Projet de fin d'étude

Rapport final

Gabriel Marie Lavoie-St-Gelais

25 avril 2025

Table des matières

Avant-propos

Le sujet de mon projet de fin d'études est la relativité restreinte, un thème qui m'a été attribué par **Hugo Chapdelaine**, professeur de mathématiques à l'Université Laval. Formulée par Einstein en 1905, la relativité restreinte a été développée pour expliquer des phénomènes physiques incompatibles avec les théories de l'époque. Dans ce rapport, nous étudierons :

- Le concept de **référentiel inertiel (ou référentiel galiléen)**,
- Les **équations de la vitesse relativiste**,
- **L'invariance de la vitesse de la lumière**,

afin de mieux comprendre et d'expliquer de manière intuitive les phénomènes suivants :

- **La dilatation du temps**,
- **La contraction des longueurs**,
- **L'impossibilité de définir la simultanéité de deux événements**.

L'un des objectifs de ce rapport est d'offrir une approche intuitive des concepts de la relativité restreinte. C'est pourquoi j'utiliserai régulièrement des illustrations mettant en scène un train se déplaçant sur un rail ou un bateau voguant sur l'eau, en m'appuyant autant que possible sur des notions de physique accessibles à toutes et tous.
Bien sûr, cela nécessitera parfois un certain effort d'imagination et l'acceptation de situations quelque peu invraisemblables, comme celle où l'on embarquerait (mentalement) sur un photon voyageant à la vitesse de la lumière.
Sans plus attendre, plongeons dans le mystérieux monde de la relativité restreinte !

Relativité Galiléenne et référentiel inertiel

Un **référentiel** peut être compris comme le point de vue d'un observateur. L'importance de considérer le référentiel s'est manifestée très tôt dans l'histoire de l'humanité, lorsque des philosophes ont réalisé que l'observation d'un même phénomène pouvait différer selon la position de l'observateur.
Prenons un exemple classique : une personne se tenant sur la plage et regardant une balle tomber du mât d'un bateau en mouvement ne verra pas la même chose qu'une personne se trouvant à bord du bateau et assistant à la même expérience. Dans le premier cas, l'observateur sur la plage percevra la trajectoire de la balle comme une courbe, tandis que dans le second, l'observateur à bord du bateau verra la balle tomber en ligne droite vers le sol.

> *"Si l'on laissait tomber quelques gouttelettes d'eau depuis le haut, on ne les verrait pas tomber à des endroits différents du pied de la verticale, même si le navire est en mouvement."*
>
> Galilée, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, (1638)

Ce phénomène ne surprend personne, car nous avons toutes et tous déjà été exposés à ce genre d'exemple à l'école. Cependant, ce qui est remarquable, c'est que le choix du référentiel (le choix de l'observateur) peut donner lieu à des descriptions apparemment contradictoires d'un même événement. C'est précisément cette réflexion qui a conduit **Galilée** (1564-1642), l'un des pères fondateurs de la physique, à s'interroger sur la nature des lois physiques dans son ouvrage *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*[1] (1638).
Comment pouvait-il concevoir qu'on puisse faire une science basée sur des phénomènes naturels si les résultats semblaient dépendre, non pas de la nature elle-même, mais de la position de l'observateur ? Est-ce que les lois de la physique changent en fonction du référentiel ?
Galilée s'est rendu compte que, pour l'observateur situé dans le bateau en mouvement, l'expérience est indiscernable de celle réalisée dans un bateau immobile. Dans les deux cas, la balle tombe en ligne droite. C'est ainsi qu'il a formulé une phrase célèbre, qui prendra tout son sens à la fin de ce rapport :

> *"Le mouvement est comme rien."*
>
> Galilée, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, (1638)

[1] Discours et démonstrations mathématiques sur deux nouvelles sciences

Voici l'expérience de pensée qu'il proposait : supposons que vous soyez enfermé·e dans une boîte close, sans aucun moyen d'observer l'extérieur. Vous n'auriez alors aucun moyen de déterminer si la boîte est en mouvement rectiligne uniforme (c'est-à-dire en ligne droite et à vitesse constante, sans accélération) ou si elle est immobile. Dans les deux cas, toutes les expériences réalisées à l'intérieur de la boîte donneraient les mêmes résultats.

> *"Celui qui se trouve dans la cabine ne pourra, par aucune des expériences mentionnées, discerner si le navire se déplace ou s'il est immobile."*
>
> Galilée, Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo[2] (1632)

Cette réflexion conduit à une conclusion importante : deux référentiels en mouvement peuvent exister sans que cela n'affecte les phénomènes observés à l'intérieur de ses référentiels. C'est une façon de dire que, peu importe le nombre d'observateurs d'un même phénomène ou leur référentiel, cela n'a aucune incidence sur le phénomène. C'est ainsi que Galilée a établi que les lois de la physique sont les mêmes quel que soit le référentiel. Ainsi, nous avons établi les bases de la relativité galiléenne, et nous verrons plus tard que, même s'il s'agit d'un bel effort de la part de Galilée — surtout pour son époque — sa théorie est inexacte à plusieurs égards.
Plus tard, c'est **Newton** (1643-1727) qui formalisera le concept de **référentiel inertiel** — sans toutefois lui donner ce nom — dans son ouvrage *Philosophiæ naturalis principia mathematica*[3]. Il y introduit et formalise le concept de **référentiel inertiel** :

> *"Un référentiel inertiel — ou référentiel galiléen — se définit comme un référentiel dans lequel le principe d'inertie (première loi de Newton) est vérifié, c'est-à-dire que tout corps ponctuel libre (i.e. sur lequel ne s'exerce aucune force ou sur lequel la résultante des forces est nulle) est en mouvement de translation rectiligne uniforme, ou au repos (qui est un cas particulier de mouvement rectiligne uniforme)."*
>
> Wikipédia, Référentiel restreinte

En d'autres termes, un référentiel inertiel est un cadre dans lequel aucune force extérieure n'est appliquée. Définir un référentiel inertiel permet d'affirmer : "Ici, aucune force extérieure ne perturbe le système, je peux donc mener des expériences en toute rigueur sans interférence indésirable." C'est l'environnement idéal pour formuler des lois physiques de manière fiable.
Il n'est pas facile de trouver un exemple de référentiel inertiel dans la vrai vie— c'est un peu hypothétique. Mais on peut essayer.

[2] Dialogue sur les deux grands systèmes du monde
[3] Aussi connu sous le nom de *Principia Mathematica* (1687). Principes mathématiques de la philosophie naturelle.

L'intérieur d'une voiture qui se déplace en ligne droite à vitesse constante est un bon exemple de référentiel inertiel. Par contre, si la voiture prend un virage de temps en temps, ce n'est plus un référentiel inertiel, simplement parce que le mouvement n'est plus rectiligne. Bon... Je pense que c'est assez facile à comprendre. Attardons-nous à un exemple un peu plus complexe.

Supposons que vous soyez dans la cale d'un bateau qui se déplace en ligne droite à vitesse constante : vous êtes alors dans un référentiel inertiel car c'est le référentiel inertiel définit par Galilée. Maintenant, si vous sortez de la cale pour aller sur le pont — donc à l'extérieur du bateau — vous rencontrerez très rapidement le vent. Et même si ce vent souffle à une vitesse constante et dans une direction constante, vous n'êtes plus dans un référentiel inertiel. Pour s'en rendre compte, on peut faire une petite expérience : laissez tomber une balle. Cette balle sera emportée par le vent, dans la direction du vent. Or, dans un référentiel inertiel, elle devrait faire exactement la même chose que si vous étiez resté dans la cale, c'est-à-dire tomber à vos pieds. En effet, une expérience dans un référentiel inertiel (comme laisser tomber une balle) donne toujours les mêmes résultats dans tous les référentiels inertiels.

Par contre, si vous marchez sur le pont dans la direction du vent, à la même vitesse que le vent, de sorte que vous ne le sentiez plus, vous êtes alors "dans" le vent — et vous êtes de nouveau dans un référentiel inertiel. La balle que vous laissez tomber est emportée comme vous dans le vent, et elle retombera à vos pieds.

Parfois, on utilise simplement le mot référentiel pour désigner un référentiel inertiel. À partir de maintenant, c'est ce que nous ferons : sauf indication contraire, tous les référentiels dont il sera question seront considérés comme inertiels.

Il est aussi important de bien faire la distinction entre référentiel inertiel et observateur. On a tendance à les confondre, car un observateur est toujours situé dans un référentiel. Mais deux observateurs placées dans le même référentiel ne perçoivent pas nécessairement les mêmes choses en tant qu'observateurs.

Un observateur, c'est ce qu'une personne voit. Par exemple, quelqu'un qui regarde un mur et quelqu'un d'autre qui regarde un hamac dans la cale du bateau sont deux observateurs différents. Par contre, la cale du bateau constitue un référentiel (inertiel, dans ce cas), et l'on peut y placer plusieurs observateurs, chacun regardant un objet ou une scène différente.

