INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA

LOGARITMOS E INTERDISCIPLINARIDADE

Gabriel Marques Miranda

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho

IFSP

São Paulo

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Miranda, Marques Gabriel

Logaritmos e Interdisciplinaridade / Gabriel Marques Miranda. - São Paulo: IFSP, 2019.

57 f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Orientador: Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho

1.Interdisciplinaridade 2. Logaritmos 3. Integração. 4. Livro Didático

Logaritmos e Interdisciplinaridade

“Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino… Enquanto ensino, continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade”.

Paulo Freire

AGRADECIMENTOS

Muito grato ao professor Henrique Marins de Carvalho orientador deste trabalho, por conduzir a construção deste texto. Deixo meu agradecimento às professoras Elizabete Leopoldina da Silva, Elizabete Guerato e ao professor Diogo Oliveira Soares, pelas dicas e sugestões. Grato ao professor Luciano Aparecido Magrini pelo incentivo. Agradeço a todos os professores da Matemática que participaram da minha formação. Agradeço aos colegas que de alguma forma contribuíram para meu avanço no curso. Agradeço a todos os trabalhadores e prestadores de serviço do IFSP Campus São Paulo.

Agradeço a minha esposa Andréia Elias Miranda, primeira pessoa a me incentivar a cursar Licenciatura em Matemática. Por fim, agradeço a minha família que mesmo longe está sempre torcendo por mim.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de projeto interdisciplinar que envolva o assunto de logaritmos, por considerar a importância do trabalho pedagógico com esta abordagem e pelas dificuldades que o conteúdo em questão pode gerar para os alunos do Ensino Médio. São caracterizados os níveis multidisciplinar e interdisciplinar, sendo o primeiro condição para o segundo. Nossa proposta de projeto interdisciplinar baseia-se em materiais didáticos do Ensino Médio em que se buscam integrações e conexões entre os logaritmos e outros conteúdos de outras disciplinas. Por meio destas integrações de conteúdos propõe-se o projeto mencionado, tendo como tema: Água Ciência e Saúde. Em nossa proposta participaram as disciplinas de: português, química, física, biologia e matemática. No texto encontram-se diversas informações a respeito dos logaritmos, como: resumo histórico, construção e utilização de tábuas de logaritmos, além da definição e propriedades operatórias.

Palavras chaves: interdisciplinaridade; logaritmos; integração; livro didático.

ABSTRACT

This work presents a proposal for an interdisciplinary project that involves the subject of logarithms, considering the importance of the pedagogical work with this approach and the difficulties that the content in question can generate for High School students. The multidisciplinary and interdisciplinary levels are characterized, assuming that the first one for the other. Our interdisciplinary project proposal is based on high school teaching materials in which integration and connections between the logarithms and other contents of other disciplines are sought. By means of these content integrations, we propose the mentioned project, which theme is: Water, Science and Health. In our proposal we included the following disciplines: Portuguese, Chemistry, Physics, Biology and Mathematics. In the text we find several information about logarithms, such as: historical summary, construction and use of logarithmic tables, as well as definition and operative properties.

Keywrds: interdisciplinarity; logarithms; integration; textbook.

Lista de figuras **Pág.**

Lista de Tabelas **Pág.**

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O tema central deste trabalho é a interdisciplinaridade, a caracterização, a importância e o processo de elaboração de uma proposta de projeto interdisciplinar é o que está à disposição no corpo deste texto. O tema paralelo que acompanha a interdisciplinaridade é o objeto matemático logaritmos.

O motivo de “logaritmos e interdisciplinaridade” se dá pelos objetivos do autor que são: ter uma compreensão mais ampla a respeito do conteúdo de logaritmos; entender o trabalho pedagógico interdisciplinar.

Esses temas estão relacionados da seguinte forma: existem várias aplicações dos logaritmos. Soares (2017) cita algumas: juros compostos, dinâmica populacional, desintegração radioativa, potencial hidrogeniônico (pH), escala Richter, escala de Magnitude de Momento e nível de intensidade sonora. Porém não podemos afirmar que tais aplicações são exemplos de interdisciplinaridade. Segundo Fazenda, (2014) tal afirmação seria um emprego indevido do termo “interdisciplinar”. Desenvolvemos esse trabalho, justamente para propor um trabalho pedagógico interdisciplinar que envolva logaritmos. Uma importante análise sobre este trabalho, é que as informações contidas a respeito da interdisciplinaridade podem ser adaptadas para qualquer outro conteúdo, mesmo fora da Matemática.

Com este trabalho queremos responder o seguinte questionamento:

É possível, com base em livros didáticos do Ensino Médio, chegar a um nível de proposta de trabalho pedagógico interdisciplinar que envolva logaritmos?

Utilizamos para a construção deste texto: livros, livros didáticos do Ensino Médio, pesquisas acadêmicas e artigos.

No segundo capítulo, apresentaremos as informações sobre a interdisciplinaridade. Pretendemos com este capítulo deixar claro: o que é interdisciplinaridade, porque é importante e como trabalhar de maneira interdisciplinar. O terceiro capítulo é dedicado aos logaritmos, sua História, seus criadores, o desenvolvimento, a utilização de tabelas de logaritmos, a definição e as suas propriedades. O quarto capítulo é dedicado a construção da proposta de projeto interdisciplinar. Este capítulo inicia-se com a análise de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio a respeito do conteúdo de logaritmos. Em seguida serão verificadas as possíveis conexões com a Matemática por meio dos logaritmos em livros didáticos das disciplinas de Química, Física e Biologia. Com base nestas análises vamos propor trabalhos pedagógicos integrados (multidisciplinares) e, consequentemente, um trabalho interdisciplinar de tema: Água, Ciência e Saúde.

2 INTERDISCIPLINARIDADE

Fazenda (2014, pág. 38) afirma que o termo “interdisciplinaridade” ainda não possui um significado único e estável, porém o mais aceito é caracterizar a interdisciplinaridade como uma troca intensa entre especialistas e pela integração das disciplinas em torno de um determinado tema. Fazenda (2008, 2014) também defende que embora a palavra “interdisciplinaridade” seja um neologismo, a ideia de unificar, sintetizar e integrar ciências vem desde a filosofia antiga do oriente.

Podemos entender melhor esta palavra se analisarmos sua etimologia: segundo Aiub (sem data), seu termo principal *disciplinar* vem de disciplina, do latim ***discere*** – aprender, discípulos (aquele que aprende), ***inter*** que significa ação recíproca, quando acrescentamos ***dade*** e formamos a palavra *interdisciplinaridade*, este último termo corresponde à qualidade, estado ou resultado da ação.

Fortunato (2013, pág. 2) simplifica o conceito: “interdisciplinaridade é uma proposta de trabalho pedagógico que promove o diálogo entre os saberes e que entrelaça os conteúdos através do currículo escolar”. No texto dos Parâmetros Curriculares Nacional do Ensino Médio (2000 pág. 75) temos a seguinte afirmação: “é um fato trivial que todo conhecimento mantém diálogo permanente com outros conhecimentos se considerarmos isso o conceito de interdisciplinaridade fica mais claro”.

2.1. Por que a interdisciplinaridade é importante?

Fazenda (2001, p.11) afirma: “a interdisciplinaridade é uma nova atitude diante da questão do conhecimento, de abertura à compreensão de aspectos ocultos do ato de aprender [...], ou seja, a interdisciplinaridade é um processo que precisa ser vivido e exercido”.

Alves (2008) pergunta: qual professor (a) de Matemática nunca teve sua aula interrompida por uma destas seguintes perguntas: “Pra que serve esse conteúdo?”, “Onde isso é usado?” ou “Este assunto serve pra alguma coisa?”... Na busca de sanar essas dúvidas, a interdisciplinaridade surge para transformar a simples reprodução de um determinado conteúdo pelos alunos, em “produção de conhecimento”.

