

Analyse de la solution au problème d'exécution optimale dans le cadre d'un modèle de carnet d'ordres limites avec résilience

Étienne Bacon,
Supervisé par Clarence Simard

4 août 2021

Déroulement de la présentation

- 1 Marché et carnet d'ordres limites
- 2 Le modèle de carnet d'ordres limites
- 3 La programmation dynamique
- 4 Problématique et application au modèle

Déroulement de la présentation

- 5 Solutions explicites au problème d'exécution optimale
- 6 Analyse des solutions numériques au problème d'exécution optimale

Marché et carnet d'ordres limites

Liquidité et friction dans un marché

Un marché parfaitement liquide est caractérisé par :

- transactions instantannées,
- l'investisseur paye toujours le prix du marché.

Un marché sans friction est caractérisé par une absence de coût de transactions.

Liquidité et friction dans un marché

Il y a un problème apparent à utiliser ces hypothèses pour caractériser un marché.

- Hypothèses qui permettent de faciliter la modélisation des échanges boursiers et de simplifier les modèles obtenus Simard (2014).
- Peu réalistes et ne permettent pas de bien présenter les transactions d'un gros investisseur.
- Il y a toujours des frais lors d'une transaction.

Transactions dans un marché

Il y a principalement deux types de transactions dans un marché : les ordres de marché et les ordres limites.

Ordre limite :

- L'investisseur indique la quantité d'actions à transiger.
- L'investisseur indique le prix par action auquel il désire transiger.

Ordre de marché :

- L'investisseur indique la quantité d'actions qu'il désire transiger.
- L'investisseur exécute les ordres limites affichant le meilleur prix.

Les ordres sont répertoriés dans le carnet d'ordres limites.

Transactions dans un marché

Le carnet d'ordres limites est composé de deux parties : le bid et le ask.

Bid		Ask	
Quantité	Prix	Quantité	Prix
300	296.53	50	297.29
133	296.50	50	297.85
66	296.45	100	297.99
100	296.00	1100	298.00
100	294.48	374	298.18
5	293.94	300	298.27
12	293.37	500	298.41
100	293.16	400	298.42
100	293.10	40	298.44
100	292.00	500	298.50

Table 1: Dix premières entrées du carnet d'ordres limites d'Amazon le 7 novembre 2014 à 9h30.

Transactions dans un marché

Supposons qu'un investisseur décide d'envoyer un ordre de marché de 150 actions, alors le coût relié à l'achat est de

$$50 * 297.29 + 50 * 297.85 + 50 * 297.99 = 44656.50\$.$$

Le meilleur prix affiché dans le ask est maintenant de 297.99 avec une quantité de 50 actions.

Caractéristiques d'un carnet d'ordres limites

Pour concorder avec la réalité, un carnet d'ordres limites doit comprendre trois caractéristiques :

- la profondeur (depth),
- la résilience (resilience),
- l'étroitesse (tightness).

Caractéristiques d'un carnet d'ordres limites

La profondeur est la taille nécessaire que doit avoir une transaction pour faire varier les prix dans le carnet d'ordres limites.

- Un marché dont les prix varient moins est considéré comme profond et vice-versa.

La résilience est la capacité d'un marché à générer de nouveaux ordres limites pour prendre la place de ceux qui sont exécutés ou annulés.

- Un marché qui génère beaucoup d'ordres est considéré très résilient.

L'étroitesse est le coût pour un investisseur d'inverser sa position sur une courte période de temps. Par exemple, acheter et vendre immédiatement.

Caractéristiques d'un carnet d'ordres limites

Supposer qu'un marché est parfaitement liquide et sans friction n'est pas réaliste pour un gros investisseur. Quand ce dernier transige :

- il exécute plusieurs ordres limites à la fois,
- son coût par action augmente en fonction des ordres disponibles (profondeur),
- il laisse un impact sur les prix pour les périodes suivantes.

Le modèle de carnet d'ordres limites

Hypothèses

Les hypothèses du modèle sont :

- Le marché contient un gros investisseur et un ensemble de petits investisseurs.
- Le gros investisseur doit acheter une grande quantité d'actions au cours d'une période de temps donnée avec des ordres de marché.
- Les petits investisseurs transigent indépendamment du gros investisseur avec des ordres limites. Ils sont responsables de la variation des prix aléatoire et de la résilience.
- Pas de changement de position.
- Étude de la stratégie optimale d'achat.