C'est donc un peu trompeur de dire qu'un référentiel est un simple point de vue . Un référentiel est plutôt un espace. Celui-ci est dit inertiel si, en tout point de cet espace, il respecte la définition donnée par Newton (voir plus haut). En d'autres mots, un espace est un référentiel inertiel si, en tout point de cet espace, une balle laissée tomber tombe à vos pieds. Fait intéressant : si je me déplace dans le vide — c'est-à-dire sans aucune

friction de l'air — à vitesse constante en ligne droite, alors le référentiel inertiel dans lequel je me trouve coïncide avec l'observateur que je suis. Autrement dit, dans ce cas particulier, le référentiel et l'observateur sont pratiquement confondus, puisque rien ne vient perturber ma perception du mouvement ni interagir avec moi.
Ainsi, le concept de référentiel inertiel semble nous offrir une base solide : les lois de la physique y sont invariantes, et nous disposons d'un cadre stable pour décrire les phénomènes naturels. Toutefois, cette apparente simplicité cache encore de nombreuses interrogations.
Par exemple, si deux observateurs se trouvent dans des référentiels inertiels différents, comment peuvent-ils comparer leurs observations ? Comment passer d'un référentiel à un autre sans contradiction ?
Un autre problème se pose lorsqu'on s'intéresse à la lumière. Prenons Joe Blow, qui est à l'arrêt et voit un wagon passer à une vitesse v. Prenons maintenant Supergirl — soyons inclusifs — qui, elle, se déplace dans la direction du wagon à une vitesse $v/2$. Nous sommes d'accord que, dans son référentiel, Supergirl voit le wagon passer à une vitesse $v - \frac{v}{2} = \frac{v}{2}$, tandis que Joe Blow voit le wagon passer à une vitesse v.
Maintenant, remplaçons le wagon par un photon (ou simplement la lumière d'un laser) qui se déplace à une vitesse $v = c = 299\ 792\ 458$ m/s $\approx 3 \times 10^8$ m/s. Supposons que Supergirl, très rapide comme nous le savons tous, se déplace à $c/2$. Certains seraient tentés de dire qu'elle verrait alors le photon (ou la pointe du laser) se déplacer à une vitesse de $c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}$, n'est-ce pas ? Eh bien, elle aurait la stupéfiante surprise de constater que le photon aurait, de son point de vue, toujours une vitesse de c. Surprenant, non ?
Mais alors, voulant défier la lumière, elle pourrait décider d'atteindre une vitesse de $0,9999999 \times c$. Pourtant, rien à faire : elle verrait toujours le photon (ou la pointe du laser) se déplacer à une vitesse de c. Effarant ! Comme dirait Rimbaud.
Toutefois, un lecteur attentif pourrait supposer que nous avons affaire à un super-photon, qui irait plus vite que c. Pour vérifier cette hypothèse, il suffirait de demander à Joe Blow à quelle vitesse il voit le photon voyager. Ce dernier répondrait que, selon lui, le photon se déplace à une vitesse de c, réduisant ainsi l'hypothèse du super-photon à néant. *Toudoum tss !*
Comment expliquer que la lumière se propage de cette manière ? Sa vitesse est-elle réellement la même dans tous les référentiels ? Si oui, comment concilier cette propriété avec les principes de la mécanique classique ?
Ces questions ouvrent la porte à des phénomènes inattendus : la **dilatation du temps** et la **contraction des longueurs**.
Ainsi, bien que nous ayons posé les bases du concept de référentiel inertiel, nous allons voir que celui-ci soulève de nouveaux défis. Comprendre ces paradoxes et leurs implications

nous mènera au cœur de la relativité restreinte, où les notions mêmes de temps et d'espace devront être repensées.

Relativité restreinte et vitesse

Il faut savoir qu'en relativité restreinte, tout comme dans beaucoup de domaines des mathématiques, il existe des postulats fondamentaux. En voici un :

Théorème: Postulat de la relativité restreinte : *La vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels.*

Je préfère la version suivante : La vitesse de la lumière est un invariant dans tous les référentiels. Cela peut sembler contre-intuitif, mais la lumière, i.e. le photon, a la même vitesse dans tous les référentiels, et cette hypothèse a été confirmée par l'expérience de Michelson et Morley en 1887, bien avant qu'Einstein ne publie sa théorie de la relativité restreinte. Nous reviendrons au célèbre physicien plus tard. La clé de la relativité restreinte est totalement contenue dans ce simple postulat. C'est ce postulat qui est presque qu'une remarque, qui différencie la relativité restreinte de la relativité galiléenne.
La grande différence la vitesse d'un photon est un invariant dans tous les référentiels. Cela peut sembler bien peu pour fonder une nouvelle théorie, mais les implications de ce postulat justifient à elles seules l'intégralité de ce rapport.
Avant d'aller plus loin dans la relativité restreinte, j'aimerais vous faire connaître un peu plus le photon.

–Mieux connaître le photon–[4]

- Le photon γ est une particule élémentaire, au même titre que l'électron (e^-) (9.109×10^{-28} g), le neutron (n) (1.675×10^{-24} g), mais aussi le muon (μ^-) (1.884×10^{-25} g) – ma particule favorite –, et le positron (e^+) (9.109×10^{-28} g), qui est l'antiparticule (l'inverse ?) de l'électron. S'y ajoutent le tauon (τ^-) (3.167×10^{-24} g), le neutrino électronique (ν_e) ($< 5 \times 10^{-34}$ g), le neutrino muonique (ν_μ) ($< 1.9 \times 10^{-33}$ g) et le neutrino tauique (ν_τ) ($< 5.3 \times 10^{-33}$ g), et il y en a beaucoup d'autres.

  Si on s'intéresse à la masse d'un photon, par l'expérimentation, on obtient que $m_\gamma < 10^{-54}$ g. Si on compare avec la masse des autres particules élémentaires, 10^{-54} est un nombre extrêmement petit. En fait, c'est parce que la masse d'un photon est nulle, et le 10^{-54} correspond simplement à l'incertitude des équipements de mesure utilisés pour estimer m_γ. **La masse d'un photon est nulle.**

- Généralement, on parle du photon comme d'une particule, comme une balle de tennis lancée à une vitesse c ou comme une balle de fusil (dans le sens où on ne la voit pas passer), qui frappe un objet dans sa course pour totalement disparaître après l'impact et ne laisser rien d'autre qu'une petite marque en un point précis à la fin. Ou encore, on en parle simplement comme d'une autre particule élémentaire.

  Eh bien, ce n'est pas tout à fait ça... En fait, un photon est une particule, mais il peut agir comme une onde. Attention, il ne faut pas entendre par la qu'un photon est parfois une particule et d'autres fois une onde. Un photon est avant tous une particule qui, parfois, agit comme une particule, et d'autres fois agit comme une onde. Je ne vais pas expliquer dans quelles conditions le photon agit comme une particule ou comme une onde, mais c'est un sujet très intéressant en physique quantique. Cette propriété a des applications très importantes dans la science moderne, notamment en informatique quantique.

  D'ailleurs, lorsqu'il agit comme une onde, il se différencie des autres ondes par le fait qu'il n'a pas besoin d'un support pour se propager. Dans notre cas, nous considérerons que le photon est une particule qui agit comme une particule.

- Le photon est sa propre antiparticule. **Presque toutes** les particules ont leur antiparticule, par exemple l'électron e^- et le positron e^+. D'ailleurs, lorsqu'un électron et un positron entrent en collision et fusionnent, ils peuvent s'annihiler et devenir deux photons (figure 1) :

$$e^- + e^+ \longrightarrow 2\gamma$$

[4] Le but de la section suivante est de développer votre curiosité sur le sujet des particules élémentaires. Elle est totalement optionnelle pour la compréhension de ce rapport.

Ce ne sont pas les seules particules qui ont cette propriété de se transformer en photons lorsqu'elles rencontrent leur antiparticule, mais ce ne sont pas toutes les particules non plus qui possèdent cette propriété particulière.

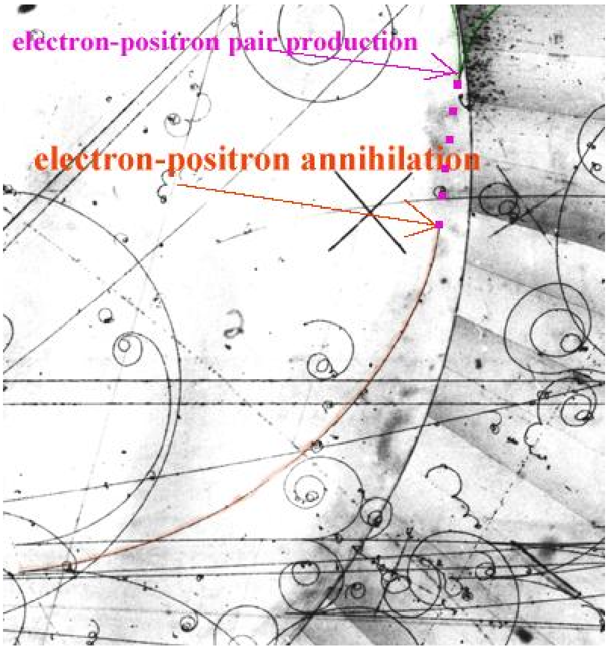


Figure 1: Partie d'une image de chambre à bulles provenant d'une expérience sur les neutrinos réalisée au Fermilab (trouvée à l'Université de Birmingham). Un positron en vol (en orange) s'annihile avec un électron (l'électron était au repos et dans la trajectoire du positron, c'est pour ça qui on ne le vois pas) pour devenir deux photons (qui ne laissent pas de trace sur l'image mais est pointillé en magenta) et qui redeviennent un électron et un positron un peu plus tard (deux petites lignes en vert).[1]

Je ne dis pas qu'il y a une structure de groupe dans l'ensemble A des particules élémentaires. J'aimerais juste faire valoir qu'il y a ici une curiosité mathématique où γ est comme l'identité, dans le sens où il est son propre inverse, et où certaines particules ont un inverse nommé "antiparticule" pour l'opération "annihilation" notée $+$.

Revenons à notre relativité restreinte. En relativité galiléenne, il existe une formule mathématique presque déjà acceptée par le lecteur, qui repose sur l'intuition et qui permet de connaître **la vitesse d'un objet dans un référentiel** A, notée v_{AO}, si on connaît :

- **la vitesse de l'objet du point de vue du référentiel** B, notée v_{BO},
- **la vitesse du référentiel** B **du point de vue du référentiel** A, notée v_{AB}.

L'équation est la suivante :

Théorème: Loi de la vitesse en relativité galiléenne : Soit A, B deux référentiels, O un objet qui se déplace dans un mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel de A et B sur la même ligne droite, v_{AO}, v_{AB} et v_{BO} comme définis plus haut, alors :

$$v_{AO} = v_{AB} + v_{BO}$$

Cette équation permet de convertir une information (la vitesse) d'un référentiel B vers un autre référentiel A. Notez bien que A, B, O se déplacent sur la même ligne droite. Bien évidemment, il existe des situations où A, B et O ne sont pas alignés, mais pour simplifier le raisonnement, nous allons nous restreindre au cas unidimensionnel. Autrement, il suffirait de considérer les vitesses comme des vecteurs et d'effectuer la somme composante par composante.
J'aimerais commencer à introduire des petits dessins qui serviront d'appui à l'intuition ainsi que de preuves pour certains résultats que j'énoncerai dans la suite de ce rapport.
Supposons qu'on ait un wagon (référentiel B) qui se déplace à une vitesse constante sur une section droite d'un rail de chemin de fer, un panneau de signalisation ferroviaire (référentiel A) situé sur le bord du rail, et enfin une balle (objet) située dans le wagon, qui se déplace vers l'avant du wagon.
Ainsi, nous avons les images suivantes. Dans la première image, on voit le wagon, la balle et le panneau de signalisation. Nous avons aussi la flèche v_{AB} qui représente la vitesse du wagon du point de vue du panneau de signalisation, et v_{BO} qui représente la vitesse de la balle du point de vue du wagon. Ces vecteurs vitesse sont exprimés en secondes et nous décidons que la première image a été prise à $t = 0$ seconde. La petite ligne pointillée servira à suivre le déplacement de la balle au fil du temps.
Remarquons que, sur notre image, le panneau de signalisation est immobile, c'est-à-dire que, de notre point de vue (nous, lecteurs), le panneau de signalisation ne se déplace pas. D'ailleurs, il est probablement situé sur le côté du rail, pour une raison évidente : s'il avait été au milieu, après le passage d'un train, le panneau serait à terre.

