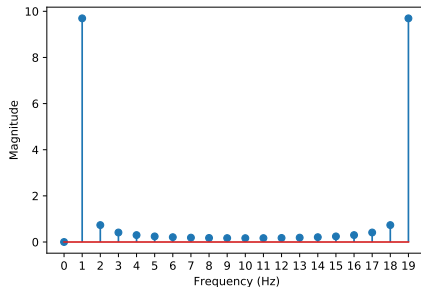
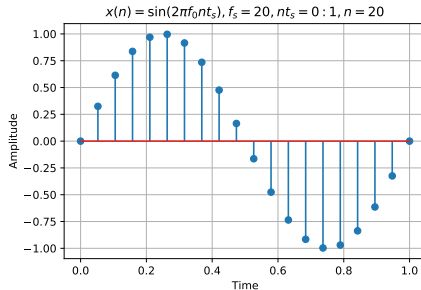
$$X_{\text{shifted}}(m) = e^{j2\pi km/N} X(m) \quad (30)$$

În exemplul nostru, o întârziere cu $k = 3$ rezultă într-o multiplicare cu $e^{j2\pi 3 \cdot m/8}$ iar pentru $m = 1$ avem:

$$X_{\text{shifted}}(1) = e^{j2\pi 3 \cdot 1/8} X(1) = e^{j2\pi 3 \cdot 1/8} 4e^{-j\pi/2} = 4e^{j\pi/4}$$

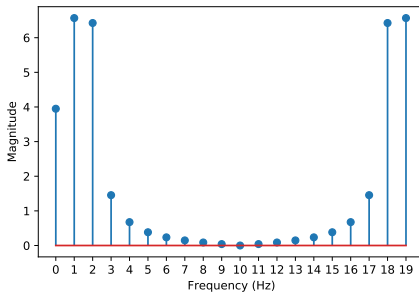
DFT în practică

Transformata DFT
pentru sinusoida noastră
din primul curs. Ce se
întâmplă în punctul 19?
Dar în punctele 2 și 3?



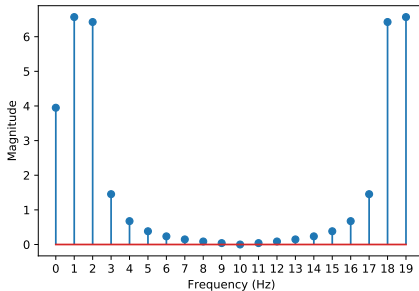
DFT în practică

Ce semnal reprezintă această spectrogramă?

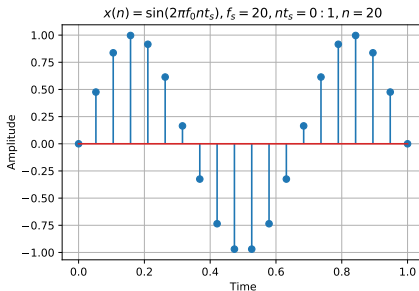


DFT în practică

Ce semnal reprezintă această spectrogramă?



Tot o sinusoidă!
Frecvența diferă:
 $f_0 = 1,5 \text{ Hz}$.



În practică DFT produce rezultate în domeniul frecvenței ce pot induce în eroare datorită frecvențelor de analiză:

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N}, \quad m = \{0, 1, 2, \dots, N - 1\} \quad (31)$$

DFT reflectă realitatea doar când energia semnalului dat coincide cu frecvențele de analiză din (31).

Remarcă

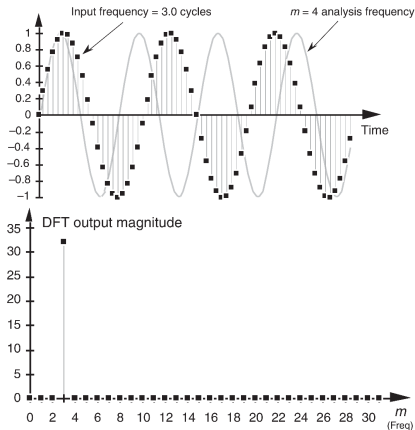
*Dacă semnalul dat conține o componentă în frecvență intermediară frecvențelor de analiză (31), atunci aceasta va apărea parțial în toate cele N componente: **leakage**.*

Definiție

*Componentele în frecvență se numesc **output bins** sau simplu **bins**.*

Exemplu fără leak

Fie un semnal sinusoidal eșantionat în $N = 64$ de puncte cu 3 perioade complete în orizontul de timp analizat.

