



---

## MVO32: Lista 03

---

### **Students**

Matheus Ribeiro Sampaio

Gabriel Fonseca Miranda

### **Professor:**

Antonio Bernado

Aerospace Engineering Departament

ITA

17 de novembro de 2020

Sumário

<b>1</b>	<b>Q1</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Q2</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Q3</b>	<b>7</b>
3.1	3a . . . . .	7
3.2	3b . . . . .	7
3.3	3c . . . . .	8
3.4	3d . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Q4</b>	<b>10</b>
4.1	4a . . . . .	10
4.2	4b . . . . .	10
4.3	4c . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Q5</b>	<b>11</b>

# 1 Q1

Os resultados são apresentados nas tabelas 1, 2, 3 e 4.

Tabela 1: Variáveis de estado no equilíbrio.

Variáveis de estado - X		
V	230,15	m/s
$\alpha$	1,7686	deg
q	0	deg/s
$\theta$	1,7686	deg
h	11582,4	m
$\beta$	0	deg
$\phi$	0	deg
p	0	deg/s
r	0	deg/s
$\psi$	0	deg

Tabela 2: Variáveis de controle no equilíbrio.

Variáveis de controle - U		
throttle <sub>l</sub>	42,08	%
throttle <sub>r</sub>	42,08	%
i <sub>t</sub>	-0,4495	deg
$\delta_e$	0	deg
$\delta_a$	0	deg
$\delta_r$	0	deg

Tabela 3: Variáveis de saída no equilíbrio.

Variáveis de saída - Y		
$\gamma$	0	deg
Thrust <sub>l</sub>	14808,02	N
Thrust <sub>r</sub>	14808,02	N
Mach	0,78	-
CD	0,029	-
CL	0,5345	-
Cm	-0,0121	-
CY	0	-
Cl	0	-
Cn	0	-

Tabela 4: autovalores da dinâmica linearizada.

Auto-valores	Modo
$-0,5861 + 1,6377 i$	Período curto
$-0,5861 - 1,6377 i$	Período curto
$-0,0011 + 0,0660 i$	Fugóide
$-0,0011 - 0,0660 i$	Fugóide
$-0,0011$	Altitude
$-2,1760$	Rolamento puro
$-0,1118 + 1,6730 i$	Dutch Roll
$-0,1118 - 1,6730 i$	Dutch Roll
$-0,0087$	Espiral

Para identificar os modos naturais correspondentes a cada autovalor, inicialmente trabalhamos com os pares complexos conjugados. A cada autovalor, observamos o seu respectivo autovetor.

$-0,5861 \pm 1,637i$ : O seu autovetor correspondente apresenta apenas contribuições de variáveis de estado longitudinais, eliminando a possibilidade de um Dutch Roll. Esse autovalor, por outro lado, está associado a uma frequência maior usando-se o comando *damp()*. Portanto, trata-se do Período curto.

$-0,0011 \pm 0,0660i$ : O seu autovetor também apresenta contribuições apenas das variáveis de estado longitudinais, em especial da velocidade e altitude, além de apresentar uma frequência menor com o comando *damp()*, caracterizando o Fugóide.

$-0,1118 \pm 1,6730i$ : Por eliminação, conclui-se que trata-se do Dutch Roll. Podemos constatar também que o seu autovetor apresenta contribuições das variáveis látero-direcionais, corroborando para a conclusão encontrada.

$-2,1760$ : autovalor real de maior módulo. Trata-se do Rolamento puro.

$-0,0011$ : Esse autovalor não se trata da Espiral, pois seu autovetor não apresenta contribuições das variáveis látero-direcionais, restringindo-se a contribuições mais relevantes de  $x$  e  $h$  (e um pouco de  $V$ ). Portanto, por eliminação, trata-se do autovalor relacionado à Altitude.

$-0,0087$ : Por eliminação, trata-se do Espiral. Podemos constatar também que seu autovetor apresenta apenas contribuições das variáveis látero-direcionais, corroborando para nossa conclusão.

