Étude sur la Convergence Quasi Uniforme

Gabriel Marie Lavois-St-Gelais

Été 2023

Préface

Voici le résultat d'un été de recherche en mathématique, et mon legs à la communauté scientifique. ...

Par souci de transparence je tiens à mentionner que le travail qui suit a été financé par une bourse du Conseil de Recherches en Sciences naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) (6 000$), par mon directeur de recherche et professeur Damir Kinzebulatov (2 500$) et par une bourse du Fonds de recherche du Québec - Nature et technologies (FRQNT) (1 500$).

J'ai beaucoup appris pendant mon stage de recherche et ces connaissances me suivront définitivement tout le long de mes études universitaires. Ainsi, je tiens à remercier tous mes contributeurs et surtout à Damir Kinzebulatov, qui m'ont énormément aidé à accomplir ce stage et sans qui ça je n'aurais pas eu la chance de vivre cette expérience.

Chapter 1

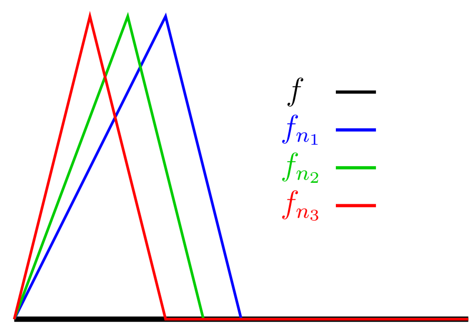
Quelques conventions

1.1 Nomenclature

1. Lorsque je dis: "la première définition de la convergence quasi uniforme" ou "la définition de la convergence quasi uniforme", je fais référence à la définition d'Arzelà. (Définition 2)
2. Lorsque je dis: "la deuxième définition de la convergence quasi uniforme", je fais référence à la définition de Borel. (Définition 3)
3. I est un intervalle ouvert.
4. J est un intervalle fermé.
5. Y est un intervalle quelconque.
6. Écrire $f \in R(I)$ signifie que f est élément des fonctions intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle I. (Définition 16)
7. $E_f(I)$ représente l'ensemble des points de discontinuité de f sur l'intervalle I.
8. $|E_f(I)| = 0$ signifie que $E_f(I)$ est négligeable, ou de mesure nulle.
9. $D^1(I)$ représente l'ensemble des fonctions de discontinuité du premiére ordre sur l'intervalle I. (Définition 10)

1.2 Lire les petits dessins

Les petits dessins sont d'une importance capitale dans l'étude de la convergence uniforme et il y en aura plusieurs dans les pages à venir. C'est pourquoi je veux vous montrer comment les comprendre et les lire. Pour ce faire, je vais vous présenter un exemple de dessin que vous pourriez rencontrer lors de votre lecture, ensuite, je vais vous expliquer comment le lire.



Nous avons ici l'exemple classique de la convergence quasi uniforme. Cet exemple vous sera certainement représenté plus tard. On a que $f_n \xrightarrow{cqu} f$, où f est une fonction constante. Dans le dessin, il y a quatre fonctions de représentées, soit les fonctions f, f_{n_1}, f_{n_2} et f_{n_3} ou $n_1 < n_2 < n_3$. Remarqué que les trois dernières fonctions sont superposées, et que c'est pour ça qu'on ne peut pas les voir au complet. Cela arrivera presque toujours dans le cas de la convergence quasi uniforme, car les fonctions convergent donc, pour un n assez grand, les fonctions vont se superposer. Dans ce dessin, il n'y a pas non plus de graduation sur les axes —il n'y a pas vraiment d'axes non plus—, car ce n'est pas nécessaire. Il faut voir une évolution de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ —ou de la fonction f_n, par conte, cette visualisation est pas tout à fait vrai, car c'est la suite qui évolue et non la fonction— à travers n.

Chapter 2

Convergence quasi uniforme?

Pour bien comprendre d'où nous vient la convergence quasi uniforme(cvqu) il est important de bien comprendre la convergence uniforme(cvu), car la cvqu n'est pas sens lien avec la cvu. –Comme vous aurez pu le deviner par son nom.–

Définition 1. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'intervalle I tels que $f_n : I \to \mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

On écrit que $f_n \stackrel{cvu}{\longrightarrow} f$ pour dire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Cette definition vient avec un théorème trés important en analyse de suite de fonctions et en résolution d'équation diférenciel.

Théorème 1. *Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'intervalle I tel que f_n est continue sur I, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $f_n \stackrel{cvs}{\longrightarrow} f$.*

$$f_n \stackrel{cvu}{\longrightarrow} f \text{ sur } I \Longrightarrow f \text{ est continue sur } I.$$

Or ce théorème révèle un défaut de la convergence uniforme, soit l'absence de l'implication inverse du théorème. En effet, ce n'est pas à cause que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continue sur I, et converge simplement vers f, où f est une fonction continue sur I, que $f_n \stackrel{cvu}{\longrightarrow} f$.

C'est pour répondre à cette lacune de la cvu que Arzelà (1847-1912), un mathématicien italien, a introduit la convergence quasi uniforme.

Définition 2. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'intervalle I tel que $f_n : I \to \mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi uniformément vers f si

$$f_n \stackrel{cvs}{\longrightarrow} f$$

et

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists I_1, ..., I_m \quad \exists n_1, ..., n_m > n_0 \text{ tels que } I \subset \cup_{j=1}^{m}(I_j)$$

et

$$|f_{n_i}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I_i \quad \text{pour } i = 1, ..., m$$

On écrit que $f_n \xrightarrow{cqu} f$ pour dire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi uniformément vers f.

Bien entendu, cette définition de la cvqu vient avec un théorème semblable au théorème 1 de la convergence uniforme, mais en beaucoup plus fort.

Théorème 2. *Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'intervalle I tel que f_n est continue sur I, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $f_n \xrightarrow{cvs} f$.*

$$f_n \xrightarrow{cvqu} f \text{ sur } I \Longleftrightarrow f \text{ est continue sur } I.$$

Ce dernier théorème nous vient d'Arzelà et c'est pour ce théorème qu'on s'est intéressé à la convergence quasi uniforme. Maintenant, et pour le bien de la compréhension des prochains chapitres, il serait important de mentionner les définitions et les théorèmes suivants. Probablement le saviez-vous déjà, mais la convergence uniforme implique la convergence simple. De plus, par une preuve qu'il est très simple à réaliser, on à que la convergence uniforme implique la convergence quasi uniforme et que la convergence quasi uniforme implique la convergence simple —par définition—. On a donc le théorème suivant.