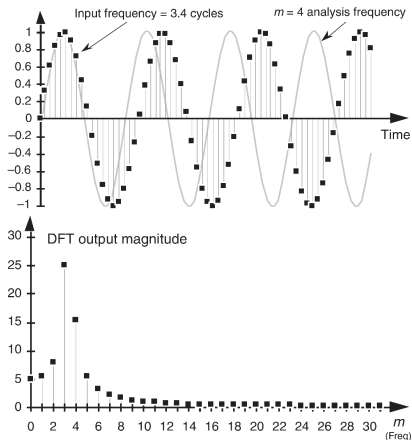


Sursă: (Lyons 2004)

Observăm că toate frecvențele în afară de bin-ul $m = 3$ sunt nule.

Exemplu leak

Fie un semnal sinusoidal eșantionat în $N = 64$ de puncte cu 3,4 perioade complete în orizontul de timp analizat.



Sursă: (Lyons 2004)

Observăm că apare fenomenul de **leak** în celelalte bin-uri.

Apariția unui leak

Remarcă

Fenomenul de leak apare când semnalul nu are un număr întreg de perioade în orizontul de timp eșantionat.

Teoremă

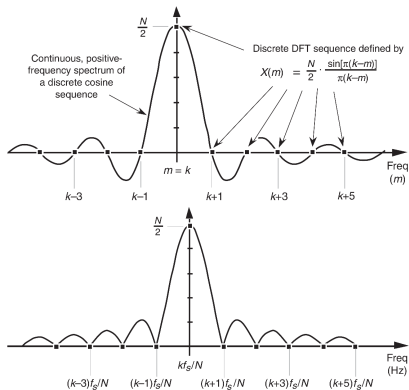
Pentru un semnal sinusoidal având $k \in \mathbb{R}$ perioade în orizontul de timp de N eșantioane, putem aproxima amplitudinea unui bin DFT în funcție de m cu ajutorul funcției sinc:

$$X(m) = \frac{A_0 N}{2} \frac{\sin[\pi(k - m)]}{\pi(k - m)} \quad (32)$$

Demonstrație: DFT implică de fapt aplicarea unei ferestre rectangulare asupra semnalului în timp. Vezi prima remarcă și demonstrația primei propoziții de la ferestre.

Funcția sinc. Lobi.

N eșantioane DFT ce conțin k perioade a unei sinusoide: sus avem amplitudinea în funcție de bin-ul m , jos magnitudinea în frecvență.

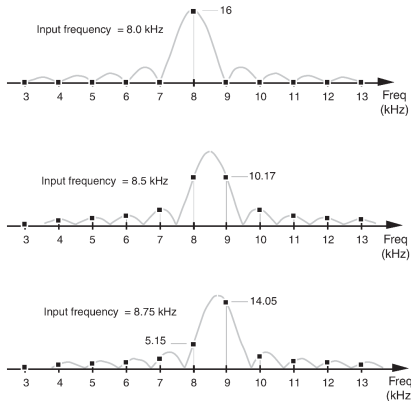


Sursă: (Lyons 2004)

Figură compusă din **lobul principal** și **loburi secundare** mai mici.

Eșantionarea sinc

Fie o sinusoidă de 8kHz eșantionată la 32kHz . În figură avem DFT-ul în $N = 32$ puncte (bin-uri distanțate la $f_s/N = 1\text{kHz}$).