## 2 Q2

Os resultados são apresentados nas figuras 2, 3, 4, 5 e 6. Nas curvas de throttle e Thrust, a linha azul corresponde ao motor esquerdo, enquanto que a linha vermelha ao direito.

Nos primeiros 30 segundos de simulação o avião apresenta uma resposta oscilatória sub amortecida nas variáveis látero-direcionais:  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $p$ ,  $r$  e  $\beta$ . Na figura 1 nota-se mais claramente que se trata do modo de Dutch Roll que predomina a resposta da aeronave.

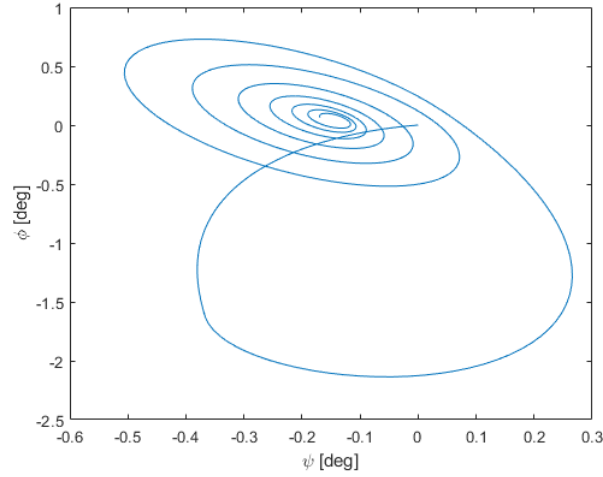


Figura 1: Variação de  $\phi$  e  $\psi$  em resposta ao doublet.

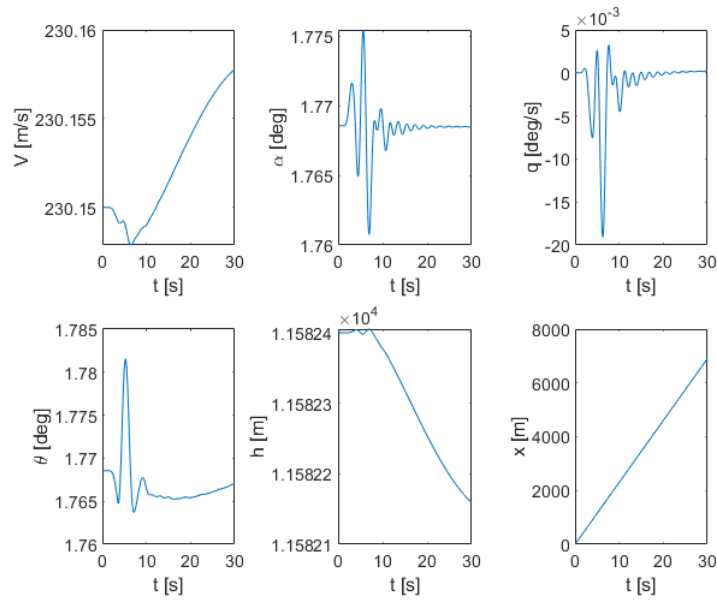


Figura 2: Resposta das variáveis de estado longitudinais.