Structure des prix dans le ask

La structure des prix F est définie par

$$F(t, y, x) = S_t(1 + y + x)^\alpha - S_t(1 + y)^\alpha.$$

Structure des prix dans le ask

- La structure des prix est une fonction continue et convexe,
- t est l'indice de temps,
- y est l'impact dans le marché,
- x est le nombre d'actions à acheter,
- $\alpha > 1$ est le paramètre de convexité qui caractérise la profondeur dans le marché,
- S_t est une variable aléatoire. Dans notre cas, elle joue le rôle du risque dans le ask. Par exemple, un MBG ou un CIR.

Processus d'impact

Le processus d'impact est défini par

$$A_t = X_t - \int_0^t h(s, A_s) ds,$$

pour tout $t \geq 0$, où $h(t, 0) = 0$, h est une fonction non négative et X_t est le nombre d'actions total acheté de 0 à t .

A_t doit être prévisible, non négatif et, pour tout $t \geq 0$, $A_t = 0$ si et seulement si $X_t = 0$.

Le processus d'impact quantifie le nombre d'actions manquant dans le carnet d'ordres limites pour retrouver l'impact initial A_0 .

Processus d'impact

Nous définissons la fonction de résilience h comme

$$\begin{aligned} h : [0, \infty)^2 &\rightarrow [0, \infty) \\ (t, \xi) &\mapsto h(t, \xi) = g(t)\xi, \end{aligned}$$

où la fonction g est définie comme

$$\begin{aligned} g : [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ t &\mapsto g(t). \end{aligned}$$

Processus d'impact

Nous supposons que l'investisseur transige en temps discret sur une période de temps fini $[0, T]$. Soit $\{t_k\}_{k=0,1,\dots,N}$, une partition de $[0, T]$, nous devons déterminer la valeur de l'impact à t_k pour connaître $F(t_k, A_{t_k}, x)$.

Soit u_{t_k} , le nombre d'actions acheté au temps t_k , il est possible de montrer que

$$A_{t_k} = \begin{cases} (A_{t_{k-1}} + u_{t_{k-1}})e^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} g(s) ds} & \text{pour } k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

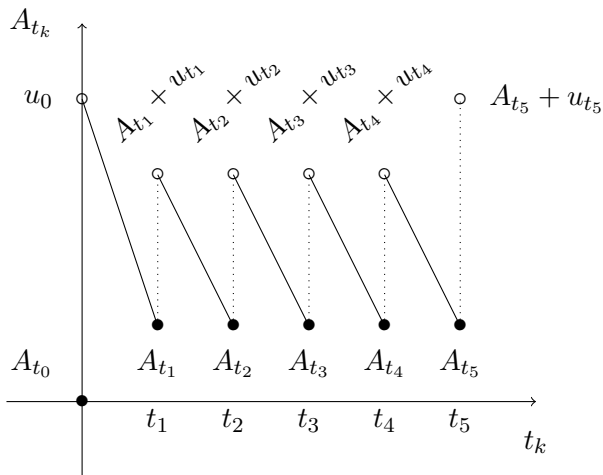


Figure 1: Exemple d'évolution de l'impact.

La programmation dynamique

Notations

Soit la partition $\{t_k\}_{k=0,\dots,N}$ de $[0, T]$ telle que

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_{N-1} < t_N = T$:

T : l'horizon de temps,

N : le nombre de décisions,

t_k : l'indice du temps discret,

s_{t_k} : une variable aléatoire au temps t_k ,

V_{t_k} : le vecteur d'états du système au temps t_k qui comprend la variable aléatoire s_{t_k} ,

μ_{t_k} : la règle de décision au temps t_k ,

u_{t_k} : la variable de contrôle au temps t_k .

Conditions d'applications

Un modèle doit comprendre Bertsekas (2012) :

- un système en temps discret, dont l'évolution est donnée par

$$V_{t_{k+1}} = f_{t_k}(V_{t_k}, u_{t_k}),$$

où f_{t_k} est une fonction qui décrit l'évolution du vecteur d'états,

- une variable aléatoire s_{t_k} ,
- un contrôle $u_{t_k} = \mu_{t_k}(V_{t_k})$,
- un coût additif de la forme

$$\mathbb{E} \left[p_{t_N}(V_{t_N}) + \sum_{k=0}^{N-1} p_{t_k}(V_{t_k}, \mu_{t_k}(V_{t_k})) \right],$$

où p_{t_k} sont les fonctions de coût.