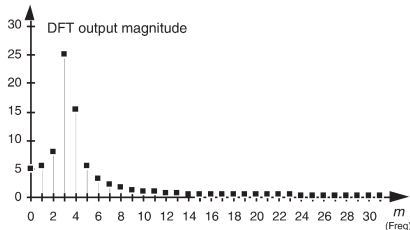


Sursă: (Lyons 2004)

Leak când frecvența sinusoidelor nu este centrată în lobul principal.

Asimetrie

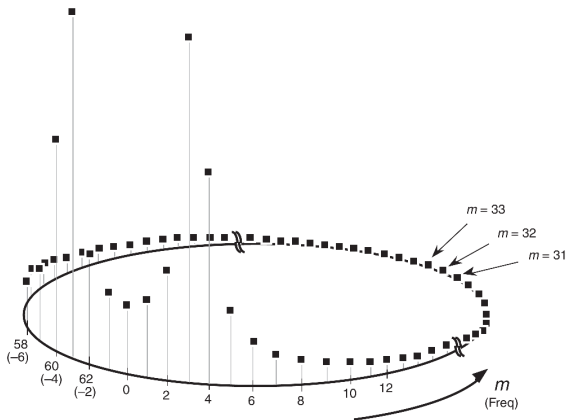
De ce este DFT asimetrică în exemplul de mai devreme? (ex. $m = 4$)



Sursă: (Lyons 2004)

Am arătat că DFT este simetrică și se repetă o dată la N puncte.
În cazul semnalelor reale chiar $N/2$!

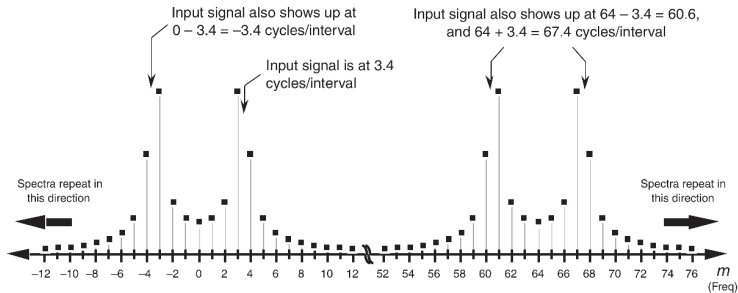
DFT se repetă din N în N puncte creând un cerc de-alungul căruia eșantioanele DFT se înfășoară.



Sursă: (Lyons 2004)

Înfășurare linarizată

Expus liniar, discul pentru un semnal cu $k = 3,4$ perioade în fereastra de $N = 64$ eșantioane devine:

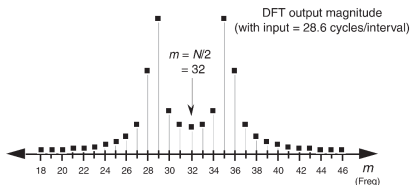
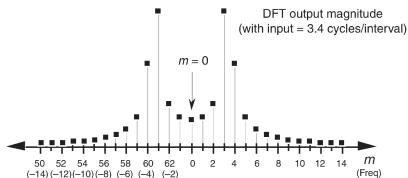


Sursă: (Lyons 2004)

Ce se întâmplă cu semnalele reale?

Înfășurare semnale reale

Semnalele reale se repetă la $N/2$ a.î. $|X(m)| = |X(N - m)|$ cf. (23)
Magnitudinea DFT pentru $k = 32 - 3, 4$ și $k = 3, 4$ este similară.

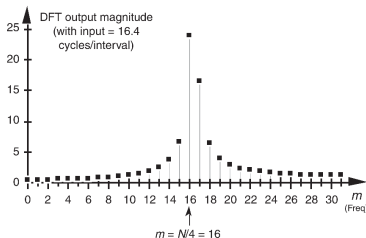
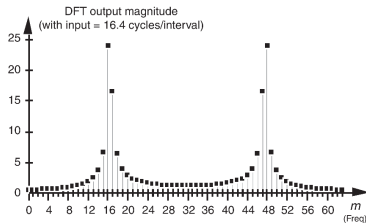


Sursă: (Lyons 2004)

Pentru semnale reale avem înfășurare și în jurul $m = N/2$.

