Modèles de pertes non-homogènes avec dépendance pour la prime non-acquise

Sébastien Jessup Mathieu Pigeon Jean-Philippe Boucher

Article de maîtrise

30 juin 2021

Recherche financée par l'Autorité des Marchés Financiers

Table of contents

Introduction

Introduction

• Les assureurs en IARD font face à un cycle de production inversé : au moment d'écrire un contrat, ils ne savent pas combien celui-ci va leur coûter.

• Cette incertitude requiert d'avoir des fonds en réserve. Une réserve actuarielle est le montant de perte devant encore être payé pour les contrats déjà souscrits.

• Nous nous concentrons sur une partie spécifique des réserves appelé le passif des primes, et plus précisément sur le risque lié à la prime non-acquise.

• La méthode et les conclusions discutées sont applicables au réserves en général.

Types de passif

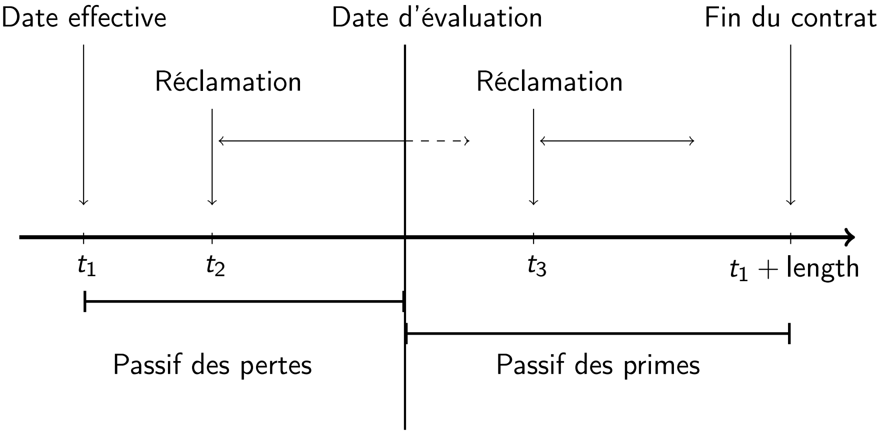


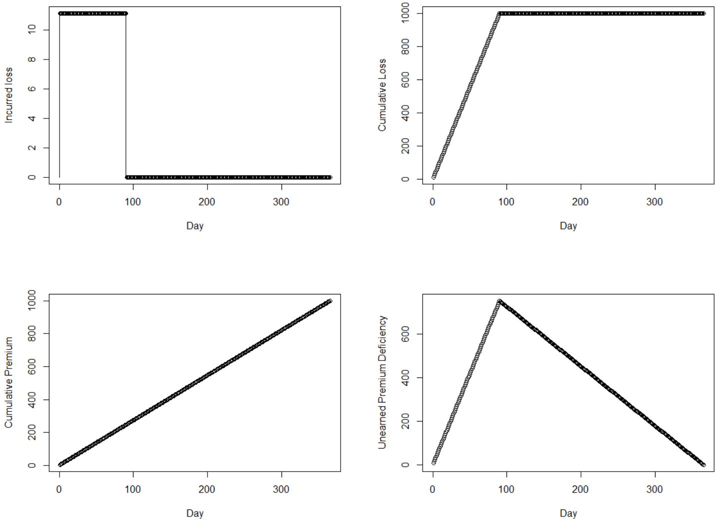
Figure – Séparation du passif des pertes et des primes

Risque lié à la prime non-acquise

- La prime non-acquise est la prime attribuée au risque lié à la portion restante du contrat.

- Il y a quatre principaux facteurs à ce risque.
  - Quand se produisent les pertes ?
  - Combien coûtent-elles ?
  - Comment la prime est-elle acquise ?
  - Quand sont écrits les contrats durant l'année ?

Exemple de risque : pertes concentrées dans les trois premiers mois



Couvertures et dépendance

• La couverture d'assurance est séparée entre différents types de perte.

• Quand une réclamation survient, elle implique souvent plusieurs couvertures.

• Certaines de ces couvertures sont reliées, et ne devraient intuitivement pas être considérées séparément.

• Un cinquième facteur : **comment les pertes sont-elles reliées entre les couvertures ?**

Modèles

Hypothèses

- Les contrats sont souscrits pour un an.

