# Sobre el teorema de Goodstein

Gabriel Martínez González

January 28, 2025

## 1 Preliminares

En la siguiente sección vamos a presentar el desarrollo de la teoría de ordinales, para el entendimiento libre de los temas sigueintes. Para el desarrollo de estos preliminares, se necesita un buen conocimiento de teoría de conjuntos.

### 1.1 Propiedades de los ordinales

**1 Definición.** Un conjunto $\alpha$ es llamado un ordinal si $\alpha$ es transitivo y estrictamente bien ordenado por $\in$.

La definición anterior se puede escribir de la siguiente forma: $\alpha$ es ordinal si $(\forall a, b, c \in \alpha)$,

$$(a \in b \wedge b \in c) \Longrightarrow a \in c$$

y todo subconjunto de $\alpha$ tiene primer elemento.

**2 Teorema.** *$\alpha$ es un ordinal si, y sólo si, $\alpha$ es transitivo y se cumple la tricotomía bajo $\in$.*

*Proof.* Definimos $\prec$ como la relación tal que, para cualesquiera $\beta$ y $\gamma$, elementos de $\alpha$,

$$\beta \prec \gamma \Longleftrightarrow (\beta \in \gamma \vee \beta = \gamma)$$

Es decir, $\prec$ es el orden parcial inducido por la relación $\in$ en $\alpha$. Luego, consideremos el subconjunto de $\alpha$ $\{\beta, \gamma\}$. Como $\prec$ es un buen orden, tenemos que $\beta \prec \gamma \vee \gamma \prec \beta$. Así, tenemos que:

$$\beta \in \gamma \vee \beta = \gamma \vee \gamma \in \beta$$

□

Considerando $\langle X, \prec \rangle$ un buen orden estricto. Entonces, $\prec$ es una relación bien fundada estricta sobre $X$. Luego, existe exactamente un conjunto transitivo $\alpha$, llamado *el colapso de Mostowki* de $\langle X, \prec \rangle$, y una única biyección $F : X \longrightarrow \alpha$, llamada *la función colapsante* tal que

$$(\forall x, x' \in X)(x \prec x' \iff F(x) \in F(x')) \tag{M}$$

**3 Teorema.** *Sea $\alpha$ un conjunto. Entonces, $\alpha$ es un ordinal si, y sólo si, $\alpha$ es el colapso de Mostowski de un buen orden estricto $\langle X, \prec \rangle$.*

*Proof.* Si $\alpha$ es un ordinal, entonces $\alpha$ es el colapso de Mostowski de $\langle \alpha, \in \rangle$, con la función colapsante dada por la identidad. Por otro lado, se muestra que si $\alpha$ es el colapso de Mostowski de un buen orden estricto $\langle X, \prec \rangle$, entonces $\alpha$ es un ordinal y la función colapsante es un isomorfismo de orden entre $\langle X, \prec \rangle$ y $\langle \alpha, \in \rangle$. □

**4 Proposición.** *Si $\langle X, \prec_X \rangle$ y $\langle Y, \prec_Y \rangle$ son isomorfos (bajo su orden parcial estricto), entonces estos tienen el mismo colapso de Mostowski.*

*Proof.* Sea $\alpha$ es colapso de Mostowski de $\langle X, \prec_X \rangle$ y $F : X \longrightarrow \alpha$ su función colapsante. Entonces, se satisface (**??**). Luego, sea $\varphi : X \longrightarrow Y$ el isomorfismo de orden parcial estricto entre $Y$ y $X$. Tomemos $F' = F \circ \varphi$, una biyección. Observemos que si tenemos $y, y' \in Y$ y $x, x' \in X$ tales que $x = \varphi(y)$ y $x' = \varphi(y')$, entonces:

$$y \prec_Y y' \iff x \prec_X x' \iff F(x) \in F(x') \iff F(\varphi(y)) \in F(\varphi(y')) \iff F'(y) \in F'(y')$$

Así pues, tomando $F'$ como la función colapsante de $\langle Y, \prec_Y \rangle$, tenemos que $\alpha$ es el colapso de Mostowski de $\langle Y, \prec_Y \rangle$. Esto completa la prueba. □

**5 Definición.** Se define el conjunto WOT como el conjunto de las parejas ordenadas $\langle x, y \rangle$ tales que $x$ es un buen orden estricto y $y$ es el colapso de Mostowski de $x$.

Lo anterior puede escribirse como:

$$\text{WOT} = \{\langle x, y \rangle | x \text{ es buen orden estricto} \wedge y \text{ es colapso de Mostowski de } x\}$$

**6 Proposición.** *WOT es una clase funcional que satisface lo siguiente:*

*i* *Si $\langle x, y \rangle \in WOT$, entonces $x$ y $\langle y, \in \rangle$ son bien ordenado estricto isomorfos.*

*ii* *El dominio de $WOT$ es la clase de todos los buenos ordenes estrictos.*

*iii* *Para cualesquiera buenos ordenes estrictos $x$ y $y$, y para todo ordinal $z$, si $\langle x, z \rangle \in WOT$ y $x \cong y$, entonces $\langle y, z \rangle \in WOT$.*

*Proof.* Que sea clase funcional viene del hecho de que el colapso de Mostowski es único. Por otro lado:

i Como $\langle x, y\rangle \in$ WOT, $x$ es buen orden estricto, de la forma $\langle X, \prec\rangle$, y $y$ su colapso de Mostowski. Luego, existe una función biyectiva $F : X \longrightarrow y$ tal que se satisface (**??**), ecuación la cuál garantiza que $F$ preserva el orden entre $x = \langle X, \prec\rangle$ y $\langle y, \in\rangle$. Más aún, por un teorema anterior, ya sabemos que $\in$ es un orden parcial estricto en $y$ (por ser colapso de Mostowski, luego ordinal), por lo que se satisface la proposición, con $F$ el isomorfismo.

ii Inmediato del hecho de que sólo pedimos que $x$ sea un buen orden estricto para asegurar la existencia de su colapso de Mostowski.

iii Por la proposición anterior, $x$ y $y$ tienen el mismo colapso de Mostowski, el cuál, por hipótesis, es $z$. Luego, por la proposición anterior, como $y$ es un buen orden estricto y $z$ su colapso de Mostowski, $\langle y, z\rangle \in$ WOT.