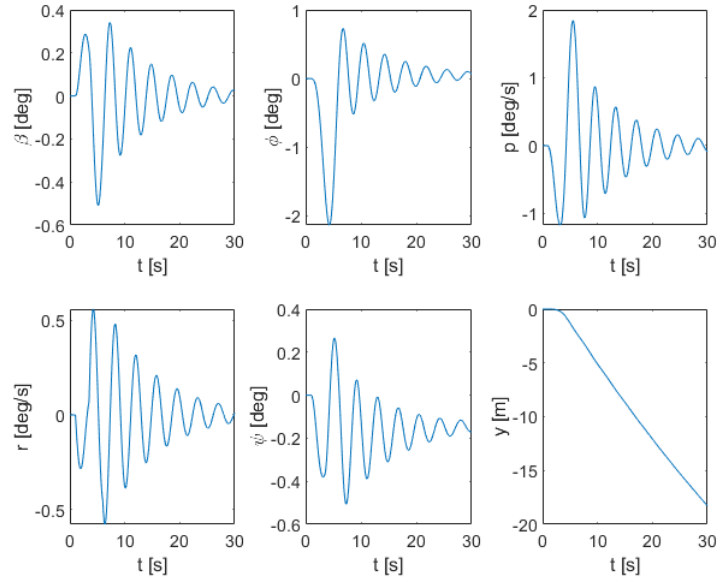


Figura 3: Resposta das variáveis de estado látero-direcionais.

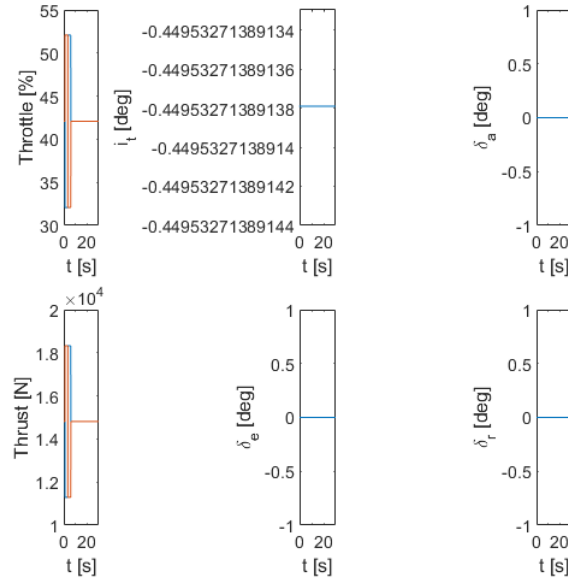


Figura 4: Resposta das variáveis de controle.

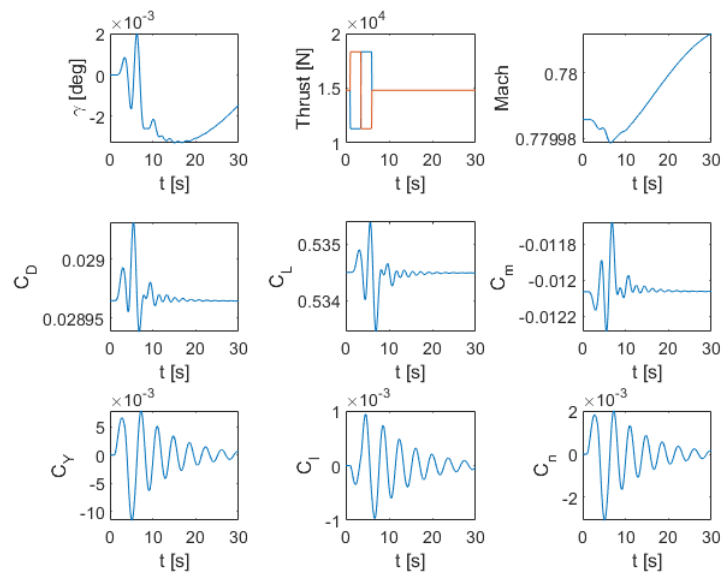


Figura 5: Resposta das variáveis de saída.

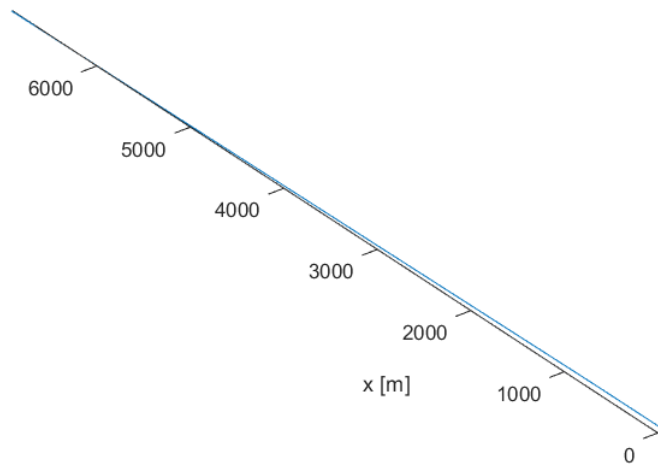


Figura 6: Caminho.