Il y a autre chose qui est à côté de la "trac" : c'est le lecteur lui-même ![5]
SPDG, vous êtes du même côté de la voie que le panneau de signalisation. Ainsi, vous avez la même vitesse (une vitesse nulle) et la même position que le panneau, ce qui signifie que vous partagez le même référentiel que le panneau. C'est génial ! Cela signifie que ce que vous voyez, le panneau le voit aussi ! WOW !

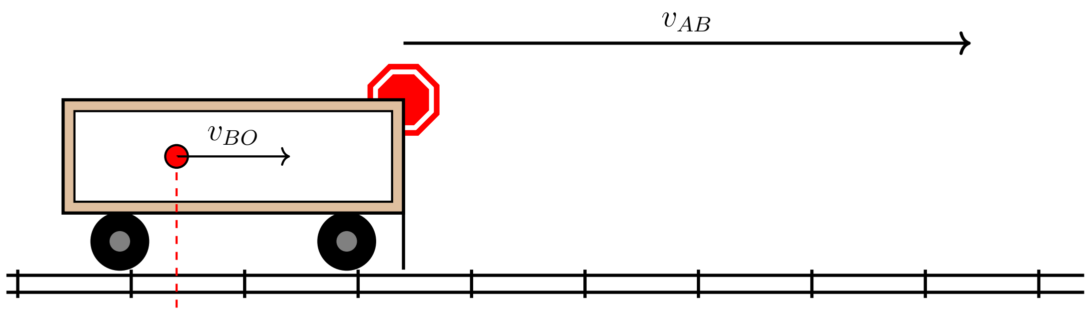


Figure 2: image 1

La deuxième image représente la même situation, mais une seconde plus tard. Par conséquent, la balle et le wagon sont arrivés au bout de leurs flèches. On peut aussi voir que la balle rouge a laissé une trace représentant la distance qu'elle a parcourue en une seconde du point de vue de du panneau de signalisation.

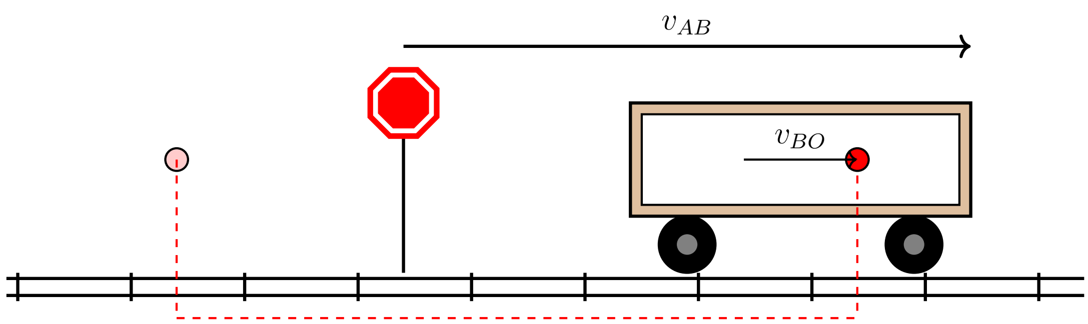


Figure 3: image 2

Maintenant, si on s'intéresse seulement aux vecteurs, on peut effectuer la translation représentée sur l'image 3. On se rend compte que cette translation remplit entièrement la ligne rouge.

[5]En effet, devant cette page, l'image du rail est, tout comme le panneau, devant vous, à moins que vous ne soyez en train de piétiner ce rapport, et dans ce cas, veuillez arrêter, s'il vous plaît.

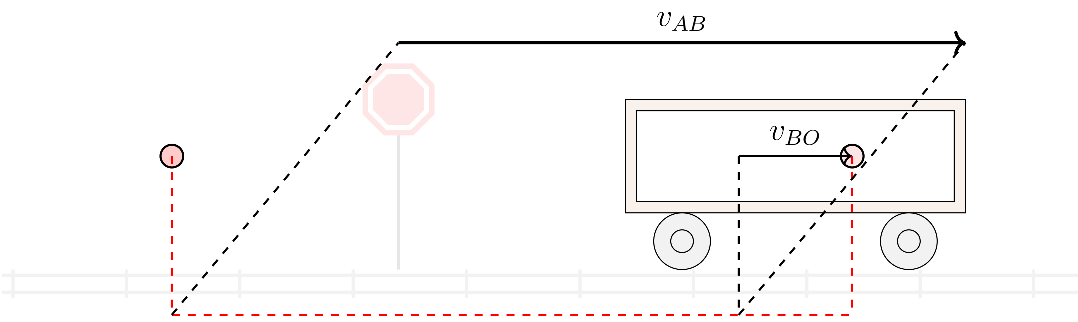


Figure 4: image 3

"Mais cette ligne rouge représente la distance parcourue par la balle en une seconde, de notre point de vue, nous, lecteurs. Par conséquent, c'est aussi la distance parcourue par la balle en une seconde du point de vue du panneau, également connue sous le nom de v_{AO} ."

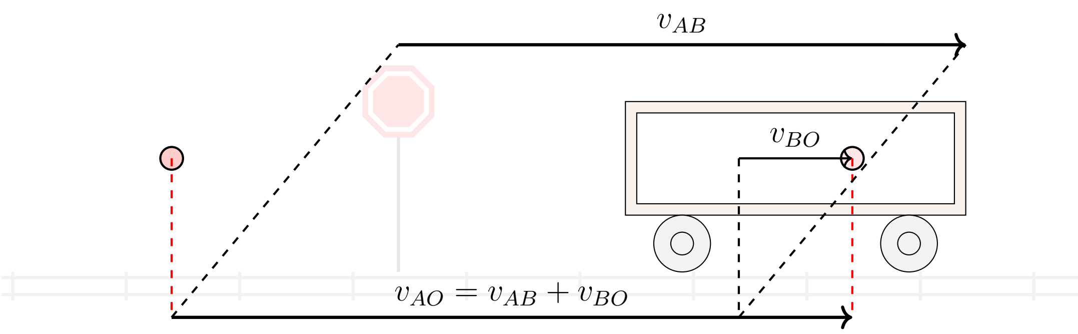


Figure 5: image 4

Je pense que le phénomène qui reste encore un peu mystérieux est le suivant : comment les translations des vecteurs v_{BO} et v_{AB} parviennent-elles à remplir magiquement la ligne rouge ? Eh bien, il est difficile de répondre à cette question sans invoquer directement la loi de la vitesse de la relativité galiléenne, c'est-à-dire sans dire que, dans un premier temps, la balle avance de v_{BO} dans le wagon, puis, dans un second temps, le wagon avance de v_{AB}, ce qui donne $v_{BO} + v_{AB}$. Mais... oui, c'est à peu près ça.
Le lecteur attentif ou la lectrice attentive remarquera que :

- Dans l'histoire avec Joe Blow et Super Girls, c'était justement la loi de la vitesse de la relativité galiléenne qui avait été utilisée, et celle-ci n'avait pas fonctionné dans le cas où la balle était un photon ($v_{BO} = c$).

- La relativité restreinte semble plus proche de la réalité – certain·e·s diraient même "meilleure" – que la relativité galiléenne, et pourtant, il n'existe pas de loi de la vitesse en relativité restreinte ?

Cela est tout à fait juste. La loi de la vitesse de la relativité galiléenne ne tient pas la route lorsque l'on sait que les photons ont la même vitesse dans tous les référentiels. Si je n'avais pas été clair, permettez-moi de préciser : reprenez l'exemple de la balle, du train et du panneau de signalisation. Remplacez la balle par un photon se déplaçant à la vitesse c du point de vue du wagon ($v_{BO} = c$). Supposons que le wagon ait une vitesse de 5 m/s du point de vue du panneau de signalisation ($v_{AB} = 5$), alors, dans le référentiel du panneau, la vitesse du photon serait :

$$v_{AO} = v_{AB} + v_{BO} = 5 + c \neq c$$

Or, d'après le premier postulat de la relativité restreinte, les photons ont la même vitesse dans tous les référentiels, et donc $v_{AO} = c$, ce qui est une contradiction. Cela confirme que la loi de la vitesse de la relativité galiléenne ne fonctionne pas en relativité restreinte. Il peut sembler évident que nous devons avoir une loi de la vitesse dans le cadre de la relativité restreinte, mais ce qui l'est moins, c'est à quoi ressemble cette loi.

Théorème: Loi de la vitesse en relativité restreinte : Soit A, B deux référentiels, O un objet qui se déplace dans un mouvement rectiligne uniforme sur la même ligne droite, avec v_{AO}, v_{AB} et v_{BO} comme définis précédemment, alors :

$$v_{AO} = \frac{v_{AB} + v_{BO}}{1 + \frac{v_{AB}}{c}\frac{v_{BO}}{c}}$$

Au premier abord, la forme inhabituelle de cette équation pourrait vous décourager de poursuivre votre lecture, mais rassurez-vous, cher lecteur, ce n'est pas aussi obscur qu'il n'y paraît. L'ombre que vous percevez n'est autre que le voile de vos paupières fermées sur vos yeux.

Notre cher ami Mermin a développé une approche très claire pour vous aider à y voir plus clair. Par la présente, je tiens à exprimer sans équivoque que les idées qui suivront proviennent du chapitre 4 du livre de Mermin, *It's About Time: Understanding Einstein's Relativity*[2].