□

**7 Definición.** Sean X un conjunto:

- Sea $\langle X, \prec\rangle$ un buen orden estricto. Se define el tipo de orden de $\langle X, \prec\rangle$, escrito como $\mathrm{ot}(\langle X, \prec\rangle)$, como el único ordinal $\alpha$ tal que

$$\langle X, \prec\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$$

- Sea $\langle X, \preceq\rangle$ un buen orden, y sea

$$\prec = \{(x, y) \in X \times X | x \preceq \wedge x \neq y\},$$

el buen orden estricto correspondiente a $\preceq$. Se define el tipo de orden $\mathrm{ot}(\langle X, \preceq\rangle)$ como sigue:

$$\mathrm{ot}(\langle X, \preceq\rangle) = \mathrm{ot}(\langle X, \prec\rangle)$$

**8 Proposición.**

$$\mathrm{ot}(\langle X, \preceq\rangle) = \alpha \Longleftrightarrow \langle\langle X, \prec\rangle, \alpha\rangle \in WOT$$

*Proof.* Notemos que

$$\mathrm{ot}(\langle X, \preceq\rangle) = \alpha \Longleftrightarrow \mathrm{ot}(\langle X, \prec\rangle) = \alpha.$$

Si $\mathrm{ot}(\langle X, \prec\rangle) = \alpha$, por ser $\langle X, \prec\rangle$ buen orden estricto, existe un $\beta$, ordinal, tal que $\beta$ es el colapso de Mostowski de $\langle X, \prec\rangle$. Luego $\langle\langle X, \prec\rangle, \beta\rangle \in$ WOT, y por la proposición anterior, $\langle X, \prec\rangle \cong \langle \beta, \in\rangle$. Por como se define el tipo de orden, $\alpha = \beta$ y $\langle\langle X, \prec\rangle, \alpha\rangle \in$ WOT.

Por otro lado, si suponemos $\langle\langle X, \prec\rangle, \alpha\rangle \in$ WOT, de inmediato tenemos (por la proposición anterior)

$$\langle X, \prec\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle,$$

luego $\mathrm{ot}(\langle X, \preceq\rangle) = \alpha$. $\square$

**9 Definición.** La clase de todos los ordinales se denota ON.

**10 Lema.**

$$(\forall \alpha \in ON)(\alpha \subseteq ON)$$

*Proof.* Sea $\alpha \in$ ON y $\beta \in \alpha$. Como $\alpha$ es transitivo, $\beta \subseteq \alpha$. La restricción de buen orden estricto a cualquier subconjunto de su dominio es un buen orden estricto. Por lo tanto, $\beta$ está estrictamente bien ordenado por $\in$. Para mostrar que $\beta$ es conjunto transitivo, asumamos $\gamma \in \beta$ y $\delta \in \gamma$. Se necesita probar que $\delta \in \beta$. Por la transitividad de $\alpha$, ambos $\gamma, \delta \in \alpha$. Más aún, como $\alpha$ está estrictamente bien ordenado por $\in$, se cumple la ley de tricotomía:

$$\delta \in \beta \vee \beta \in \delta \vee \beta = \gamma$$

de los cuales, los últimos dos casos son imposibles. Así pues, $\beta \in$ ON y se concluye lo deseado. $\square$

**11 Definición.** Sea $X$ un conjunto no vacio. Sea $x \in X$ y $Y \subseteq X$. Asumimos que $W$ es una relación bien fundada en $X$. El conjunto $\{z \in X | \langle z, x\rangle \in W \wedge z \neq x\}$ es llamada segmento inicial de $\langle X, W\rangle$ determinado por $x$, y denotado por $I_W(x)$. Decimos que $x$ es $W$-minimal para $Y$ si

$$x \in Y \wedge I_W(x) \cap Y = \varnothing.$$

Si $x$ es $W$-minimal para $x$, entonces decimos que $x$ es $W$-minimal.

**12 Corolario.** *Cada segmento inicial de un ordinal es un ordinal.*

*Proof.* Sea $\alpha \in$ ON y sea $I \subseteq \alpha$ un segmento inicial del buen orden estricto $\langle \alpha, \in\rangle$. Si $I = \alpha$, entonces no hay nada que probar. Si $I$ es un segmento inicial propio de $\langle \alpha, \in\rangle$, entonces $I = I_\in(\zeta)$ para algún $\zeta \in \alpha$. Pero como el buen orden estricto es $\in$, tenemos que

$$I_\in(\zeta) = \{\beta \in \alpha | \beta \in \zeta\}.$$

Por transitividad de $\alpha$, el último conjunto es igual a

$$\{\beta | \beta \in \zeta\} = \zeta.$$

Como $\zeta \in \alpha$, del lema anterior tenemos que $\zeta \in$ ON $\square$

**13 Definición.** Sea $\langle X, \preceq\rangle$ un orden parcial. Un subconjunto $I \subseteq X$ es llamado un segmento inicial de $\langle X, \preceq\rangle$ si

$$(\forall y \in I)(\forall x \in X)(x \preceq y \Longrightarrow x \in I).$$

Si $Y$ es cualquier subconjunto de $X$, entonces se denota el conjunto

$$\mathrm{DC}(Y) = \{x \in X | (\exists y \in Y)(x \preceq y)\}$$

el cuál es llamado la cerradura inferior de $Y$ o el segmento inicial de $\langle X \preceq\rangle$ generado por $Y$.

En *teoría de conjuntos*, se demuestra el hecho presentado a continuación.