O conhecimento fragmentado não promove uma compreensão mais ampla de um tema específico que não pertence a nenhuma disciplina. Há a tendência, em todos os níveis de ensino de se analisar a realidade de maneira disciplinar. Com essa atitude perde-se a oportunidade de desenvolver os diversos conhecimentos para a compreensão de fenômenos. Por esse motivo, a organização curricular se dá por áreas de conhecimento, que articula a linguagem, a filosofia, e as ciências naturais, humanas e tecnológicas. O objetivo é superar o modelo tradicional “compartimentalizado” (BRASIL, 2000, p. 21).

Para Delizoicov e Zanetic (2002, p. 13) é importante respeitar o conhecimento fragmentado, pois é uma maneira inteligente de organizar e desenvolver o conhecimento humano. A interdisciplinaridade vem para estabelecer e compreender a relação entre os saberes. Fazendo uso de “temas geradores” da vida real e os observando através das “lentes da interdisciplinaridade”, podemos alcançar, com essa integração de conteúdos, melhor entendimento dos fenômenos analisados.

Fazenda (2014, p. 39 e 40) argumenta que prática interdisciplinar incentiva a formação de pesquisadores, pois a investigação interdisciplinar permite a análise de situações globais e supera os limites da fragmentação dos saberes. Promove uma melhor compreensão da realidade e consequentemente pode ser fonte de mudanças.

2.2. Obstáculos para a prática interdisciplinar

Fortunato (2013) apresenta três obstáculos:

- Currículos produzidos de maneira fragmentada, onde há pouco diálogo entre as disciplinas.
- Falta de diálogo entre professores, gestores e alunos sobre integração de disciplinas.
- Hierarquização de disciplinas, onde algumas disciplinas são consideradas superiores às outras, e a interdisciplinaridade confunde-se com a mera complementação da disciplina “mais importante” por meio de conteúdos de outras “menos importantes”. Existe também a hierarquização de conteúdos dentro da própria disciplina.

Para Fazenda, (2014) o emprego indevido do termo “interdisciplinar”, usado como “modismo” também dificulta os trabalhos e o entendimento efetivo desta proposta pedagógica.

2.3 Exemplo de um Projeto Interdisciplinar

A secretaria de Educação do Estado de São Paulo (2018) apresenta o projeto interdisciplinar “Campeonato do Saber” que é uma “competição cultural” em que as turmas que somarem maior pontuação são as vencedoras. Os alunos recebem diplomas e medalhas.

O projeto faz parte do Plano Político Pedagógico da Escola Estadual Francisco Milton Andrade (Guarulhos – SP) e acontece anualmente. O “campeonato do Saber” é muito esperado por alunos e professores. Todos os anos um tema diferente é trabalhado, em 2018 o tema escolhido foi: “São Paulo: coração do Brasil território da diversidade”. A comissão organizadora escolheu 15 cidades do estado para serem trabalhadas no projeto os aspectos: históricos econômico e culturais.

Os alunos e professores trabalham durante o segundo bimestre e acontecem apresentações dos alunos nos dias de competição. O “júri” é composto por professores, funcionários e convidados. Os alunos apresentam cartazes, maquetes, poesia, dança e teatro.

O projeto envolve os alunos do Fundamental Ciclo II e Ensino Médio. Os pais dos alunos consideram o projeto importante, pois eles observam que os seus filhos se dedicam mais aos estudos.

2.4 Construindo um Projeto interdisciplinar

Prado (1999) atribui o sucesso de um projeto interdisciplinar a um bom planejamento, ao diálogo, à capacidade de improvisação e ao engajamento da equipe envolvida neste trabalho (professores). Segue abaixo as etapas para um projeto interdisciplinar:

1. Definição do Tema
2. Justificativa do Tema.
3. Objetivos
4. Quais disciplinas serão envolvidas
5. Cronograma
6. Cada professor decide como irá contribuir e como essa contribuição se ligará ao currículo.
7. Avaliação dos recursos disponíveis
8. Início do projeto com os alunos
9. Desenvolvimento
10. Avaliação
11. Conclusão reflexiva.

2.5 Explicando outros termos: multidisciplinaridade e transdisciplinaridade.

Segundo Fazenda, (2014, p. 38 e 39) multidisciplinaridade ou pluridisciplinaridade, são os conteúdos comuns às diferentes disciplinas postos lado a lado de maneira integrada, isso é condição para a interdisciplinaridade.

A transdisciplinaridade seria o nível mais alto das relações *multi e inter*, sendo a interdisciplinaridade o nível intermediário. Fazenda considera a transdisciplinaridade utópica e incoerente, pois a ideia de transcendência impõe uma autoridade cientifica que nega o diálogo que é condição para a interdisciplinaridade. Abaixo destacaremos as características destas práticas de ensino:

Multidisciplinaridade: o que caracteriza está prática segundo fazenda (2014) são os conteúdos comuns às disciplinas trabalhados de maneira integrada. Neste nível existe o diálogo entre os especialistas, mas o trabalho é em torno das disciplinas.

Observação: a palavra “integração” e algumas de suas variações, que aparecem ao longo desta monografia são sinônimas da palavra “multidisciplinar” e algumas de suas variações.

Interdisciplinaridade: para Fazenda (2014) é o trabalho multidisciplinar (ou integrado), em torno de um determinado tema. Para Fortunato (2013) este determinado tema é um projeto pedagógico. Assim podemos justificar a afirmação: “a integração de conteúdos e o diálogo entre especialista são a base para um projeto interdisciplinar.”

Transdisciplinaridade: Fazenda (2014) explica que entre as relações *Mult, Inter e Trans*, este seria o nível mais elevado. Neste nível mais alto, ao invés de integração de conteúdos, teríamos a unificação do conhecimento.

3 LOGARITMOS

3.1 Breve Revisão Histórica

John Napier (1550 – 1617) é o nome associado à invenção dos logaritmos, “razão entre números”, no início do século XVII. Numa época em que as navegações, a astronomia, o comércio, a engenharia e as guerras necessitavam de um dispositivo que melhorasse os processos de cálculos matemáticos, os logaritmos diminuíam o trabalho gasto em cálculos destas áreas.

John Napier, foi um escocês que investiu grande parte de sua vida com assuntos religiosos e políticos de sua época e era anticatólico. Napier tinha uma visão bélica bem à frente de seu tempo, e descreveu artefatos que no futuro, seriam o submarino, o tanque de guerra e a metralhadora, que se concretizaram na primeira guerra mundial.

Apesar de ser considerado mentalmente perturbado, no tempo que lhe sobrava de suas questões religiosas e políticas, a sua poderosa imaginação era usada em estudos científicos e matemáticos com grande fascínio. Nesses períodos de deleite criou a sua mais notável contribuição para a Matemática, os logaritmos.

Com a contribuição importante de Henry Briggs (1561 – 1631), professor de geometria londrino, foram construídas tabelas de logaritmos e rapidamente difundidas em toda a Europa. Briggs, ajudou Napier a definir que o logaritmo de *1* fosse *0* e o logaritmo *10* fosse uma potência conveniente de *10*, sendo estes os *logaritmos comuns* que são usados na atualidade. (EVES, 2008)

Outro nome que merece destaque é o de Jobst Bürgi que possivelmente seis anos antes de Napier, em 1588, já desenvolvia ideias muito semelhantes. Porém, Napier foi o primeiro a publicar em 1614, *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos). Bürgi só publicou seus resultados em 1620 em Praga em um livro intitulado: *Arithmetis cheund geometrische Progress – Tabulen.* Os logaritmos de Bürgi se parecem mais com os logaritmos modernos, porém não teve crédito pela invenção, pois Napier antecipou-se em publicar (BOYER, 2010).

As tabelas ou tábuas de logaritmos foram usadas na Educação Básica e Superior durante muitos anos, mas hoje em dia, com o advento das calculadoras cada vez mais baratas e eficientes, esses dispositivos foram substituídos.

3.1.1 Uso prático de uma tabela de logaritmo

Até a década de 1970, quando apareceram as primeiras calculadoras eletrônicas e portáteis, os logaritmos comuns ou de *Briggs,* eram uma importante ferramenta de cálculo utilizada por estudantes (NOGUEIRA, 2018).

