

Unidade VIII:

Árvores 2.3.4




PUC Minas

Instituto de Ciências Exatas e Informática
Departamento de Ciência da Computação

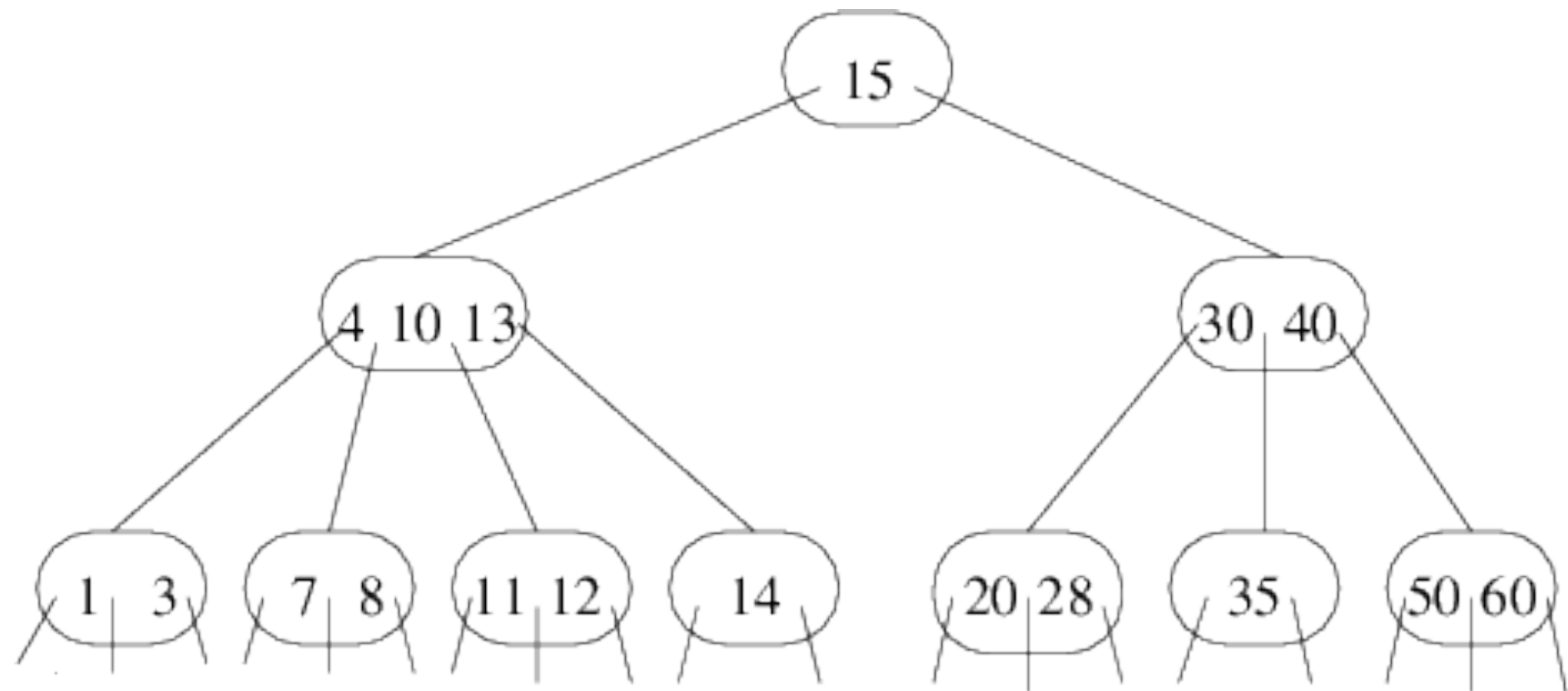
Introdução

- Introdução e Pesquisa
- Inserção com fragmentação por ascensão
- Inserção com fragmentação na descida

- **Introdução e Pesquisa** 
- Inserção com fragmentação por ascensão
- Inserção com fragmentação na descida

Introdução

- Árvore de pesquisa cujos nós são de três tipos (2-nó, 3-nó ou 4-nó) e as folhas estão situadas no mesmo nível



Propriedade das Árvore 2.3.4

- A altura $h(n)$ de uma árvore-2.3.4 ¹ contendo n itens é $\Theta(\lg(n))$
- Por questões de simplificação, este material considera que todos os elementos da árvore são distintos

¹Prova: Temos que $\log_4(n+1) \leq h(n) \leq \log_2(n+1)$. Além disso, a árvore-2.3.4 que tem menos itens é a que tem só tem 2-nós. Como todas as folhas estão no mesmo nível, o nº de itens da árvore é $2^0 + 2^1 + \dots + 2^h = 2^{h+1} - 1$. Da mesma forma, a árvore-2.3.4 que tem mais itens é a que só tem 4-nós e seu nº de itens é $4^0 + 4^1 + \dots + 4^h = 4^{h+1} - 1$. Deduz-se que, para toda árvore-2.3.4 contendo n itens e de altura $h(n)$, temos a relação $2^{h+1} - 1 \leq n \leq 4^{h+1} - 1$, de onde se tira a relação acima.

Pesquisa em Árvores 2.3.4

- “Igual”¹ ao das árvores binárias
- Funcionamento básico:
 - (1) Verificar se o elemento procurado x está no nó raiz
 - (2) Se estiver, tem-se uma **resposta positiva**
 - (3) Senão, se $x < x_1$, verificar na subárvore da esquerda
 - (4) Senão, se $x < x_2$, na do meio à esquerda
 - (5) Senão, se $x < x_3$, na do meio à direita
 - (6) Senão, na da direita
 - (7) Se a subárvore for nula, tem-se uma **resposta negativa**

¹ - “Igual” de professor, assim, não tão igual

Análise de Complexidade da Pesquisa

- Número de comparações em uma pesquisa com sucesso:
 - Melhor Caso: $\Theta(1)$
 - Pior e Caso Médio: $\Theta(\lg(n))$

Inserção

- Este material considera a inserção sempre nas folhas
- Se a folha for 2-nó ou 3-nó (1 ou 2 elementos), insere-se nela
- Senão (4-nó), fragmentamos a folha e reorganizando seus elementos. As duas técnicas para realizar essas tarefas são:
 - Inserção com fragmentação por ascensão
 - Inserção com fragmentação na descida

- Introdução e Pesquisa
- **Inserção com fragmentação por ascensão** ←
- Inserção com fragmentação na descida

Inserção com Fragmentação na Ascensão

- Apresentaremos esta técnica fazendo, como exemplo, a inserção dos números 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

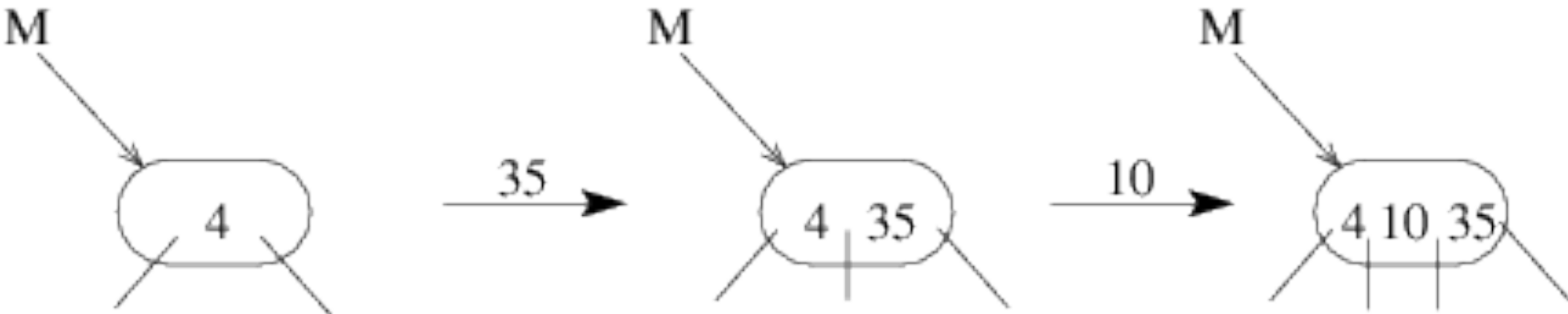
Inserção com Fragmentação na Ascensão

- Inserimos os três primeiros elementos na raiz que é uma folha
- **Exercício Resolvido (1): Faça a inserção do 4, 35 e 10**

Elementos: **4**, **35**, **10**, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

Inserção com Fragmentação na Ascensão

- Inserimos os três primeiros elementos na raiz que é uma folha



Elementos: **4**, **35**, **10**, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