Théorème 3.

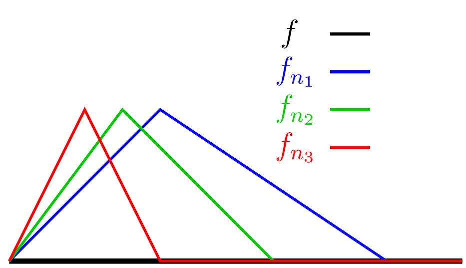
$$cvu \Longrightarrow cqu \Longrightarrow cvs$$

Remarqué qu'aucune de ces implications inverses n'est vraie en général!

2.1 Quelques exemples de convergence quasi uniforme

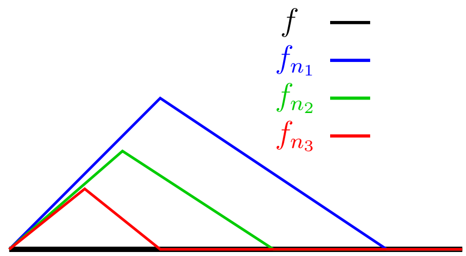
À présent qu'on a vu la définition de la convergence quasi uniforme, il serait bon que l'on visionne quelques exemples de qualité ensemble.

Example 1



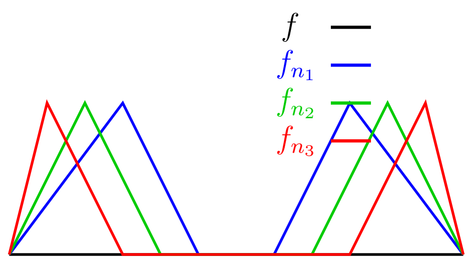
L'exemple 1 est l'exemple classique de la convergence quasi uniforme, où $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi uniformément vers une fonction constante. Remarqué que le sommet de f_n est toujours à la même hauteur. Cela fait en sorte que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f. Donc ceci est un exemple d'une suite de fonctions qui converge quasi uniformément, mais pas uniformément.

Example 2

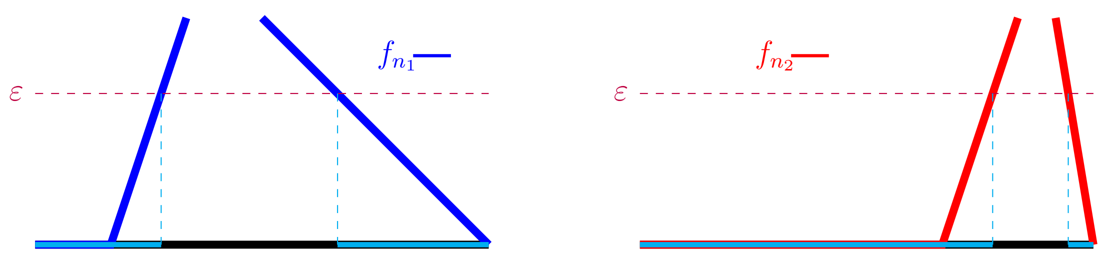


L'exemple 2 est un exemple de convergence de suite de fonctions –très semblable à l'exemple 1– qui converge uniformément, et donc aussi quasi uniformément. La convergence uniforme est due au fait que le sommet diminue à chaque fois que n augmente.

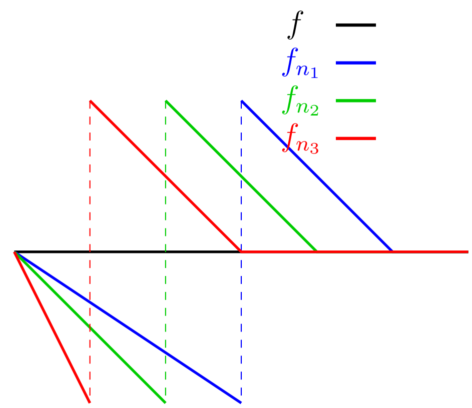
Example 3



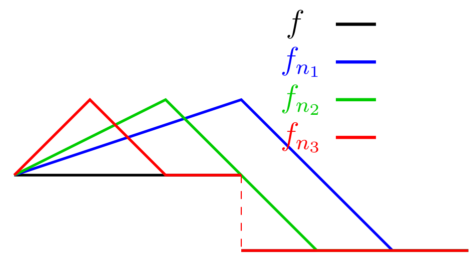
L'exemple 3 nous laisse deviner que la convergence quasi uniforme n'est pas sans lien avec le fait que f_n vient s'écraser sur les côtés du graphique dans cette forme pyramidale. En fait, ces écrasements de pyramide font en sorte qu'il n'y a pas de discontinuité aux bornes de I. Je crois que deux petits dessins s'imposent. Les dessins qui suivent sont l'agrandissement de la région droite de l'exemple 3, dans le cas de la fonction bleue puis dans le cas de la fonction rouge. Donnons-nous un $\varepsilon > 0$ et n_1, n_2. La ligne bleu pâle est l'intervalle I_{n_1} et I_{n_2} tel que $\forall x \in I_{n_1}, I_{n_2}$ on a que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Alors, on remarque que le fait que le fait que f_{n_1} soit très en angle vers les bornes de I permet à f_{n_2} ou plus précisément, à I_{n_2} de faire en sorte que $I_{n_1} \cup I_{n_2} = I$.



Example 4



Example 5



L'exemple 4 est un exemple d'une suite de fonctions discontinue qui converge quasi uniformément vers une fonction continue.
L'exemple 5 est un exemple d'une suite de fonctions continue qui converge quasi uniformément vers une fonction discontinue.
Ces deux derniers exemples servent à vous montrer que cela "existe" et ils serviront aussi de source d'inspiration pour vos images mentales de la convergence quasi uniforme.

Example 6

L'exemple 6 est aussi un exemple de convergence quasi uniforme, mais c'est un exemple très particulier, je l'ai nommé: convergence quasi uniforme modulaire. Dans l'exemple 6 très particulièrement, il est question d'un modulo 3. J'entends par modulo 3, qu'à tous les trois n il y a une abstraite répétition dans le schéma de la suite de fonctions. Et cette répétition se perpétue à l'infinie. Dans l'exemple 6, pour qu'il y ait convergence simple –qui est essentielle à la convergence quasi uniforme– les sections qui ressortent de f –on se comprend– deviennent de plus en plus petites à chaque fois que f_n les dessinent. Éventuellement ils deviendront presque nuls et marieront f.