Exemplo:

Se estivéssemos nos anos 1970 e tivéssemos que calcular:

$$X = \sqrt[4]{(493{,}8 * \frac{23{,}67^3}{5{,}104})}$$

Usando as propriedades de potenciação temos:

$$X = (493{,}8 * \frac{23{,}67^3}{5{,}104})^{\frac{1}{4}}$$

Aplicando logaritmo dos dois lados da igualdade, temos:

$$\log x = \log (493{,}8 * \frac{23{,}67^3}{5{,}104})^{\frac{1}{4}}$$

Aplicando propriedades operatórias de logaritmo, que podem ser verificadas no próximo capítulo, temos:

$$\log x = \left(\frac{1}{4}\right) [\log 493{,}8 + 3 \log 23{,}67 - \log 5{,}104]$$

O estudante agora teria que consultar uma tabela de logaritmos, porém, vamos definir primeiramente que:

Os logaritmos entre 10 (inclusive) e 100 (exclusive) são da forma **1, *abc*** e os entre 100 (inclusive) e 1000 (exclusive), são da forma **2, *abc*,** e a assim sucessivamente, em que ***abc*** é a parte fracionária do logaritmo ou ***mantissa*** e

1 e **2** são as ***características*** (parte inteira do número). Podemos usar agora uma tabela de logaritmos. Observação: os logaritmos entre 1 (inclusive) e 10 (exclusive) são da forma **0,*abc.***

Passo a passo:

- Na linha correspondente ao número 49 vamos até a coluna 3 e encontrando 6928
- Depois observando na coluna 8 da parte proporcional encontramos o 7. Somamos então 6928 + 7 = 6935.
- Como 493,8 está entre 100 e 1000 a característica deste $\log 493{,}8$ é 2.
- Então temos $\log 493{,}8 = 2,6935$
- Na linha correspondente ao número 23 vamos até a coluna 6 e encontramos 3729
- Na parte proporcional encontramos na coluna 7 o 13, somamos então 3729 + 13 = 3742.
- Como 23.67 está entre 10 e 100 a característica do $\log 23{,}67$ é 1.
- Assim o $\log 23{,}67 = 1,3742$
- Em uma tabela que contenha a característica *0* encontramos $\log\ 5{,}104 = 0{,}7079$

Fazendo as devidas substituições temos:

$$\log x = \frac{1}{4}\ (2{,}6935 + 3 * 1,3742 - 0,7079)$$

$$\log x = \frac{1}{4} * 6,1082$$

$$\log x = 1,5205$$

Usando agora uma tabela de *antilogaritmos*, primeiramente usamos a mantissa **0, 5205** e encontramos **3315**. Sabemos que x deve ser um número entre 10 e 100, pois a característica é *1*. Assim concluímos que:

x = 33,15

Trecho de uma tabela de logaritmos e antilogaritmos:

Tabela 1: trecho de uma tabela de logaritmos

N	0	1	2	**3**	4	5	**6**	7	8	9	1	2	3	4	5	6	**7**	**8**	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0374	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	**3729**	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	**13**	15	17
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
49	6902	6911	6920	**6928**	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	**7**	8
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Parte proporcional

(MAOR, 2008 p. 37)

Tabela 2: trecho de uma tabela de antilogaritmos

N	**0**	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	1	2	3	4	**5**	6	**7**	**8**	9
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
.52	**3211**	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	**4**	5	5	6	7
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Antilogaritmos

Parte proporcional

(MAOR, 2008 p. 38)

3.2. Definição de Logaritmos

Sejam *a* e *b* números reais positivos e *a* ≠ 1, dizemos que logaritmo de *b* na base *a* é o número que elevado *a* resulta em *b*.

Em linguagem matemática:

a e *b* є R, 0 < *a* ≠ 1 e *b* > 0, então:

$$\mathbf{log}_{a} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$$

3.2.1. Antilogaritmos

Se $\log_a b = x$, então *b* é o antilogaritmo de *x* na base *a*

$$\mathbf{antilog}_{a} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

3.2.2. Consequências da definição

(I) $\mathbf{log}_{a} \mathbf{1} = \mathbf{0}$

(II) $\mathbf{log}_{a} \boldsymbol{a} = \mathbf{1}$

(III) $\boldsymbol{a}^{\mathbf{log}_{a} \boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b}$

(IV) $\mathbf{log}_{a} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} \boldsymbol{e} \, \mathbf{log}_{a} \boldsymbol{c} = \boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$

(V) $\mathbf{log}_{a} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{m}$

3.2.3. Propriedades Operatórias

Descreveremos agora algumas propriedades de logaritmos de mesma base:

(VI) Logaritmo do produto

Sejam a, b e c є R e a ≠ 1, temos que:

$$\mathbf{log}_{a} \boldsymbol{bc} = \mathbf{log}_{a} \boldsymbol{b} + \mathbf{log}_{a} \boldsymbol{c}$$

Demonstração:

$$\log_a bc = x \rightarrow bc = a^x \; ①$$

$$\log_a b = y \rightarrow b = a^y \; ②$$

$$\log_a c = z \rightarrow c = a^z \; ③$$

Substituindo ② e ③ em ①:

$$a^x = a^y . a^z \rightarrow \; x = y + z$$

Voltando à forma original:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

(VII) Logaritmo de um quociente:

$$\boldsymbol{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$$

Demonstração:

$$\log_a \frac{b}{c} = x \rightarrow a^x = \frac{b}{c} \; ①$$

$$\log_a b = y \rightarrow a^y = b \; ②$$

$$\log_a c = z \rightarrow a^z = c \; ③$$

Substituindo ② e ③ em ①:

$$a^x = \frac{a^y}{a^z} \rightarrow a^x = a^y . a^{-z} \rightarrow \mathrm{x = y - z}$$

Voltando à forma original:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

(VIII) Logaritmo de uma potência

$$\mathbf{\log_a b^m = m . \log_a b}$$

Demonstração:

$$\log_a b^m = x \rightarrow a^x = b^m \text{①}$$

$$\log_a b = y \rightarrow a^y = b \text{②}$$

Substituindo ② em ①:

$$a^x = (a^y)^m \rightarrow a^x = a^{my} \rightarrow x = my$$

Retornado à forma logarítmica:

$$\log_a b^m = m . \log_a b$$

3.2.4. Mudança de base

Para mudarmos a base *a* de um logaritmo para a base *c* utilizamos a propriedade abaixo:

$$\mathbf{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \log_c a \neq 0}$$

a, b e c> 0 e a e c ≠ 1

Demonstração:

$$\log_a b = x \rightarrow a^x = b$$

$$\log_c b = y \rightarrow c^y = b$$

Concluímos:

$$a^x = c^y \text{ (1)}$$

Fazendo:

$$\log_c a = z \rightarrow c^z = a$$

Substituindo $c^z = a$ na equação (1) temos:

$$(c^Z)^x = c^y$$

Logo:

$$x = \frac{x}{z}$$

O que nos retorna a:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Para passar $\log_a b$ para a base b utilizamos a conseqüência da definição (II) e obtemos:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

3.2.5. Cologaritmo

Definimos o cologaritmo de um número b na base *a* ao oposto do logaritmo desse número, nessa mesma base.

a, b є R a, b > 0 e a ≠ 1

$$\boldsymbol{co\log_a b = -\log_a b}$$

Pois:

$$-\log_a b = \log_a \frac{1}{b}$$

Assim:

$$co\log_a b = \log_a \frac{1}{b}$$

3.2.6. Função logarítmica

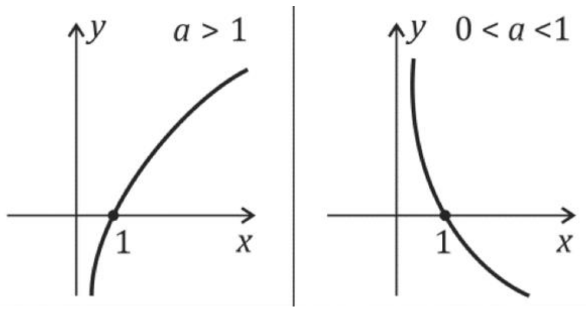
Definição

Denomina-se função logarítmica à função *f: R* (+)* → *R* dada por:

$$f(x) = \log_a x \ (a > 0 \ e a \neq 1)$$

Caracterização: $f(x1 \,.\, x2) = f(x1) + f(x2), \forall x1,\ x2 \in R\ x1,\ x2 > 0$

Gráficos:

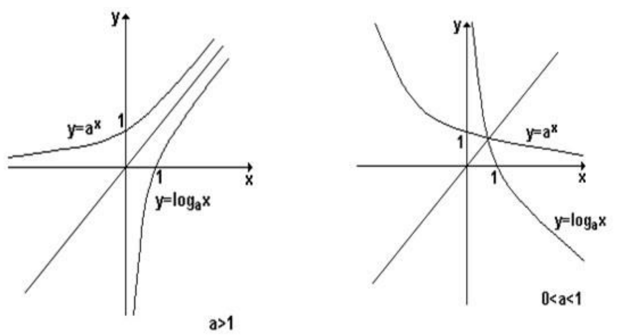


(Figura 1: gráfico função logarítmica, fonte: FUVEST, 2013)

A sua Função inversa

Sendo $f(x) = \log_a x$ bijetora, sua inversa será $y = a^x$.