Mais avant de nous lancer, je me dois de vous avouer quelques petits détails... Depuis le début, nous avons parlé de vitesse et de temps en supposant une **kyrielle** d'a priori, comme le fait qu'il serait possible que deux événements se produisent simultanément ou encore que le temps s'écoule à la même vitesse partout[6].

[6] Ceci est une remarque faite par le physicien français Étienne Klein lors d'une conférence intitulée *Que savons nous du temps?*[4] , toujours disponible sur Internet. Klein critiquait notre façon de parler du temps et soulignait une remarque intrigante : "Le temps est quelque chose qui avance d'une seconde toutes les secondes ? Ça ne nous avance pas beaucoup ! [...] et d'ailleurs, quelle est l'unité de la vitesse du temps ?"

Or, il s'avère que le temps ne s'écoule pas à la même vitesse partout et que la notion de simultanéité dans deux endroit ou deux référentiel différent est absurde (vous pouvez aller voir le chapitre sur l'absurdité de la simultanéité si vous voulez). D'ailleurs, les scientifiques de l'époque s'en doutaient lorsqu'ils ont formulé la relativité restreinte. De plus, ils ne voulaient pas répéter la même erreur qui avait été commise avec la relativité galiléenne.

En fait, on cherche ici à établir une science rigoureuse et, pour éviter de se tromper, nous devons nous abstenir d'utiliser des concepts dont nous ne connaissons pas toutes les propriétés avec certitude. Cela signifie que nous éviterons de parler explicitement du temps ou même de la distance.

La seule chose dont nous pouvons être absolument certains, c'est que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels, que sa valeur est c, et que les objets ont une vitesse. Et, de manière surprenante, c'est tout ce dont nous avons besoin pour mener à bien notre étude de l'équation de la vitesse relativiste.

Prenons une balle dans un wagon, qui se déplace à une vitesse u (car nous savons que les objets ont une vitesse) par rapport au wagon. Dans un premier temps, et pour notre plaisir personnel, nous voudrions organiser une course entre la balle et un photon. Pour ce faire, nous avons besoin d'une ligne de départ et d'une ligne d'arrivée.

Pour la ligne de départ, prenons simplement l'arrière du wagon. Le photon et la balle peuvent démarrer (partir) en même temps (simultanément) puisqu'ils sont à la même place, et donc la notion de simultanéité existe ici.

Pour la ligne d'arrivée, nous pourrions prendre l'avant du wagon. Même s'il est évident que le photon atteindra l'avant du wagon bien avant la balle, nous aimerions être capable de quantifier à quel point le photon est plus rapide que la balle, c'est-à-dire de savoir où se trouve la balle lorsque le photon gagne la course.

Et c'est ici que nous rencontrons immédiatement un problème... Comment mesurer la position de la balle à la fin de la course ? On pourrait envoyer un signal laser à la balle pour lui dire : "Le photon a gagné, arrête-toi !" Mais le simple temps nécessaire pour envoyer ce signal à la balle, puisqu'il doit se propager, ferait en sorte que la balle ne soit plus à la position où elle était au moment précis où le photon a touché l'avant du wagon. Il faudrait donc que la balle s'arrête exactement au moment où le photon atteint l'avant du wagon. Mais alors, nous parlons de simultanéité entre deux événements qui ne sont pas situés au même endroit, et nous ne sommes pas certains que dire cela fait du sens...

On pourrait imaginer que le photon et la balle aient chacun un chronomètre qu'ils démarreraient en même temps au début de la course (ce qui est possible puisqu'ils sont alors à la même position), et que la balle note sa position à chaque seconde (l'intervalle de temps ici n'est pas important). Ensuite, le photon lui dirait : "Je suis arrivé à l'avant du wagon à la 30e seconde." Mais cela supposerait que 30 secondes pour un photon qui se déplace à la vitesse c sont identiques à 30 secondes pour une balle qui se déplace à la vitesse u, et donc que le temps s'écoule de la même manière partout. Or, c'est justement un a priori que nous souhaitons éviter.

Vous pourriez chercher longtemps, mais vous ne trouveriez probablement aucune façon correcte de mesurer la position de la balle à la fin de la course sans redéfinir les règles de celle-ci.

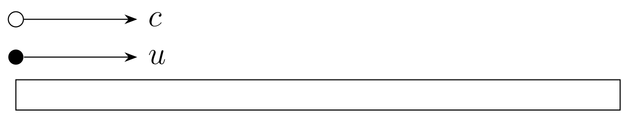
Une solution consiste à placer un miroir à l'avant du wagon. Le photon rebondit sur ce miroir et la course s'arrête lorsque le photon repasse par la balle. Ainsi, les deux participants seront à la même place au même moment, et nous serons en mesure de connaître la position du photon et de la balle à la fin de la course (en fait, ils seront à la même position).

De plus, cette méthode nous permet de comparer la vitesse du photon et de la balle en observant la distance parcourue par chacun. En effet, supposons que la longueur du wagon soit de 1 m dans le référentielle du wagon [7] (c'est un petit wagon, voir figure 6) et qu'il y ait une distance de f m entre la balle et l'avant du wagon à la fin de la course. En s'aidant du dessin suivant (qui est une copie de celui que l'on peut trouver dans le livre de Mermin, page 32), on obtient :

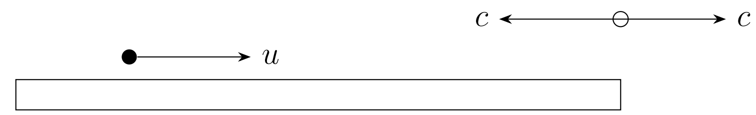
- La balle a parcouru une distance de $(1 - f)$ m ;
- Le photon a parcouru une distance de $(1 + f)$ m.

Je compte sur le lecteur pour prendre le temps de s'assurer qu'il est d'accord avec ces valeurs – i.e. prenez le temps de vérifier que c'est correct.

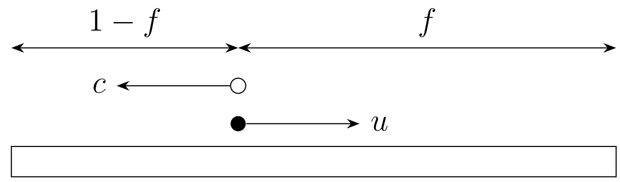
[7] C'est la longueur propre. C'est a dire la longueur d'un objet mesuré, lorsque l'objet est au repos dans notre référentiel. Si on parle d'une longueur sans préciser le référentiel, alors on parle de la longueur propre.



(1)



(2)



(3)

Mais encore, tout le monde sera d'accord pour dire que le ratio de la distance parcourue par la balle en une seconde sur la distance parcourue par le photon en une seconde est le même que celui de la distance parcourue par la balle pendant le temps de la course sur la distance parcourue par le photon pendant le temps de la course. Cela s'exprime par :

$$\frac{u}{c} = \frac{1-f}{1+f}$$

En isolant f, on trouve :

$$f = \frac{c-u}{c+u}$$

À ce moment, le lecteur est en droit de se demander : "Mais quel est l'intérêt de ce que nous sommes en train de faire ?" Et c'est là une question très légitime.

Évidemment, le but de notre "course" n'est pas de déterminer si le photon est plus rapide que la balle, cela, nous le savons déjà. Le but est de créer cette petite identité qui nous servira plus tard, mais aussi de donner un sens au terme $\frac{u}{c}$ qui apparaît dans la formule relativiste de la vitesse.

Cependant, le lecteur attentif pourrait douter de la validité physique de l'affirmation suivante :

"Le ratio de la distance parcourue par la balle en une seconde sur la distance parcourue par le photon en une seconde est le même que celui de la distance parcourue par la balle pendant le temps de la course sur la distance parcourue par le photon pendant le temps de la course."

Ce doute serait tout à fait légitime, car nous parlons ici de distances sans réellement savoir ce qu'est une distance dans le cadre relativiste. C'est une zone grise dans laquelle nous préférons ne pas trop nous aventurer.
Cependant, ces distances et ces temps existent, fondamentalement parlant. Dès lors qu'un référentiel est défini, la notion de temps et de distance y existe. Mais le problème, la véritable zone grise, c'est que nous ne pouvons pas les calculer sans risquer de tomber dans certains pièges liés à la déformation du temps et de l'espace.
Ainsi, nous pouvons en parler, mais nous ne pouvons pas les calculer – du moins, pas encore, mais nous le ferons plus tard. C'est pourquoi nous devons les éliminer de nos équations. C'est précisément l'objectif de ces fractions.
D'ailleurs, c'est justement parce que nous ne pouvons pas mesurer directement le temps que nous avons défini cette règle un peu spéciale au début de notre course, afin d'éviter d'avoir des éléments temporels à mesurer – car nous n'aurions pas pu les mesurer de toute façon. Ici, le temps est le même pour les deux objets, donc il ne nous reste qu'à prendre en compte la variable de longueur.
Parlons justement de longueur. J'ai supposé que le wagon faisait 1 m de long, mais c'était uniquement pour des raisons pédagogiques, afin d'éviter d'introduire la véritable longueur du wagon, que nous noterons L.
En réalité, je ne peux pas mesurer directement la longueur du wagon, tout comme je ne peux pas mesurer le temps. Avec cela en tête, voyez f non pas comme une longueur absolue, mais bien comme la fraction de la longueur du train franchie par le photon après avoir frappé le miroir (jusqu'à la balle). Ainsi, f est une fraction, un rapport de longueurs.