Chapter 3

Équivalence de deux définition de la convergence quasi uniforme

3.1 Introduction à la problématique

Un peu après que Azélà ait donné la première définition de la convergence quasi uniforme, ce fut au tour d'Émile Borel (1871-1956)–un mathématicien français d'une importance capitale en analyse fonctionnel– de nous proposé une autre definition de la convergence quasi uniforme. Le but de ce chapitre est de déterminer si les deux définitions sont équivalentes en général.

3.2 Deuxième définition de la convergence quasi uniforme

Définition 3. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'intervalle I tel que $f_n : I \to \mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi uniformément vers f si

$$f_n \xrightarrow{cvs} f$$

et

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n_1, ..., n_m \geq n_0$$

tels que

$$\min_{1\leq k\leq m} |f_{n_k}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I.$$

Cette deuxième définition (déf.3) est semblable à la première définition (déf.2), à la seule différence qu'au lieu d'avoir des intervalles prés définis $I_1, ..., I_m$, associés à $n_1...n_m$, on va créé les intervalles en fonction de la dernière ligne de la deuxième définition. En d'autres mots, si on prend l'intervalle Y_i associé à n_i, alors, $Y_i = \{x \in I : |f_{n_i}(x) - f(x)| \leq min_{1\leq k\leq m}|f_{n_k}(x) - f(x)|\}$. Ainsi, pour chaque n_i on fait un intervalle Y_i pour $i = 1, ..., m$. Cela a pour conséquence que l'intervalle Y_i ainsi créer n'est pas nécessairement connexe là où l'intervalle

I_i de la permière définition () est continu.
On sait que les deux définitions sont équivalentes dans le cas des suites de fonction continue.

Théorème 4.

Les deux définitions de la convergence quasi uniforme sont équivalentes dans le cas des suites de fonction continue.

Regardons si les deux définitions sont équivalentes en général. Commençons par étudier la question d'une façon purement logique. Est-ce que la première définition de la cvqu (déf.2) implique la seconde définition de la cvqu (déf.3)? Aux premiers abords, on serait tenté de répondre "oui" et ce, pour les raisons expliquées au paragraphe sous la définition3. En effet, comme on l'a dit, les deux définitions ont comme seule différence leurs intervalles. Mais on peut partir de l'intervalle continu I_i et le redistribuer en intervalle Y_i pas nécessairement continu et qui satisferait la deuxième définition de la cvqu. Par contre, l'inverse n'est pas vrai en général, il suffit de trouver un contre-exemple approprié pour s'en rendre compte. La démonstration qui suit utilise le concept de point de convergence quasi uniforme qui sera le sujet du prochain chapitre.

Démonstration

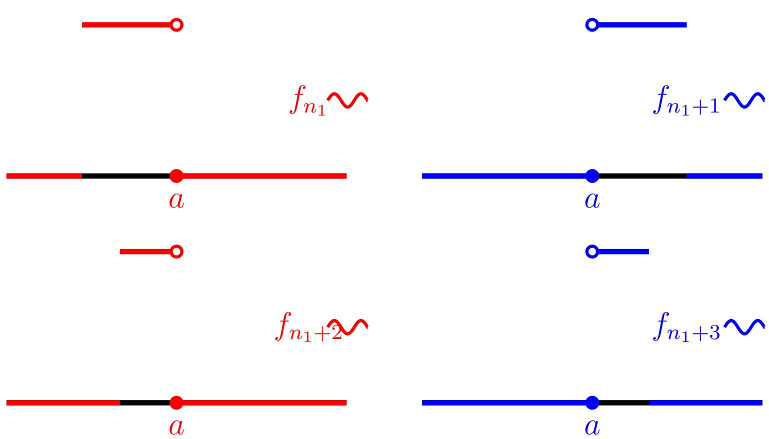
Def 1 ($\Longrightarrow$) Def 2

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists I_1, ..., I_m \quad \exists n_1, ..., n_m > n_0$
tels que $I \subset \cup_{j=1}^{m}(I_j)$ et $|f_{n_i}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I_i \quad$ pour $i = 1, ..., m$ Or, $\forall x \in I_i$ on a que $min_{1\leq k\leq m}|f_{n_k}(x) - f(x)| \geq |f_{n_i}(x) - f(x)|$ et cela est vrai pour $i = 1, ..., m$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists I_1, ..., I_m \quad \exists n_1, ..., n_m > n_0$
tels que $min_{1\leq k\leq m}|f_{n_k}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in i$
On peut enlever $I_1, ..., I_m$ car il n'est plus utilisé, et nous avons la deuxième definition de la convergence quasi uniforme. $\square$

Def 1 ($\not\Longleftarrow$) Def 2

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions suivante:



Dans un premier temps, $f_n \xrightarrow{cvs} f$. Cela est dû au fait que le point de discontinuité se rapproche de a lorsque n devine plus grand et que a est sur f. Dans un second

temps, $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N}$ on peut trouver n_1 et $n_2 = n_1 + 1$ tels que, $\forall x \in I$ $min_{1 \leq k \leq m} |f_{n_k}(x) - f(x)| < \varepsilon$. Dans les cas des $x \in I$ qui sont à gauche de a, on a que $|f_{n_1}(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$, dans le cas des $x \in I$ qui sont à droite de a on a $|f_{n_1+1}(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$ et dans le cas de $a \in I$ on a que a est sur f. Donc, on a que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi uniformément selon la deuxième définition.
Par contre a n'est pas un point de convergence quasi uniforme, car dans la définition du point de convergence quasi uniforme, on demande un intervalle $I' \ni a$ et un seul n tel que $|f_{n+1}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I'$. Mais un telle n n'existe pas, car la distance entre f_n et f, d'un des côtés de a, sera toujours plus grand que epsilon.
Or, on sait, du théorème 9 que pour que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi uniformément sur I selon la première définition il est nécessaire que tous les points de I soit des points de convergence quasi uniforme, ce qui n'est pas le cas dans notre exemple. Donc $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas quasi uniformément selon la première définition. $\square$

Théorème 5.

La première définition de la convergence quasi uniforme implique la seconde définition de la convergence quasi uniforme en général. L'implication inverse est fausse en général.

Chapter 4

Type de discontinuité

4.1 Introduction à la problématique

L'idée de ce chapitre est de décrire les types de discontinuité qui seront considérés lors de cette étude.