Gráficos:



(Figura 2: gráfico da função inversa, fonte: Brasil Escola)

3.2.7. Equações logarítmicas

São igualdades que apresentam incógnita no logaritmando, na base do logaritmo ou em ambos.

Exemplo:

$$\log_3(x-1) - \log x = 1$$

Ao resolver este tipo de equações, devemos observar a condição de existência, ou seja, o logaritmando deve ser positivo e a base deve ser maior que 0 e diferente de 1.

Os valores encontrados devem ser submetidos às condições de existência.

Dentro deste tópico podemos acrescentar: Os sistemas de logaritmos, que possuem pelo menos uma equação logarítmica e as desigualdades logarítmicas (inequações).

3.2.8. Logaritmos decimais

O sistema de logaritmos decimais ou de *Briggs* (mais informações item 2.1) é aquele formado pelos logaritmos de base 10. Observação: quando não escrevemos a base do logaritmo subentendemos que seja a base 10.

Exemplo:

$$\log 1 = 0$$

$$\log 10 = 1$$

Os logaritmos dos números entre 1 e 10 terão como resultado os números entre 0 e 1.

$$\log 10 = 1$$

$$\log 100 = 2$$

Os logaritmos dos números entre 100 e 1000 terão como resultado os números entre 2 e 3.

$$\log 1000 = 3$$

Agora vamos mostrar como Briggs construiu uma tabela contendo os logaritmos decimais de 1 a 1000, esta tabela foi publicada em 1617 (KILLIAN, sem data).

Como Briggs calculou $\log 2$?

Sabemos que:

$$1 < 2 < 10$$

$$10^0 < 10^x < 10^1$$

$$0 < x < 1$$

$$0 < \log 2 < 1$$

Podemos pensar em uma reta:

1 2 10

10^0 10^X 10^1

(Figura 3: reta comparativa, fonte: Autor)

Para prosseguirmos vamos definir média geométrica (G) que é:

$$G = \sqrt[n]{a1a2a3 \dots an} \; (a1, a2, a3, \dots an > 0)$$

Agora vamos considerar a1 = 1 e a2 = 10 fazendo a média geométrica entre a1 e a2 temos:

$$a_3 = \sqrt{a_1 \cdot a_2} = \sqrt{10^0 \cdot 10^1} = \sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} = 10^{0,5} = 3{,}1622776$$

Precisamos de um número x que tal $10^x = 2$

Agora sabemos que 0 < x < 0,5 corresponde a:$0 < \log 2 < 10^{\frac{1}{2}}$

Seguimos agora fazendo aproximações agora com a média geométrica entre a1 e a3, que é a4:

$$a_4 = \sqrt{a_1 \cdot a_3} = \sqrt{10^0 \cdot 10^{0,5}} = \sqrt{10^{0,5}} = 10^{\frac{0,5}{2}} = 10^{0,25} = 1,7782793$$

Agora é conveniente fazermos a média geométrica entre a4 e a3, que é a5:

$$a_5 = \sqrt{a_4 \cdot a_3} = \sqrt{10^{0,25} \cdot 10^{0,5}} = 10^{0,375} = 2,371374$$

Analogamente seguimos:

$$a_6 = \sqrt{a_4 \cdot a_5} = \sqrt{10^{0,25} \cdot 10^{0,375}} = 10^{0,3125} = 2,053525$$

$$a_7 = \sqrt{a_4 \cdot a_6} = \sqrt{10^{0,25} \cdot 10^{0,3125}} = 10^{0,28125} = 1,910953$$

$$a_8 = \sqrt{a_7 \cdot a_6} = \sqrt{10^{0,28125} \cdot 10^{0,3125}} = 10^{0,296875} = 1,980957$$

$$a_9 = \sqrt{a_8 \cdot a_6} = \sqrt{10^{0,296875} \cdot 10^{0,3125}} = 10^{0,304688} = 2,016915$$

$$a_{10} = \sqrt{a_8 \cdot a_9} = \sqrt{10^{0,296875} \cdot 10^{0,304688}} = 10^{0,300781} = 1,998855$$

$$a_{11} = \sqrt{a_{10} \cdot a_9} = \sqrt{10^{0,300781} \cdot 10^{0,304688}} = 10^{0,302734} = 2,007864$$

$$a_{12} = \sqrt{a_{10} \cdot a_{11}} = \sqrt{10^{0,300781} \cdot 10^{0,302734}} = 10^{0,301758} = 2,003355$$

$$a_{13} = \sqrt{a_{10} \cdot a_{12}} = \sqrt{10^{0,30071} \cdot 10^{0,301758}} = 10^{0,30127} = 2,001103$$

$$a_{14} = \sqrt{a_{10} \cdot a_{13}} = \sqrt{10^{0,30071} \cdot 10^{0,30127}} = 10^{0,301025} = 1,999979$$

$$a_{15} = \sqrt{a_{14} \cdot a_{13}} = \sqrt{10^{0,301025} \cdot 10^{0,30127}} = 10^{0,301147} = 2,000541$$

$$a_{16} = \sqrt{a_{14} \cdot a_{15}} = \sqrt{10^{0,301025} \cdot 10^{0,301147}} = 10^{0,301086} = 2,00026$$

$$a_{17} = \sqrt{a_{14} \cdot a_{16}} = \sqrt{10^{0,301025} \cdot 10^{0,301086}} = 10^{0,301056} = 2,000119$$

$$a_{18} = \sqrt{a_{14} \cdot a_{17}} = \sqrt{10^{0,301025} \cdot 10^{0,301056}} = 10^{0,301041} = 2,000049$$

$$a_{19} = \sqrt{a_{14} \cdot a_{18}} = \sqrt{10^{0,301025} \cdot 10^{0,301041}} = 10^{0,301033} = 2,00001384$$

$$a_{20} = \sqrt{a_{14} \cdot a_{19}} = \sqrt{10^{0,301025} \cdot 10^{0,301033}} = 10^{0,301029} = 1,99999541$$

$$a_{21} = \sqrt{a_{20} \cdot a_{19}} = \sqrt{10^{0,301029} \cdot 10^{0,301033}} = 10^{0,30103} = 2,00000463$$

Assim, voltando à reta:

1	2	10
10^1	$10^{0,30103}$	10^1

(Figura 4: reta comparativa, fonte: Autor)

Briggs construiu uma tabela com 14 casas decimais dos logaritmos de 1 a 1000.

As propriedades das potências poderiam ser úteis nesta construção, como por exemplo:

$$4 = 2^2 = 10^{(0,30103)^2} = 10^{0,60206}$$

$$\log 4 = 0,60206$$

3.2.9. Logaritmo Natural

Segundo Stewart (2015) o número irracional *e* – referindo-se a “exponencial” que é frequentemente utilizado em Cálculo, foi estudado pela primeira vez em 1683 por Jacob Bernoulli, e é definido por:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

O logaritmo natural (ln) de um número é a potência a qual se deve elevar *e* para se obter esse número.

$$e^{\ln x} = x$$

Maor (2008) afirma que o número *e* ocorre em problemas de juros compostos. Observando a fórmula de juros compostos:

$$S = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$$

Onde: S é resultado final, P é principal ou valor inicial, r – taxa de juros, n é período, t é tempo em anos e *nt* são os períodos de conversão.