Inserção com Fragmentação na Ascensão

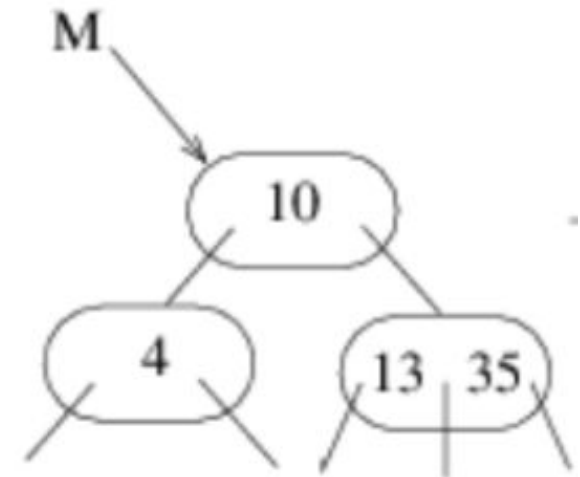
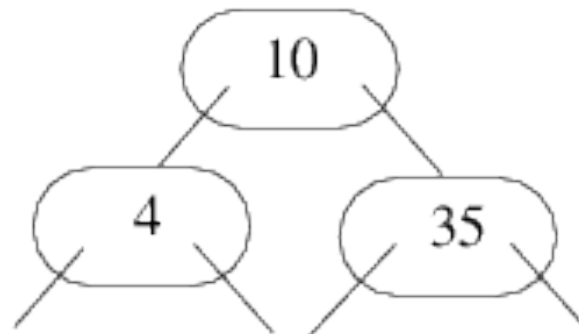
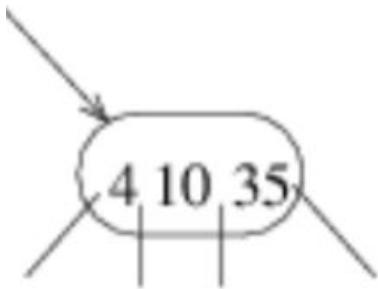
- Para o quarto elemento, fragmentamos a folha (4-nó) em três 2-nós onde o elemento do meio é pai dos demais e o novo elemento é inserido em uma das duas folhas
- **Exercício Resolvido (2): Faça a inserção do 13**



Elementos: 4, 35, 10, **13**, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

Inserção com Fragmentação na Ascensão

- Para o quarto elemento, fragmentamos a folha (4-nó) em três 2-nós onde o elemento do meio é pai dos demais e o novo elemento é inserido em uma das duas folhas

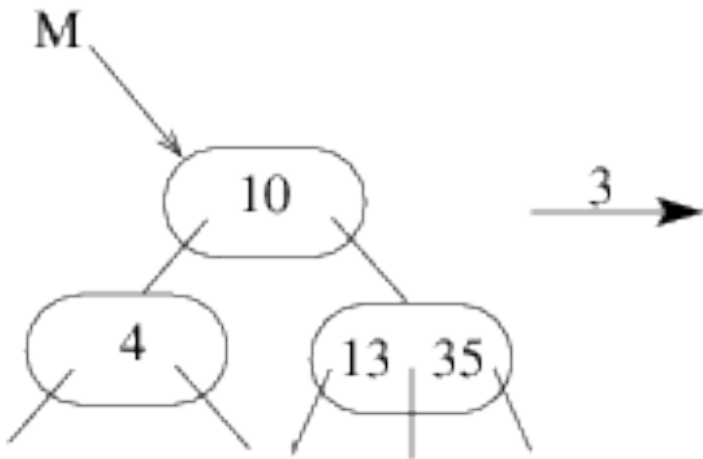


Elementos: 4, 35, 10, **13**, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

Inserção com Fragmentação na Ascensão

- Para os demais elementos, fazemos uma pesquisa e os inserimos naturalmente nas folhas do tipo 2-nó ou 3-nó

- **Exercício Resolvido (3): Faça a inserção do 3 e 30**

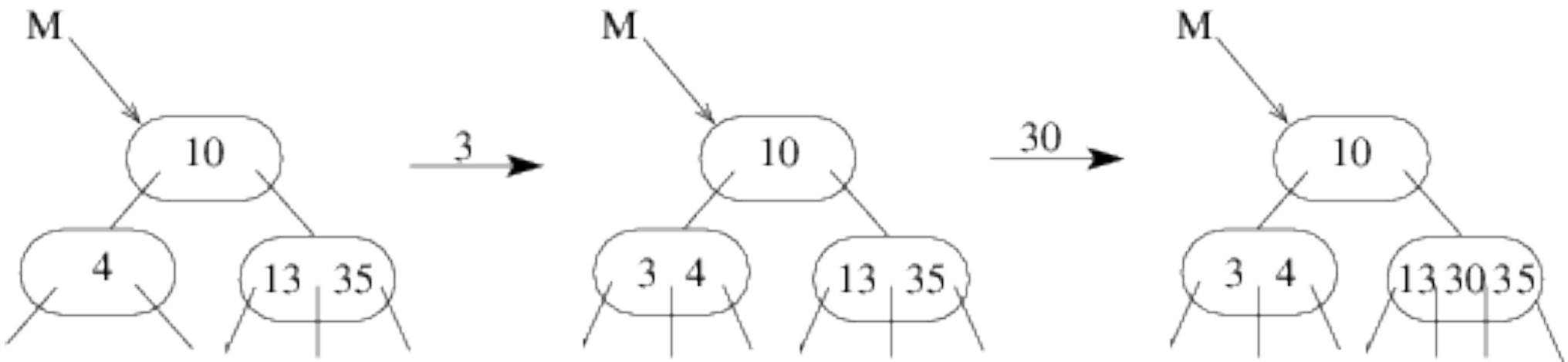


Elementos: 4, 35, 10, 13, **3**, **30**, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

Inserção com Fragmentação na Ascensão

- Para os demais elementos, fazemos uma pesquisa e os inserimos naturalmente nas folhas do tipo 2-nó ou 3-nó

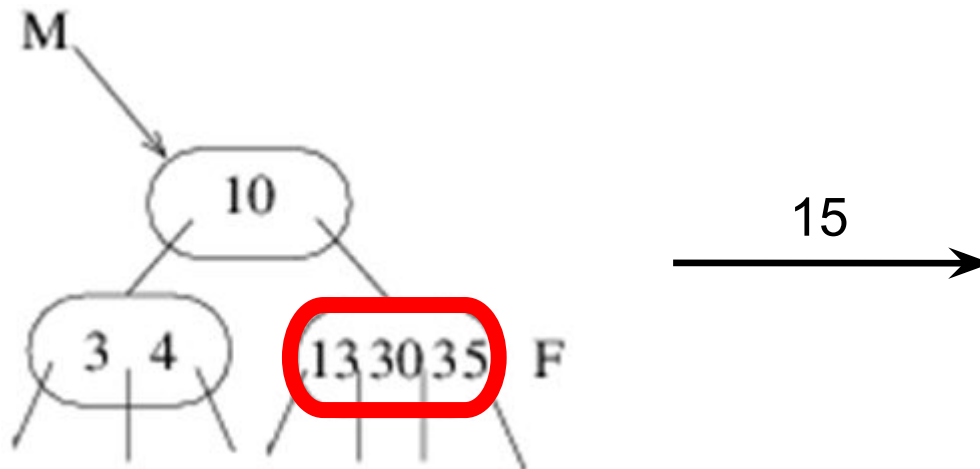
- **Exercício Resolvido (3): Faça a inserção do 3 e 30**



Elementos: 4, 35, 10, 13, **3**, **30**, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