4.2 Continuité

Définition 4. Soit f, une fonction sur $I \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en $a \in I$ si,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma > 0 \quad \forall x \in I$$

tel que

$$|x - a| < \sigma \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

on note $f \in C(a)$ pour dire que f élément des fonctions continues en a.

Définition 5. Soit f, une fonction sur $I \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I si, pour tout $a \in I$, f est continue en a.
On note $f \in C(I)$ pour dire que f est continue sur l'intervalle I.

4.3 Discontinué

Définition 6. Soit $\lim_{x \to a} f(x) = L$, on dit que:

- L existe si $L \in \mathbb{R}$ et L est une valeur finie,
- L n'existe pas si $L \notin \mathbb{R}$ ou $L = \pm\infty$

Définition 7. Soit f, une fonction sur $I \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On dit que f est discontinue en $a \in I$ si f n'est pas continue en a On note $f \notin C(a)$ pour dire que f n'est pas continue en a.

Définition 8. Soit f, une fonction sur $I \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On dit que f est discontinue sur I s'il existe $a \in I$ tel que f n'est pas continue en a On note $f \notin C(I)$ pour dire que f n'est pas continue sur l'intervalle I.

Définition 9. Soit f, une fonction sur $I \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On dit que a est un point de discontinuité du premier ordre de f si un des deux cas, ou les deux cas surviennent:

- $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$
- $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$

On note $f \in D^1(a)$ pour dire que a est un point de discontinuité du premier ordre de f.

Définition 10. Soit f, une fonction sur $I \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On dit que f est discontinue du premier ordre sur I s'il existe a in I tel que a est un point de discontinuité du premier ordre de f. On note $f \in D^1(I)$ pour dire que f est discontinue du premier ordre sur I.

Définition 11. Soit f, une fonction sur $I \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On dit que a est un point de discontinuité du deuxième ordre si un des deux cas, ou les deux cas surviennent:

- $\lim_{x\to a^-} f(x)$ n'existe pas
- $\lim_{x\to a^+} f(x)$ n'existe pas

On note $f \in D^2(a)$ pour dire que a est un point de discontinuité du premier ordre de f.

Définition 12. Soit f, une fonction sur $I \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On dit que f est discontinue du deuxième ordre sur I s'il existe a in I tel que a est un point de discontinuité du deuxième ordre de f. On note $f \in D^2(I)$ pour dire que f est discontinue du deuxième ordre sur I.

4.4 Théorèmes utiles de la discontinuité

Théorème 6. *Théorème de Froda*

$$f \in D^1(I) \Longrightarrow E_f(I) \text{ est au plus dénombrable}$$

Théorème 7.

$$f \in D^1(I) \Longrightarrow \forall a \in I \quad \lim_{x\to a^-} f(x) \text{ et } \lim_{x\to a^+} f(x) \text{ existe}$$

Chapter 5

Point de Convergence Quasi Uniforme

5.1 Introduction à la problématique

Connaitre la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f est très pratique lorsqu'on s'intéresse à la continuité de f sur un intervalle I. Par contre, lorsqu'on s'intéresse à la continuité de f sur un seul point $x \in I$ alors, il peut-être pratique d'avoir une définition de la convergence uniforme qui cible seulement se point, qui conserve tous les théorèmes importants de la convergence uniforme et qui ne nécessite pas de s'intéresse à la convergence de touts les autres points de I. dans de tel cas, on utilise le point de convergence uniforme.

Définition 13. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que $x' \in [c,d]$ est un point de convergence uniforme (pcvu) si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists (a,b) \ni x' \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0$$

tels que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in (a,b) \cap [c,d]$$

Cette définition vient avec un théorème presque trivial, mais qu'on mentionnera en passant.

Théorème 8. *Soit une suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$f_n \xrightarrow{cvu} f \text{ sur } I \Longleftrightarrow \forall x \in I \quad x \text{ est pcvu de } f$$

La question qu'on va tenter de répondre lors de ce chapitre est de savoir s'il exist une difinition et un théorème équivalant à la définition 13 et théorème 8, mais dans le cas de la convergence quasi uniforme, i.e. si on est capable de montrés l'écivalence entre la convergence quasi uniforme sur un intervalle et la convergence quasi uniforme local sur touts les points qui de cet interalle. Existe-t-il un point de convergence quasi uniforme selon la premiére et selon la deuxième définition de la cvqu?

5.2 Point de convergence quasi uniforme selon la première définition de la cvqu

Définition 14. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que x' est un point de convergence quasi uniforme (pcqu) si

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists I \ni x' \quad \exists n > n_0$$

tel que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

Cette définition m'a été donnée par Damir Kinzebulatov et pourrait-être vue comme étant de la convergence quasi uniforme aux alentours de x'.

Théorème 9. *Soit une suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$f_n \xrightarrow{cqu} f \textit{ sur } I \Longleftrightarrow \forall x \in I \quad x \textit{ est pcqu de } \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Pour faire la preuve de la première implication, qui est quelque peu triviale, on va simplement partir de la définition de la convergence quasi uniforme, prendre x' dans I et dire que x' se trouve dans un des intervalles $I_k = I'$ et utiliser cet intervalle I' et ce x' pour se rendre vers la définition d'un point de convergence quasi uniforme. Par contre la preuve de l'implication inverse est un peu plus compliquée...

Démonstration

$(\Longrightarrow)$

$\forall\varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists I_1, ..., I_m \quad \exists n_1, ..., n_m > n_0$
tels que $I \subset \cup_{j=1}^{m}(I_j)$ et $|f_{n_i}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I_i \quad$ pour $i = 1, ..., m$

$\Longrightarrow \forall x' \in I \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists I_1, ..., I_m \quad \exists I' \in I_1, ..., I_m : x' \in I'$
tel que $I \subset \cup_{j=1}^{m}(I_j)$ et $|f_{n_i}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I_i \quad$ pour $i = 1, ..., m$

$\Longrightarrow \forall x' \in I \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists I' \ni x' \quad \exists n' > n_0$
tel que $|f_{n'}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I'$ □

$(\Longleftarrow)$

$\forall\varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists I \ni x' \quad \exists n > n_0$
tel que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$

$\Longrightarrow \forall x_1, x_2... \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists I_1 \ni x_1, I_2 \ni x_2...$
tel que $|f_{n_i}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I_i$ pour $i = 1, 2...$ et $I \subset \cup_{j=1}^{\infty}(I_j)$

Or, on sait, par le lemme de Heine-Borel, que si on a une collection infinie d'intervalles $I_1, I_2...$ t.q. $I \subset \cup_{j=1}^{\infty}(I_j)$, où I est un intervalle ouvert, alors il existe une collection finie d'intervalles $I_1...I_m$ tels que $I \subset \cup_{j=1}^{m}(I_j)$. Pour avoir de la convergence quasi uniforme, il faut que chaque intervalle ait un n. Il suffit de sélectionner un $x_i \in I_i$

pour tous les intervalles I_i –comme ce x_i est associé à un certain n_i. Ce n_i fonctionne pour tous les $x \in I_i$. Donc on a un n_i pour tous les intervalles I_i —où $i = 1...m$—.