**14 Proposición.** *Si $\langle X, \preceq\rangle$ es un buen orden y $Y$ es un segmento inicial de $X$, entonces*

$$I(Y) = X \vee DC(Y) = T_{\preceq}(x_o),$$

*donde $x_o$ es el elemento mínimo de $X \backslash DC(Y)$.*

**15 Lema.**

$$(\forall \alpha, \beta \in ON)(\alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha \vee \alpha = \beta)$$

*Proof.* Sea $\alpha, \beta \in \mathrm{ON}$. Por *teoría de conjuntos*, sabemos que $\langle \alpha, \in\rangle$ es isomorfo (bajo orden) a un segmento inicial de $\langle \beta, \in\rangle$, o $\langle \beta, \in\rangle$ es isomorfo a un segmento inicial de $\langle \alpha, \in\rangle$. Sin perdida de generalidad, asumimos lo primero y sea $F : \alpha \longrightarrow \beta$ una función inyectiva que mapea $\alpha$ a un segmento inicial $I$ de $\beta$ tal que

$$(\forall \xi, \eta \in \alpha)(\xi \in \eta \Longleftrightarrow F(\xi) \in F(\eta)) \qquad (*)$$

Por el corolario anterior, $\mathrm{rng}(F)$ es un ordinal. En particular, el rango de $F$ es un conjunto transitivo. Se tiene que (**??**) es la misma condición que (**??**) para la función colapsante de $\langle \alpha, \in\rangle$. Por lo tanto, $\mathrm{rng}(F)$ es el colapso de Mostowski de $\langle \alpha, \in\rangle$. Por el teorema 3, $\mathrm{rng}(F) = \alpha$. Si $F$ es sobreyectiva, entonces $\alpha = \mathrm{rng}(F) = \beta$. En caso contrario, $\alpha = \mathrm{rng}(F) = I_{\in}(\zeta) = \zeta$, para algún $\zeta \in \beta$. En otras palabras, $\alpha \in \beta$. $\square$

**16 Corolario.** *La clase relacional $\in \cap (ON \times ON)$ bien ordena estrictamente $ON$.*

*Proof.* Por simplicidad, escribiremos *in* en lugar de $in \cap \mathrm{ON} \times \mathrm{ON}$. Procederemos explicado dos casos:

- Cualquier conjunto (no vacio) de ON tiene elemento mínimo: Sea $X$ un conjunto (no vacio) cuyos elementos son ordinales. Denotamos:

$$\alpha := \bigcap X.$$

Por demostrar $(\alpha \in X) \wedge (\forall \beta \in X)(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta)$: Lo segundo es inmediato ya que, por como se definió $\alpha$,

$$(\forall \beta \in X)(\alpha \subseteq \beta).$$

Luego, por el lema anterior, si $\beta \in \alpha$, tenemos que

$$\beta \in \beta,$$

lo cuál es absurdo. Luego, tenemos que

$$\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta.$$

Por otro lado, consideremos que $\alpha$ no es elemento de $X$; por lo anteriormente mostrado, dado cualquier $\beta$ elemento de $X$, tenemos que $\alpha \in \beta$, luego, como está en todos, está en la intersección:

$$\alpha \in \bigcap_{\beta \in X} \beta = \bigcap X = \alpha.$$

Como $\alpha$ es conjunto, esto es una contradicción, luego $\alpha \in X$. Así, $\alpha$ como fue definido es nuestro primer elemento bajo la relación $\in$.

- Cualquier clase (no vacia) de ON tiene elemento mínimo: Consideremos la clase (no vacia) $\mathcal{X}$ definida por la formula (de teoría de conjuntos) $\varphi(x)$ y cuyos elementos son todos ordinales. Tomemos $\alpha$ tal que $\varphi(\alpha)$ (es decir, $\alpha$ pertenece a la clase $\mathcal{X}$. Tenemos dos casos:

$$(\forall \beta \in \alpha)(\neg \varphi(\beta))$$

es decir, $\beta$ no es miembro de la clase $\mathcal{X}$, entonces no hay nada que demostrar y $\alpha$ es elemento mínimo de $\mathcal{X}$. Si, por otro lado,

$$X = \{\beta \in \alpha | \varphi(\beta)\} \neq \varnothing,$$

tenemos que $X$ es conjunto (dado que $\alpha$ lo es) y, por el punto anterior, este posee elemento mínimo, que será el elemento mínimo de todo $\mathcal{X}$.

$\square$

**17 Definición.** Se define la relación $<$ sobre ON como sigue:

$$\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta$$

Teniendo en cuenta resultadoa anteriores, se tiene de inmediato lo siguiente:

$$\alpha \leqslant \beta \iff \alpha \text{ es segmento inicial de } \beta.$$

**18 Proposición.** *Sean $\alpha, \beta \in ON$. Entonces*

$$\alpha \leqslant \beta \iff \alpha \subseteq \beta.$$

*Proof.* Sean $\alpha, \beta \in$ ON. Por un lema anterior, $(\forall \xi \in \text{ON})(\xi \subseteq \text{ON})$, entonces denotamos:

$$\alpha = \{\gamma \in \text{ON} | \gamma < \alpha\} \wedge \beta = \{\gamma \in \text{ON} | \gamma < \beta\}.$$

Es evidente que

$$\alpha \leqslant \beta \Longrightarrow \alpha \subseteq \beta.$$

Asumiendo entonces $\alpha \subseteq \beta$:

- Si $\alpha = \beta$, no hay nada que probar.
- Si $\alpha \neq \beta$, y tomamos $\gamma \in \beta \backslash \alpha$; como $\beta \notin \alpha$, tenemos que

  $$\alpha = \gamma \veebar \alpha \in \gamma \in \beta.$$

  Como $\beta$ es transitivo, en ambos casos $\alpha \leqslant \beta$.

$\square$

Supongamos que $\langle X, \preceq \rangle$ es un buen orden, y asumimos $y \notin X$. Por *teoría de conjuntos*, si $Y = X \cup \{y\}$ y $\preceq_Y = \preceq \cup \{\langle x, y \rangle | x \in Y\}$, entonces $\langle Y, \preceq_Y \rangle$ está también bien ordenado.