Tomando agora um caso especial com uma taxa de juros de 100%, ou seja, r = 1, considerando t = 1, e um principal P = (R$ 1,00):

$$S = (1 + \frac{1}{n})^{n}$$

Quando substituindo n por valores grandes obtemos números cada vez mais próximos de 2,718281. Stewart (2015, p. 226) apresenta *e* com cem casas decimais:

2,71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762
77240766303535475945713821785251664274

Stewart (2015, p. 230) afirma que os “logaritmos na base *e* são fundamentais em Matemática avançada”. Na aritmética prática ou mais simples é mais interessante usarmos os logaritmos na base 10.

Mudando a base *e* para a base decimal:

Sendo:

$$\log_e x = \ln x \ \ (x > 0)$$

Vamos mudar para a base 10:

$$\log_e x = \frac{\log x}{\log e} \rightarrow \log_e x = \frac{\log x}{0{,}43} \rightarrow \log_e x = \frac{1}{0{,}43} \ . \log x \rightarrow$$

$$\log_e x = 2{,}3 \ . \log x$$

Com essa relação obtida acima podemos resolver questões que envolvem a base decimal e a base *e*.

4. LOGARITMOS E INTERDISCIPLINARIDADE

O principal objetivo deste trabalho é propor um projeto interdisciplinar que envolva o conteúdo logaritmos. Segundo Leitão (2014 p. 11) no processo *ensino-aprendizagem*, o professor de Matemática deve encontrar ferramentas, para que o estudo da Matemática torne-se mais agradável, uma vez que esta disciplina é considerada difícil, desafiadora e, por isso, causa bloqueios nos alunos. Um conteúdo que apresenta muitas dúvidas e questionamentos é o de logaritmos. Este conteúdo por muitas vezes é visto com receio e sem sentido pelos alunos. Diante deste fato, Leitão (2014 p. 11) se pergunta: “Será que os professores de Matemática estão preparados para lidar com essa situação?”

4.1. Analisando os materiais didáticos

Fazenda (2014, p. 38 e 39) apresenta níveis das relações *multi, inter e trans* sendo “multi” o nível básico para interdisciplinaridade que é a integração. Soares (2017) faz uma análise de livros didáticos sobre logaritmos na Matemática escolar brasileira de 1879 a 2013, para este autor os logaritmos estão presentes nos livros didáticos nos assuntos: juros compostos, dinâmica populacional, desintegração radioativa, potencial hidrogeniônico (pH), escala Richter, escala de Magnitude de Momento e nível de intensidade sonora.

Acima estão citadas algumas oportunidades de integração da Matemática com as outras disciplinas por meio dos logaritmos.

Vamos apresentar a seguir como alguns livros didáticos de Matemática apresentam oportunidades de “conexão com outras disciplinas” quando tratam do assunto logaritmo.

4.1.1. Livro didático: **Matemática para compreender o mundo** - Ensino Médio volume (1) [PNLD: 2018 – 2019 – 2020]

Smole e Diniz (2016) trazem a seção “Entre Saberes” na página 204, no final do capítulo 8 (Logaritmos e função logarítmica). Nas páginas 204 e 205 é apresentado um artigo: “Cálculo do tempo de vida da radioatividade de uma substância”. Na parte de cima da página 204 do lado esquerdo, podemos observar claramente uma referência de integração de disciplinas, pois as autoras relacionam o artigo às disciplinas: Matemática, Química e Física.

O artigo traz algumas informações sobre radioatividade, por exemplo: “Independente de ser natural ou artificial toda substância emite energia [...] Depois da emissão da radiação, a substância original se transforma em outra substância com propriedades Físicas e Químicas diferentes.”

São apresentados dois gráficos no texto, um mostrando o decaimento da atividade nuclear de uma substância qualquer, relacionado com a função exponencial: $N(t) = Noe^{-\lambda t}$, e outro mostrando o decaimento do iodo radioativo no tratamento da tireoide. No final do artigo, o texto traz a ideia da datação por carbono-14 e em seguida é proposta uma atividade.

Atividade:

“Suponha que a amostra de um fóssil apresenta 10% de carbono -14 em relação a uma amostra viva. Se a meia vida do carbono -14 é de 5730 anos, qual seria a idade desse fóssil?”

Utilizando a equação:

$$N(t) = No.e^{-\lambda t}$$

Para obtermos a meia vida de uma substância vamos considerar $N(t) = \frac{No}{2}$ e substituímos:

$$\frac{No}{2} = No.e^{-\lambda t} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t}$$

Aplicando ***ln*** em ambos os lados da igualdade e aplicando as propriedades: $\log_a b^m = m\log_a b$ e $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, sabendo que $\ln e = 1$ e $\ln 1 = 0$, concluímos que:

$$t = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Conhecendo **λ**, que é a constante de decaimento nuclear que depende da substância, podemos calcular t.

Assim temos:

$$0{,}9No = Noe^{-\lambda t}$$

Temos 90% de carbono 14 de uma amostra, por isso o (0,9). Temos o tempo da meia vida, podemos encontrar **λ**.

$$\lambda = \frac{\ln 2}{5730}$$

Assim no caso da atividade, após as devidas manipulações algébricas temos:

$$t = \frac{\ln 0{,}9}{(-1{,}20960)10^{-4}}$$

$$t \cong 871\ anos$$

4.1.2. O livro didático: **Matemática Dante volume único** [PNLEM: 2009 – 2010 – 2011]

Dante (2009, p. 124) apresenta uma aplicação do logaritmo decimal na Química para a obtenção do pH de uma solução.

Antes de tratarmos da proposta de Dante (2009, p. 124), vamos apresentar alguns conceitos sobre o potencial hidrogeniônico.

Para Reis (2014), a matéria possui propriedades químicas uma delas são os grupos: ácidos, básicos ou neutros.

Mortimer e Machado (2013) afirmam que a água destilada (água pura) é um exemplo de substância neutra, onde $[H^+]$ (lê-se concentração de íons H^+) é igual a $[OH^-]$.

Quando uma substância ou solução apresenta $[H^+] > [OH^-]$ temos uma característica ácida.

Quando uma substância ou solução apresenta $[H^+] < [OH^-]$ temos uma característica básica.

Em 1909, S. Sörensen (1868 – 1939), cientista dinamarquês, propôs uma escala logarítmica para definir se uma substância é ácida, básica ou neutra. Os valores numéricos desta escala compreendem o intervalo: [0,14]. A equação matemática que representa o pH é:

$$pH = -\log[H^+]$$

O pH = 7 indica que a substância é neutra. Valores mais próximos de 0 indicam que a substância é ácida e valores mais próximos de 14 indicam que a substância é básica.

Abaixo apresentaremos a escala de pH:

Tabela 3: escala de pH

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	A	A	A	A	A	A	N	B	B	B	B	B	B	B

(Fonte: Autor)

Observação: esta escala não é apropriada para soluções cuja concentração ácida é muito forte, pois o pH seria negativo, tampouco concentração básicas muito fortes com PH acima de 14.

Voltamos agora para a proposta de Dante (2009): Dante, apresenta um pequeno parágrafo onde escreve sobre o pH onde diz apenas que o pH é um valor numérico em Química. Dante define pH, como o inverso do logaritmo decimal de $[H^+]$.

Apresenta o seguinte exemplo: “O cérebro humano contém um líquido cuja concentração de H^+*é* $(4{,}8.10^{-8})$ $^{mol}/_{l}$ (em média).” Qual o pH deste líquido?

$$pH = \log \frac{1}{4{,}8\,.10^{-8}}$$

Neste caso aplicamos as propriedades: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ e $\log_a b^m = m \log_a b$, obtemos o resultado aproximado pH = 7,3.

A intenção do autor neste caso foi apresentar uma situação de “cálculo de logaritmos”, pois é o título do tópico onde se encontra este exemplo.