Inserção com Fragmentação na Ascensão

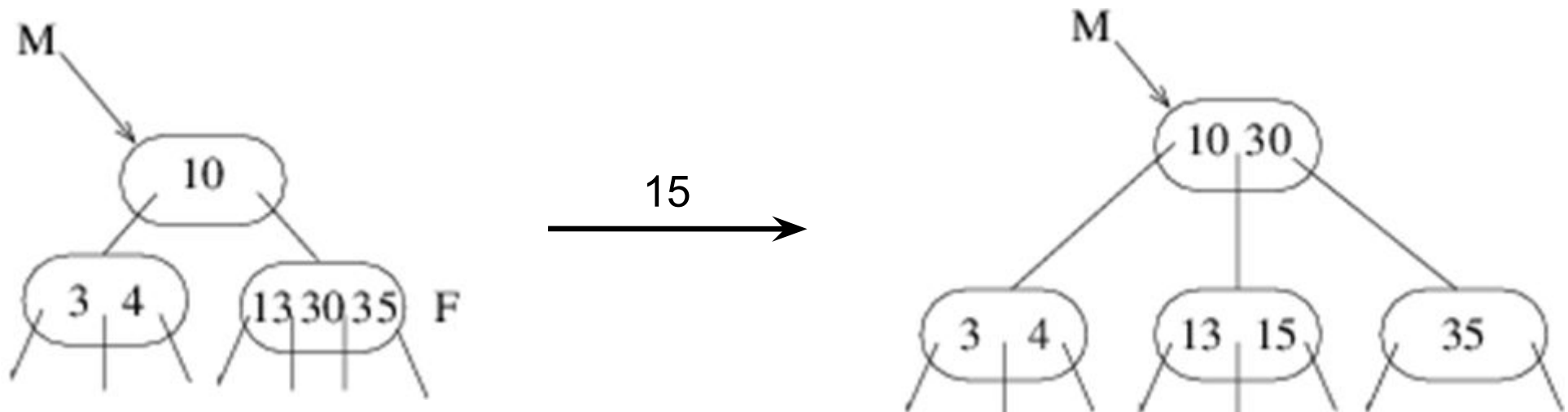
- Quando a folha é um 4-nó, fragmentamos a mesma e efetuamos a ascensão do seu elemento do meio para o pai. O novo elemento ficará em uma das duas folhas resultantes da fragmentação
- Exercício Resolvido (4): Faça a inserção do 15**



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, **15**, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

Inserção com Fragmentação na Ascensão

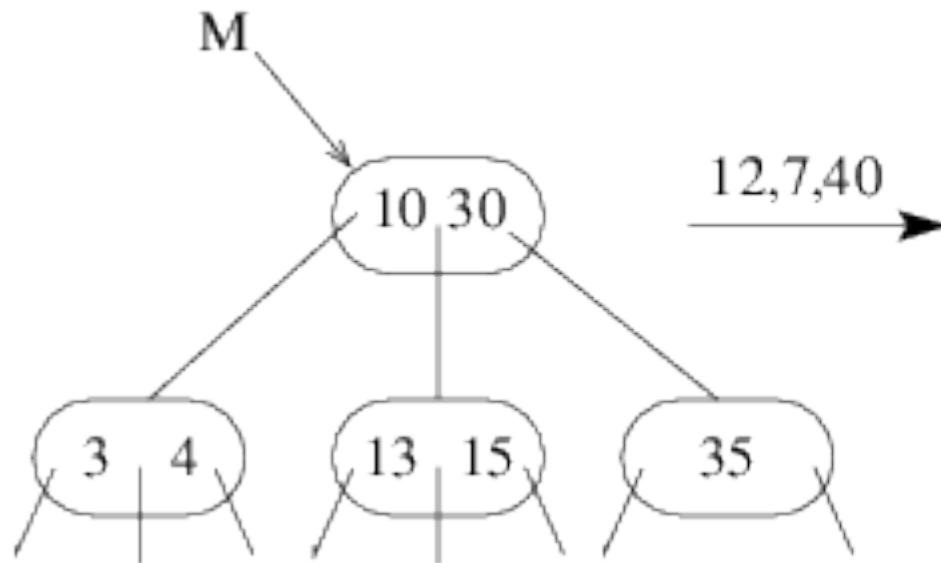
- Quando a folha é um 4-nó, fragmentamos a mesma e efetuamos a ascensão do seu elemento do meio para o pai. O novo elemento ficará em uma das duas folhas resultantes da fragmentação
- Exercício Resolvido (4): Faça a inserção do 15**



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, **15**, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

Inserção com Fragmentação na Ascensão

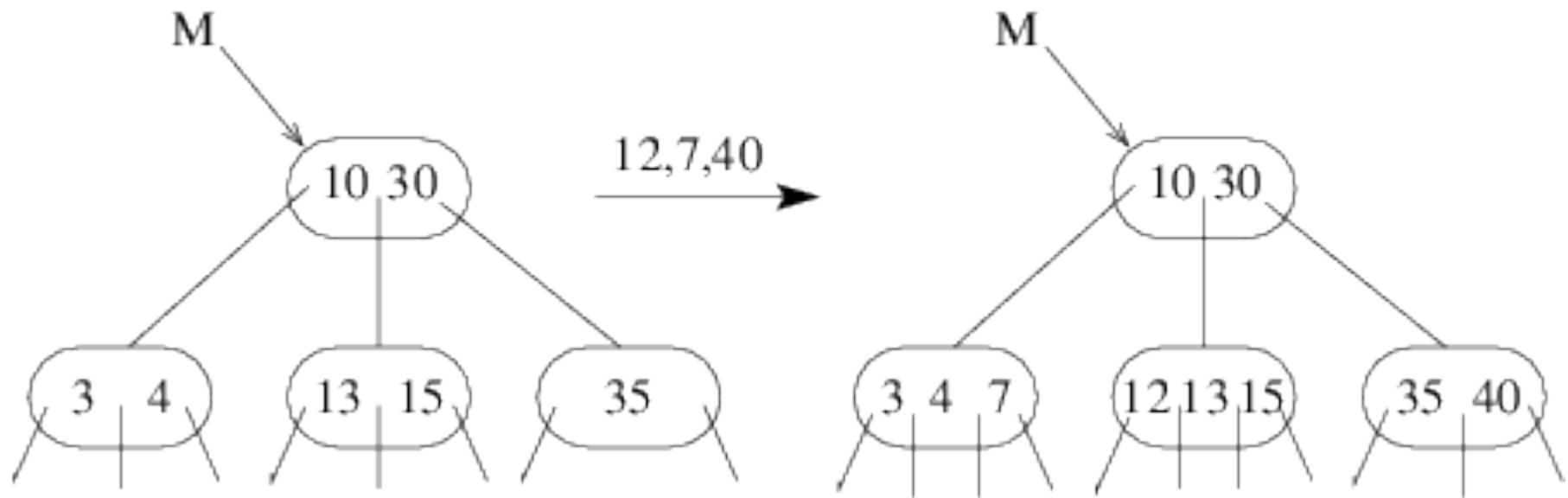
- Exercício Resolvido (5): Faça a inserção do 12, 7 e 40



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, **12**, **7**, **40**, 20, 11 e 6

Inserção com Fragmentação na Ascensão

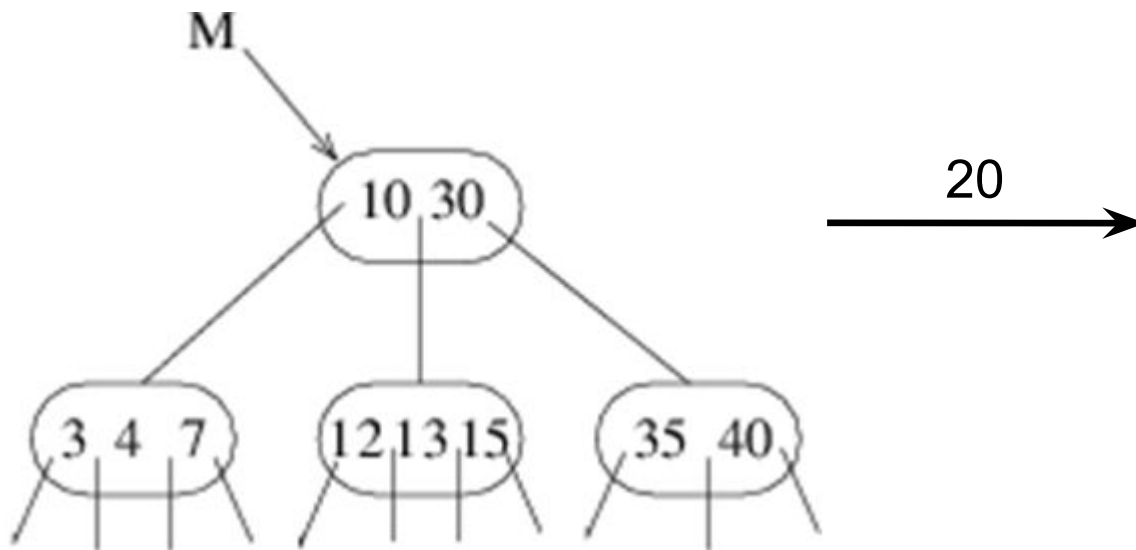
- Exercício Resolvido (5): Faça a inserção do 12, 7 e 40



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, **12**, **7**, **40**, 20, 11 e 6