### 3 Q3

#### 3.1 3a

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{1}{2I_{xx}} \rho V^2 S b \left( C_{l_p} \frac{pb}{2V} + C_{l_{\delta_a}} \delta_a \right) \\ \dot{p} &= \left( \frac{1}{4I_{xx}} \rho V S b^2 C_{l_p} \right) p + \frac{1}{2I_{xx}} \rho V^2 S b \delta_a C_{l_{\delta_a}} = A p + B(t) \\ \dot{p} - A p &= B(t) \implies -\frac{1}{A} \dot{p} + p = -\frac{1}{A} B(t) \implies \tau_R \dot{p} + p = f(t)\end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{4I_{xx}} \rho V S b^2 C_{l_p} \\ B &= \frac{1}{2I_{xx}} \rho V^2 S b \delta_a C_{l_{\delta_a}} \\ f(t) &= -\frac{1}{A} B(t) \\ \tau_R &= -\frac{1}{A} = -\frac{4I_{xx}}{\rho V S b^2 C_{l_p}}\end{aligned}$$

Substituindo os valores, encontramos:

$$\boxed{\tau_R = 0.5527 \text{ s}} \text{ (dinâmica de rolamento simplificada)}$$

Para o autovetor do modo de rolamento encontrado na questão 1, obtemos com o comando *damp()*:

$$\boxed{\tau_R = 0.4596 \text{ s}} \text{ (dinâmica completa linearizada)}$$

A dinâmica simplificada restringe-se ao rolamento puro da resposta  $(\phi, p)$ . Entretanto, a dinâmica completa ainda prevê (pela análise dos autovetores) uma pequena participação de  $\beta, \psi$  e  $r$ , que vêm do acoplamento entre rolamento, guinada e derrapagem, que caracteriza-se por um movimento oscilatório amortecido. Logo, ainda há um pequeno acoplamento deste modo de Rolamento puro com o Dutch roll e por isso as constantes de tempo são diferentes entre si.

#### 3.2 3b

Considerando a resposta a um degrau  $\bar{\delta}_a$ , podemos definir  $A$  e  $B$  constantes:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{4I_{xx}} \rho V S b^2 C_{l_p} \\ B &= \frac{1}{2I_{xx}} \rho V^2 S b \bar{\delta}_a C_{l_{\delta_a}}\end{aligned}$$

Dessa forma, resolvendo a equação diferencial de primeira ordem, encontramos:

$$\begin{aligned}p &= -\frac{B}{A} + cte \cdot e^{At} \text{ , } cte \in \mathbb{R} \\ p &= -\frac{2V \bar{\delta}_a C_{l_{\delta_a}}}{b C_{l_p}} + cte \cdot \exp \left( \left( \frac{1}{4I_{xx}} \rho V S b^2 C_{l_p} \right) t \right)\end{aligned}$$

Partindo-se da condição de equilíbrio  $p = 0$  no tempo  $t = 0$ , obtemos a constante real.



$$p(t) = -\frac{2V\bar{\delta}_a C_{l_{\delta_a}}}{bC_{l_p}} + \frac{2V\bar{\delta}_a C_{l_{\delta_a}}}{bC_{l_p}} \cdot \exp\left(\left(\frac{1}{4I_{xx}}\rho V S b^2 C_{l_p}\right)t\right)$$