Com mais informações a respeito do pH e explorando outros exemplos onde temos o valor do pH, e o objetivo é encontrar o valor da concentração de $H^+,$ o autor atingiria o nível de “proposta de integração”.

Abaixo apresentaremos um exemplo onde temos o valor do pH de uma substância ou solução e com esta informação encontramos $[H^+]$:

“No supermercado João viu uma nova marca de água mineral: Água Mineral Fonte Alta. No rótulo ele observou as informações sobre o pH da água a 25º C que é de 6,0. Qual a é a $[H^+]$ na condição especificada no rótulo?”

Resolução:

$$pH = -\log[H^+]$$

$$6{,}0 = -\log[H^+]\ .(-1)$$

$$-6{,}0 = \log[H^+]$$

$$10^{-6{,}0} = 10^{\log[H^+]}$$

Utilizando $a^{\log_a b} = b$, temos:

$$[H^+] = 10^{-6}$$

$$[H^+] = \frac{1}{10^6}$$

$$[H^+] = 0{,}000001\ {}^{mol}/_{L}$$

4.1.3. O livro didático: **Manual Compacto de Matemática** – Ensino Médio [Em Conformidade com os PCNs e PCNEM]

É um livro que faz parte de uma coleção de outros “manuais”. Bosquilha et al (2010, p. 96) abordada o pH. A autora traz a seção “saiba mais” no capítulo que trata de funções logarítmicas.

O texto apresenta aspectos históricos e a equação para a obtenção do pH. No texto é apresentado também uma escala de pH com uma lista de substâncias:

Tabela 4: pH de diversas substâncias

Substância	pH
	0
Ácido de bateria de automóvel	1
Suco de limão / Suco gástrico	2
Vinagre / Suco de laranja	3
Suco de tomate	4
Café / Chuva / Vinho	5
Leite / Saliva	6
Água pura / Sangue	7
Xampu / Água do mar	8
Bicarbonato de sódio	9
Leite de magnésio / sabão líquido	10
Produto de limpeza com amônia	11
Barrilha	12
Limpa forno	13
	14

(BOSQUILHA et al, p. 205, 2010)

Podemos concluir que a proposta apresentada é uma oportunidade de integração com a Química. O nível multidisciplinar seria atingido com a participação de um especialista de Química explicando com mais detalhes o que é o pH.

4.2. Proposta de trabalho pedagógico interdisciplinar envolvendo logaritmos.

Nossa primeira preocupação nesta proposta foi a de encontrar um tema que se encaixasse em um trabalho interdisciplinar e que envolvessem os logaritmos. Machado (2005) destaca a importância da proximidade com a realidade do aluno. Com base neste aspecto escolhemos o tema: Água, Ciência e Saúde.

A nossa primeira ideia foi a primordial em um processo interdisciplinar: o diálogo. Mas como promover uma reunião com um debate intenso com os professores das disciplinas? Estamos próximos aos especialistas, porém as obrigações acadêmicas de todos os envolvidos tornam quase impossível este encontro.

Como estamos propondo e não de fato construindo um projeto interdisciplinar, resolvemos perguntar por e-mail a um professor de cada disciplina da nossa proposta, pertencentes ao corpo docente do IFSP- Campus São Paulo, como eles poderiam contribuir com este tema. Não obtemos resposta até a última versão deste texto. Constatamos, portanto, na prática umas das dificuldades que Fortunato (2013) aponta em um trabalho interdisciplinar, que é a troca de informações entre professores a respeito de integrações entre disciplinas.

Partimos então para uma segunda opção: verificar nos livros didáticos do Ensino Médio de outras disciplinas as possíveis conexões com os logaritmos e com o tema da nossa proposta interdisciplinar e, a partir dessas informações, construir a nossa proposta interdisciplinar.

4.2.1. Os principais tópicos deste projeto interdisciplinar

Prado (1999) lista os passos para um projeto interdisciplinar. Abaixo citaremos alguns desses passos relacionando-os com o tema de nossa proposta interdisciplinar:

(1) Definição do tema: Água, Ciência e Saúde.

(2) Justificativa: é um tema amplo e próximo à realidade do aluno.

(3) Objetivos:

“Do ponto de vista do professor de Matemática”: mostrar para os alunos do primeiro ano do Ensino Médio como o conteúdo de logaritmos relaciona-se com as outras disciplinas, com seu dia a dia e com a saúde humana.

“Do ponto de vista de todos os especialistas”: oferecer aos alunos uma proposta com integração de conhecimentos e, com isso, possibilitar uma compreensão mais ampla dos conteúdos envolvidos e do tema de nossa proposta.

(4) Disciplinas envolvidas: na proposta original as disciplinas seriam: Matemática, Química, Biologia, Física e Português. Porém, acreditamos que o tema pode envolver outras disciplinas.

(5) Como cada professor (no caso como cada disciplina) pode contribuir:

Pensando na ideia original com as disciplinas de Matemática, Química, Biologia, Física e Português. Considerando também uma “flexibilização do currículo”, ou seja, não sendo obrigatórias apenas integrações de disciplinas em um determinado ano, e lembrando que vamos utilizar materiais didáticos do Ensino Médio, a participação das disciplinas pode acontecer da seguinte forma:

(5.1) Química, Física e Biologia: a água é um tema presente nestas disciplinas em todo o Ensino Médio, consequentemente em todos os materiais didáticos respectivos. Na disciplina de Biologia a ênfase será na questão da saúde.

(5.2) Matemática: com cálculo do pH da água e outros líquidos, o cálculo da $[H^+]$ da água e outros líquidos. Ajudar a responder questões integradas sobre Física, Biologia e Química. Por exemplo: O pH interfere na proliferação de bactérias na água? A temperatura da água interfere no pH da água? O que caracteriza uma água boa para o consumo? *Água versus outros líquidos:* o que é melhor para a saúde?

(5.3) Português: esta disciplina seria importante na produção textual individual dos alunos a respeito do tema.

(6) Recursos necessários:

Para o professor de Matemática e Química:

Fitas de pH ou líquidos para caracterização de pH de soluções; espaço adequado para os experimentos.

Observação (1): nesta proposta o pH seria o conteúdo que conectaria a Matemática às disciplinas de Química, Física e Biologia.

Observação (2): Para Prado (1999) em um projeto interdisciplinar os professores envolvidos devem avaliar os recursos disponíveis.

4.2.2. Os materiais didáticos

Queremos chegar a um nível de proposta de trabalho pedagógico interdisciplinar, que ofereça um caminho para a troca de ideias entre os professores. Para Fazenda (2014, p. 38) o debate intenso entre especialistas que promove um aprofundamento sobre conteúdos que serão aplicados em um determinado tema trabalhado pedagogicamente, é o que caracteriza a interdisciplinaridade. O objetivo deste debate é derrubar “os muros” entre as disciplinas e aplicar o resultado disso em atividades pedagógicas.

Um dos objetivos desta proposta é envolver o conteúdo de logaritmos neste projeto. Por isso, buscaremos estas conexões nos livros didáticos. Porém, como se trata de um tema amplo a Matemática poderia participar com diversos outros conteúdos

Abaixo listaremos algumas possibilidades de integrações entre as disciplinas de Química, Matemática, Física e Biologia:

Livro didático: **Química 1 Ensino Médio,** Reis (2014) [PNLD: 2015 – 2016 – 2017]:

Reis (2014, p. 47) apresenta um experimento de indicação de ácido/base. Trata-se do preparo de um líquido a base de repolho roxo.

Receita:

Ingredientes:

½ repolho roxo, água, panela, garrafa PET transparente (250 ml) com tampa, jarra, peneira, conta gotas, 5 copos de vidro e 5 etiquetas.

Preparo:

Ferver pedaços de repolho roxo em uma panela até que a água fique pela metade da quantidade inicial. Após esta etapa, esperar o líquido esfriar com a panela tampada. Utilizar a peneira e a jarra para coar a solução. Passar a solução para a garrafa PET. O extrato de repolho roxo deve ser dividido nos copos de vidro, cada um com 20 ml. Rotular os copos utilizando as etiquetas com os seguintes líquidos:

- Vinagre branco
- Água da chuva
- Solução de bicarbonato de sódio
- Refrigerante de limão
- Desinfetante com amoníaco

Usar o conta gotas com esses respectivos líquidos (um de cada vez) adicionando seu conteúdo aos copos de respectivas etiquetas. Observação: lavar muito bem o conta gotas a cada líquido adicionado aos copos.