Înfășurare semnale reale

Alt exemplu pentru $k = 16,4$ și $N = 64$.



Sursă: (Lyons 2004)

Leak minim la $N/4$ ce crește când ne îndepărtăm de lobul principal.

Definiție

Ferestrele sunt folosite pentru a atenua amplitudinea semnalului la începutul și la capătul orizontului de eșantionare astfel încât să reducă fenomenul de leak.

Remarcă

De fiecare dată când aplicăm DFT folosim o fereastră dreptunghiulară în care înmulțim fiecare eșantion cu o secvență, sau fereastră, de eșantioane de valoare unu.



În afara ferestrei secvența este nulă.

Propoziție

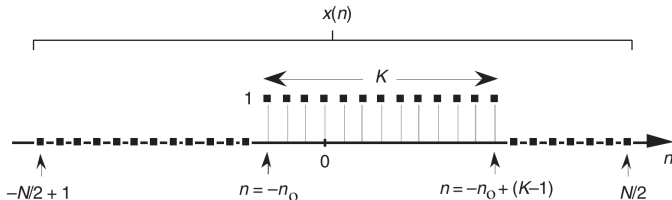
DFT a ferestrei dreptunghiulare este funcția sinc.

Demonstrație DFT treaptă-sinc

Propoziție

DFT a ferestrei dreptunghiulare este funcția sinc.

Demonstrație:



$$X(m) = \sum_{n=-(N/2)+1}^{N/2} x(n) e^{-j2\pi nm/N} = \sum_{n=-n_0}^{-n_0+(K-1)} x(n) e^{-j2\pi nm/N}$$

Demonstrație DFT treaptă-sinc

Notăm $q = 2\pi m/N$, atunci:

$$\begin{aligned} X(q) &= \sum_{n=-n_0}^{-n_0+(K-1)} x(n)e^{-jqn} = \\ &= e^{-jq(-n_0)} + e^{-jq(-n_0+1)} + e^{-jq(-n_0+2)} + \dots + e^{-jq(-n_0+(K+1))} = \\ &= e^{-jq(-n_0)}e^{-j0q} + e^{-jq(-n_0)}e^{-j1q} + e^{-jq(-n_0)}e^{-j2q} + \dots + \\ &+ e^{-jq(-n_0)}e^{-j(K-1)q} = e^{jqn_0} \left[e^{-j0q} + \dots + e^{-j(K-1)q} \right] = \\ &= e^{jqn_0} \sum_{p=0}^{K-1} e^{-jpq} = e^{jqn_0} \frac{1 - e^{-jqK}}{1 - e^{-jq}} \\ &= e^{jqn_0} \frac{e^{-jqK/2}(e^{jqK/2} - e^{-jqK/2})}{e^{-jq/2}(e^{jq/2} - e^{-jq/2})} = \\ &= e^{jqn_0} e^{-jq(K-1)/2} \frac{e^{jqK/2} - e^{-jqK/2}}{e^{jq/2} - e^{-jq/2}} \end{aligned}$$

Demonstrație DFT treaptă-sinc

Folosind $\sin(\phi) = (e^{j\phi} - e^{-j\phi})/2j$, avem:

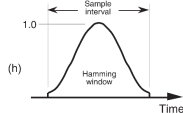
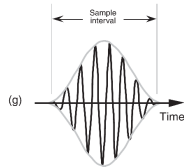
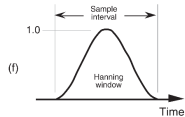
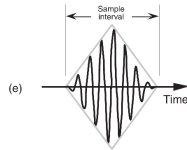
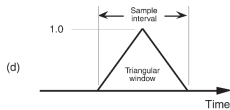
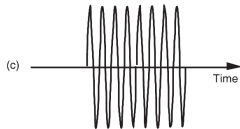
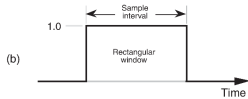
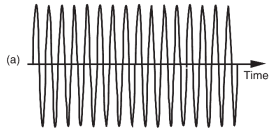
$$\begin{aligned} X(q) &= e^{jq(n_0-(K-1)/2)} \frac{e^{jqK/2} - e^{-jqK/2}}{e^{jq/2} - e^{-jq/2}} \\ &= e^{jq(n_0-(K-1)/2)} \frac{2j \sin(qK/2)}{2j \sin(q/2)} \end{aligned}$$