- La survenance d'une perte est indépendante de la sévérité.

- On a seulement besoin du montant total, pas de la séquence de paiements.

Modèle général - Dimension C

- Il y a n contrats, chacun avec une prime non-acquise P_k^{UE}.
- $t_k^{(E)} \in [0, 1]$ est la date effective du contrat (connue).
- $N_k \sim Po(\lambda_k)$ est le nombre de pertes restantes du k^{e} contrat.
- Si $N_k > 0$, $\mathbf{I}_k = [I_k^{(1)} \cdots I_k^{(C)}]$, où $I_k^{(c)} = 1$ indique la présence de perte pour la couverture c.
- Si $N_k > 0$, $\mathbf{Y}_k = [Y_k^{(1)} \cdots Y_k^{(C)}]$, où $Y_k^{(c)}$ est le montant de perte associé à la couverture c.
- $T_k \in [0, 1]$ est le temps de réclamation.

Modèle général - Dimension C

$$S_k = \sum_{c=1}^{C} I_k^{(c)} Y_k^{(c)}$$

$$S^* = \sum_{k=1}^{n} S_k$$

• Le risque lié à la prime non-acquise, Z, est l'excès des pertes restantes S^* au dessus de la réserve de prime non-acquise :

$$Z = S^* - \sum_{k=1}^{n} P_k^{UE}.$$

Modèle général - Dimension C

• La fréquence des pertes non-acquises, N_k, doit considérer la saisonnalité T_k pour une date effective $t_k^{(E)}$ telle que

$$\mathbb{E}[N_k] = \lambda_k = F_{T_k}(t_k^{(E)})e^{\mathbf{X}_k\boldsymbol{\beta}},$$

où $\mathbf{X}_k$ est l'ensemble de covariables pour le k^{e} contrat.

• T_k est supposé constant par morceau (chaque mois est constant, mais différent des autres mois).

• La sévérité, Y_k, n'utilise pas la saisonnalité et est modélisée par copules, où

$$F_{\mathbf{Y}_k}(\mathbf{y}) = C(F_{Y_k^{(1)}}(y^{(1)}), \cdots, F_{Y_k^{(C)}}(y^{(C)})).$$

Étude de cas

Description des données

• Base de données d'Ontario de 132 093 contrats avec des dates effectives du 15 janvier 2015 au 31 décembre 2018.

• Cinq couvertures principales : Indemnité d'accident (AB), Collision, Tous risques (Comp), Indemnisation directe (DCPD), Responsabilité civile (Liab).

• On suppose une date d'évaluation du 31 décembre.

• Les données sont séparées en ensemble d'entraînement et test ; les contrats de 2015-2016 sont utilisés pour ajuster le modèle, 2017 forme l'ensemble test.

Cas indépendant et dépendant

Indépendant

- $S^{*(comp)} + S^{*(other)}$, où $C = 1$ pour $S^{*(comp)}$ et $C = 4$ pour $S^{*(other)}$.
- $I_k^{(comp)}$ et $\mathbf{I}_k = [I^{(AB)}, I^{(Coll)}, I^{(DCPD)}, I^{(Liab)}]$ basé sur la distribution jointe empirique.
- $C(F_{Y_k^{(1)}}(y^{(1)}), \cdots, F_{Y_k^{(C)}}(y^{(C)})) = F_{Y_k^{(1)}}(y^{(1)}) \cdots F_{Y_k^{(C)}}(y^{(C)})$, avec ici aussi $C = 1$ pour $S^{*(comp)}$ et $C = 4$ pour $S^{*(other)}$.

Dépendant

- Les deux premiers items sont identiques au cas indépendant.
- On permet l'utilisation de copules autre que la copule d'indépendance.

Méthode de sélection de paramètres

• On suppose que la garantie Tous risques a une saisonnalité différente des autres couvertures, $T_k^{(comp)}$ et $T_k^{(other)}$.

• $N_k^{(comp)} \sim Po(F_{T_k^{(comp)}}(t_k^{(E)})e^{\mathbf{X}_k\beta})$ est indépendant de $N_k^{(other)} \sim Po(F_{T_k^{(other)}}(t_k^{(E)})e^{\mathbf{X}_k\beta})$.