- La balle a parcouru une distance de $L - Lf$,
- Le photon a parcouru une distance de $L + Lf$.

$$\frac{u}{c} = \frac{L - Lf}{L + Lf} = \frac{L}{L}\frac{1 - f}{1 + f} = \frac{1 - f}{1 + f}$$

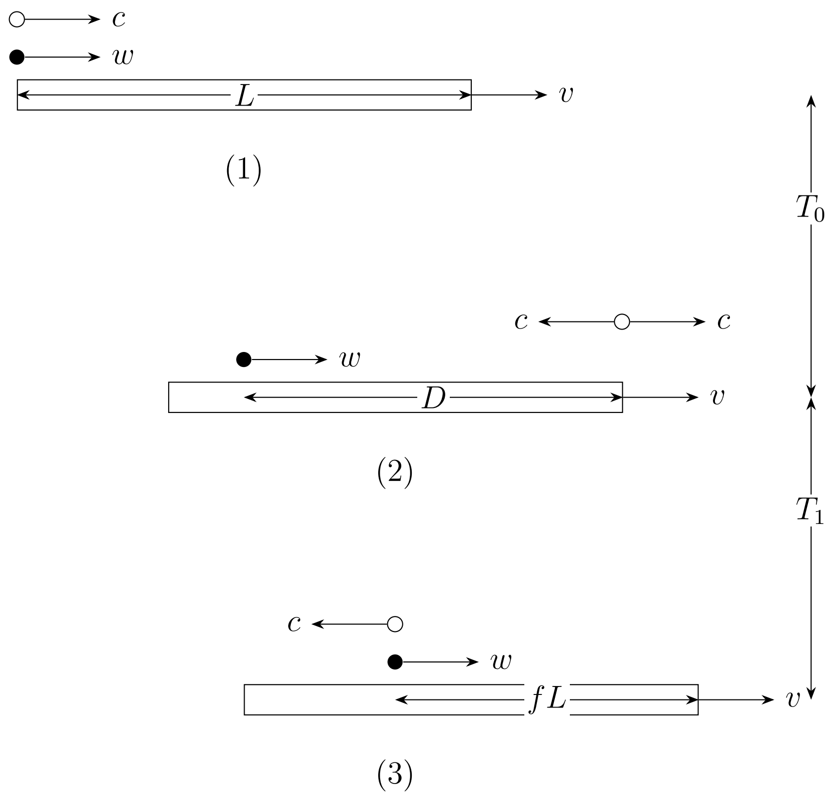
Et donc, dans tout, que $L = 1$ ou que L soit d'autre chose, on obtiens la même identité.
À présent, nous allons prendre L comme étant la longueur du wagon, et f comme étant la fraction de la longueur du wagon parcourue par le photon après avoir rencontré le miroir.
Faisons maintenant la même analyse de la même course, avec les mêmes règles, mais du point de vue du panneau de signalisation. Cette fois, le train a une vitesse v et la balle une vitesse w par rapport au panneau (ce n'est pas u, car u est la vitesse de la balle par rapport au wagon – je pense que vous voyez où je veux en venir).

Figure 6: Petit train du magasin de jouets Benjo, icône du quartier Saint-Roch à Québec, qui ferme définitivement ses portes en janvier 2025. Sur la photo, on peut y voir Geneviève Marcon, fondatrice de Benjo. **Les wagons faisaient un peu plus d'un mètre de long.** Image d'archive.

Encore une fois, nous voulons déterminer la fraction f, c'est-à-dire la fraction de la longueur du wagon parcourue par le photon après avoir rencontré le miroir, mais cette fois du point de vue du panneau.
Nous allons introduire des éléments de temps et de distance qui ont du sens uniquement du point de vue du panneau. Soit, dans le référentiel du panneau:

- T_0 le temps nécessaire au photon pour traverser le wagon, i.e. partir de l'arrière du wagon et atteindre le miroir placé à l'avant du wagon ;
- T_1 le temps nécessaire au photon réfléchi pour atteindre la balle, donc pour franchir la fraction f de la longueur du wagon ;
- D la distance entre la balle et l'avant du train au moment où le photon rencontre le miroir ;
- L la longueur du train.

Au besoin, je vous conseille de vous référer au dessin plus bas, qui est encore une fois une copie conforme du dessin que l'on peut trouver dans le livre de Mermin, page 35.
D'ailleurs, comme l'explique Mermin, nous pouvons parler de temps et de distances par rapport au panneau, à condition d'admettre que nous ne pouvons pas les mesurer et que, par conséquent, ces temps et distances n'apparaîtront pas dans nos équations finales.
L'idée est que nous savons que ces temps et ces distances existent, mais nous ne savons pas les calculer directement sans risquer de tomber dans certains pièges liés à la déformation du temps et de l'espace. Cependant, leur existence est indéniable (le temps et les mesures existent, on est d'accord), et cela nous permet d'en parler sans problème.



Ainsi, dans la situation 2, comme D est la distance entre la balle et l'avant du wagon, et que

$$T_0 c = L + d_v(T_0)$$

(où $d_v(T_0)$ est la distance franchie par le wagon après un temps T_0, cette distance étant infligée au photon et à la balle du point de vue du panneau – ne vous en faites pas, elle disparaîtra très tôt), puisque le photon aura franchi l'intégralité du wagon après un temps T_0, et que

$$T_0 w = L - D + d_v(T_0),$$

alors nous avons :

$$D = T_0 c - T_0 w.$$

De la même manière, puisque le photon revient jusqu'à la balle, et qu'au début de T_1 la distance entre la balle et le photon, du point de vue du panneau, est D, la somme de la distance parcourue par le photon (en direction de la balle) avec la distance parcourue par la balle (en direction du photon) doit être égale à D. D'où :

$$D = T_1 c + T_1 w.$$

Par transitivité, nous obtenons :

$$T_1c + T_1w = T_0c - T_0w \Longleftrightarrow \frac{T_1}{T_0} = \frac{c-w}{c+w}.$$

C'est une avancée géniale, car même si nous ne savons pas mesurer directement les intervalles de temps T_0 et T_1, nous savons mesurer leur rapport uniquement avec les vitesses du photon et de la balle du point de vue du panneau.
À présent, notons que pour des raisons similaires :

$$L = T_0c - T_0v.$$

D'une manière ou d'une autre, cela ne devrait pas être trop compliqué à comprendre. Ce qui est un peu moins simple à saisir est que :

$$fL = T_1c + T_1v.$$

Rappelez-vous que f est une fraction, et donc nécessairement, fL est une distance. Nous avons $T_1c = fL - d_v(T_1)$, car le train avance dans le sens opposé au déplacement du photon. De plus, $T_1v = d_v(T_1)$, donc nous obtenons directement l'équation.
En répétant notre astuce, nous avons :

$$\frac{T_1}{T_0} = f\frac{c-v}{c+v}.$$

Finalement, nous obtenons :

$$\frac{c-w}{c+w} = f\frac{c-v}{c+v} = \frac{c-u}{c+u}\frac{c-v}{c+v}.$$

Notez que rien ne nous empêche d'utiliser la relation $f = \frac{c-u}{c+u}$ que nous avions trouvée juste avant, car elle concerne une situation se déroulant dans le référentiel du wagon, ce qui est cohérent avec notre raisonnement.
En isolant w, nous obtenons l'équation recherchée :

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{u}{c}\frac{v}{c}}. \tag{1}$$

Wow, ce fut un long voyage ! Mais cela en valait totalement la peine. Vous remarquerez que dans l'équation (1), il n'est jamais question de temps ou de distance. Pourtant, une fois que nous avons cette équation, elle nous ouvre la porte pour aller chercher d'autres informations sur le temps et sur les distances dans des référentiels autres que le nôtre.
C'est justement ce que permettent, entre autre, les équations de Maxwell. Et c'est précisément à ce point que nous cessons d'emprunter l'idée de Mermin concernant la démonstration de l'équation de la vitesse en relativité restreinte.

Avant de passer à un autre chapitre, un lecteur attentif serait en droit de contester que l'équation (1) fonctionne uniquement si la balle (ou tout autre objet) participe à une course selon nos règles particulières contre un photon, et qu'ainsi nous ne pouvons pas généraliser cette équation.
À cela, je réponds que si un objet avance en mouvement rectiligne uniforme, j'ai toujours la possibilité de placer un miroir sur son trajet. J'ai aussi toujours le droit de pointer un laser en direction du miroir et d'imposer à l'objet de participer à une course contre un photon, dont il est certain de sortir perdant.
Ainsi, puisque tout objet en mouvement rectiligne uniforme peut être soumis à cette expérience, l'équation peut être généralisée.
Analysons maintenant un peu notre équation. D'ailleurs, je préfère cette version :

$$v_{AO} = \frac{v_{AB} + v_{BO}}{1 + \frac{v_{AB}}{c}\frac{v_{BO}}{c}} \tag{2}$$

où v_{ij} représente la vitesse de j du point de vue de i, car elle explicite clairement les référentiels.

- Dans un premier temps, nous réalisons que si $v_{AB} \ll c$ et si $v_{BO} \ll c$, alors $\frac{v_{AB}}{c} \approx 0$ et $\frac{v_{BO}}{c} \approx 0$. Ainsi,

  $$v_{AO} = \frac{v_{AB} + v_{BO}}{1 + \frac{v_{AB}}{c}\frac{v_{BO}}{c}} \approx \frac{v_{AB} + v_{BO}}{1 + 0} = v_{AB} + v_{BO}.$$

  Cela signifie que l'équation (2) correspond à la loi de la vitesse en relativité galiléenne. Autrement dit, si les vitesses v_{AB} et v_{BO} sont faibles, alors le concept intuitif que nous avons de la vitesse reste le même.

- On observe également que l'équation est symétrique par rapport aux variables v_{AB} et v_{BO}, c'est-à-dire que nous pouvons les interchanger sans modifier le résultat de (2).

- Mais qu'arrive-t-il si, supposons, $v_{BO} = 0.0000000001c \ll c$ et $v_{AB} = 0.9999c$? On sait que 0 est absorbant et donc, nous devrions nous retrouver dans une situation similaire au premier cas, où l'équation est quasiment identique à celle de la relativité galiléenne. Mais ce serait tout de même étrange si, dans une situation où le train se déplace presque à la vitesse de la lumière, le fait que la balle avance très lentement annulait complètement l'effet du mouvement rapide du train. Faisons donc le calcul :

$$\frac{v_{AB}}{c}\frac{v_{BO}}{c} = \frac{0.9999c}{c}\frac{0.0000000001c}{c} = \frac{0.9999}{1}\frac{0.0000000001}{1} = 0.9999{\times}0.0000000001 = 0.00000000$$

À ce stade, nous avons pratiquement 0. Encore une fois, nous pouvons affirmer sans craindre de trop nous tromper que (2) est environ identique à l'équation de la vitesse en relativité galiléenne.

- Ainsi, l'équation nous apprend quelque chose de nouveau seulement si v_{AB} et v_{BO} sont très grands, en particulier lorsqu'ils sont proches de la vitesse de la lumière. C'est dans ce cas que nous commençons à observer des effets étranges. Mais quels sont ces effets que nous sommes censés remarquer ? Que signifie physiquement cette équation ?