$\Longrightarrow \forall x' \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists I_1, ..., I_m \quad \exists n_1, ..., n_m > n$
tel que $|f_{n_i}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I_i$ pour $i = 1, ..., m$ et $I \subset \cup_{j=1}^{m}(I_j)$ □

Théorème 10. *Soit la suite de fonctions* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $f_n \xrightarrow{cvs} f$ *et* $f_n \in C(I)$ *pour tout* n.

$$f \in C(a) \Longleftrightarrow a \textit{ est pcqu de } \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Démonstration

($\Longrightarrow$)

Soit, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $f_n \xrightarrow{cvs} f$ et f_n est continu sur I pour tout n. Supposons que f soit continu en a. On a donc, par la continuité de f et de f_n en a:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad \exists \sigma > 0 \quad \forall x \in I$ tel que $|x - a| < \sigma \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon/3 < \varepsilon$ et $|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon/3 < \varepsilon$. De plus, par la convergence simple, on a que $|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon/3 < \varepsilon$

$$\begin{array}{rcl} |f(x) - f(x)| & < & |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| + |f(a) - f(x)| \\ & < & \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ & < & \varepsilon \end{array}$$

□

($\Longleftarrow$)

Soit, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $f_n \xrightarrow{cvs} f$, f_n est continu sur I pour tout n et $a \in I$ est un point de cvqu. On a donc que $f_n \in C(a)$ puisque $a \in I$. Par la continuité de f_n:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma > 0 \quad \forall x \in I$ tel que $|x - a| < \sigma \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon/3 < \varepsilon$.
De plus, comme a est un point de cvqu, on a que: $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \quad \exists I' \in [a - \sigma, a + \sigma]$ tel que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3 < \varepsilon \quad \forall x \in I'$

$$\begin{array}{rcl} |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| + |f_n(x) - f(x)| & < & \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \\ |f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| + |f_n(x) - f(x)| & < & \\ |f_n(x) - f(a)| + |f_n(x) - f(x)| & < & \\ |f_n(x) - f(a) - f_n(x) + f(x)| & < & \\ |f(x) - f(a)| & < & \varepsilon \end{array}$$

□

Théorème 11. *Soit la suite de fonctions* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $f_n \xrightarrow{cvs} f$ *et* $f_n \in D^1(I)$ *pour tout* n.

$$f \in D^1(a) \Longleftarrow a \textit{ est pcqu de } \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Démonstration

($\not\Longrightarrow$) La démonstration du théorème 5 sert de contre exemple.

($\Longleftarrow$) a est pcqu de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \Longrightarrow a$ est pcqu2 de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{thm 14}}{\Longrightarrow} f \in D^1(a)$

5.3 Point de convergence quasi uniforme selon la deuxième définition de la cvqu

Grâce au théorème 5, on sait où se situ le point de convergence quasi uniforme selon la première définition, pas rapport à la deuxième définition de la convergence quasi uniforme. En vertu de cette vision, le pcqu de la première définition ne convient pas comme pcqu à la seconde définition. Ainsi, il faudra en créer un.

Définition 15. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que x' est un point de convergence quasi uniforme selon la seconde définition (pcqu2) si

$$\forall\varepsilon>0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \exists I\ni x' \quad \exists n_1...n_m>n$$

tel que

$$\min_{1\le k\le m}|f_{n_k}(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in I.$$

Une fois cela fait, il faut que notre définition satisfasse les théorèmes suivants, sans quoi, ce ne serait pas le point de convergence quasi uniforme qu'on recherche.

Théorème 12. *Soit une suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$f_n \xrightarrow{cqu2} f \textit{ sur } I \Longleftrightarrow \forall x\in I \quad x \textit{ est pcqu2 de } \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Démonstration

$(\Longrightarrow)$

$\forall\varepsilon>0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \exists n_1,...,n_m>n$
tel que $\min_{1\le k\le m}|f_{n_k}(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in I$

$\Longrightarrow \forall x'\in I \quad \forall\varepsilon>0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \exists I'\subset I : x'\in I' \quad \exists n_1,...,n_m>n$
tel que $\min_{1\le k\le m}|f_{n_k}(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in I'$ $\square$

$(\Longleftarrow)$

$\forall x'\in I \quad \forall\varepsilon>0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \exists I'\ni x' \quad \exists n_1,...,n_m>n$
tel que $\min_{1\le k\le m}|f_{n_k}(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in I'$

$\Longrightarrow \forall x_1,x_2... \quad \forall\varepsilon>0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \exists I_1\ni x_1, I_2\ni x_2...$
tel que $\min_{1\le k\le m}|f_{n_k}(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in I'$

Toujours par le lemme de Heine-Borel, on sait que si on a une collection infinie d'intervalles $I_1,I_2...$ t.q. $I\subset\cup_{j=1}^{\infty}(I_j)$, où I est un intervalle ouvert, alors il existe une collection finie d'intervalles $I_1...I_m$ tels que $I\subset\cup_{j=1}^{m}(I_j)$. Pour avoir de la convergence quasi uniforme, il faut que chaque intervalle ait un n. Il suffit de sélection un $x'\in I_i$ pour tous les intervalles I_i pour $i=1,..,m$. Puisque ce x_i est associé à une certaine collection finie de n. On a qu'à unir ces ensembles de n pour former la collection finie de n, qu'on dénotera $n_1,...,n_w$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists n_1, ..., n_w > n$
tel que $\min_{1 \leq k \leq m} |f_{n_k}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$ $\square$

À présent qu'on a notre point de convergence quasi uniforme selon la deuxième définition, on voudrait étudier les similarités de ce point de convergence avec le pcqu selon la première définition. Tout d'abord, est-ce qu'on a le théorème 10.