• Pour les marginales, on considère des distributions Gamma, Pareto, lognormales et Burr, en sélectionnant à l'aide de diagrammes quantile-quantile, du BIC et de Kolmogorov-Smirnov.

• On sélectionne les copules dans les cas dépendants avec des diagrammes de rang et la fonction de queue left-right :

$$LR(z) = \begin{cases} \Pr(F_X(x) < z | F_Y(y) < z), & \text{si } 0 \leq z < 0.5 \\ \Pr(F_X(x) > z | F_Y(y) > z), & \text{si } 0.5 \leq z < 1. \end{cases}$$

Analyse de dépendance - coefficients de corrélation

Couvertures	Tau de Kendall	Rho de Spearman
AB, Coll	0.011	-0.062
AB, DCPD	**0.053**	**0.097**
AB, Liab	**0.280**	**0.547**
Coll, DCPD	**0.429**	**0.301**
Coll, Liab	0.027	0.010
DCPD, Liab	-0.005	0.061

Analyse de dépendance - Diagrammes de rang

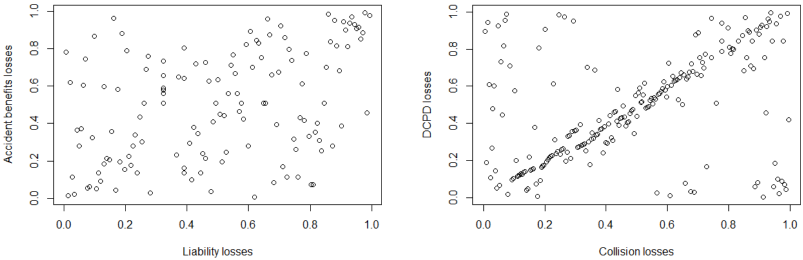


Figure – Diagrammes de rang pour Responsabilité civile et AB (gauche) et Collision et DCPD (droite)

Sélection et qualité d'ajustement

Couvertures	Copule
AB, DCPD	Frank
AB, Liab	Gumbel
Coll, DCPD	Personnalisée (% responsibilité)

	Marginale choisie	BIC	KS
Indemnité d'accident	Burr	4 847	0.1161
Collision	Burr	11 363	0.0268
Tous risques	Pareto	10 075	0.2098
DCPD	lognormal	14 866	0.0309
Collision + DCPD	lognormal	4 427	0.0616
Resp. civile	lognormal	2 379	0.1895

Comparison of reserve amounts

- Le test de capital minimum de Financial Services Commission of Ontario (FSCO) nécessite le 99e percentile d'espérance conditionnelle unilatérale (CTE) ou la 99.5e valeur au risque (VaR).

	Entraînement (000s)		**Test (000s)**	
	Ind.	**Dep.**	**Ind.**	**Dep.**
Moyenne	1 689	2 222	2 488	3 164
VaR (99.5%)	10 872	11 279	12 094	13 282
CTE (99%)	11 226	11 538	12 452	13 688

- Inclure la dépendance dans le modèle mène à des estimés plus conservateurs.

Conclusion

• L'évaluation du passif des primes est liée à quatre facteurs : la saisonnalité des pertes, la fréquence et sévérité des pertes, l'acquisition de la prime, et la souscription.

• La saisonnalité et la dépendance devraient être considérées dans la modélisation des pertes. La saisonnalité devrait également être reconnue dans l'acquisition de la prime.

• La volatilité dans les pertes implique que plusieurs années d'accident devraient être utilisées pour entraîner le modèle.

• Il serait intéressant de voir comment le risque change dans une région avec plus de neige, donc plus d'accidents en hiver.

• Il serait aussi intéressant de considérer la sévérité comme dépendante du temps.

Bibliographie

• Antonio, K., Plat, R. (2014). Micro-level stochastic loss reserving for general insurance. Scandinavian Actuarial Journal, 2014(7), 649-669.

• Jessup, S., Boucher, J. P., & Pigeon, M. (2020). On fitting dependent nonhomogeneous loss models to unearned premium risk. North American Actuarial Journal, 1-19.

• Office of the Superintendent of Financial Institutions (2018). Minimum capital test for federally regulated property and casualty insurance companies.

• Verrall, R. and Wüthrich, M. (2016). Understanding reporting delay in general insurance. Risks, 4(3) :25.

Merci de m'avoir écouté !