**19 Proposición.**

$$\alpha = \text{ot}(\langle X, \preceq \rangle) \Longrightarrow S(\alpha) = \text{ot}(\langle Y, \preceq_Y \rangle)$$

La propiedad anterior muestra que, para cualquier ordinal $\alpha$, su sucesor $S(\alpha)$ también es un ordinal. Más aún, como $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$, tenemos que $\alpha \in S(\alpha)$, y si $\beta \in S(\alpha)$, entonces $\beta \in \alpha \veebar \beta = \alpha$. Por lo tanto, $S(\alpha)$ es el más pequeño ordinal, mayor que $\alpha$; por lo que $S(\alpha)$ es el sucesor inmediato de $\alpha$ en ON.
El conjunto vacio es un ordinal. Esto se ve de que $\varnothing$ satisface la defínción, o porque $\varnothing$ es el colapso de Mostowski de $\langle \varnothing, \varnothing \rangle$. Más aún, como $\varnothing$ no contiene elementos, este debería ser el ordinal más pequeño. Los siguientes ordinales son $S(\varnothing), S(S(\varnothing)), \cdots$, etcetera. En la teoria de conjuntos, se denota al $n-$ésimo sucesor de $\varnothing$ por $\tilde{n}$ y se identifica por el número natural $n$. Entonces, ahora vemos que cada $\tilde{n}$ es un ordinal; más aún, la relación $<$ restringida a los ordinales $\tilde{n}$ restringida a los ordinales $\tilde{n}$ es el orden estricto usual de los números naturales, y $\tilde{n} = \text{ot}(\langle \{0, 1, \cdots, n-1\}, < \rangle)$. Así, los números naturales son los ordinales finitos.

**20 Proposición.** *Muestre que un ordinal $\alpha$ es un conjunto finito si, y sólo si es un número natural.*

Observemos que el más pequeño de los ordinales infinitos es el conjunto $\omega$ de todos los números naturales (pues no hay números naturales que sean infinitos). Así mismo, $\omega$ es el colapso de Mostowski de $\langle \omega, < \rangle$.

**21 Lema.** *(ZF): $\omega$ es el más pequeño ordinal $\alpha$ tal que*

*i* $\alpha \neq 0$

*ii* $(\forall \beta \in \alpha)(S(\beta) \in \alpha)$

*Proof.* Consideremos que existe un ordinal $\alpha < \omega$, no cero, y tal que

$$(\forall \beta \in \alpha)(S(\beta) \in \alpha).$$

Como $\alpha \in \omega$, entonces $\alpha$ se identifica por un número natural $n$. Por como se definió $\alpha$ y como $n-1 \in n = \alpha$, entonces $S(n-1) \in \alpha = n$, luego $n \in n$, lo cuál es absurdo. □

**22 Teorema.** *Sea $A$ un conjunto de ordinales, entonces:*

*i* $\bigcup A \in ON$

*ii* $(\forall \alpha \in A)(\exists \beta \in A)(\alpha < \beta) \implies$ ($\bigcup A$ *es el más pequeño ordinal mayor a cada elemento de* $A$)

*Proof.* Tomamos $A$ un conjunto de ordinales:

i Inmediato (del hecho de que $\in$ bien ordena los ordinales, y que en ON se cumple la tricotomía).

ii Sea $A$ un conjunto de ordinales y sea $\delta = \bigcup A$. Entonces,

$$\delta = \{\alpha | (\exists \beta \in A)(\alpha \in \beta)\}.$$

Asumiendo que para cada $\alpha \in A$, existe $\beta \in A$ tal que $\alpha < \beta$, esto implica que $\alpha \in \delta$, para cada $\alpha \in A$. Por otro lado, si $\alpha \in \delta$, entonces $\alpha \in \beta$ para algún $\beta \in A$. Por lo tanto, no hay ordinales más pequeños que $\delta$ que contenga todos los elementos de $A$.

□

Si se satisface la hipótesis del segundo inciso en el teorema anterior, es decir, si

$$(\forall \alpha \in A)(\exists \beta \in A)(\alpha < \beta), \tag{H}$$

entonces escribiremos $\sup(A)$ en lugar de $\bigcup A$. Si $A = \{\alpha_\beta | \beta < \gamma\}$ y $\alpha_\beta \leqslant \alpha_{\beta'}$ para cada $\beta < \beta' < \gamma$, entonces se escribe con frecuencia

$$\lim_{\beta \to \gamma} \alpha_\beta$$

en lugar de $\sup\{\alpha_\beta | \beta < \gamma\}$.

**23 Corolario.** *ON es una clase propia*

*Proof.* Primero, notemos que no existe un ordinal mayor a todos, pues si $\alpha$ es cualquier ordinal, entonces $S(\alpha)$ es un ordinal mayor. Ahora, supongamos que ON es un conjunto; como ON no tiene elemento máximo, (**??**) se satisface. Pero entonces, $\bigcup$ON es un ordinal que es mayor a cualquier otro ordinal, lo cuál es contradictorio. □

**24 Definición.** Una clase $X \subseteq \mathrm{ON}$ se dice *cofinal* en ON si

$$(\forall \alpha \in \mathrm{ON})(\exists \beta \in X)(\alpha \leqslant \beta).$$

Un ordinal $\alpha$ es llamado *ordinal sucesor* si existe un ordinal $\beta$ tal que $\alpha = S(\beta)$. Un ordinal el cual no es sucesor es llamado *ordinal límite*. Denotatemos la clase de ordinales sucesores por SUCC y la clase de ordinales limite por LIM.

Obeservemos que los números naturales son ordinales sucesores (empezando por el 1), mientras que 0 y $\omega$ son ordinales límite. Por otro lado, si $\alpha \in \mathrm{ON}$, entonces $\alpha < S(\alpha) \in$ SUCC, por lo que *SUCC* es cofinal en ON. Por otro lado, LIM es cofinal en ON.

**25 Proposición.** *Si un conjunto de ordinales A satisface* (**??**)*, entonces* $\bigcup A$ *es un ordinal límite.*

**26 Teorema.** *Cada subclase cofinal de ON es propia. En particular, SUCC y LIM son ambas clases propias.*

Los siguientes resultados muestran la relación entre los ordinales y los buenos ordenes, entre otros conceptos asociados.