Admitindo-se que  $C_{l_p} < 0 \implies A < 0$ , podemos encontrar a rotação  $p_{ss}$  no regime estacionário no tempo  $t \rightarrow \infty$ , onde a exponencial tende a zero. Portanto:

$$p_{ss} = -\frac{2V\bar{\delta}_a C_{l_{\delta_a}}}{bC_{l_p}}$$

Podemos ainda encontrar a expressão para  $\phi(t)$ :

$$\dot{\phi} = p \implies \phi = \int_0^t p \, dt$$

$$\phi(t) = -\frac{2V\bar{\delta}_a C_{l_{\delta_a}}}{bC_{l_p}}t + \frac{8I_{xx}\bar{\delta}_a C_{l_{\delta_a}}}{\rho S b^3 C_{l_p}^2} \cdot \exp\left(\left(\frac{1}{4I_{xx}}\rho V S b^2 C_{l_p}\right)t\right) + cte \quad , \quad cte \in \mathbb{R}$$

Novamente aplicando a condição inicial, obtemos a expressão final:

$$\phi(t) = -\frac{2V\bar{\delta}_a C_{l_{\delta_a}}}{bC_{l_p}}t + \frac{8I_{xx}\bar{\delta}_a C_{l_{\delta_a}}}{\rho S b^3 C_{l_p}^2} \cdot \exp\left(\left(\frac{1}{4I_{xx}}\rho V S b^2 C_{l_p}\right)t\right) - \frac{8I_{xx}\bar{\delta}_a C_{l_{\delta_a}}}{\rho S b^3 C_{l_p}^2}$$

### 3.3 3c

Os resultados são apresentados nas figuras 7 e 8.

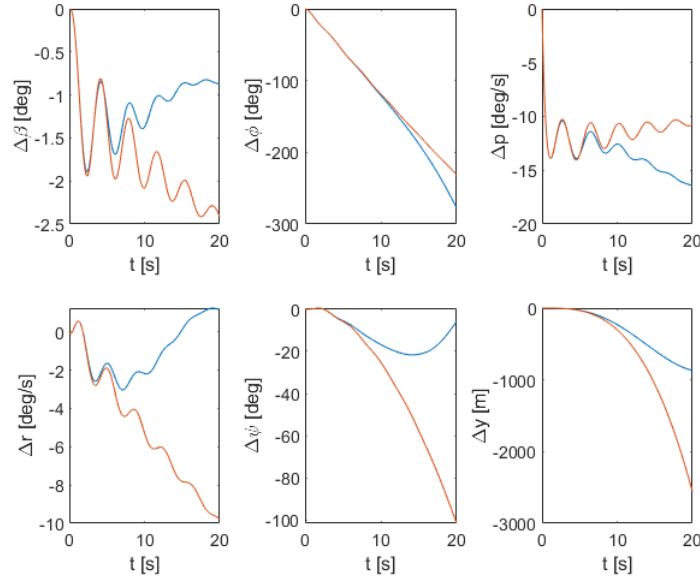


Figura 7: Variação dos parâmetros látero-direcionais, para a dinâmica não linear (curva azul) e linearizada (curva vermelha).

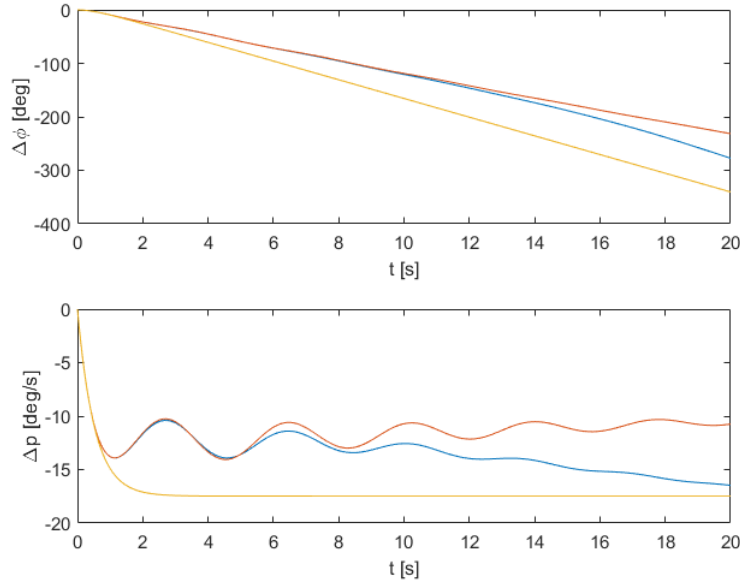


Figura 8: Variações  $\Delta p$  e  $\Delta \phi$ . Acrescentou-se a curva amarela que corresponde à dinâmica de rolamento simplificada com as equações deduzidas em **(b)**.