Renunțând la notația $q = 2\pi m/N$, obținem:

$$\begin{aligned} X(m) &= e^{j(2\pi m/N)(n_0-(K-1)/2)} \frac{\sin(2\pi mK/2N)}{\sin(2\pi m/2N)} \\ &= e^{j(2\pi m/N)(n_0-(K-1)/2)} \frac{\sin(\pi mK/N)}{\sin(\pi m/N)} \\ &= e^{j(2\pi m/N)(n_0-(K-1)/2)} \frac{\sin(\pi mK/N)}{\sin(\pi m/N)} \end{aligned}$$

Aceasta funcție se numește aliased sinc sau kernel Dirichlet ■

Exemple de fenestre (Lyons 2004)



Aplicarea unei ferestre

Înainte de a aplica DFT, eşantioanele semnalului $x(n)$ sunt înmulţit cu coeficienţii corespunzători din fereastra $w(n)$:

$$X_w(m) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n)e^{-j2\pi nm/N} \quad (33)$$

unde $w(n)$ este o fereastră:

Dreptunghilară

$$w(n) = 1$$

Trianghiulară

$$w(n) = \begin{cases} \frac{n}{N/2}, & n = 2k \\ 2 - \frac{n}{N/2}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

Hanning

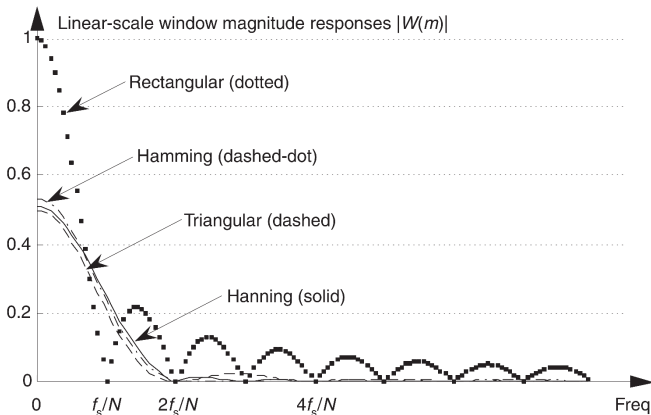
$$w(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

Hamming

$$w(n) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

Magnitudinea răspunsului în frecvență

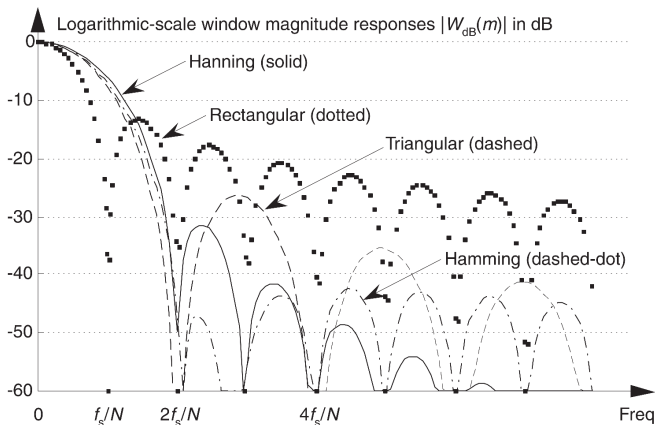
Ferestrele alternative reduc lobii secundari (vs. dreptunghiular).



Observăm că lobul principal scade în magnitudine: **processing gain** sau **loss** al ferestrei.