L'algorithme de Bellman

L'algorithme Bellman (1957) permet de solutionner

$$\inf_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left[p_{t_N}(V_{t_N}) + \sum_{k=0}^{N-1} p_{t_k}(V_{t_k}, \mu_{t_k}(V_{t_k})) \right],$$

où $\pi = \{\mu_{t_0}, \dots, \mu_{t_{N-1}}\}$ et $u_{t_k} = \mu_{t_k}(V_{t_k})$.

L'idée est de procéder de façon récursive et rétrograde du temps t_{N-1} à t_0 , avec comme condition initiale que le coût au temps t_N est le coût optimal et qu'il ne dépend pas d'une décision.

L'algorithme de Bellman

Les étapes sont :

$$J_{t_N}^*(V_{t_N}) = p_{t_N}(V_{t_N}),$$

$$J_{t_k}^*(V_{t_k}) = \inf_{u_{t_k} \in U(V_{t_k})} \mathbb{E} \left[p_{t_k}(V_{t_k}, u_{t_k}) + J_{t_{k+1}}^*(V_{t_{k+1}}) | \mathcal{F}_{t_k} \right],$$

$$k = N - 1, \dots, 0,$$

où $U(V_{t_k})$ est l'ensemble des valeurs possibles de u_{t_k} qui dépend de l'état actuel du système.

L'algorithme de Bellman

À chaque étape, $u_{t_k}^* = \mu_{t_k}^*(V_{t_k})$ est obtenue en définissant

$$\mu_{t_k}^*(V_{t_k}) = \arg \min_{u_{t_k} \in U(V_{t_k})} \mathbb{E} \left[p_{t_k}(V_{t_k}, u_{t_k}) + J_{t_{k+1}}^*(V_{t_{k+1}}) | \mathcal{F}_{t_k} \right],$$

pour $k = N - 1, \dots, 0$. Ainsi, si elle existe, la stratégie optimale π^* est $\pi^* = \{\mu_{t_0}^*, \dots, \mu_{t_{N-1}}^*\}$.

Aversion au risque

Il est possible d'ajouter un paramètre qui prend en considération la variance dans le modèle Almgren et Chriss (1999). L'algorithme de Bellman prend alors la forme

$$J_{t_N}^{*,\lambda}(V_{t_N}) = p_{t_N}(V_{t_N}),$$

$$\begin{aligned} J_{t_k}^{*,\lambda}(V_{t_k}) = & \inf_{u_{t_k} \in U(V_{t_k})} \mathbb{E}[p_{t_k}(V_{t_k}, u_{t_k}) + J_{t_{k+1}}^{*,\lambda}(V_{t_{k+1}}) | \mathcal{F}_{t_k}] \\ & + \lambda \text{Var}[p_{t_k}(V_{t_k}, u_{t_k}) + J_{t_{k+1}}^{*,\lambda}(V_{t_{k+1}}) | \mathcal{F}_{t_k}], \\ & k = 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Le scalaire λ peut représenter l'aversion au risque de l'investisseur dans un cadre financier.

Problématique et application au modèle de carnet d'ordres limites

Lorsque le gros investisseur transige, nous nous rappelons que

- il exécute plusieurs ordres limites pour compléter sa transaction,
- il laisse un impact sur les prix non négligeable lors des transactions suivantes.

Mise en contexte

Pour contrer ce problème, l'intuition connue dans le milieu est de diviser sa transaction en plusieurs petites transactions.

Nous appelons stratégie naïve, la stratégie qui consiste à diviser le volume de transactions par le nombre de périodes prévu pour transiger.

