Derivação das funções de otimização

Menor risco de portfólio

$$\min_w \sigma_p^2 = \min_w w^T \Sigma w$$
$$\text{sujeito a} \quad w^T \mathbf{1} = 1$$

Para resolver esse problema, usamos o método dos multiplicadores de Lagrange. Primeiro, definimos a função Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(w, \lambda) = w^T \Sigma w + \lambda(w^T \mathbf{1} - 1)$$

Agora, realizamos as derivações parciais, montando o sistema de equações:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = 2\Sigma w + \lambda \mathbf{1} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = w^T \mathbf{1} - 1 = 0$$

Resultando em um sistema de equações lineares, representado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2\Sigma & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Menor risco para um retorno esperado

$$\min_w \sigma_p^2 = \min_w w^T \Sigma w$$
$$\text{sujeito a} \quad w^T \mathbf{1} = 1$$
$$w^T \mu = \mu_p$$

Para resolver esse problema, usamos o método dos multiplicadores de Lagrange. Primeiro, definimos a função Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(w, \lambda, \gamma) = w^T \Sigma w + \lambda(w^T \mathbf{1} - 1) + \gamma(w^T \mu - \mu_p)$$

Agora, realizamos as derivações parciais, montando o sistema de equações:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = 2\Sigma w + \lambda \mathbf{1} + \gamma \mu = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = w^T \mathbf{1} - 1 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = w^T \mu - \mu_p = 0$$

Resultando em um sistema de equações lineares, representado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2\Sigma & \mathbf{1} & \mu \\ \mathbf{1}^T & 0 & 0 \\ \mu^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \lambda \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

Maior utilidade esperada

$$\max_w U = \max_w w^T \mu - \frac{\gamma}{2} w^T \Sigma w$$
$$\text{sujeito a} \quad w^T \mathbf{1} = 1$$

Para resolver esse problema, usamos o método dos multiplicadores de Lagrange. Primeiro, definimos a função Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(w,\lambda) = w^T\mu - \frac{\gamma}{2}w^T\Sigma w + \lambda(w^T\mathbf{1} - 1)$$

Agora, realizamos as derivações parciais, montando o sistema de equações:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = \mu - \gamma\Sigma w + \lambda\mathbf{1} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = w^T\mathbf{1} - 1 = 0$$

Resultando em um sistema de equações lineares, representado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ 1 \end{bmatrix}$$

Maior Sharpe Ratio

$$\max_w SR = \max_w \frac{w^T\mu - r_f}{\sqrt{w^T\Sigma w}}$$
$$\text{sujeito a} \quad w^T\mathbf{1} = 1$$

A dificuldade desse problema se dá ao fato da função objetivo ser uma razão (não convexa).