A cor da solução deverá mudar conforme as características:

- Ácido forte: vermelho
- Ácido moderado: rosa
- Ácido fraco: roxo
- Neutro: azul
- Base fraca: verde
- Base forte: verde-amarelo

Utilizando estes recipientes com esses líquidos, os alunos poderiam utilizar fitas de pH. Os alunos (que estariam em um lugar apropriado para isso) aferiam o pH destas substâncias. Com o resultado do pH, os alunos poderiam calcular as concentrações de H^+, utilizando as propriedades dos logaritmos. O professor de Química explicaria o significado destas concentrações de H^+ e o professor de Matemática mostraria as implicações com os logaritmos. Neste ponto o nível integrado seria atingido. (Química e Matemática)

Exemplo:

Verificando a tabela "substâncias e pH" apresentada por Bosquilha et al (2010) observamos que o pH do suco de limão é 2 e o do suco de laranja é 3. Como podemos responder a seguinte questão:

O quanto o suco de limão é mais ácido que o suco da laranja?

Tabela 5: exercício pH

Suco de limão	Suco de laranja
$pH = -\log[H^+]$	$pH = -\log[H^+]$
$2 = -\log[H^+].(-1)$	$3 = -\log[H^+].(-1)$
$-2 = \log[H^+]$	$-3 = \log[H^+]$
$10^{-2} = 10^{\log[H^+]}$	$10^{-3} = 10^{\log[H^+]}$
$[H^+] = 10^{-2}$	$[H^+] = 10^{-3}$
$[H^+] = 0{,}01\ {}^{mol}/_{L}$	$[H^+] = 0{,}001\ {}^{mol}/_{L}$

(Fonte: Autor)

Podemos concluir que o suco de limão é 10 vezes mais ácido que o suco de laranja.

Livro didático: **Química 3 – Ensino Médio,** Mortimer e Machado (2013) [PNLD: 2012 – 2013 – 2014], traz um capítulo inteiro tratando da água. É neste capítulo que é inserido o conteúdo pH.

Alguns assuntos apresentados:

- “As águas de nossa cidade”
- “Parâmetros de qualidade da água”
- “O pH e a qualidade da água”
- “Medindo o pH de uma amostra de água a partir de uma escala de pH”

Estes tópicos relacionam-se com o tema de nossa proposta interdisciplinar.

Livro didático: **Biologia volume 1 Ensino Médio (manual do professor)**, Mendonça (2016, p. 59) [Divulgação PNLD].

No capítulo 3 deste material, a autora começa a tratar do tema “Ciclo da água”. O texto traz diversas informações a respeito da água, por exemplo: distribuição de água no planeta, informações sobre a quantidade de água doce no Brasil (13,7% do volume do planeta). Ao tratar do assunto “chuva ácida” a autora faz referência ao pH. Mendonça (2016) caracteriza a chuva ácida com o pH entre 4 e 5.

Em relação à disciplina de **Física:**

O especialista de Física poderia participar com questões relacionadas à temperatura da água e outras substâncias. Investigar o comportamento do pH de uma substância em uma escala de temperatura em graus Celsius. O professor de Física poderia abordar os assuntos ligados a termometria e a termodinâmica e os relacionar com o pH das substâncias envolvidas com a ajuda do professor de Química e Matemática.

4.2.3. O Nível interdisciplinar

Antes de seguirmos com a proposta, informamos que este trabalho originalmente foi pensado para turmas do 1º ano do Ensino Médio, é nesta série que pelo menos “teoricamente” deveria ser ensinado os logaritmos, porém, pode ser aplica em turmas do terceiro ano sem prejuízo algum. A única diferença é que no 1º ano do Ensino Médio o professor (a) de Matemática estará introduzindo um assunto novo e no 3º ano (serie em que geralmente é ensinado o conteúdo de pH) o professor (a) de Matemática estará dando uma revisão do assunto logaritmo. Essas observações levando em conta um cenário ideal, mas sabemos que diversos fatores podem alterar os planejamentos.

O que propomos?

Os professores de Química e Matemática trabalhando em nível integrado abordariam os conteúdos pH e logaritmos, conforme sugerido, utilizando as abordagens dos livros didáticos acima citados. As investigações seguiriam agora para as disciplinas de Biologia e Física. Algumas possibilidades abaixo:

O professor de Física investigaria junto aos alunos (em local apropriado com o uso de termômetros), questões a respeito da temperatura de uma substância e o pH. O que acontece com o pH da água da chuva se fervemos esta água? (Por exemplo).

O professor de Biologia poderia propor a seguinte questão: Qual líquido tem o melhor pH para o consumo humano? Refrigerante, refrigerante “zero açúcar”, água da torneira ou água mineral?

O professor (a) de Biologia poderia explicar o que acontece no organismo ao ingerimos líquidos muito ácidos e quais são os impactos na saúde.

Todos os especialistas poderiam propor que os alunos pesquisassem sobre estes questionamentos em fontes alternativas aos livros didáticos. Como defende Fazenda (2014), a prática interdisciplinar incentiva a formação de pesquisadores [...]. Desta forma podemos concluir que os alunos também poderiam propor e responder outros questionamentos.

Relacionando todos os conhecimentos os alunos (individualmente) com a orientação do professor de português elaborariam um texto, (com o gênero e a linguagem apropriada) no qual eles apresentariam os conhecimentos estudados e, por meio dessas informações, justificariam, qual ou quais líquidos são bons ou não para a saúde humana. Neste ponto atingiríamos o nível interdisciplinar.

4.2.4. Avaliação

Prado (1999) classifica a avaliação como uma das etapas de um projeto interdisciplinar. Os textos elaborados individualmente por todos os alunos podem fornecer um diagnóstico desta proposta.

Vincenza (2018) afirma que ao avaliar um projeto interdisciplinar devemos verificar se os objetivos deste trabalho foram atingidos. A avaliação também serve para aprimorarmos o projeto para os próximos anos. Devemos quantificar os nossos resultados, analisar o “antes do projeto e depois do projeto”.

Para o projeto interdisciplinar Água, Ciência e Saúde, sugerirmos que cada professor apresente os seus diagnósticos referentes aos seus objetivos e por meio do diálogo com seus pares, verifiquem se de fato foi oferecida aos alunos uma proposta que integra conteúdos e se os alunos enxergam as conexões as relações com o seu dia a dia. Para análise de como os alunos enxergam as conexões e as relações com o tema, a apresentação de seminários (em grupos) é uma ferramenta que pode ser útil. Outra sugestão é que cada grupo tenha um professor orientador (este participante do projeto) que no contato com o grupo, conduzindo os trabalhos dos seminários, seja observado o desenvolvimento dos objetivos.

Uma etapa importante do projeto é a integração da Matemática com a Química, pois essa conexão é a base da integração com as outras disciplinas. Em um determinado ponto do desenvolvimento do projeto, será necessário que os professores de Matemática e Química avaliem a “fluência” dos alunos nas operações envolvendo logaritmos e pH. Uma lista de atividades elaboradas com base nos materiais sugeridos pode ser um bom caminho para essa avaliação. Nesta lista devem conter os exercícios do tipo: “calcule o pH” e “calcule a concentração de H^+”, já “adaptadas” com integrações com a Física e

Biologia. Algumas dessas atividades podem (uma vez solucionadas) fornecer informações a respeito da saúde serem usadas nos seminários dos alunos. Nesta lista, por exemplo, poderia conter a seguinte investigação: “pesquise na Internet o pH de um refrigerante e calcule a $[H^+]$ desta bebida. Depois responda: comparando com o pH da água do bebedouro da escola, quanto o refrigerante (em questão) é mais ácido que a água do bebedouro? É saudável o consumo diário de refrigerantes?”