Théorème 13. *Soit la suite de fonctions* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que* $f_n \xrightarrow{cvs} f$ *et* $f_n \in C(I)$ *pour tout* n*.*

$$f \in C(a) \Longleftrightarrow a \textit{ est pcqu2 de } \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Démonstration Soit la suite de fonctions $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow{cvs} f$ et $f_n \in C(I)$ pour tout n. On sait que, dans ces conditions, comme les deux théorèmes sont équivalant:

$$f \in C(a) \overset{\text{thm 10}}{\Longleftrightarrow} a \text{ est pcqu1 de } \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Longleftrightarrow a \text{ est pcqu2 de } \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Et quand est-il du théorème 11

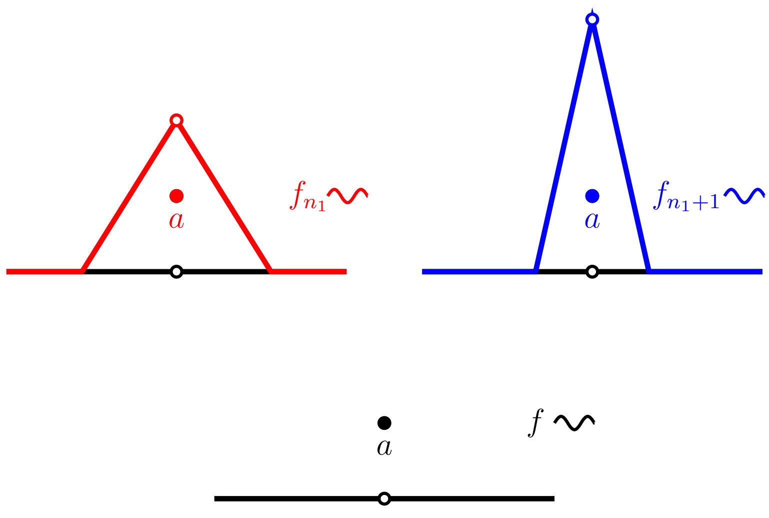
Théorème 14. *Soit la suite de fonctions* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que* $f_n \xrightarrow{cvs} f$ *et* $f_n \in D^1(I)$ *pour tout* n*.*

$$f \in D^1(a) \Longleftarrow a \textit{ est un pcqu2 de } \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Démonstration

$(\not\Longrightarrow)$

Soit la suite de fonctions suivante telle que la longueur de la base du triangle diminue à chaque fois que n augmente, et l'aire du triangle reste le même pour tout n.



Il est évident que $f_n \xrightarrow{cvs} f$, que $f_n \in D^1(I) \forall n \in \mathbb{N}$ et que $f \in D^1(I)$.

Par contre, on a que a n'est pas un point de convergence quasi uniforme selon la deuxième définition. Soit $a \in I' \subset I$, on a qu'il n'existera jamais une série de n finit qui nous permettrait de minimiser tous les $x \in I'$, puisqu'il y a des points de

I' (surtout ceux qui sont près de a) qui s'éloigne de plus en plus, à chaque fois n augmente.

$(\Longleftarrow)$

Soit $f suite$ telle que, $f_n \xrightarrow{cvs} f$, $f_n \in D^1(I)$ pour tout n et $f \xrightarrow{cqu2} f$ sur I. On a que $\forall a \in I$, a est un point de convergence quasi uniforme selon la deuxième définition. On a aussi que $f_n \in D^1(a)$, d'où la limite à gauche et à droite de $f_n, \forall n$ existe. On veut en tirer que la limite de f à droite de a et la limite de f à gauche de a existe. Sans perdre de généralité, évaluons seulement le cas de l'existence de la limite de f à gauche de a. Par l'existence de la limite de f_n à gauche de a on a que:

$$\forall n \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma > 0 \quad t.q. \quad \forall x < a \quad \forall x' < x < a \quad |x - x'| < \sigma \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon/3$$

Par le fait que a est un pcqu2, on a que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists I' \subset [x'; a] \quad \exists n_1 ... n_m > n_0 \quad t.q. \forall x \in I' \quad \min_{1 \leq k \leq m} |f_{n_k}(x) - f(x)| < \varepsilon/3$$

On a donc que:

$$\begin{array}{rcc} |f(x) - f(x')| & < & \min_{1 \leq k \leq m}(|f(x) - f_{n_k}(x')| + |f_{n_k}(x') - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - f(x)| \\ & < & \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ & < & \varepsilon \end{array}$$

Chapter 6

Convergence quasi uniforme presque partout et intégrale au sens de Riemann

6.1 Introduction à la problématique

dans le présent chapitre on va tenter de trouver une convergence de suite de fonctions qui est une condition nécessaire et suffisante à l'intégrabilité au sens de Riemann de la limite de cette suite. Dans un premier temps on remarque que la cqu1 et la cqu2 ne sont pas les candidats que l'on recherche puisqu'on a vu des suites de fonctions intégrables au sens de Riemann dont la limite était elle aussi intégrable au sens de Riemann, mais qui ne convergeaient pas quasi uniforme selon la première ou la seconde définition de la cvqu (i.g. le contre exemple de la preuve du théorème 5).
Il faudra donc définir une nouvelle convergence, mais avant, voici un peut de théorie sur les fonctions intégrables au sens de Riemann.
J'aimerais préciser que dans ce ce chapitre on s'apprête à résoudre un problème ouvert.

6.2 Intégral au sens de Riemann

Voici les grands théorèmes de ce chapitre.

Définition 16. On dit que $f : I \to C$ est une fonction intégrable au sens de Riemann si: $\forall \varepsilon > 0$ il existe deux fonctions escaliers $\mu : I \to \mathbb{R}^+$ et $\phi : I \to \mathbb{C}$ telles que, $\forall x \in I$:

$$|f(x) - \phi(x)| < \mu(x) \quad \text{et} \quad \int_I \mu < \varepsilon$$

Théorème 15. *f est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle I si et seulement si l'ensemble des points de discontinuité de f sur I, est négligeable.*

J'aimerais apporter quelques précisions sur la notion d'ensemble des points de discontinuité et d'ensemble négligeable.

- $E_I(f)$ représente l'ensemble des points de discontinuité de f sur l'intervalle I.
- $\|E_I(f)\| = 0$ signifie que $E_I(f)$ est négligeable, ou de mesure nulle.