Lorsque v_{AB} et v_{BO} sont très proches de c, alors $\frac{v_{AB}}{c}\frac{v_{BO}}{c} \to 1$, ce qui signifie que $v_{AB}+v_{BO}$ (la vitesse à laquelle nous nous attendrions normalement à voir se déplacer l'objet O du point de vue de A) se retrouve divisé par un facteur qui s'approche de 2.
Autrement dit, v_{AO} est légèrement inférieur à la valeur intuitive que nous aurions prédite. D'ailleurs, je me permets de préciser que dans les deux premiers points, nous avons écrit :

$$v_{AO} \approx v_{AB} + v_{BO}.$$

Mais cela ne signifie pas que :

$$v_{AO} = v_{AB} + v_{BO}.$$

En d'autres termes, même si les vitesses sont très petites, on peut tout de même percevoir les effets de la relativité restreinte – ils sont simplement minuscules.

v_{AB} (m/s)	v_{BO} (m/s)	v_{AO} (m/s)	
		R. Restreinte	R. Galiléenne
1	1	2,0000	2,0000
10	1	11,0000	11,0000
100	1	101,0000	101,0000
1 000	1	1001,0000	1001,0000
10 000	1	10001,0000	10001,0000
100 000	1	100001,0000	100001,0000
10 000 000	1	10000000,9989	10000001,0000
100 000 000	1	100000000,8887	100000001,0000
1	1	2,0000	2,0000
10	10	20,0000	20,0000
100	100	200,0000	200,0000
1 000	1 000	2000,0000	2000,0000
10 000	10 000	20000,0000	20000,0000
100 000	100 000	199999,9777	200000,0000
10 000 000	10 000 000	19977771,7312	20000000,0000
100 000 000	100 000 000	179975072,5445	200000000,0000

Table 1: Tableau pour voir la de v_{AO} si calculer avec l'équation de la relativité restreinte VS l'équation de la relativité galiléenne, pour différente valeur de v_{AB} de v_{BO}.

Je vais vous laisser méditer sur la raison pour laquelle cela se produit, et nous y reviendrons plus tard dans les chapitres à venir.
En attendant, je pense que le lecteur commence à en avoir assez d'entendre parler de vitesse et qu'il serait tenté d'explorer d'autres mystères de la relativité restreinte.

Dilatation du temps et contraction des longueurs

La dilatation du temps et la contraction des longueur sont un sujet passionnant, car ils peuvent être perçu très facilement en utilisant simplement le postulat de la relativité restreinte.

Théorème: Postulat de la relativité restreinte : *La vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels.*

et quand je dis que le temps se dilate ou que les longueurs se contractent, je veux dire que : si un observateur observe un mètre (l'objet servant à mesurer et qui, s'il est dans le même référentiel que l'observateur, mesurera un mètre) se déplacer à une très grande vitesse (bien entendu, cela sera aussi vrai pour tout type de vitesse, seulement, on a plus de chance de s'en rendre compte à une très grande vitesse), eh bien :

- l'observateur verra le mètre comme s'il était un peu plus court qu'un mètre, alors que nous le savons, un mètre mesure un mètre – au moment où j'écris ces lignes, Trump n'a pas encore dit qu'il en était autrement – pour un observateur dans le même référentiel que le mètre en mouvement, d'où la longueur s'est contractée du point de vue de l'observateur, et si du point de vue du mètre, le mètre s'est déplacé pendant 10 sec, eh bien du point de vue de l'observateur, le mètre se sera déplacé pendant un peu plus longtemps que 10 sec, d'où le temps s'est dilaté.

donc le temps se dilate et les longueurs se contractent, du point de vue de l'observateur.

Dilatation du temps: S oient A et B deux référentiels inertiels, avec B en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v par rapport à A. Considérons une horloge au repos dans le référentiel B, mesurant un intervalle de temps propre $\Delta\tau$ entre deux événements se produisant en un même point de B. L'intervalle de temps correspondant mesuré dans le référentiel A est donné par :

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

En particulier, $\Delta t \geq \Delta\tau$, ce qui signifie qu'un intervalle de temps mesuré dans A est plus grand que celui mesuré dans B.

Contraction des longueurs: S oit B un référentiel inertiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel inertiel A. Un objet O, au repos dans B, a une longueur propre L mesurée dans ce référentiel. Alors, dans le référentiel A, la longueur de O mesurée parallèlement à la direction du mouvement est donnée par

$$L' = L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

où v est la vitesse relative de B par rapport à A, et c est la vitesse de la lumière dans le vide. En particulier, L', la longueur mesurée dans A, est toujours inférieure ou égale à L.

je ne pense pas que ces énoncés soient trop intimidants surtout si on les relit deux ou trois fois – relisez-les deux ou trois fois svp – mais je pense qu'ils ne sont pas triviaux. Malgré leur non-trivialité, nous allons nous garder d'en faire la démonstration. Par contre, nous n'allons pas nous empêcher de donner une intuition de leur véracité.

Pour ce faire, nous allons jouer à un jeu. Je vais vous conter une histoire et vous allez devoir vous arrêter, de temps en temps quand ça vous tente, ou lorsque suggéré, pour essayer d'arriver à la conclusion de mon histoire avant moi. C'est-à-dire qu'à mesure que vous lisez mon histoire, vous devrez prendre des pauses, pour essayer de comprendre comment, à partir des éléments que vous avez récoltés du début de l'histoire jusqu'au moment actuel de votre pause (Cela suggère que les sujets présentés dans mon histoire sont en fait des clés pour réussir le défi), vous feriez pour faire continuer l'histoire et surtout la conclure. Pour ce faire évidemment, vous aurez besoin de la conclusion alors la voici :

Le temps se dilate. Les longueurs se contractent.

Vous pourriez aussi trouver une seule partie de la conclusion, c'est-à-dire seulement "le temps se dilate" ou "les longueurs se contractent", a priori les conclusions sont indépendantes. D'ailleurs, il se peut que vous n'y parveniez pas non plus. Ce n'est pas grave, il est plus important de faire l'exercice que de le réussir. De toute façon, personne ne saura si vous ne réussissez pas, et vous n'aurez qu'à prétendre le contraire lorsque vous serez dans des événements sociaux mondains et que le sujet du défi du projet de fin d'études à Gabriel sortira.

Mon histoire commence par l'invariance de la vitesse de la lumière. Lorsque je dis que la vitesse d'un photon est de 299 792 458 m/s dans tous les référentiels, cela signifie qu'à chaque tranche de 299 792 458 mètres parcourue par un photon, il s'écoule exactement une seconde, et ce, peu importe le référentiel.

Ainsi, si cinq référentiels différents observent le même photon allant d'un point A à un point B avec une distance de 299 792 458 mètres **dans tous les référentiels** [8], alors, pour tous ces référentiels, une seconde s'est écoulée. (Réflexion : si pour un sixième référentiel $m(AB) = 299\,792\,400$ mètres...) Oublions les cinq (ou six) référentiels et imaginons plutôt la situation suivante. Vous vous promenez avec moi, sur le bord d'un rail de chemin de fer [9]. Nous nous promenons chacun de notre bord de la rail et argumentons à quel point la

[8] En effet, ce n'est pas parce que la distance entre deux poteaux est de 299 792 458 mètres dans un référentiel qu'elle l'est dans tous les référentiels, et ce, à cause de la contraction des longueurs.

[9] **NE FAITES JAMAIS ÇA !** Au Canada, environ 40 personnes par année meurent parce qu'ils et qu'elles étaient à coté ou sur un rail de chemin de fer sans en avoir l'autorisation. Généralement, ils y vont pour se promener, prendre des photos ou simplement car il s'agit d'un raccourci. [3]

modification du boîtier de la boîte à air au niveau de l'angle d'attaque du train Siemens Velaro D fait une vraie différence dans la gestion de la pression dynamique pendant les accélérations au-delà de 300 km/h par rapport au Bombardier Zefiro 380.[10] Et alors que vous essayez de me convaincre que les volets aérodynamiques supplémentaires sur les côtés du Bombardier Zefiro 380 compensent totalement sa boîte à air désuète, soudainement un train, que dis-je un WAG-12B, car vous l'avez reconnu, passe entre nous deux, ce qui a pour effet de nous arrêter et de nous séparer, étant donner le train entre nous deux. Mais les trains sont longs alors vous décidez de faire un peu de physique pour vous divertir un peu.

Vous remarquez un photon qui passe d'un côté à l'autre d'un wagon. Alors vous vous dites : "Ha c'est amusant ! Le photon a parcouru une distance de L qui est la longueur du wagon." Et puis vous y repensez, vous vous rendez compte que, en fait, si vous étiez dans le wagon vous auriez vu le photon voyager une distance de L, mais comme vous êtes à l'extérieur du wagon, vous avez vu le photon voyager une distance de L plus un petit quelque chose. Le petit quelque chose étant la distance franchie par le wagon pendant le temps que le photon voyage d'un côté à l'autre du wagon. Mais alors il vous vient à l'esprit que comme la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels, mais que, dans votre référentiel, le photon a fait une plus grande distance (L + un petit quelque chose) que dans le référentiel du wagon (L), eh bien alors il s'est écoulé plus de temps dans votre référentiel que dans le référentiel du wagon ! WOW ! Ça veut dire que le temps s'est dilaté.

De mon côté du rail, j'ai aussi l'idée de faire de la physique pour passer le temps, d'ailleurs j'ai repéré le même photon que vous. Je me dis : "Tiens donc, le photon a traversé le wagon en un temps Δt." Et puis j'y repense et me dis (la même chose que vous) qu'en fait la distance parcourue par le photon dans mon référentiel est plus grande que celle parcourue dans le référentiel de quelqu'un situé à l'intérieur du wagon, étant donné que le wagon se déplace. Pour faire un peu de formalisme, supposons que dans mon référentiel la longueur du wagon est de L' et que dans le référentiel du wagon, elle est de L. Ainsi, dans le référentiel du wagon, le photon a traversé une distance de L alors que dans mon référentiel le photon a franchi la distance $L' + \varepsilon$, où ε est le petit quelque chose parcouru par le wagon pendant que le photon traversait ce dernier.