Se os alunos conectam os conteúdos das disciplinas e resolvem questões integradas, o nível multidisciplinar é atingido satisfatoriamente. Se os alunos além de desempenharem atividades integradas, também associam os saberes com vida cotidiana e ampliam os seus conhecimentos a respeito de um tema, o nível interdisciplinar é atingido satisfatoriamente.

5. CONCLUSÃO

Acreditamos que o trabalho pedagógico interdisciplinar traz mais significado para a educação escolar e opõem-se ao modelo "compartimentalizado" de ensino que não oferece espaço para o diálogo e, consequentemente, para a integração de conteúdos. A cooperação mútua entre especialistas, um ampliando o saber do outro, pesquisando e compartilhando novos conhecimentos é o que possibilita bons resultados da prática interdisciplinar. Porém, existem muitas dificuldades para desenvolver um projeto interdisciplinar ou mesmo para o trabalho no nível multidisciplinar. A carga de trabalho dos professores, a falta de tempo e aspectos culturais de ensino, são alguns exemplos de dificuldades

Sobre o conteúdo de logaritmos, podemos afirmar que é uma importante ferramenta de integração e, por isso, pode ser trabalhado ao menos neste nível. O contexto histórico, a construção e utilização de tábuas de logaritmos podem ser instrumentos úteis para que os alunos enxerguem este conteúdo com mais significado, quando este ainda estiver sendo trabalhado disciplinarmente.

Nos livros didáticos apresentados nesta proposta de projeto interdisciplinar, foi possível encontrar conexões entre conteúdos das disciplinas, alinhados com o nosso tema e envolvendo o conteúdo de logaritmos. Por meio destas conexões, construímos algumas propostas de atividades com integração de disciplinas. O próximo passo foi trazer essas conexões para o tema de nosso projeto. Assim temos uma resposta positiva para a "dúvida" desta monografia.

Podemos verificar na construção desta proposta de projeto interdisciplinar o quanto é importante a troca de ideias entre especialista. Neste texto apresentamos uma proposta de tema, um caminho para a integração e para interdisciplinaridade, será possível sua aplicação se todos os envolvidos (professores, alunos, coordenação e direção) estiverem engajados nesta atividade.

Uma possibilidade de continuidade desta pesquisa pode ser o diálogo entre os professores acontecendo de fato e aplicação desta proposta. Em seguida, análise dos resultados. Podemos ter diferentes grupos de especialistas discutindo em torno deste tema (Água, Ciência e Saúde), logo podemos ter diferentes propostas e aplicações e resultados diferentes. Esta é uma conclusão que já podemos adiantar, uma vez que a interdisciplinaridade é baseada no diálogo e esse diálogo não poderá ser o mesmo.

REFRÊNCIAS

AIUB, Mônica. **Interdisciplinaridade: origem à atualidade**. Artigo. Disponível em: http://institutointersecao.com.br/artigos/Monica/interdisciplinaridade Acessado em 08/10/2018 às 9 horas e 10 minutos.

ALVES, Adriana. **Interdisciplinaridade e Matemática *in* O que é Interdisciplinaridade**. Editora: Cortez - 1ª Edição São Paulo, 2008.

BARTHES, R. **O Rumor da Língua.** São Paulo: Brasiliense, 1988.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3º edição. Editora: Edgard Blucher São Paulo, 2010.

BOSQUINHA, Alessandra – **Manual compacto de Matemática do Ensino Médio** – Editora: Rideel 1ª Edição – São Paulo, 2010.

BRASIL ESCOLA – **Função logarítmica** – Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcao-logaritmica.htm acessado em 05/04/2019.

Dante, Roberto Luiz - – Matemática Volume Único – 1ª edição. Editora: Ática – São Paulo, 2009.

DELIZOICOV, Demétrio e ZANETIC, João, A proposta interdisciplinar e o seu impacto no ensino municipal de 1º grua em: Ousadia no Diálogo (PONTUSCHKA, Nídia N.) Ed. Loyola 4ª Ed. São Paulo, 2002.

E-ESCOLA. ***Artigo****. Disponível em:* http://e-escola.tecnico.ulisboa.pt/topico.asp?id=233&ordem=2 Acessado em 25/10/2018 às 14 h e 50 min.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 4ª reimpressão. Editora: Unicamp Campinas, 2008.

FAZENDA, Catarina Arantes Ivani. **Didática e Interdisciplinaridade**. 13ª Edição Editora Papirus. Campinas, 2008.

FAZENDA, Catarina Arantes Ivani. **Interdisciplinaridade um projeto em parceria**. 7ª edição Editora Loyola. 2014.

Fortunato, Raquel ET. AL, **Interdisciplinaridade nas escolas de educação básica: da retórica efetiva ação pedagógica.** Revista educação Ideal Vol. 8 janeiro a junho 2013. Disponível em: https://www.ideau.com.br/getulio/restrito/upload/revistasartigos/28_1.pdf acesso: 22/02/2019.

FUVEST – Prova da primeira fase questão 31 – 2013 - Disponível em: https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/downloads/universidade-sao-paulo.htm

KILLIAN, Kleber – artigo: **A construção da primeira tábua de logaritmos decimais por Briggs**. Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2011/08/construcao-da-primeira-tabua-de.html acessado em: 06/04/2019.

LEITÃO, A. Fúlvio. **LOGARITMOS: sua história, interdisciplinaridade, contextualização e sugestões didáticas para o seu ensino**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica/RJ, 2014.

MACHADO, J. Nilson. **Interdisciplinaridade e Contextualização**. Capitulo 4 de: Fundamentação Teórica e Miológica do ENEM, INEP, 2005.

MAOR, Eli. ***e*: A História de um Número**. 4ª edição. Editora Record. Rio de Janeiro, 2008.

MENDONÇA, L. Viviam – **Biologia 1 Ensino Médio**– 3ª edição. Editora: AJS. São Paulo, 2016.

MORTIMER, Fleury Eduardo e MACHADO, Horta Andréia – Química 3, Ensino Médio – 1ª edição. Editora: Scipione. São Paulo, 2013.

MUNDO, EDUCAÇÃO. **Artigo**. Disponível em: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/aplicacao-dos-logaritmos.htm Acessado em 25/10/2018 às 15 h e 35 min.

NOÉ, Marcos. ***Interdisciplinaridade no ensino da Matemática****. Disponível em:* https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/interdisciplinaridade-no-ensino-matematica.htm. Acessado em 01/10/2018 *às 11 horas e 10 minutos.*

NOGUEIRA, Michelle. **Primeira calculadora eletrônica**. Disponível em: https://www.estudopratico.com.br/primeira-calculadora-eletronica/ Acessado: 03/11/2018

Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: bases legais. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: Acesso em: 22/02/ 2019.

PRADO, Ricardo. Artigo: **Um "trem bão" chamado interdisciplinaridade**. Disponível em: https://pt.scribd.com/doc/23634919/exemplo-de-projeto-interdisciplinar acessado: 03/04/2019.

REIS, Martha – Química 1, Química Ensino Médio – 1ª edição. Editora: Ática. São Paulo, 2014.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO, São Paulo – Artigo – 5ª edição do Campeonato do Saber abordará costumes do estado de São Paulo. Disponível em: https://www.educacao.sp.gov.br/noticia/6a-edicao-do-campeonato-do-saber-abordara-costumes-do-estado-de-sao-paulo/ Acessado: 05/07/2019

SMOLE, Stocco Kátia e DINIZ, Ignez Maria – Matemática para compreender o mundo Ensino Médio (1) 1ª Edição, Editora: Saraiva – São Paulo, 2016.

SOARES, O. Diogo. ***Logaritmo e Função Logarítmica na Matemática escolar Brasileira****. Dissertação de Mestrado. USP São Paulo, 2017.*

SOARES, c. Evanildo. ***Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula.*** *Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do rio Grande do Norte. Natal/RN, 2011.*

STEWART, Ian – **O fantástico mundo dos números** – 1ª Ed. Editora: Zahar Rio de Janeiro, 2016.

VINCENZA, Verônica – Artigo: **Os cinco erros comuns em um projeto interdisciplinar** – Disponível em: https://blog.estantemagica.com.br/os-5-erros-mais-comuns-na-criacao-de-um-projeto-interdisciplinar/ Acessado em: 03/06/2018.