**27 Definición.** Sea $Z$ un conjunto arbitrario, sea $W$ una relación bien fundada sobre $Z$, y sea $\langle X, \prec \rangle$ un buen orden estricto. Una función $\mathrm{rk} : Z \longrightarrow X$ es llamada una función rango para $W$ con respecto a $\prec$ si

$$(\forall z \in Z)(\mathrm{rk}(z) = \sup{}^{+}\mathrm{rng}(\mathrm{rk}|I(z)))$$

**28 Proposición.**

*i* *Sea $W$ una relación bien fundada sobre un conjunto $Z$, $\langle X, \prec \rangle$ un buen orden estricto, y $rk : Z \longrightarrow X$ una función rango para $W$ con respecto a $\prec$. Sea $\alpha = \mathrm{ot}(\langle X, \prec \rangle)$, y sea $F : X \longrightarrow \alpha$ el isomorfismo de orden entre $\langle X, \prec \rangle$ y $\langle \alpha, \in \rangle$. Muestre que la composición $F \circ rk : Z \longrightarrow \alpha$ es una función rango para $W$ con respecto a $\in$.*

*ii* *Para cada relación bien fundada, existe una única función rango con respecto a $\in$ cuyo rango es un ordinal.*

**29 Definición.** $R$ es una relación bien fundada en $X$ si es una relación y

$$(\forall Y \subseteq X)(\exists y \in Y)(\nexists r \in Y)(rRy)$$

**30 Proposición.** *Sea $x$ cualquier conjunto. Cada función de $x$ en un ordinal $\alpha$ es la función rango de una relación estrictamente bien fundada en $x$.*

*Proof.* Sea $x$ un conjunto, sea $\alpha \in \mathrm{ON}$ y sea $f : x \longrightarrow \alpha$ una función. Definimos la relación $R_f$ sobre $x$ como

$$R_f = \{\langle y, z \rangle | f(y) < f(z)\}.$$

Mostremos que $R_f$ está estrictamente bien fundada: en caso contrario, existe una sucesión $\langle y_n \rangle_{n \in \omega}$ de elementos de $x$ tales que $\langle y_{n+1}, y_n \rangle \in R_f$ para toda $n \in \omega$. Por definición de $R_f$, esto significa que $f(y_{n+1}) \in f(y_n)$, para toda $n \in \omega$, lo cual es imposible, por el axioma de fundación. $\square$

**31 Teorema.** *(ZF): Para cada conjunto $x$, existe un ordinal $\alpha > 0$ tal que $x$ no puede mapearse en $\alpha$.*

*Proof.* Se sigue de la proposición anterior. $\square$

**32 Proposición.** *Existe una formula $\Psi(r, \alpha)$ de $L_s$ con dos variables libres tal que $\Psi(r, \alpha)$ es valida si, y sólo si $r$ es una relación de buen oriden estricto en $x$ y $\alpha$ es el rango de la función rango para $r$.*

**33 Corolario.** *Para cada conjunto $x$, existe un ordinal $\alpha$ tal que $\alpha$ no puede ser mapeado en $x$ por una función inyectiva.*

*Proof.* Si $x = \varnothing$, ningún ordinal $\beta > 0$ puede mapearse en $x$. Si $x \neq \varnothing$, sea $\alpha > 0$ un ordinal tal que $x$ no puede ser mapeado en $\alpha$. Luego $\alpha$ no puede mapearse en $x$ por una función inyectiva. $\square$

**34 Lema.** *(ZF) Si cada conjunto no vacio admite estructura de grupo, entonces cada conjunto puede ser bien ordenado.*

*Proof.* Asumimos que cada conjunto admite estructura de grupo, y sea $x$ cualquier conjunto. Sea $\alpha > 0$ un ordinal tal que no hay una inyección de $\alpha$ en $x$. Consideremos el conjunto $y = x \cup \alpha$. Como $\alpha > 0$, por hipótesis $y$ admite estructura de grupo, es decir, tenemos $e \in y$ y una operación $* : y \times y \longrightarrow y$ con la cuál $\langle y, *, e\rangle$ es un grupo. Fijamos $e, *$. Afirmamos

$$(\forall z \in x)(\exists \beta \in \alpha)(z * \beta \in \alpha).$$

En efecto, fijamos $z \in x$ y consideremos la función $f : \alpha \longrightarrow y$ dada por la formula $f(\beta) = z * \beta$. Como $z^{-1} * f(\beta) = \beta$, para cada $\beta \in \alpha$, la función $f$ es intectiva. Por la elección de $\alpha$, el rango de $f$ no está contenido en $x$. Pero, si $f(\beta) \in y \backslash x$, entonces $f(\beta) \in \alpha$, lo que prueba la proposición. Ahora, sea $\preceq_a$ la orden antilexicográfica sobre $\alpha \times \alpha$. Ahora, claro que $\preceq_a$ es una relación de buen orden. Definimos una función $g : x \longrightarrow \alpha \times \alpha$ siendo $g(z)$ el $\preceq_a$-elemento mínimal $\langle \beta, \gamma\rangle$ de $\alpha \times \alpha$ tal que $z * \beta = \gamma$. Notemos que si $g(z) = \langle \beta, \gamma\rangle$, entonces $z = \gamma * \beta^{-1}$. Así, $g$ es una función inyectiva. Luego, definimos la relación $\preceq$ sobre $x$ por:

$$z \preceq z' \Longleftrightarrow g(z) \preceq_a g(z')$$

. Ahora, $\preceq$ es una relación de buen orden sobre $x$. Esto prueba el teorema. □