Inserção com Fragmentação na Ascensão

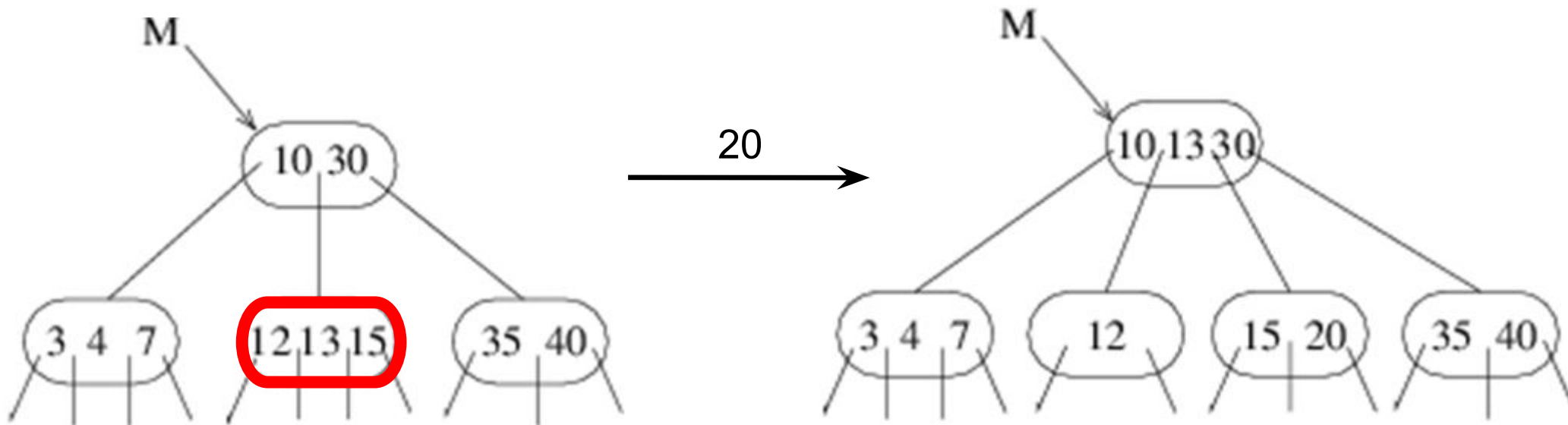
- Exercício Resolvido (6): Faça a inserção do 20



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, **20**, 11 e 6

Inserção com Fragmentação na Ascensão

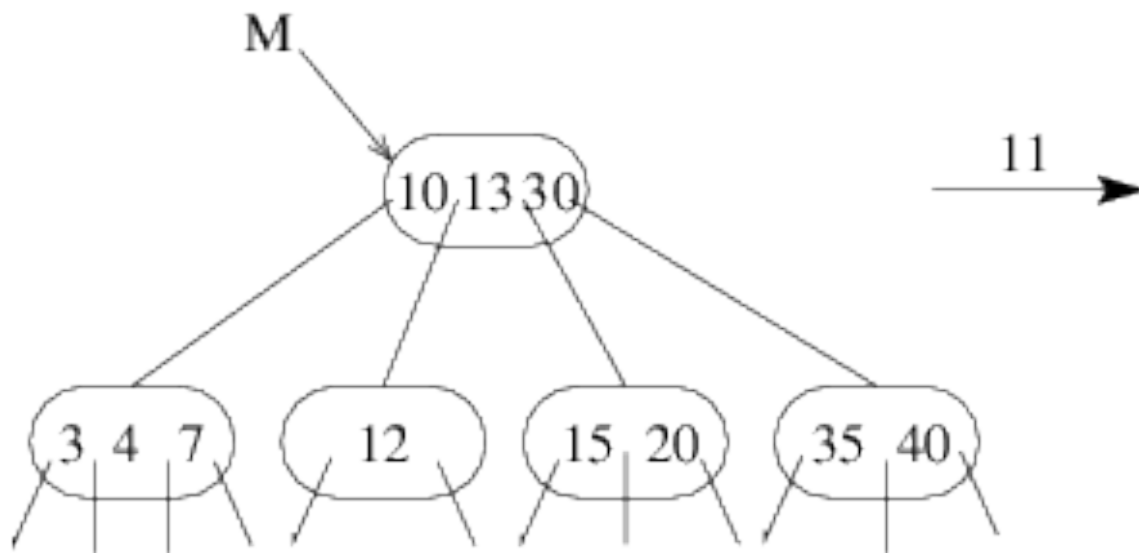
- Exercício Resolvido (6): Faça a inserção do 20.** Essa inserção causa a fragmentação do nó (12, 13, 15), criando um nó com (12), outro com o (15) e fazendo a ascensão do (13) para o nó (10, 30)



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, **20**, 11 e 6

Inserção com Fragmentação na Ascensão

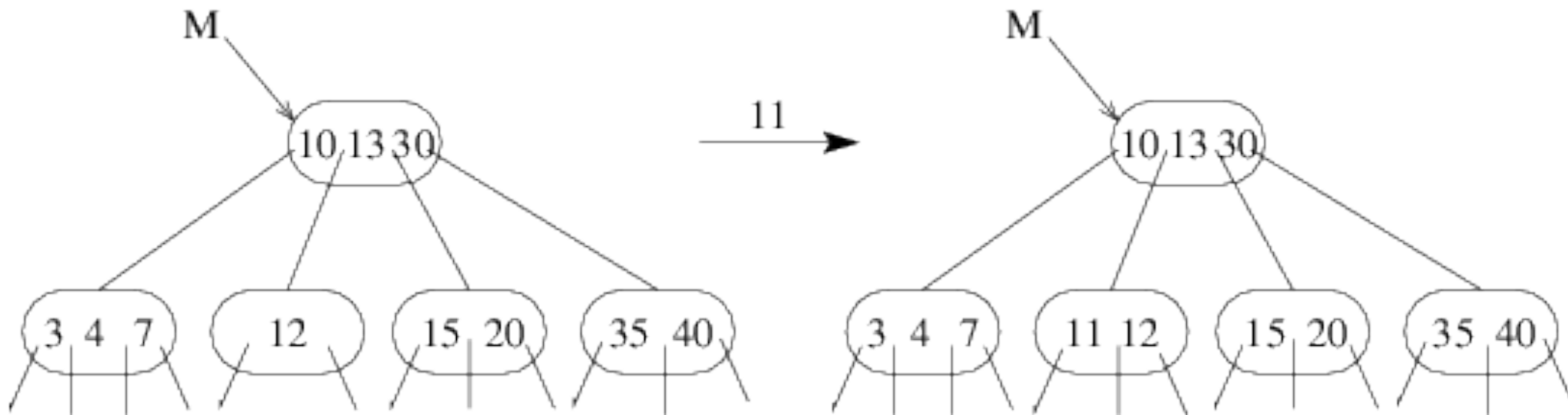
- Exercício Resolvido (7): Faça a inserção do 11



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, **11** e 6

Inserção com Fragmentação na Ascensão

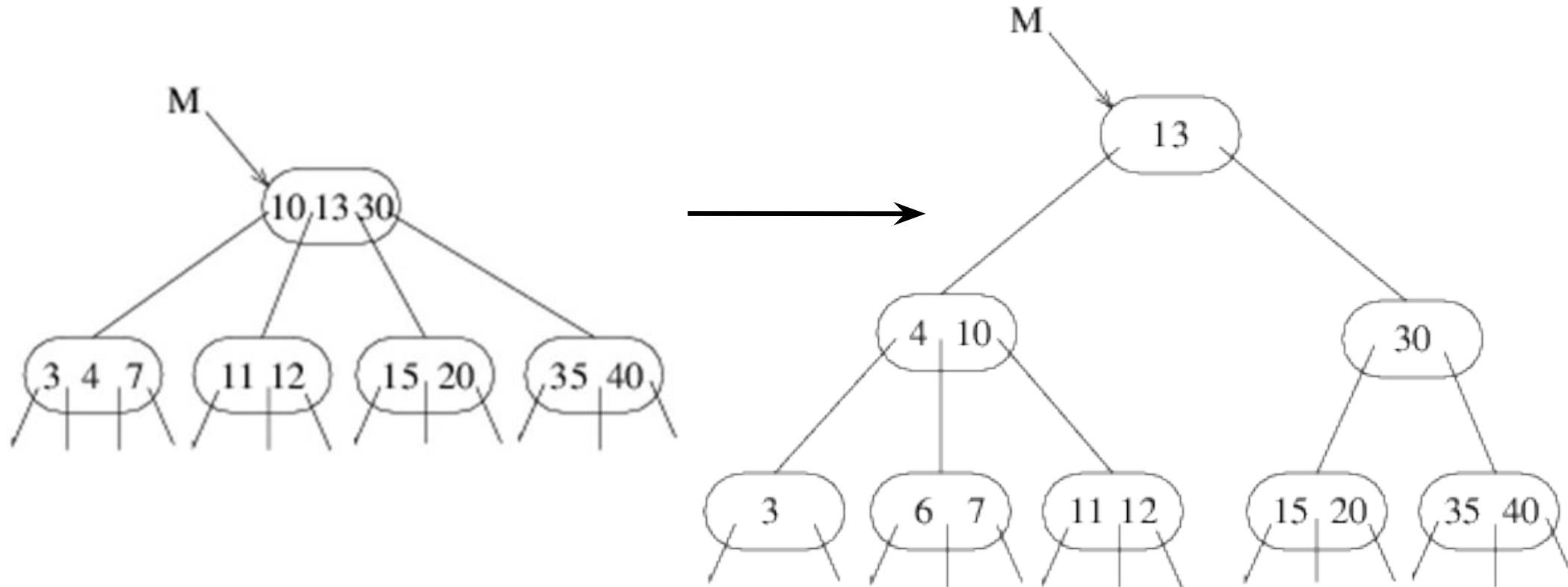
- Exercício Resolvido (8): Faça a inserção do 11