Mais alors, je me dis que comme la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels, il faut que :

$$\frac{\text{La distance parcourue par le photon}}{\text{Le temps que le photon a mis à franchir cette distance}} = \frac{L' + \varepsilon}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t}$$

[10]Les vrais me comprennent !

et donc que $L' = L - \varepsilon$, ce qui se traduit par le fait que $L' < L$, et donc que les distances se sont contractées.
Finalement vient le dernier wagon qui, aussitôt venu, s'éloigne déjà de nous, amenant avec lui cette frontière qu'il y avait entre vous et moi. Et sur ce, nous partageons nos réflexions, en reprenant notre chemin.

FIN

Dans un premier temps je vous félicite si vous aviez réussi le petit défi que je vous avais donné. Dans un second temps, j'ai volontairement commis deux erreurs dans mon histoire, et je m'excuse si vous êtes confus. D'ailleurs je vous félicite si vous l'aviez remarqué. Voici les erreurs qui ont été commises. Lors de votre expérience, vous avez supposé que le wagon avait une longueur de L dans tous les référentiels — en d'autres mots, vous avez négligé la contraction des longueurs. En effet, comme le wagon était en mouvement, eh bien, de votre point de vue, sa longueur était de

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

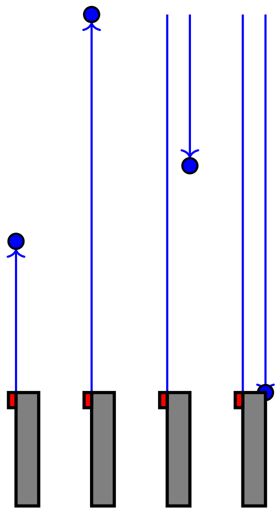
Si cela peut vous permettre de relativiser, vous n'êtes pas le seul à avoir fait une erreur, car je l'avoue, moi aussi j'ai fait une erreur. En effet, j'avais supposé que le temps s'était écoulé de la même manière dans tous les référentiels, mais cela serait négliger la dilatation du temps, car comme le wagon était en mouvement, eh bien, de mon point de vue, le temps écoulé était de

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Donc, si vous voulez, on a négligé la contraction des longueurs pour voir la dilatation du temps, et inversement, on a négligé la dilatation du temps pour voir la contraction des mesures. Pourtant, comprenez bien que ces deux éléments vont de pair. Seulement, pour des raisons de pédagogie, j'ai essayé de les négliger.
Mais, serait-il possible de seulement rendre compte de la dilatation du temps sans avoir à négliger la contraction des longueurs ? Eh bien oui, et pour s'en convaincre, il nous suffit encore simplement d'une petite histoire. Cette histoire nous vient du mathématicien Le Nguyen Hoang [6].
Supposons que vous ayez un ami Jedi (comme dans Star Wars)[11] et que ce dernier soit détenteur d'une épée laser et que le laser de son épée laser soit monophoton (laser constitué

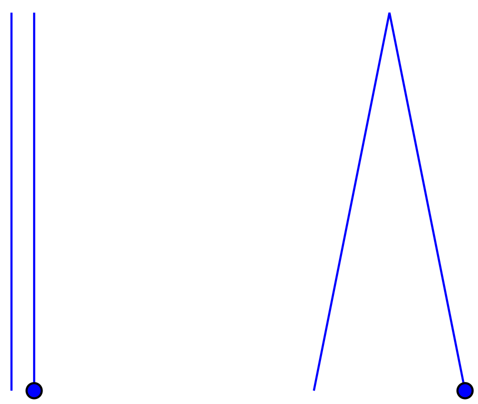
[11] Star Wars (La guerre des Étoiles), parlons-en ! Est-ce que quelqu'un peut m'expliquer pourquoi, si les Jedi sont si importants, on les envoie au front en robe de chambre, alors que les clones qui sont disons... remplaçables, ont une grosse armure ?

d'un seul photon)[12], et qu'en plus, son épée laser monophoton ait la particularité suivante: Le photon prend une seconde pour passé du pommeau de l'épée jusqu'au bout de l'épée, puis une autre seconde pour passer du boute de l'épée au pommeau de l'épée à nouveau.[13]



Supposons que votre ami, en plus d'être un Jedi, est capable d'aller à $\frac{1}{9}$ de la vitesse de la lumière et qu'il vous en fait la démonstration tout en ayant son épée laser allumée à la verticale, ce qui n'est probablement pas très sécuritaire, mais bon... pour la science, fermons les yeux là-dessus. `(-_-)`

Du point de vue de votre ami, à chaque deux secondes le photon de son épée voyagera de haut en bas comme il est supposé. De votre point de vue, le photon voyagera de haut en bas sur la verticale, mais il aura aussi un déplacement horizontal induit par le déplacement de votre ami. Et comme il n'y a pas de déformation des distances à l'horizontale, étant donné que le déplacement est perpendiculaire à l'horizontale, eh bien le pommeau et le sommet de l'épée sont à la même hauteur pour vous comme pour votre ami. Cela aura pour effet que, de votre point de vue, le photon dessine une sorte de triangle. (Voir l'image avec des rayons bleus.)



Ce que votre ami voit. Ce que vous voyez.

[12] Rendu là, votre ami a probablement juste un laser pour jouer avec le chat...
[13] C'est quoi la longueur de l'épée? Réponse au début de la phrase précédente...

Or, ce que vous voyez sur le dessin, c'est que de votre point de vue, le photon a parcouru une plus grande distance (car vous voyez une pyramide) que la distance parcourue par ce même photon du point de vue de votre ami, et comme la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels, alors il s'est écoulé plus de temps dans votre référentiel que dans celui de votre ami, et c'est comme ça qu'on peut voir que le temps se déforme en fonction des référentiels.
On pourrait aussi voir le phénomène de contraction des longueurs, mais j'ai vraiment envie d'explorer d'autres phénomènes, alors je vais utiliser une astuce couramment utilisée par les professeurs de mathématiques qui veulent s'éviter une démonstration pour "sauver du temps", et je vais vous le laisser en exercice ! Pis devinez quoi, je ne connais même pas la réponse !

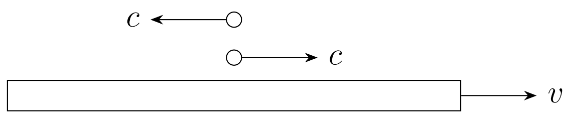
Absurdité de la simultanéité

Ce chapitre est important ! J'ai peur, après tout ce qui a été dit, que le thème de ce chapitre semble trop évident et qu'au titre le lecteur ou la lectrice s'exclame : "Mais oui c'est clair" – non pas à la manière d'Eddy Malou mais à la manière de quelqu'un qui croit que cette simultanéité est impossible à cause que l'image prend un certain temps à se rendre d'un point A vers un point B, ce qui n'est pas le cas. Voyez-vous, on comprend bien que, comme les images, qui voyagent à la vitesse de la lumière, prennent du temps à voyager d'un point A à un point B, il existe une certaine latence entre ce qui se produit en A et ce que l'on perçoit en B, quelques unités de temps plus tard. En d'autres mots, si j'étais en B, que vous étiez en A, et que chacun de nous avions un bouton comme ceux que l'on trouve par milliers dans les magasins d'électronique, et que le but était de les faire appuyer sur le bouton simultanément. Eh bien, au moment où je vous verrais presser le bouton, je saurais qu'en fait vous l'aviez déjà pressé, et les rayons qui me parviennent ne sont que la latence de ce qui est déjà votre passé et mon présent en même temps. Et donc j'aurais de la misère à appuyer sur mon bouton en même temps que vous. Mais il existe un remède à cela, et il est possible de faire en sorte que nos boutons soient appuyés de manière simultanée. À la lumière de ce que nous savons sur la relativité restreinte, vous et moi pourrions simplement nous organiser. Par exemple, si la distance entre A et B est de c, et que vous vouliez m'envoyer un signal pour m'informer d'appuyer sur mon bouton, alors vous sauriez que le signal prendrait une seconde pour se rendre à moi en B. Par conséquent, vous n'auriez qu'à attendre une seconde de plus après avoir envoyé son signal, pour appuyer sur le bouton. Et voilà, nous serions simultanés.

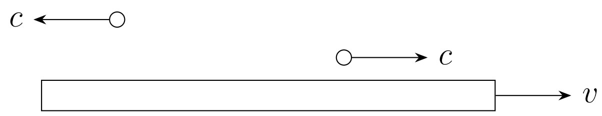
Mais alors, qu'est-ce que je veux dire lorsque je dis que la simultanéité est absurde ? Je veux dire que, oui, dans un référentiel, il est possible de coordonner deux événements pour qu'ils soient simultanés, mais deux événements qui sont simultanés dans un référentiel ne le sont pas forcément dans tous les référentiels. C'est de cette simultanéité dont il est question ; on appelle parfois cela la simultanéité absolue, et elle est absurde. Deux événements sont simultanés absolument s'ils arrivent simultanément dans tous les référentiels, et cela est impossible. Voici un exemple qui nous vient de Richard Taillet [5], un physicien de l'Université de Grenoble Alpes, et qui montre deux événements qui sont simultanés dans un référentiel, mais qui ne le sont plus dans un autre.

Supposons que nous ayons un wagon en mouvement rectiligne uniforme et qu'à partir du milieu du wagon, nous lancions deux photons : un vers l'avant du wagon, et l'autre vers l'arrière du wagon. Eh bien, pour un observateur à l'intérieur du wagon, comme les deux photons commencent leur course au même moment, au centre du wagon, alors les deux photons rencontrent leur extrémité respective du wagon au même moment (simul-

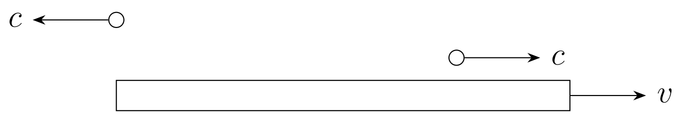
tanément). Donc, l'événement "les photons touchent l'extrémité du wagon" est simultané pour un observateur à l'intérieur du wagon. Je vous évite un dessin, car pour moi je pense que cela est très facile à visualiser.
Par contre, pour un observateur immobile situé à l'extérieur du wagon, comme le wagon est en mouvement, l'arrière du wagon s'approche de son photon pendant que l'avant s'éloigne de son photon. Alors, le photon qui va vers l'arrière rencontrera l'arrière du wagon avant que le photon qui va vers l'avant du wagon finisse sa course. (Voir dessin.)



