Teorema de Cantor-Berstein

Teorema: (Cantor-Berstein)

Dos conjuntos X y Y son equipotentes si, y sólo si X es equipotente a algún subconjunto de Y y Y es equipotente a algún subconjunto de X.

Demostración:

Para la necesidad, claro que $X \sim Y$ nos lleva a que $X \sim A \in P(A)$, con $A = Y$; y $Y \sim B \in P(Y)$, con $B = X$.

Para la suficiencia, suponemos

$\exists Y_1 \in P(Y) \wedge \exists X_1 \in P(X) \ni X \sim Y_1 \wedge Y \sim X_1$

Así pues, podemos asegurar que existen dos funciones inyectivas

$f : X \to Y \ni x \mapsto f(x) \wedge g : Y \to X \ni y \mapsto g(y)$

De tal forma que $f(X) = Y_1$ y $g(Y) = X_1$. Así mismo, tenemos que las funciones:

$f \circ g : Y \to Y \ni y \mapsto (f \circ g)(y) \wedge g \circ f : X \to X \ni x \mapsto (g \circ f)(x)$

Así pues, podemos definir los conjuntos:

$X_2 = (g \circ f)(X) \Longrightarrow X_2 = g(Y_1) \subset g(Y) = X_1 \cdots (*)$

$Y_2 = (f \circ g)(Y) \Longrightarrow Y_2 = f(X_1) \subset f(X) = Y_1 \cdots (**)$

En general, podemos definir

$X = X_0 \wedge Y = Y_0$ y

$[X_n = (g \circ f)(X_{n-2}) \wedge Y_n = (f \circ g)(Y_{n-2})](n \geq 2) \cdots (***)$

Ahora, afirmamos que $(\forall n \in \mathbb{N})[X_n \subset X_{n-1} \wedge Y_n \subset Y_{n-1}]$

En efecto: para el caso $n = 1$ claro que se satisface, pues

$f : X \to Y \ni x \mapsto f(x) \wedge g : Y \to X \ni y \mapsto g(y)$

son funciones. Para el caso $n = 2$, se satisface por los visto en las ecuaciones $(*)$ y $(**)$.

Ahora, demostraremos que $(X_n \subset X_{n-1} \wedge Y_n \subset Y_{n-1}) \Longrightarrow (X_{n+1} \subset X_n \wedge Y_{n+1} \subset Y_n)$:

Tenemos que:

$X_{n+1} = (g \circ f)(X_{n-1}) \Longrightarrow X_{n+1} = g(Y_n) \subset g(Y_{n-1}) = X_n$, pues $Y_n \subset Y_{n-1}$ (hipótesis de inducción).

$Y_{n+1} = (f \circ g)(Y_{n-1}) \Longrightarrow Y_{n+1} = f(X_n) \subset f(X_{n-1}) = Y_n$, pues $X_n \subset X_{n-1}$ (hipótesis de inducción).

Así pues, tenemos que $(\forall n \in \mathbb{N})[X_n \subset X_{n-1} \wedge Y_n \subset Y_{n-1}]$.

Por otro lado, como:

$f \circ g : Y \to Y \ni y \mapsto (f \circ g)(y) \wedge g \circ f : X \to X \ni x \mapsto (g \circ f)(x)$

son funciones inyectivas, definimos:

$h_n : Y_{n-1} \to (f \circ g)(Y_{n-1}) \ni y \mapsto (f \circ g)(y) \wedge k_n : X_{n-1} \to (g \circ f)(X_{n-1}) \ni x \mapsto (g \circ f)(x)$

Tal que ambas funciones, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, son biyectivas, y dado que, por la definición en $(***)$:

$(\forall n \in \mathbb{N})(h_n(Y_{n-1}) = (f \circ g)(Y_{n-1}) = Y_{n+1} \wedge k_n(X_{n-1}) = (g \circ f)(X_{n-1}) = X_{n+1})$

Entonces:

$(\forall n \in \mathbb{N})(Y_{n-1} \sim Y_{n+1} \wedge X_{n-1} \sim X_{n+1})$

Así pues, podemos afirmar:

$(\forall n \in \mathbb{N})(Y_0 \sim Y_{2(n-1)} \wedge Y_1 \sim Y_{2n-1} \wedge X_0 \sim X_{2(n-1)} \wedge X_1 \sim X_{2n-1})$

Por hipótesis, sabemos que:

$Y_1 \sim X_0 \wedge X_1 \sim Y_0$

Entonces, tenemos que:

$(\forall n \in \mathbb{N})(Y_{2n-1} \sim X_{2(n-1)} \wedge X_{2n-1} \sim Y_{2(n-1)})$

Por lo que ahora buscaremos demostrar que $X_{2(n-1)} \sim X_{2n-1}$, en particular, basta demostrar para $n = 1$, es decir, afirmamos que $X_0 \sim X_1$. En efecto, notemos que:

$X_0 = [\bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n \setminus X_{n-1})] \cup [\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n] \wedge X_1 = [\bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n \setminus X_{n+1})] \cup [\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n]$

Tomamos:

$N_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_{2n} \setminus X_{2n+1}) \wedge N_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_{2n+2} \setminus X_{2n+3})$
$M = \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_{2n+1} \setminus X_{2n+2}) \wedge D = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$

Por lo que:

$X_0 = N_0 \cup M \cup D \wedge X_1 = N_1 \cup M \cup D$

Observemos que:

$(g \circ f)(X_{2n}) = X_{2n+2} \wedge (g \circ f)(X_{2n+1}) = X_{2n+3}$

Por lo que:

$(g \circ f)(X_{2n} \setminus X_{2n+1}) = X_{2n+2} \setminus X_{2n+3}$

Así pues, tomamos:

$r : N_0 \to N_1 \ni x \mapsto (g \circ f)(x)$, función biyectiva.

$id_X : M \cup D \to M \cup D \ni x \mapsto x$, función biyectiva.

Así pues, definimos:

$\varphi : X_0 \to X_1 \ni$

$x \mapsto \{(g \circ f)(x)$ si $x \in N_0; x$ si $x \in M \cup D$

Claro que la función anterior es biyección, luego $X_0 \sim X_1$ y como (por hipótesis) $Y_0 \sim X_1$, entonces concluimos que $X_0 \sim Y_0$; es decir, $X \sim Y$. Esto concluye la demostración.