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, **11** e 6

Inserção com Fragmentação na Ascensão

- Exercício Resolvido (8): Faça a inserção do 6.** Nesse caso, fragmentamos a folha (3,4,7) cujo pai é um 4-nó e que também é fragmentado, criando uma nova raiz




Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e **6**

Cascata de Fragmentações

- Efeito colateral da fragmentação ascendente
- Acontece quando o caminho da inserção na árvore é formado somente por 4-nós, gerando fragmentações em toda a altura da árvore

Introdução

- Introdução e Pesquisa
- Inserção com fragmentação por ascensão
- **Inserção com fragmentação na descida** 

Eliminação da Cascata de Fragmentações

- Pode ser obtida proibindo que a árvore tenha dois 4-nós seguidos
- Garante que qualquer inserção causa, no máximo, uma fragmentação consecutiva
- Pode ser implementada fragmentando 4-nós na descida
 - Nesse caso, na pesquisa pela posição de inserção, chegando em um nó, primeiro, verificamos se o nó é um 4-nó. Em caso, positivo, fragmentamos o nó

Fragmentação na Descida

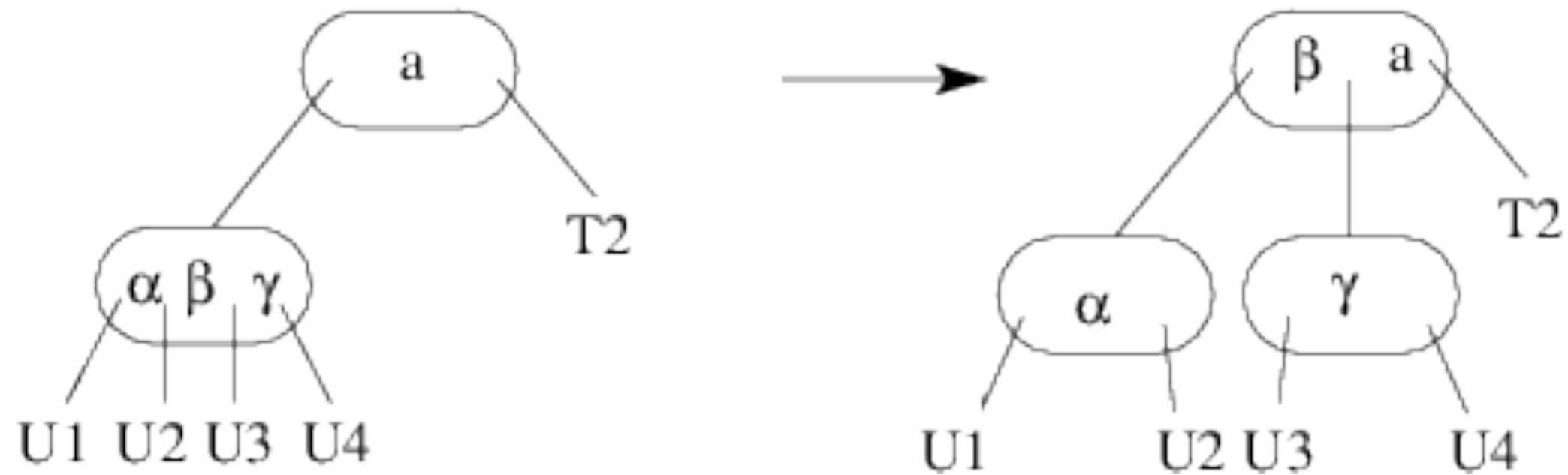
- Técnica preventiva dado que qualquer 4-nó será fragmentado antes de qualquer inserção
- Uma desvantagem são as fragmentações “inúteis”

Exercício Resolvido (9)

- O que acontece quando o pai de um nó é um: a) 2-nó; b) 3-nó; c) 4-nó?

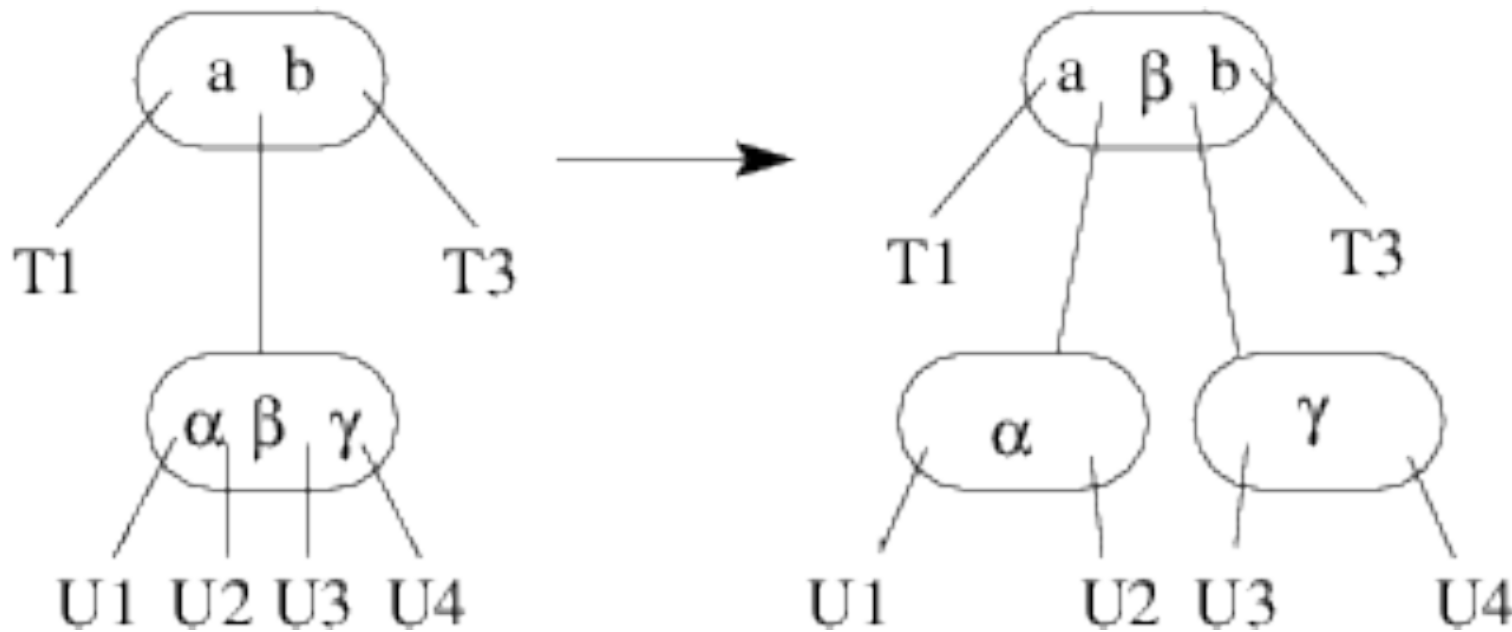
Exercício Resolvido (9)

- O que acontece quando o pai de um nó é um: a) 2-nó; b) 3-nó; c) 4-nó?
- Quando seu pai é um 2-nó, esse pai vira um 3-nó



Exercício Resolvido (9)

- O que acontece quando o pai de um nó é um: a) 2-nó; b) 3-nó; c) 4-nó?
- Quando seu pai é um 3-nó, esse pai vira um 4-nó



Exercício Resolvido (9)