**35 Teorema.** *(Principio de inducción sobre un conjunto bien fundado)*
*Sea $X$ un conjunto no vacio, sea $Y \subseteq X$ y sea $W$ una relación bien fundada sobre $X$. Si la implicación*

$$I_W(x) \subseteq Y \Longrightarrow x \in Y, \tag{Ind}$$

*es valida para cada $x \in X$, entonces $X = Y$.*

*Proof.* Sea $X, Y$ y $W$ como en el enunciado y asumimos que (**??**) es valida para cada $x \in X$. Supongamos $C = X \backslash Y \neq \varnothing$. Por la bien fundación de $W$, existe un elemento $W-$mínimal de $C$. Pero, si $x_o$ es un elemento $W-$mínimal de $C$, entonces $I_W(x_o) \subseteq Y$, y de (**??**) (considerada con $x_o$) se sigue que $x_o \in Y$, lo cuál es imposible, pues $x_o \in X \backslash Y$, lo cuál es una contradicción. □

**36 Teorema.** *(Principio de Definición Recursiva Generalizado)*
*Sean $X, Z \neq \varnothing$, y sea $W$ una relación bien fundada sobre $Z$. Además, suponganse que $G$ es una función con valores en $X$ tal que dom($G$) consiste de todos los pares de la forma $\langle f, z\rangle$, donde $z \in Z$ y $f$ es una función que mapea $I_W(z)$ en $X$. Entonces, existe exactamente una función $F : Z \longrightarrow X$ tal que*

$$(\forall z \in Z)(F(z) = G(F|I_W(z), z)) \tag{R}$$

**37 Teorema.** *(Principio de Construcción Recursiva Generalizado)*
*Sean $X, Z \neq \varnothing$, y sea $W$ una relación bien fundada sobre $Z$. Además, suponganse que $G^*$ es una función con valores en $P(X)\backslash\{\varnothing\}$ tal que $dom(G^*)$ consiste de todos los pares de la forma $\langle f, z\rangle$, donde $z \in Z$ y $f$ es una función que mapea $I_W(z)$ en $X$. Entonces, existe una función $F : Z \longrightarrow X$ tal que*

$$(\forall z \in Z)(F(z) \in G^*(F|I_W(z), z)) \tag{R*}$$

Consideremos un ordinal arbitrario $\alpha$. Como $\in$ es una relación bien fundada sobre $\alpha$, son validos los teoremas anteriores. La inducción y recursión sobre $\in$ en ordinales son comúnmente referenciadas como **inducción transfinita** y **recursión transfinita**.

**38 Teorema.** *Sea $X$ un conjunto, sea $C$ una familia de subconjuntos de $X$ que es cerrado bajo uniones de subfamilias que son inealmente ordenados por inclusión, y sea $f : C \longrightarrow C$ una función con*

$$(\forall c \in C)(c \subseteq f(c)).$$

*Entonces, existe un $c_o \in C$ tal que $f(c_o) = c_o$.*

*Proof.* Sea $X, C$ y $f$ como en la hipótesis, y sea $\alpha > 0$ un ordinal que no puede mapearse en $C$ por una función inyectiva. Definimos por recursión transfinita una función $F : \alpha \longrightarrow P(X)$ como sigue:
Supongamos $\beta \in \alpha$ y $F(\gamma)$ está definida para toda $\gamma < \beta$. Definimos:

$$F(\beta) = \begin{cases} f\left(\bigcup\{F(\gamma)|\gamma < \beta\}\right) & \text{si } \bigcup\{F(\gamma)|\gamma < \beta\} \in C, \\ X & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Afirmamos que

$$(\forall \gamma < \beta < \alpha)(F(\gamma) \subseteq F(\beta)). \tag{P}$$

En efecto, sea $\gamma < \beta < \alpha$. Si $F(\beta) = X$, entonces la inclusión $F(\gamma) \subseteq F(\beta)$ se sigue del hecho de que $F(\gamma) \in P(X)$. Si $F(\beta) \neq X$, entonces $\bigcup\{F(\delta)|\delta < \beta\} \in C$, y por como asumimos $f$, tenemos

$$F(\gamma) \subseteq \bigcup\{F(\delta)|\delta < \beta\} \subseteq f\left(\bigcup\{F(\delta)|\delta < \beta\}\right) = F(\beta).$$

Por otro lado, afirmamos

$$(\forall \beta \in \alpha)(F(\beta) \in C). \tag{Q}$$

En efecto, por inducción sobre $\beta$: sea $\beta < \alpha$, y supongase $F(\gamma) \in C$, para cada $\gamma < \beta$. Consideramos $\mathcal{F} = \{F(\gamma)|\gamma < \beta\}$. Por hipótesis de inducción, $\mathcal{F} \subseteq C$. La proposición (**??**) muestra que $\mathcal{F}$ está linealmente ordenado por inclusión. Así, la hipótesis sobre $C$

implica que $\bigcup \mathcal{F} \in C$. Como el rango de $f$ está contenido en $C$, se tiene $F(\beta) = f\left(\bigcup \mathcal{F}\right) \in C$. Así, continuando con la Demostración principal, de (**??**), $F$ mapea $\alpha$ en $C$. Por la elección de $\alpha$, existen $\gamma < \beta < \alpha$ tal que $F(\gamma) = F(\beta)$. Fijamos $\gamma, \beta$. Si $F(\beta) = X$, entonces $X \in C$, y $f(X) = X$ por la hipótesis sobre $f$, por lo que en ese caso $C = X$ atestigua que el teorema se cumple. Si $F(\beta) \neq X$, entonces sea $c_o = \bigcup\{F(\delta)|\delta < \beta\}$. La definición de $F$ implica que $c_o \in C$. Más aún,

$$F(\beta) = F(\gamma) \subseteq \bigcup\{F(\delta)|\delta < \beta\} \subseteq f\left(\bigcup\{F(\delta)|\delta < \beta\}\right) = F(\beta).$$

Se sigue que $f(c_o) = c_o$, lo que prueba el teorema. □

## 1.2 Aritmética ordinal

**39 Definición.** Sea $\alpha \in \mathrm{ON}$. Por recursión sobre $\beta \in \mathrm{ON}$, definimos un ordinal $\alpha + \beta$ como:

- $\alpha + 0 = \alpha$;
- $\alpha + \beta = S(\alpha + \gamma)$, si $\beta = S(\gamma)$;
- $\alpha + \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta}(\alpha + \gamma)$, si $\beta$ es un ordinal límite mayor a cero.