Le concept d'ensemble négligeable ou de mesure nulle (les deux veulent dire la même chose) peut être vue de la façon suivante: si on prend le chiffre 2 sur l'axe horizontal et qu'on regarde la l'aire du rectangle allant de 2 jusqu'à 2 sur l'axe horizontal et de 0 jusqu'à l'infinie sur l'axe vertical, alors l'aire de ce rectangle est de mesure zéro. Car l'intervalle sur l'axe horizontal n'a pas d'épaisseur.
Si on fait la même chose, mais avec tout les chiffres entre 1 et 2 sur l'axe horizontal. Alors, notre rectangle n'est plus d'aire zéro, car l'intervalle $[1, 2]$ n'est pas nul.
Ainsi, si on veut calculer l'aire sous une courbe qui est seulement discontinue en 2 —ou en en série de points séparés— alors le —ou les— point de discontinuité ne nous empêchera pas de faire notre calcule, car l'aire sous notre fonction, en ce point, est de zéro. D'où l'on dit que l'ensemble des points discontinuité est de mesure zéro, nulle ou négligeable. Par contre, si la fonction est discontinue en tout les points de l'intervalle $[1, 2]$ alors on consentira qu'il est impossible de mesurer l'aire sous notre fonction étant donné qu'on aura un intervalle complet où chaque rectangle sous la fonction sera de mesure zéro, pendant que nécessairement l'aire sous notre fonction ne peut pas être nul, puisqu'il y a visiblement de l'aire. C'est pour cela qu'il faut tenir compte de l'ensemble des discontinuités d'une fonction lorsqu'on veut intègre cette fonction.
Bon, à présent que cela est dit, on peut s'attaquer à la démonstration de notre théorème.

6.3 Convergence quasi uniforme presque partout

L'idée de la convergence quasi uniforme presque partout (cqupp) m'est venue à l'esprit lorsque j'ai réalisé que mes contre-exemples qui montraient que la convergence quasi uniforme selon la définition 1 et 2 d'une suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in D^1(I)$, ne conservait pas nécessairement $f \in D^1(I)$, tenaient sur le fait qu'il existait un certain x qui n'était pas un point de convergence quasi uniforme selon la définition 1 ou 2. Or, on sait par le théorème 15 que le fait d'avoir un ensemble de mesures zéro de x tel que f est discontinu en x n'est pas un problème à l'intégrabilité au sens de Riemann. Ainsi, si on a un ensemble de x tel que x n'est pas un point de convergence quasi uniforme de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, alors on ne peut pas dire si f est continue ou discontinue en x. Or ce n'est pas un problème si cet ensemble est de mesure zéro. D'où la définition qui suit.

Définition 17. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définit sur I et soit $D \subset I$ un ensemble négligeable de I. On dit que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergence quasi uniforme presque partout sur I si $\forall x \in I \setminus D$, x est un point de convergence quasi uniforme selon la première définition.
On écrit que $f_n \overset{cqupp}{\longrightarrow} f$ pour dire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi uniformément presque partout vers f.

Alors, je proclame l'exitance du théorème suivant.

Théorème 16. *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions telle que $f_n \in R(I)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $f_n \xrightarrow{cvs} f$, alors*

$$f_n \xrightarrow{cqupp} f \iff f \in R(I)$$

Démonstration

($\Longrightarrow$)

Soit $f_n \xrightarrow{cqupp} f$ et $f_n \in R(I)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Par $f_n \in R(I)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on a que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad \exists \text{ des fonctions escaliers } \phi_n \text{ et } \mu_n$$

Tels que

$$|f_n(x) - \phi_n(x)| < \mu_n(x) \text{ et } \int_I \mu_n < \varepsilon.$$

Par $f_n \xrightarrow{cqupp} f$, on a que, $\forall x \in I \setminus D$, où D est un ensemble négligeable, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists I'$ et $n > n_0$ t.q. $\forall x' \in I'$, $|f_n(x') - f(x')| < \varepsilon$.
Or, dans ces dernières conditions, avec un x, un ε, un $n > n_0$ et I' fixé, on peut dire que, sur l'intervalle I':

$$\begin{array}{rcl} |f - \phi_n| & < & |f - f_n| + |f_n - \phi_n| \\ & < & \varepsilon + \mu_n \end{array}$$

Or, $\varepsilon + \mu_n$ est une fonction escalier.

$$\int_{I'} \varepsilon + \mu_n < \varepsilon + \varepsilon \cdot |I'|$$

D'où on peut dire que $\forall x \in I \setminus D$, il existe un intervalle $I' \ni x$ tel que $f \in R(I')$.

Pour utiliser le lemme de Heine-Borel, on aura besoin de redefinir D. Par la définition d'interval négligable, on sait que $\forall \varepsilon > 0$, il existe des interval ν_α pour $\alpha \in A$ tel que $D \subset \cup_{\alpha \in A}(\nu_\alpha) = D_\varepsilon$ et tel que $|D_\varepsilon| = \sum_{\alpha \in A} |\nu_\alpha| < \varepsilon$. Ainsi $I \setminus D_\varepsilon$ est borné et fermé. Donc on peut utiliser le lemme de Heine-Borel. Par le lemme de Heine-Borel, on peut trouver une quantité finie de $x_k \in I \setminus D_\varepsilon$, et donc de I_{x_k} (associé à chaque x_k), pour $k = 1...m$ tels que $I \setminus D_\varepsilon \subset \cup_{k=1}^m (I_{x_k})$ et $f \in R(I_{x_k})$. Donc on peut dire que $f \in R(I \setminus D_\varepsilon)$, mais comme $D_\varepsilon = D$ quand ε tend vers 0, alors on a que et que $f \in R(I \setminus D)$. Si on suppose que f est au plus discontinue sur D, ce qui revient à ajouté D à $E_{I/D}(f)$, donc à superposer que $E_I(f) = D + E_{I/D}(f)$, mais puisque D et $E_{I/D}(f)$ sont des un ensemble négligable et disjoint, alors $E_I(f)$ est aussi négligable. Par le théorème de Lesberge sur les ensembles de mesure nulle, on a que $f \in R(I)$.