- O que acontece quando o pai de um nó é um: a) 2-nó; b) 3-nó; c) 4-nó?
- O pai nunca será um 4-nó, pois, nesse caso, o pai seria anteriormente fragmentado

Inserção com Fragmentação na Descida

- Apresentaremos esta técnica fazendo, como exemplo, a inserção dos números 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

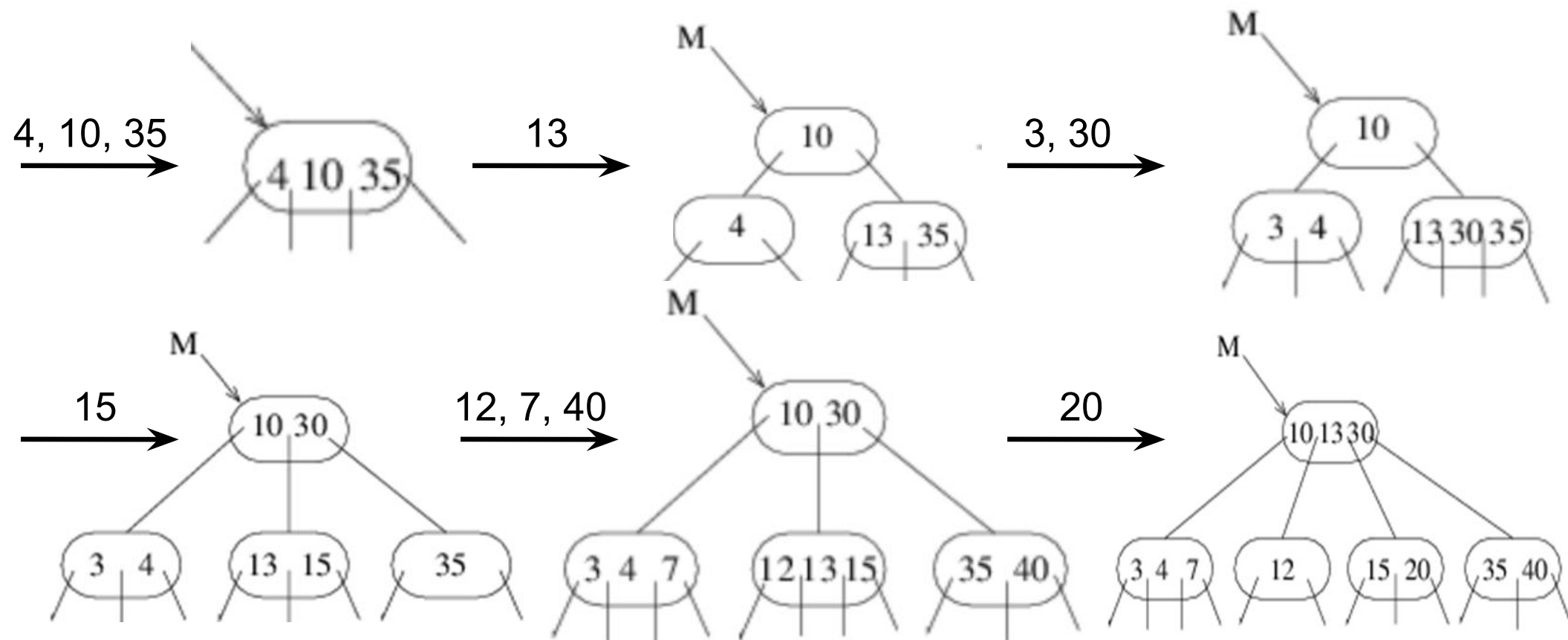
Inserção com Fragmentação na Descida

- **Exercício Resolvido (10):** Faça a inserção do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20. Veja que as duas técnicas são iguais até este ponto

Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

Inserção com Fragmentação na Descida

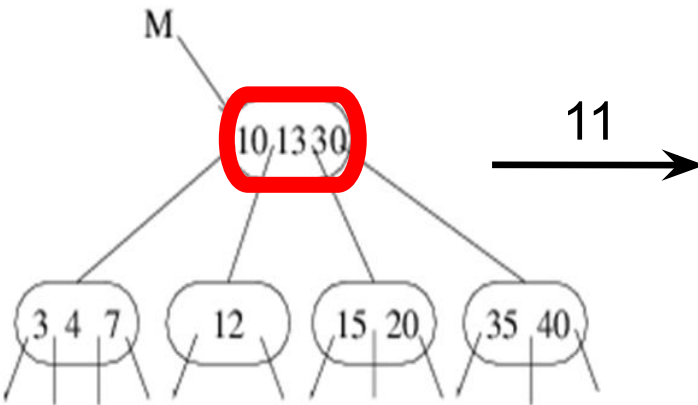
- Exercício Resolvido (10):** Faça a inserção do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20. Veja que as duas técnicas são iguais até este ponto



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

Inserção com Fragmentação na Descida

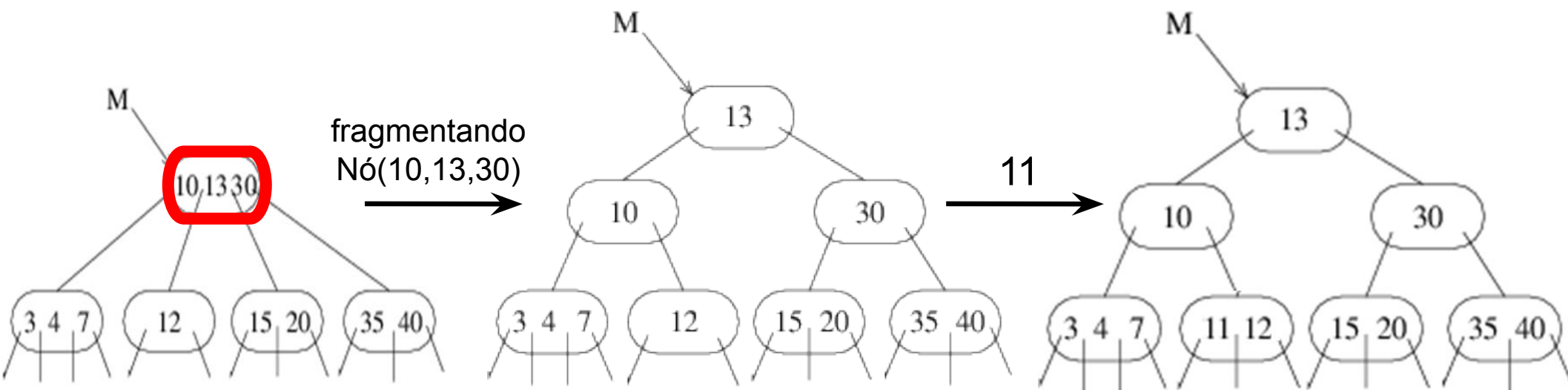
- Exercício Resolvido (11): Faça a inserção do 11



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, **11** e 6

Inserção com Fragmentação na Descida

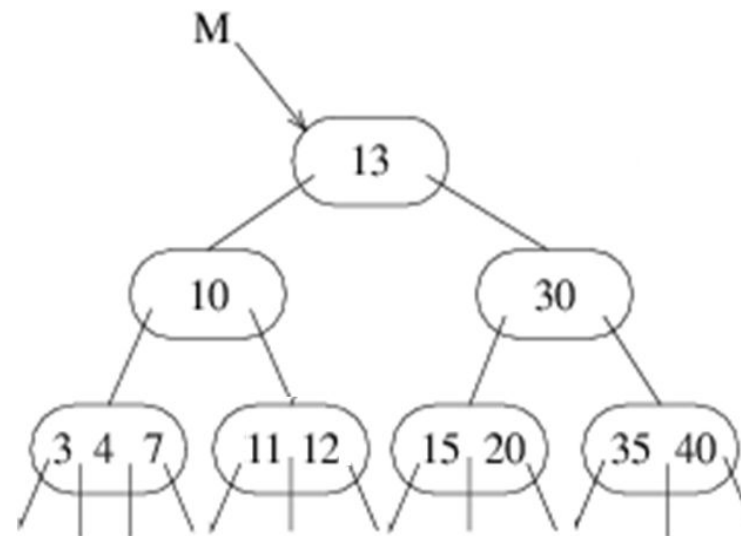
- Exercício Resolvido (11): Faça a inserção do 11



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, **11** e 6

Inserção com Fragmentação na Descida

- **Exercício Resolvido (12):** Neste ponto, qual é a diferença entre as árvores geradas pelas duas técnicas?