**40 Lema.** *Sea $\alpha, \beta \in ON$. Entonces,*

$$\alpha + \beta = \alpha \cup \{\alpha + \gamma|\gamma < \beta\} \tag{1}$$

*Proof.* Procedemos por inducción sobre $\beta$:

- Si $\beta = 0$ entonces lo de la derecha de (**??**) es $\alpha \cup \varnothing = \alpha$. Lo de la izquierda es $\alpha + 0$, lo cual es igual a $\alpha$ por defínción.
- Asumiendo la ecuación (**??**) valida para $\gamma$ y $\beta = S(\gamma)$. Entonces,

  $$\alpha \cup \{\alpha + \delta|\delta < \beta\} = \alpha \cup \{\alpha + \delta|\delta < \gamma\} \cup \{\alpha + \gamma\} \text{ (y por hipótesis inductiva)}$$

  $$\begin{aligned} \alpha + \gamma \cup \{\alpha + \gamma\} &= S(\alpha + \delta) \text{ (y por la definición **??**)} \\ &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

- Ahora, asumimos que $\beta$ es un ordinal límite y que (**??**) es valida para cada $\gamma < \beta$. Entonces, para cada $\delta < \beta$ existe una $\gamma$ tal que $\delta < \gamma < \beta$, y también:

  $$\alpha \cup \{\alpha + \delta|\delta < \beta\} = \alpha \cup \bigcup_{\gamma < \beta}\{\alpha + \delta|\delta < \gamma\}$$

$$= \bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha \cup \{\alpha+\delta | \delta < \gamma\}) \text{ (y por hipótesis de inducción)}$$

$$= \bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha+\gamma) \text{ (y por la definición \textbf{??})}$$

$$= \alpha+\beta$$

□

**41 Corolario.** *Supongase que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son ordinales tales que $\gamma < \beta$. Entonces,*

$$\alpha \leqslant \alpha+\gamma < \alpha+\beta$$

**42 Corolario.** *Sean $\alpha, \beta \in ON$ tales que $\alpha < \beta$. Entonces, existe exactamente un ordinal $\gamma_o$ tal que $\alpha + \gamma_o = \beta$.*

*Proof.* Fijamos $\alpha, \beta$ como en la hipótesis, y sea $F_\alpha(\gamma) = \alpha + \gamma$. Se sigue del corolario **??** que $F_\alpha$ es una clase funcional inyectiva. Por el corolario **??**, existe un ordinal $\delta$ tal que $F_\alpha(\delta) \notin \beta$. Fijamos pues a $\delta$. Como $F_\alpha(\delta) = \alpha + \delta \in$ ON, por el lema **??**, tenemos que $\alpha + \delta = \beta$, o $\beta \in \alpha + \delta$. En el primer caso, $\gamma_o = \beta$ es lo requerido. En el segundo, por el lema **??**, $\beta \in \{\alpha + \gamma | \gamma < \delta\}$, lo cuál nuevamente produce el resultado deseado. □

**43 Definición.** Sea $\langle A, \preceq_A \rangle$ y $\langle B, \preceq_B \rangle$ órdenes parciales. El orden suma $\langle A, \preceq_A \rangle \oplus \langle B, \preceq_B \rangle$ es el orden parcial $\langle C, \preceq \rangle$, donde

$$C = A \times \{0\} \cup B \times \{1\},$$

y la relación $\preceq$ está dada por

$$\langle a, b \rangle \preceq \langle c, d \rangle \iff \begin{cases} b = 0 \wedge d = 1 \text{ ó} \\ b = d = 0 \wedge a \preceq_A c \text{ ó} \\ b = d = 1 \wedge a \preceq_B c \end{cases}$$

**44 Teorema.** *Sean $\langle X, \preceq_X \rangle$ y $\langle Y, \preceq_Y \rangle$ buenos ordenes, y sea $\alpha = \mathrm{ot}(\langle X, \preceq_X \rangle)$, $\beta = \mathrm{ot}(\langle Y, \preceq_Y \rangle)$. Entonces, $\alpha + \beta = \mathrm{ot}(\langle X, \preceq_X \rangle \oplus \langle Y, \preceq_Y \rangle)$.*

*Proof.* Sea $f : X \longrightarrow \alpha$ un isomorfismo de orden entre $\langle X, \prec_X \rangle$ y $\langle \alpha, \in \rangle$, y sea $g : Y \longrightarrow \beta$ un isomorfismo de orden entre $\langle Y, \prec_Y \rangle$ y $\langle \beta, \in \rangle$. Definimos una función $h : X \times \{0\} \cup Y \times \{1\} \longrightarrow \alpha + \beta$ por:

$$h(x, 0) = f(x); h(y, 1) = \alpha + g(y).$$

Se sigue del lema **??** que el rango de $h$ es $\alpha + \beta$, y el corolario **??** implica que $h$ preserva orden. Luego, $h$ es un isomorfismo de orden, y hemos probado el teorema. □

Vale la pena recalcar que la suma de ordinales no es conmutativa. Esto se observa del siguiente hecho:

$$1 + \omega = \omega < S(\omega) = \omega + 1.$$

**45 Proposición.**

$$(\forall \alpha, \beta, \gamma \in ON)(\alpha \leqslant \beta \Longrightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma)$$

**46 Proposición.**

$$(\forall \alpha, \beta, \gamma \in ON)((\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma))$$

*Proof.* Se sigue del teorema **??** y las propiedades de la suma de ordenes. □

**47 Definición.** Sea $\alpha \in \mathrm{ON}$. Por recursión sobre $\beta \in \mathrm{ON}$ definimos un ordinal $\alpha \cdot \beta$ como sigue:

- $\alpha \cdot 0 = 0$;
- $\alpha \cdot \beta = (\alpha \cdot \gamma) + \alpha$, si $\beta = S(\gamma)$;
- $\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} (\alpha \cdot \gamma)$, si $\beta$ es un límite ordinal no cero.