($\Longleftarrow$)

soit $f_n \in R(I)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}(I)$ et $f_n \xrightarrow{cvs} f$. Par le fait que $f_n \in R(I)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $f \in R(I)$, on a que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad \exists \text{ les fonctions escaliers } \phi_n, \phi, \psi_n, \psi, \mu_n \text{ et } \mu$$

Tels que

1. $\phi_n > f_n, \quad \phi > f, \quad \psi_n < f_n, \quad \psi_n < f_n$
2. $\phi_n \xrightarrow{cvs} \phi, \quad \psi_n \xrightarrow{cvs} \psi$
3. $|f(x) - \phi(x)| < \mu(x), \quad |f(x) - \psi(x)| < \mu(x) \quad$ et $\quad \int_I \mu < \varepsilon$
4. $|f_n(x) - \phi_n(x)| < \mu_n(x), \quad |f_n(x) - \psi_n(x)| < \mu_n(x) \quad$ et $\quad \int_I \mu_n < \varepsilon$

De plus, par la convergence simple de ϕ_n, de ψ_n et de f_n, on a que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in I$, $\exists n_0$, $\forall n > n_0$ tel que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad |\phi_n(x) - \phi(x)| < \varepsilon/2 \quad |\psi_n(x) - \psi(x)| < \varepsilon/2$$

On fixe ε et x. Comme ϕ_n, ϕ, ψ_n ψ sont des fonctions escaliers, on peut créer l'intervalle I_{n_0} qui est l'ensemble des x' qui sont sur le même escalier que x sur ϕ_n, sur ϕ, sur ψ_n et sur ψ. Alors, deux cas s'offrent à nous.
Où bien que x est une borne de I_{n_0} –par exemple $I_{n_0} = (a, x)$ ou $I_{n_0} = (x, x)$–. Dans un ce cas ça veut dire que x est sur l'extrémité d'au moins une marche des fonctions escaliers. Alors on va mettre x dans l'ensemble D. Ainsi, par le fait que les fonctions escaliers ont un nombre fini d'escalier sur un intervalle borné on a que D est un ensemble dénombrable donc négligable.
Où bien que x n'est pas une borne de I_{n_0}. Dans ce cas, on a que,
$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \setminus D \quad \exists n_0 \quad \exists I_{n_0} \quad \forall n > n_0 \quad \forall x' \in I_{n_0}$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad |\phi_n(x') - \phi(x')| < \varepsilon/2 \quad |\psi_n(x') - \psi(x')| < \varepsilon/2$$

Si on reformule, cela implique que,
$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \setminus D \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n > n_0 \quad \exists I_n \ni x \quad \forall x' \in I_n$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad |\phi_n(x') - \phi(x')| < \varepsilon/2 \quad |\psi_n(x') - \psi(x')| < \varepsilon/2$$

$$\begin{aligned} |f_n(x') - f(x')| &< |\phi_n(x') - \psi(x')| \text{ ou } |\psi_n(x') - \phi(x')| \\ &< |\psi_n(x') - \psi(x')| + |\phi_n(x') - \phi(x')| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

D'où, $\forall x \in I \setminus D$, x est un point de convergence quasi uniforme et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge casi uniformément presque partout. □

La preuve de cette dernière implication assume que $\phi_n \xrightarrow{cvs} \phi, \quad \psi_n \xrightarrow{cvs} \psi$ ce qui n'est pas trivial et pourrait être faux. On est capable de créer des fonctions ψ et ϕ sur l'intervalle $I = [a, b]$ qui satisfont la preuve, de la façon suivante.

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x_1 = a) : x \in [a, x_2) \\ f(x_2) \quad : x \in [x_2, x_3) \\ \vdots \quad : \ \vdots \\ f(x_n) \quad : x \in [x_n, b) \end{cases} \qquad \phi(x) = \begin{cases} f(x_2) : x \in [a, x_2) \\ f(x_3) : x \in [x_2, x_3) \\ \vdots \quad : \ \vdots \\ f(b) \quad : x \in [x_n, b) \end{cases}$$

Où $x_i = \inf\{x \in (x_{n-1}; b) \setminus E_f(I) : |f(x_{n-1}) - f(x)| < \varepsilon/|I|\}$. À noté que pour une certaine fonction f on a que $\phi > f$ et $\psi < f$ alors que pour d'autres fonctions f on a que

$\phi < f$ et $\psi > f$. De plus, on conserve le fait que f est intégrable, car $\forall \varepsilon > 0$ on a que $|f(x) - \phi(x)| < \varepsilon/|I| = \mu(x)$ et $\int_I \mu = \frac{\varepsilon}{|I|} \cdot |I| = \varepsilon$

Ainsi, en utilisant la convergence simple de f_n, on a que $\forall \varepsilon$, $\forall x \in I$, $\exists n_0$, $\forall n > n_0$,

$$\begin{array}{rcc} |\psi_n(x) - \psi(x)| & < & |\psi_n(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - \psi(x)| \\ & < & \varepsilon/|I| + \varepsilon + \varepsilon/|I| \\ & < & 3\varepsilon \end{array}$$

Mais le problème, est que je ne suis pas certain qu'il y ait un nombre fini de x_i, et donc que les fonctions escalier ϕ et ψ ai un nombre fini de marches. Il faudra s'en assurer, ou trouver une autre façon de former ϕ et ψ. En attendant, j'ai fait une autre preuve de cette implication, qui est plus simple et qui n'utilise pas de fonction escalier.

Démonstration

($\Longleftarrow$)

Soit $f_n \in R(I)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in R(I)$ et $f_n \xrightarrow{cvs} f$. Par le fait que $f_n \in R(I)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $f \in R(I)$, on a que $|E_I(f)| = 0$ et que $|E_I(f_n)| = 0$.
De plus par la convergence simple, on a que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \text{t.q.} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

D'où on peut tirer que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad \forall n_0 \quad \exists n > n_0 \quad \text{t.q.} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Si on fixe $\varepsilon > 0$, $x \in I \setminus D$, n_x et $n > n_x$ et qu'on mette les ensembles $E_I(f_n)$ et $E_I(f)$ dans D qui est de mesure zéro par construction. Alors il resterait juste à créer un interval I'_x qui ferait en sorte que x soit un point de convergence quasi uniforme pour avoir la cqupp.
Comme x n'est pas dans $E_I(f_n)$ ou $E_I(f)$, alors $f, f_n \in C(x)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall x' \in I$$

$$|x - x'| < \sigma \Longrightarrow |f_n(x') - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f(x') - f(x)| < \varepsilon$$

Ainsi, si on prend l'interval $(x - \sigma, x + \sigma) = I_x$ on a que, pour tout $x' \in I_x$

$$\begin{array}{rcc} |f_n(x') - f(x')| & < & |f_n(x') - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(x')| \\ & < & \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\ & = & 3\varepsilon \end{array}$$

D'où, $\forall x \in I \setminus D$, x est un point de convergence quasi uniforme et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge quasi uniformément presque partout. $\square$