(1)



(2)



(3)

Ainsi, dans ce référentiel, les événements ne sont plus simultanés.
Cela est extrêmement contre-intuitif. Dans un référentiel, deux photons atteignent leur cible en même temps alors que dans un autre référentiel, ces mêmes photons atteignent leur cible à des moments différents. Mais cela n'est plus contre-intuitif si on accepte que la simultanéité est relative au référentiel. Bon je pense que c'est le moment idéal pour vous introduite au problème de Laperche et de Lagrange

Le paradoxe de Laperche et de Lagrange

Le problème[14] est généralement présenté ainsi.

> Mr. Lagrange possède une grange de 15m de longueur, avec une porte avant et une porte arrière. Mr. Laperche s'approche avec une perche de 20m de long en se dirigeant vers la porte avant. Voir figure 7.
>
> Est-il possible que la perche se retrouve entièrement à l'intérieur de la grange, avec les deux portes fermées ?

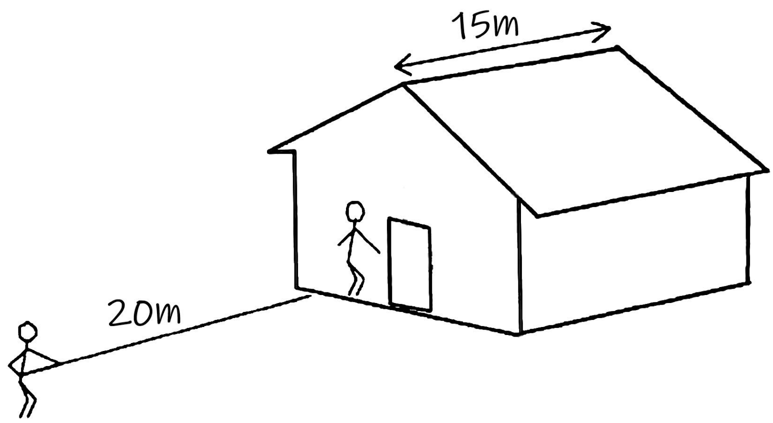


Figure 7: Photo de Mr. Laperche avec sa perche et Mr. Lagrange avec sa grange.

Je pense qu'à première vue, une réaction normale serait de rentrer à toute vitesse dans la grange. Foncer dans le tas sans discuter comme on dit ! Et surprenamment, cela fonctionnerait très bien, d'ailleurs plus on foncerait rapidement, mieux cela fonctionnerait. Mais si on est un peu plus sérieux, je pense que ce paradoxe est le meilleur de tous les paradoxes, car d'une part il est possible de rentrer la perche en entier dans la grange du point de vue de Lagrange (premier wow), mais en plus cela est impossible du point de vue de Mr. Laperche à cause du concept du chapitre précédent sur l'impossibilité de la simultanéité.
Supposons que Mr. Laperche rentre à toute vitesse, disons $v = \frac{2c}{3}$, dans la grange de Mr. Lagrange, alors du point de vue de Mr. Lagrange, la longueur de la perche sera de

$$L' = L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 20\sqrt{1-(\frac{2c}{3})^2\frac{1}{c^2}} \approx 14{,}90\,\mathrm{m} < 15$$

et donc la perche peut rentrer en totalité dans la grange. D'ailleurs par ce fait, il est possible de fermer les deux portes de la grange en même temps alors que la perche est totalement incluse à l'intérieur de la grange. Voir figure 8.

[14] Merci à mon ami Christiant pour l'idée de mettre le paradoxe de Laperche et de Lagrange

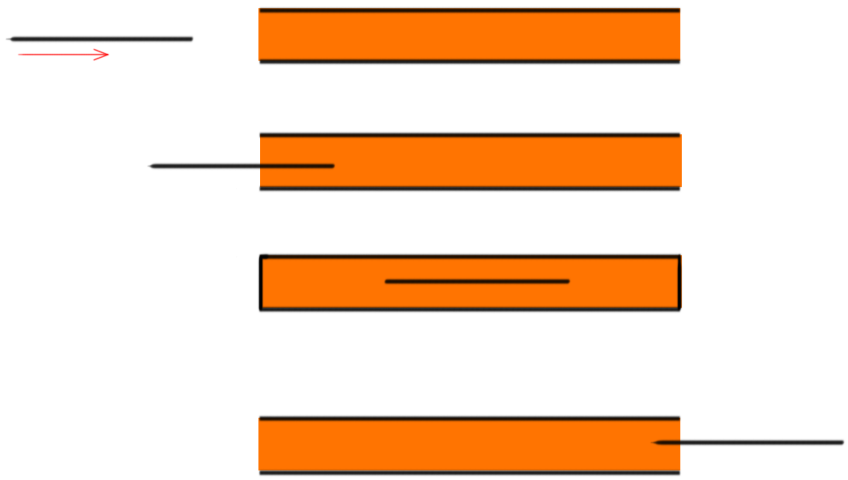


Figure 8: Point de vue de Mr. Lagrange. Les deux portes de la grange sont fermées au même moment.

Pourtant si on demande l'avis à Mr. Laperche, il vous jurera qu'à aucun moment la perche était totalement incluse dans la grange, et d'ailleurs il vous jurera sur la vie de sa perche qu'à aucun instant les deux portes étaient fermées simultanément.
Mais que s'est-il passé du point de vue de Mr. Laperche ? Eh bien, du point de vue de Mr. Laperche, c'est tout l'univers et particulièrement la grange qui avançait dans sa direction à $v = \frac{2c}{3}$. Ainsi, pour Mr. Laperche, la grange a rapetissé alors que sa perche a conservé la même grandeur. Voir figure 9.

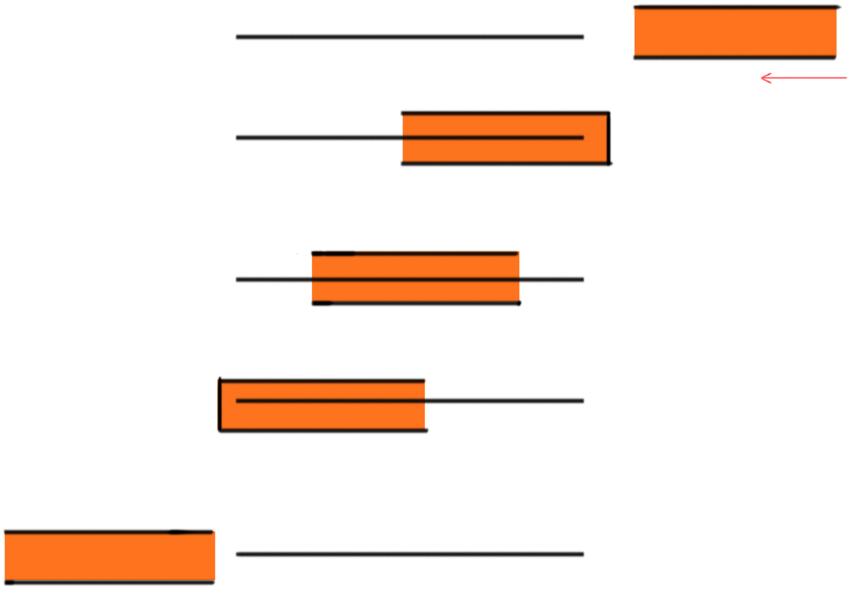


Figure 9: Point de vue de Laperche. Les deux portes ne sont jamais fermées au même moment.

Cela est une conséquence du fait que deux événements simultanés dans un référentiel ne le sont pas forcément dans un autre référentiel.
Il est même possible de transformer la perche en un cure-dent capable de rentrer dans la poche de Mr. Lagrange, si $v = 0{,}999999c$.

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 20\sqrt{1 - \frac{(0{,}999999c)^2}{c^2}} \approx 0{,}028\,\mathrm{m} = 2{,}8\,\mathrm{cm}$$

J'aimerais préciser que les dessins de cette section me viennent d'un document donné aux étudiants lors du cours *Mécanique et relativité restreinte* (PHY-1003) donné par un certain Hugo Martel.

Conclusion

La relativité restreinte, en apparence si simple avec ses deux postulats, bouleverse pourtant nos intuitions les plus fondamentales sur le temps, l'espace et le mouvement. En explorant la constance de la vitesse de la lumière et les transformations qu'elle impose à notre perception du monde, nous avons découvert que les longueurs ne sont plus absolues et que le temps lui-même devient relatif.

Ce rapport avait pour but de rendre ces idées accessibles, en misant sur l'intuition, les histoires (parfois absurdes), les comparaisons ludiques et les expériences de pensée. Bien sûr, des raccourcis ont parfois été pris — volontairement — pour mettre en lumière un concept à la fois. Mais au fil des chapitres, on comprend que la contraction des longueurs et la dilatation du temps ne sont pas des curiosités isolées : ce sont les manifestations concrètes d'un même principe fondamental.

Comprendre la relativité restreinte, ce n'est pas seulement manipuler des formules. C'est apprendre à regarder le monde autrement. Et si, à la fin de ce rapport, vous vous êtes dit que le temps n'était peut-être pas aussi universel qu'on le pensait, alors quelque chose a fonctionné.

Ce quelque chose, c'était ma mission!

Merci!

References

[1] CERN, *Electron-Positron Interactions*, 2002. Disponible en ligne : https://hst-archive.web.cern.ch/archiv/hst2002/bubblech/mbitu/electron-positron.htm. Consulté le 9 février 2025.

[2] Mermin, N. David, *It's About Time: Understanding Einstein's Relativity*, Princeton University Press, 2005.

[3] Bureau de la sécurité des transports du Canada, *Statistiques sur les événements ferroviaires au Canada, 2021*, 2021. Disponible en ligne : https://www.tsb.gc.ca/fra/stats/rail/2021/sser-ssro-2021.html.

[4] Étienne Klein, *Que savons-nous du temps ?*, YouTube, 11 mai 2006. Disponible en ligne : https://www.youtube.com/watch?v=NDYIdBMLQR0.

[5] Taillet R., *Introduction à la relativité restreinte*, 2014. Disponible en ligne : https://videos.univ-grenoble-alpes.fr/la-formation/447-introduction-la-relativit-restreinte/.

[6] Lê Nguyên Hoang, *Spacetime of Special Relativity*, Science4All, 2012. Disponible en ligne : https://www.science4all.org/article/spacetime-of-special-relativity/.