O modelo simplificado considera apenas a resposta rápida de  $(\phi, p)$ . Tendo em vista esse modelo simplificado de rolamento puro (curva amarela), a perturbação degrau positiva  $\delta_a > 0$  no aileron induz um momento de rolamento comandado  $\Delta C_l' = C_{l_{\delta_a}} \delta_a < 0$  (já que  $C_{l_{\delta_a}} < 0$ ). Por outro lado, aparece uma aceleração de rolamento  $\dot{p} < 0$  (como podemos verificar graficamente) que resulta em um momento amortecedor  $\Delta C_l'' = C_{l_p} \frac{pb}{2V} > 0$  (já que  $C_{l_p} < 0$ ). Dessa forma, o resultado disso, como obtido em **(b)**, é um decaimento exponencial da taxa de rolamento  $p$ , que se estabiliza quando  $\Delta C_l' + \Delta C_l'' = 0$  (ou  $p = p_{ss}$ ), fazendo com que  $\Delta \phi$  tenda a uma reta decrescente com essa inclinação, como observado na curva amarela.

Entretanto, a dinâmica completa ainda prevê um movimento oscilatório amortecido acoplando rolamento, guinada e derrapagem (Dutch roll), como podemos observar pelas oscilações amortecidas das variáveis de estado látero-direcionais. A perturbação induzida  $\Delta \beta < 0$  ainda proporciona uma guinada negativa  $\Delta C_n' = C_{n_\beta} \beta < 0$  (já que  $C_{n_\beta} > 0$ ), que é amortecida pelo surgimento de uma aceleração de guinada  $\dot{r} < 0$  com um momento amortecedor  $\Delta C_n'' = C_{n_r} \frac{rb}{2V} > 0$  (já que  $C_{n_r} < 0$ ). Esse evento pode ser observado no gráfico de  $\psi$  e o desvio de trajetória em  $y$ .

A dinâmica linearizada é eficaz para pequenas perturbações, prevendo com boa acurácia a resposta até certo intervalo de tempo onde as perturbações não se tornaram grandes o suficiente. A perturbação degrau de  $5^\circ$  de aileron foi consideravelmente elevada e induz perturbações que fazem com que a dinâmica linearizada se distancie da não linear a partir de certo tempo transcorrido de simulação. Constante-se isso pelas curvas vermelhas e azul praticamente sobrepostas para tempos próximo de zero.

### 3.4 3d

## 4 Q4

### 4.1 4a

A comparação é expressa na tabela 5.

Tabela 5: Comparação do modo de Dutch Roll encontrado por diferentes métodos.

Dutch Roll	Par complexo	$\omega_n(rad/s)$	$\zeta_n$
Dinâmica completa linearizada	$-0,1118 \pm 1,6730 i$	1,6767	0,0667
Dinâmica reduzida	$-0,2242 \pm 1,4150 i$	1,4326	0,1565

Com isso, observamos que o erro cometido ao se adotar a dinâmica reduzida é maior para a razão de amortecimento, onde obteve-se um erro relativo substancial de 135%. Para a frequência natural, o erro relativo é inferior, de 15%.

### 4.2 4b

O efeito da variação é apresentado na tabela 6.

Tabela 6: Variação quantitativa da frequência natural e do amortecimento do modo Dutch roll com a variação de cada derivada de estabilidade látero-direcional.