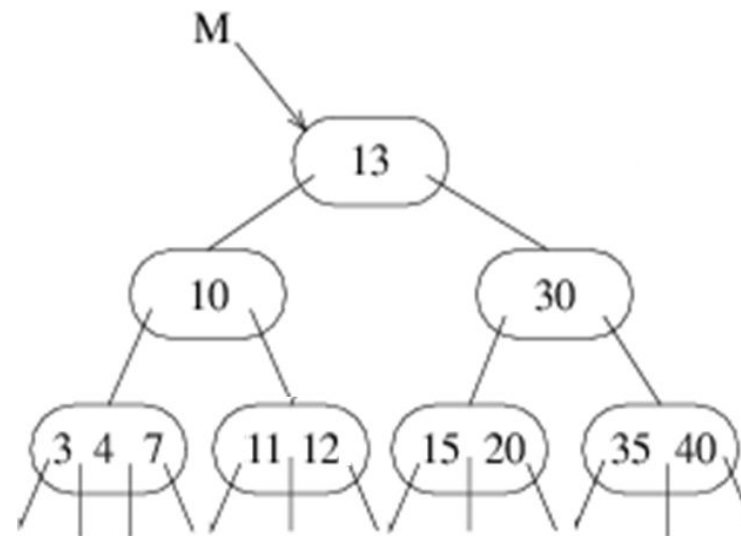


Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, **11** e 6

Inserção com Fragmentação na Descida

- **Exercício Resolvido (12):** Neste ponto, qual é a diferença entre as árvores geradas pelas duas técnicas?

Resposta: Esta árvore tem um nível a mais

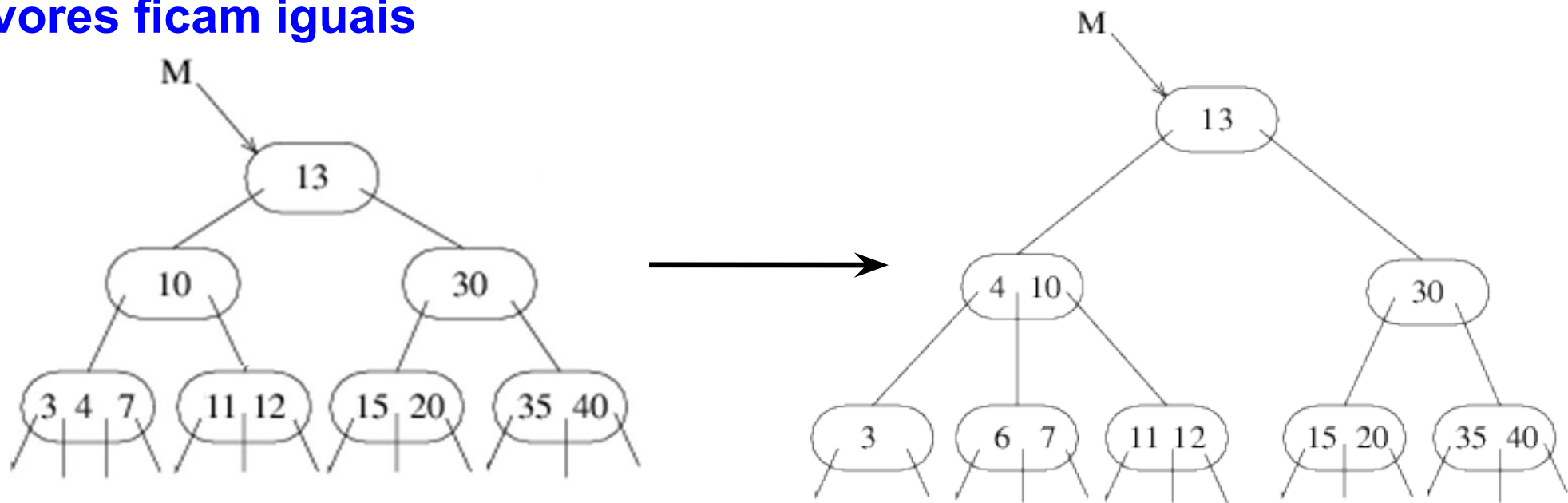


Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, **11** e 6

Inserção com Fragmentação na Descida

- Exercício Resolvido (12):** Neste ponto, qual é a diferença entre as árvores geradas pelas duas técnicas?

Resposta: Contudo, após a inserção do 6, observamos que as duas árvores ficam iguais



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e **6**

Observações

- Nas duas técnicas, a altura da árvore aumenta quando fragmentamos a raiz
- A segunda técnica faz todos seus reequilíbrios durante a descida na árvore
- Na segunda técnica, os reequilíbrios são puramente locais
- As duas técnicas sempre operam em um caminho da raiz até uma folha
- A complexidade para o número de comparações das duas técnicas no pior e no caso médio é $\Theta(\lg(n))$

Observações

- A primeira técnica demanda uma pilha para restaurar o equilíbrio da árvore, repassando o caminho inverso de pesquisa
- A segunda técnica é mais fácil de paralelizar dado que os reequilíbrios são locais e não existe a dependência do caminho inverso de pesquisa
- Uma desvantagem da segunda técnica é que ela pode consumir mais memória, pois sua taxa de ocupação dos nós é menor do que a outra

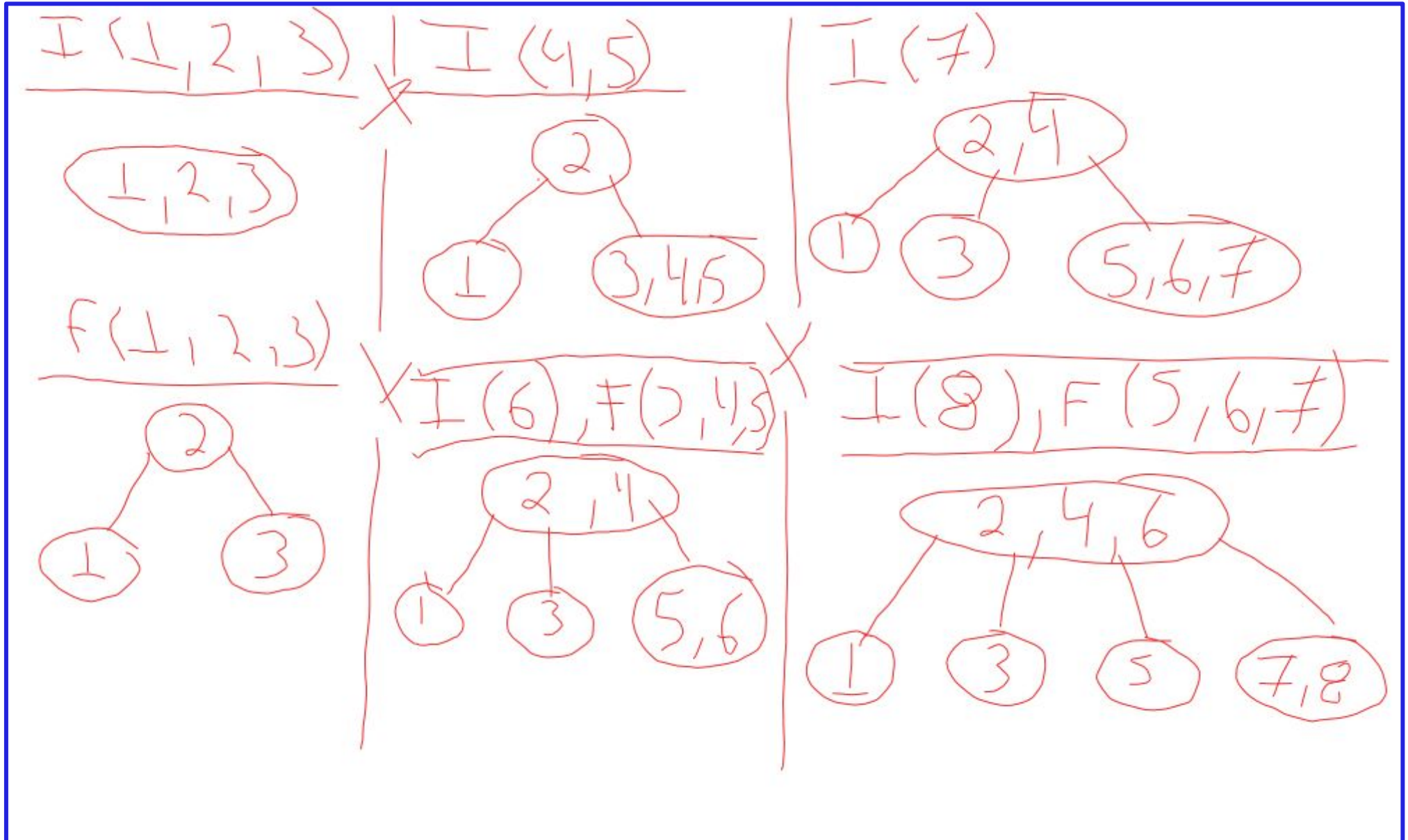
Técnica Pró-ativa vs. Reativa

- A inserção com fragmentação por ascensão é reativa, a na descida, pró-ativa
- Técnicas reativas esperam um problema para atuar
- Técnicas pró-ativas se adiantam e tentam resolver/minimizar o problema antes que o mesmo aconteça
- Várias soluções na Computação são classificadas como pró-ativas e reativas