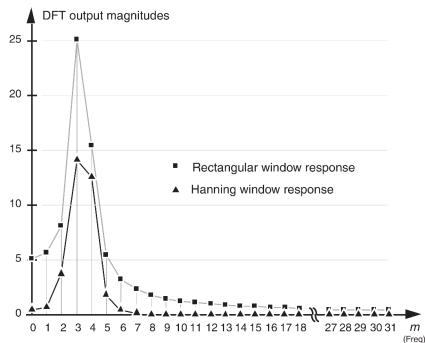
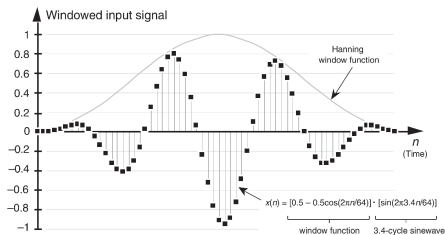
Magnitudinea(dB) răspunsului în frecvență

$$|W_{dB}(m)| = 20 \log_{10} \left(\frac{|W(m)|}{|W(0)|} \right) \quad (34)$$

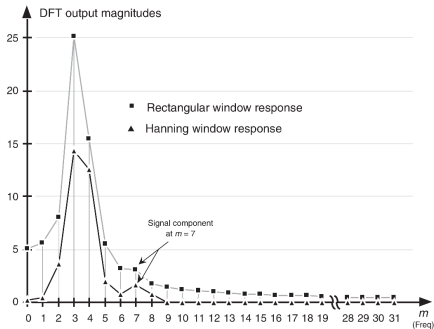
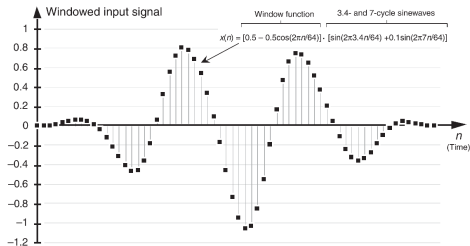


Obs: Scad lobii secundari, dar scade și rezoluția frecvenței.

Exemplu: Hanning pentru $k = 3, 4$



Exemplu: Hanning pentru detecție semnal de nivel scăzut



Alegerea ferestrei

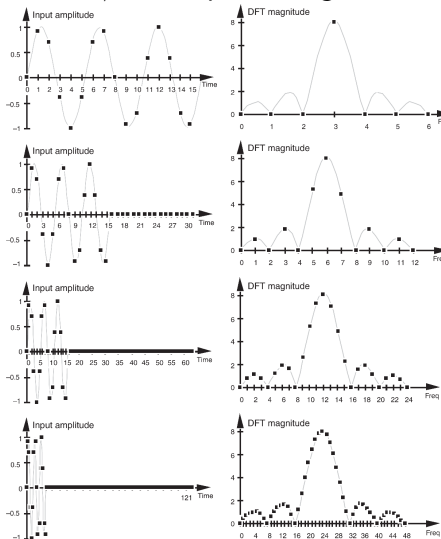
Alegerea ferestrei potrivite este un compromis între:

- ▶ lățirea lobului principal
- ▶ nivelele primelor loburi secundare (ex. Hanning vs. Hamming)
- ▶ viteza de descreștere a loburilor secundare

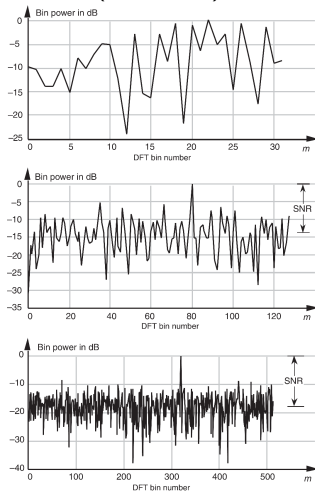
Dimensiunea și forma ferestrei afectează direct rezoluția și sensibilitatea semnalului.

Rezoluție. Zero padding.

Creștem artificial rezoluția DFT prin adăugarea de eşantioane nule.



Creștem puterea semnalului (sau **gain**) prin creșterea lui N .



$$\text{SNR}_N = \text{SNR}_{N'} + 10 \log_{10} \left(\frac{N}{N'} \right) \quad (36)$$