Derivada	Frequência Natural (rad/s)			Razão de amortecimento		
	-20%	Nominal	+20%	-20%	Nominal	+20%
$C_{l_\beta}$	1,6548	1,6767	1,6985	0,0843	0,0667	0,0504
$C_{n_\beta}$	1,5404		1,8040	0,0648		0,0677
$C_{Y_\beta}$	1,6751		1,6784	0,0610		0,0723
$C_{l_p}$	1,6756		1,6739	0,0494		0,0808
$C_{n_p}$	1,6573		1,6958	0,0746		0,0592
$C_{Y_p}$	1,6768		1,6766	0,0667		0,0666
$C_{l_r}$	1,6729		1,6806	0,0650		0,0684
$C_{n_r}$	1,6766		1,6766	0,0476		0,0857
$C_{Y_r}$	1,6777		1,6758	0,0666		0,0668

### 4.3 4c

O Dutch roll contempla um movimento acoplado de rolamento, guinada e derrapagem. Observamos que variando-se as derivadas com relação ao momento de rolamento  $p$  ( $C_{l_p}$ ,  $C_{n_p}$  e  $C_{Y_p}$ ), há maiores variações para o amortecimento do que para frequência, desviando-se de seu valor nominal. Dessa forma, se nos restringir de forma simplificada apenas aos graus de liberdade  $\Delta r$  e  $\Delta \beta$ , suprimindo o efeito do rolamento (e por conseguinte de suas derivadas de estabilidade), há um maior erro na razão de amortecimento. Isso justifica o fato da dinâmica reduzida funcionar razoavelmente para a frequência natural (que apresenta dependência relevante das derivadas de estabilidade de  $\beta$  e  $r$ , como tabelado), mas não para o amortecimento (que também apresenta considerável dependência das derivadas de estabilidade de  $p$ ).

## 5 Q5

Os resultados são apresentados nas tabelas 7, 8 e 9. Comparando com os resultados obtidos no exercício 1 notamos uma diferença significativa apenas nas variáveis:  $throttle$ ,  $thrust$ ,  $\phi$ ,  $\delta_a$  e  $\delta_t$ .

A diferença entre os equilíbrios de leme e aileron são consequências diretas do desbalanceamento de empuxo gerado pela hipotética falha. A diferença de tração entre os motores gera um momento de guinada na aeronave e por isso é necessário a utilização do leme para o equilíbrio. Além disso, a diferença de tração dos motores junto com o ângulo de incidência dos motores geram um momento de rolamento sendo necessário um pequeno acionamento dos ailerons para o equilíbrio, vale ressaltar que o momento resultante do giro interno do motor não é analisado. Por fim, é interessante mostrar que o profundor manteve-se na mesma deflexão devido à sustentação gerada pelos motores assim como o momento de arfagem serem praticamente os mesmos nos dois casos.

Tabela 7: Variáveis de estado no equilíbrio com falha.

Variáveis de estado - X		
V	230,15	m/s
$\alpha$	1,7683	deg
q	0	deg/s
$\theta$	1,7682	deg
h	11582,4	m
$\beta$	0	deg
$\phi$	-0,6113	deg
p	0	deg/s
r	0	deg/s
$\psi$	-0,0189	deg

Tabela 8: Variáveis de controle no equilíbrio com falha.

Variáveis de controle - U		
$throttle_l$	69,21	%
$throttle_r$	15	%
$i_t$	-0,4493	deg
$\delta_e$	0	deg
$\delta_a$	0,2443	deg
$\delta_r$	0,9198	deg

Tabela 9: Variáveis de saída no equilíbrio com falha.

Variáveis de saída - Y		
$\gamma$	0	deg
Thrust <sub><i>l</i></sub>	24354,02	N
Thrust <sub><i>r</i></sub>	5278,09	N
Mach	0,78	-
CD	0,029	-
CL	0,5345	-
Cm	-0,0121	-
CY	-0,0052	-
Cl	-0,0001	-
Cn	-0,0030	-