Observemos que

$$2 \cdot \omega = \bigcup_{n \in \omega} (2 \cdot n) = \omega < \omega + \omega = \omega \cdot 2.$$

De aquí se sigue que el producto de ordinales no es conmutativo.

**48 Lema.** *Sea $\alpha, \beta \in ON$. Entonces,*

$$\alpha \cdot \beta = \{\alpha \cdot \xi + \eta | \xi < \beta \wedge \eta < \alpha\} \tag{2}$$

*Proof.* Procedemos por inducción sobre $\beta$:

- Si $\beta = 0$, entonces

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot 0 = 0 = \varnothing = \{\alpha \cdot \xi + \eta | \xi < \beta \wedge \eta < \alpha\}$$

- Si (**??**) se mantiene para $\gamma$, y si $\beta = S(\gamma)$, entonces

$$\alpha \cdot \beta = \alpha(\gamma + 1) = \alpha \cdot \gamma + \alpha \text{ (por el lema } \mathbf{??}\text{)}$$

$$= \alpha \cdot \gamma \cup \{\alpha \cdot \gamma + \eta | \eta < \alpha\} \text{ (por hipótesis de inducción)}$$

$$= \{\alpha \cdot \xi + \eta | \xi < \gamma \wedge \eta < \alpha\} \cup \{\alpha \cdot \gamma + \eta | \eta < \alpha\}$$

$$= \{\alpha \cdot \xi + \eta | \xi < \beta \wedge \eta < \alpha\}$$

- Si (**??**) se mantiene para cada $\gamma < \beta$, con $\beta$ un ordinal límite:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta &= \bigcup_{\gamma \in \beta} (\alpha \cdot \gamma) \text{ (por hipótesis de inducción)}\\ &= \bigcup_{\gamma \in \beta} \{\alpha \cdot \xi + \eta | \xi < \gamma \wedge \eta < \alpha\}\\ &= \{\alpha \cdot \xi + \eta | \xi < \beta \wedge \eta < \alpha\}\end{aligned}$$

□

**49 Corolario.** *Sean $\alpha, \beta, \gamma \in ON$ tales que $\alpha > 0$ y $\beta < \gamma$. Entonces, $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$.*

**50 Corolario.** *(Algoritmo de la división)*
*Supongase $\alpha, \beta \in ON$ tales que $1 \leqslant \alpha < \beta$. Entonces, existe un único par de ordinales $\langle \xi, \eta \rangle$ tales que*

$$\eta < \alpha \wedge \beta = \alpha \cdot \xi + \eta \tag{3}$$

*Proof.* Sean $\alpha, \beta$ como en la hipótesis. La existencia de $\xi$ y de $\eta$ como en (**??**) se sigue del lema **??**. Para mostrar la unicidad, suponemos:

$$\alpha \cdot \xi + \eta = \alpha \xi' + \eta' \wedge \eta, \eta' < \alpha \tag{4}$$

i Supongamos $\xi = \xi'$. Entonces, $\alpha \cdot \xi = \alpha \cdot \xi'$, y se sigue del corolario **??** que $\eta = \eta'$.

ii Supongamos $\xi \neq \xi'$. Sin perdida de generalidad, $\xi < \xi'$. Entonces, $\xi + 1 \leqslant \xi'$, y $\alpha \cdot \xi + \eta < \alpha\xi + \alpha = \alpha \cdot (\xi + 1) \leqslant \alpha\xi' \leqslant \alpha \cdot \xi' + \eta'$, lo cuál contradice (**??**).

□

**51 Teorema.** *Sea $\langle X, \preceq_X \rangle$ y $\langle Y, \preceq_Y \rangle$ un buen orden, y sea $\alpha = \mathrm{ot}(\langle X, \preceq_X \rangle)$, $\beta = \mathrm{ot}(\langle Y, \preceq_Y \rangle)$. Entonces,*

$$\alpha \cdot \beta = \mathrm{ot}(\langle X, \preceq_X \rangle \otimes^a \langle Y, \preceq_Y \rangle),$$

*con $\otimes^a$ el producto antilexicográfico.*

**52 Corolario.** *Sea $\alpha, \beta, \gamma \in ON$. Entonces,*

- $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

**53 Definición.** Sea $\alpha \in$ ON. Por recursión sobre $\beta$, definimos un ordinal $\alpha^\beta$ como sigue:

- $\alpha^0 = 1$;

- $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \cdot \alpha$, si $\beta = \gamma + 1$;
- $\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} \alpha^\gamma$, si $\beta$ es un ordinal límite mayor a cero.

A continuación presentaremos un ordinal importante:

**54 Definición.** Consideremos la siguiente notación:

$$\omega_0 = \omega \wedge \omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$$

Luego, definimos el siguiente ordinal:

$$\varepsilon_0 = \bigcup_{n\in\omega} \omega_n$$

Así mismo, cabe señalar que $\varepsilon_0$ es un conjunto numerable.

**55 Ejemplo.** Consideremos los ordinales 2,3 y $1 \leqslant \omega$, entonces

$$2^\omega = 3^\omega.$$

**56 Proposición.** *Sean $\alpha, \beta, \gamma \in ON$. Entonces,*

- $(1 < \alpha \wedge \beta < \gamma) \Longrightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma$*;*
- $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$*;*
- $\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.

## 2 Sucesiones de Goodstein e hidras asociadas

**57 Teorema.** *(Forma normal de Cantor)*
*Sean* $\alpha, \beta \in ON$ *tales que* $1 < \alpha \leqslant \beta$. *Entonces existe una única* $k$ *y únicos* $\gamma_0, \cdots, \gamma_{k-1}$ *y* $\delta_0, \cdots, \delta_{k-1}$ *con* $\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_{k-1}$ *y* $0 < \delta_i < \alpha$ *para* $i < k$ *tal que*

$$\beta = \alpha^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \alpha^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \cdots + \alpha^{\gamma_{k-1}} \cdot \delta_{k-1} \tag{5}$$