Exercício Resolvido

- Insira os números 1 a 20 em uma 2.3.4 usando fragmentação por ascensão
- Insira os números 1 a 20 em uma 2.3.4 usando fragmentação na descida
- Insira os números 20 a 1 em uma 2.3.4 usando fragmentação por ascensão
- Insira os números 20 a 1 em uma 2.3.4 usando fragmentação na descida

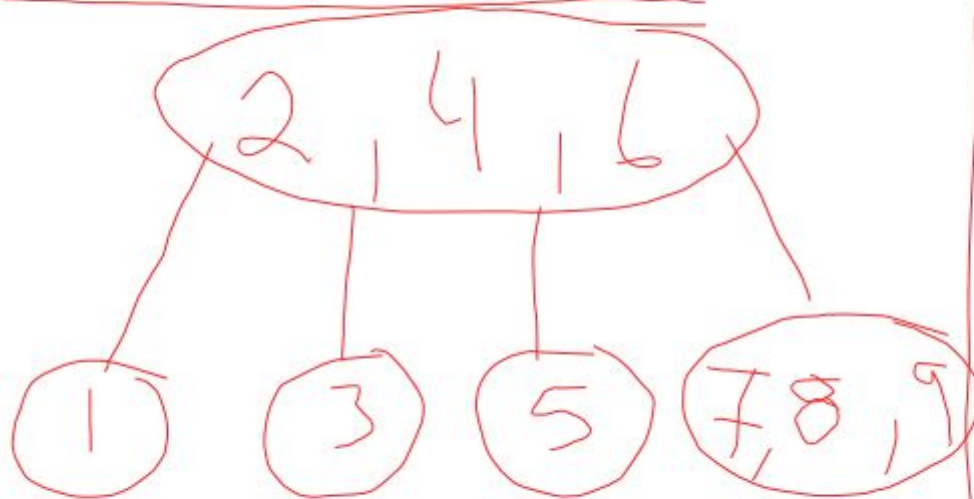
Exercício Resolvido



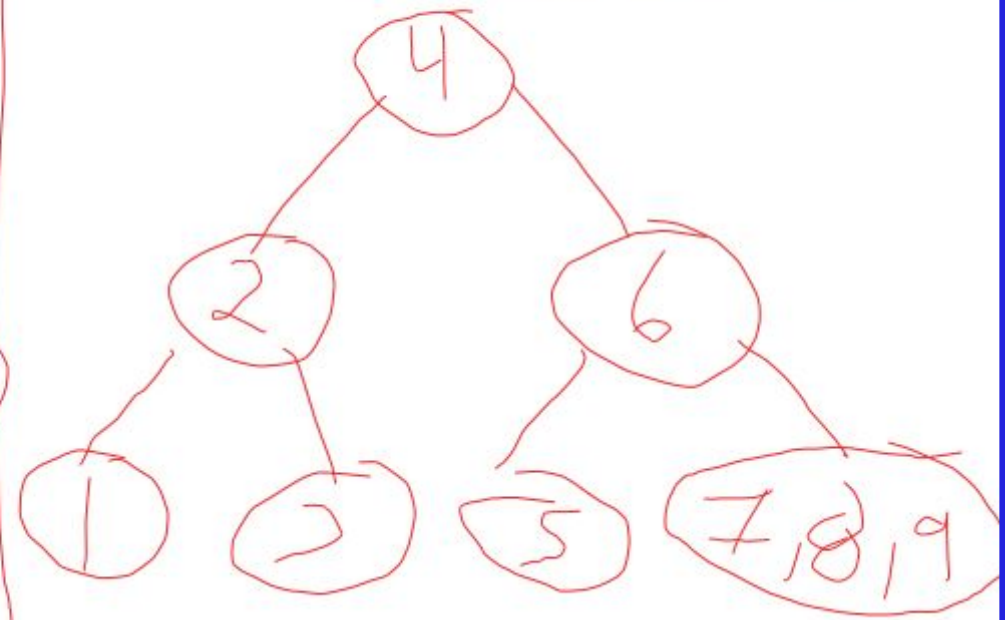
Exercício Resolvido



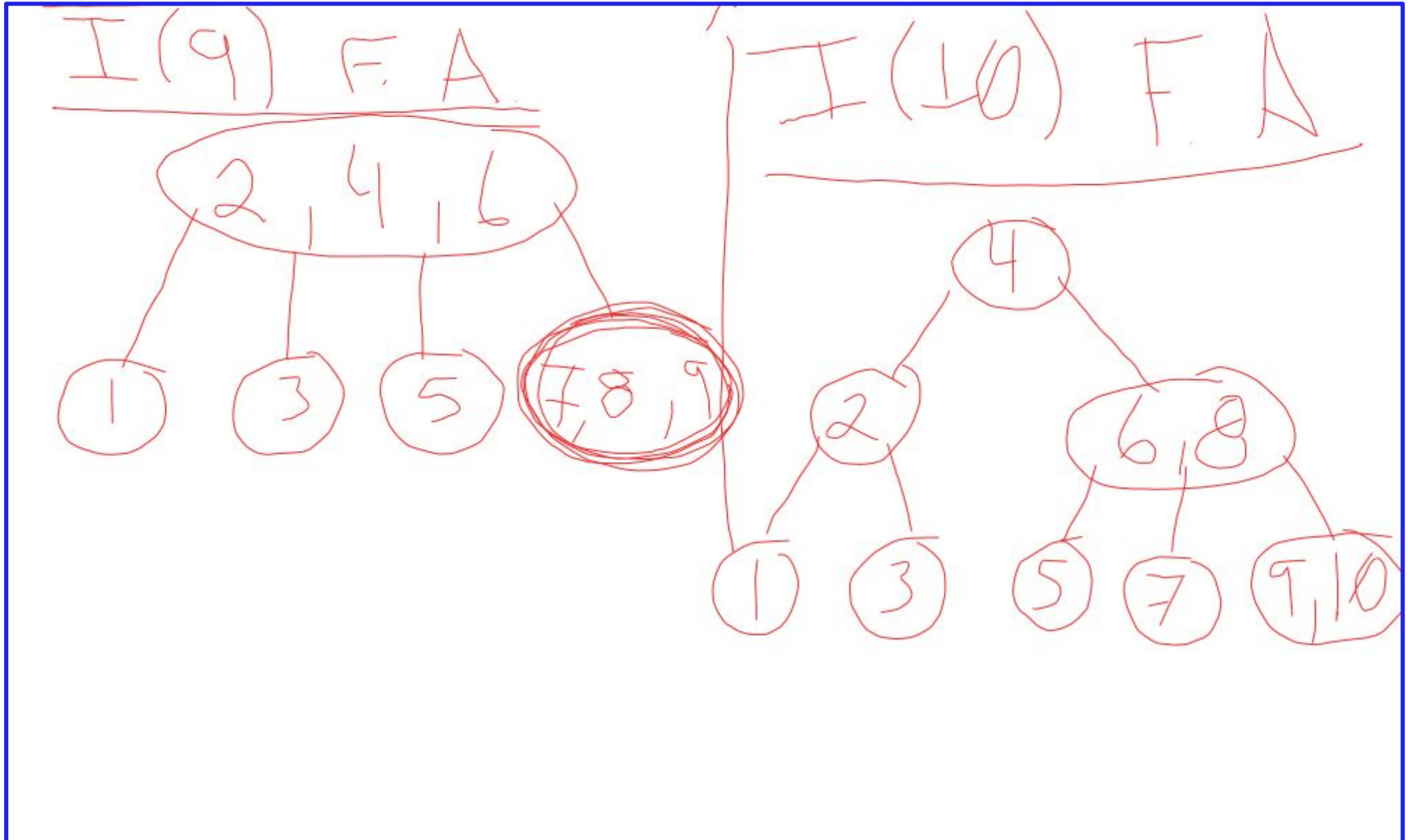
I(9) F.A.



I(9) F.D



Exercício Resolvido



Exercício Resolvido