Mise en contexte

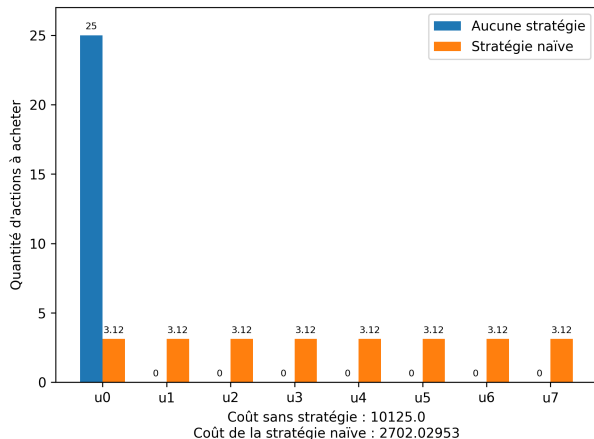


Figure 2: Comparaison entre une seule transaction et la stratégie naïve avec les paramètres $T = 8, N = 8, S_0 = 15, \alpha = 2, B = 25, g_0 = 1, \delta = 0, \sigma = 0.2$.

Notations

T : L'horizon de temps pour transiger.

N : Le nombre de transactions.

B : Le nombre total d'actions à acheter.

u_{t_k} : Le nombre d'actions acheté au temps t_k .

Rappel

Rappelons que

$$F(t, y, x) = S_t(1 + y + x)^\alpha - S_t(1 + y)^\alpha,$$

où $\alpha > 1$, est la fonction qui donne le coût pour un lot d'actions x avec un impact y .

Vecteur d'états

Nous définissons le vecteur d'états comme

$$V_{t_k} = (x_{t_k}, A_{t_k}, S_{t_k}),$$

où x_{t_k} est le nombre d'actions restant à acheter au temps t_k , A_{t_k} l'impact dans le ask au temps t_k avant la transaction u_{t_k} et S_{t_k} est le processus stochastique qui caractérise la variabilité des prix dans le ask.

Vecteur d'états

L'évolution du vecteur d'états est

$$V_{t_{k+1}} = f(V_{t_k}, u_{t_k}) = (x_{t_{k+1}}, A_{t_{k+1}}, S_{t_{k+1}}),$$

où

$$x_{t_{k+1}} = x_{t_k} - u_{t_k},$$

$$A_{t_k} = \begin{cases} (A_{t_{k-1}} + u_{t_{k-1}})e^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} g(s) \, ds} & \text{pour } k = 1, \dots, N-1, \\ 0 & \text{si } k = 0, \end{cases}$$

et S est un processus stochastique.

Définition de la problématique

Le but est d'optimiser le coût d'achat total des actions sur N périodes avec comme contrainte que

$$\sum_{k=0}^{N-1} u_{t_k} = B.$$

Nous imposons aussi les conditions

P1 : $x_{t_0} = B,$

P2 : $u_{t_{N-1}} = x_{t_{N-1}}.$

Définition de la problématique

La première condition signifie qu'au départ il y a B actions à acheter.

La deuxième condition signifie que la transaction à t_{N-1} consiste à acquérir le nombre d'actions restant à acheter.

Définition de la problématique

Les stratégies d'achats admissibles sont

$$\Pi = \{\pi : \{\mu_{t_0}, \dots, \mu_{t_{N-1}}\}, 0 \leq \mu_{t_k}(V) \leq x, \forall k = 0, 1, \dots, N-1, \\ \mu_{t_{N-1}}(V) = x\},$$

où $V = (x, a, s)$. Nous définissons l'ensemble $U(V) = [0, x]$.

Définition de la problématique

Le problème à optimiser prend la forme

$$\inf_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{N-1} F(t_k, A_{t_k}, \mu_{t_k}(V_{t_k})) \right],$$

avec comme contraintes : P1, P2 et $\mu_{t_k}(V_{t_k}) \in U(V_{t_k})$ pour tout $k = 0, \dots, N - 1$

Définition de la problématique

Finalement, en définissant

$$p_{t_k}(V_{t_k}, u_{t_k}) = F(t_k, V_{t_k}, u_{t_k}) := F(t_k, A_{t_k}, u_{t_k}),$$

pour $k = 0, \dots, N - 1$, et $p_{t_N} = 0$, nous pouvons utiliser l'algorithme de programmation dynamique pour déterminer la stratégie optimale π^* .

Application de l'algorithme de Bellman

Voir le mémoire et Boyd et Vandenberghe (2004) pour la preuve qui démontre que la convexité dans le modèle est conservée et que le minimum existe et qu'il est unique.

Solutions explicites au problème d'exécution optimale

Quelques solutions explicites - Premier cas

Le premier cas :

- $S_{t_k} = S_0$ pour tout k ,
- A_{t_k} est indépendant du contrôle,
- $\lambda = 0$,
- $V_{t_k} = (x_{t_k}, A_{t_k}, S_0)$ pour tout k .

Quelques solutions explicites - Premier cas

Theorem (Premier théorème)

La stratégie optimale d'achat qui solutionne l'algorithme Bellman en supposant les hypothèses du premier cas est

$$\mu_{t_k}^*(V_{t_k}) = \frac{x_{t_k}}{N-k} + \frac{1}{N-k} \sum_{j=k+1}^{N-1} (A_{t_j} - A_{t_k}), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

La fonction de coût $J_{t_k}^$ associée est*

$$J_{t_k}^*(V_{t_k}) = (N-k)S_0 \left(1 + \frac{x_{t_k}}{N-k} + \frac{1}{N-k} \sum_{j=k}^{N-1} A_{t_j} \right)^\alpha - S_0 \sum_{j=k}^{N-1} (1 + A_{t_j})^\alpha, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Quelques solutions explicites - Premier cas

Theorem (Suite du premier théorème)

De plus, la décision optimale au temps t_k lorsque le système est à l'état optimal est

$$\mu_{t_k}^*(V_{t_k}^*) = \frac{B}{N} + \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (A_{t_j} - A_{t_k}), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Quelques solutions explicites - Premier cas

- L'investisseur utilise la stratégie naïve et ajoute un terme prenant en considération la différence moyenne entre l'impact futur et actuel
- L'investisseur se préoccupe seulement de l'impact et du volume de transaction, car S_{t_k} est constant.
- S'il s'attend à une augmentation d'impact il transige plus maintenant et inversement.

Quelques solutions explicites - Deuxième cas

- $S_{t_k} = S_0$ pour tout k ,
- $A_{t_k} = A_0$ pour tout k ,
- $\lambda = 0$,
- $V_{t_k} = (x_{t_k}, A_0, S_0)$ pour tout k .

Corollary

La stratégie optimale d'achat en supposant les hypothèses du deuxième cas est

$$\mu_{t_k}^*(V_{t_k}) = \frac{x_{t_k}}{N - k}, \quad k = 0, \dots, N - 1.$$

De plus, si le système est à l'état optimal au temps t_k , la décision optimale est

$$\mu_{t_k}^*(V_{t_k}^*) = \frac{B}{N}, \quad k = 0, \dots, N - 1.$$

Quelques solutions explicites - Deuxième cas

- Stratégie naïve.
- Il n'y a pas d'impact à long terme créé par les transactions de l'investisseur.
- L'investisseur ne gagne aucun avantage à transiger sur une période plus qu'une autre.
- C'est le même résultat que dans Bertsimas et Lo (1998), qui est l'article fondateur.

Quelques solutions explicites - Troisième cas

- ❶ $S_{t_k} = S_{t_{k-1}} e^{(\delta - \sigma^2/2)(t_k - t_{k-1}) + \sigma(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})}$ est un mouvement brownien géométrique où $W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ est l'incrément d'un mouvement brownien standard de loi $N(0, t_k - t_{k-1})$ et S_{t_0} est connue,
- ❷ A_{t_k} est indépendant du contrôle,
- ❸ $\lambda = 0$,
- ❹ $V_{t_k} = (x_{t_k}, A_{t_k}, S_{t_k})$ pour tout k .

Quelques solutions explicites - Troisième cas

Theorem (Deuxième théorème)

La stratégie optimale d'achat qui solutionne l'algorithme de Bellman en supposant les hypothèses du troisième cas est

$$\mu_{t_k}^*(V_{t_k}) = P_{t_k} \left[(N - k - 1) + x_{t_k} + \sum_{j=k+1}^{N-1} A_{t_j} \right] - (1 - P_{t_k})(1 + A_{t_k}),$$

où P_{t_k} est défini comme

$$P_{t_k} = \begin{cases} \frac{\left[C_{t_{k+1}} e^{\delta(t_{k+1}-t_k)} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}}{1 + \left[C_{t_{k+1}} e^{\delta(t_{k+1}-t_k)} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}} & \text{pour } k = 0, \dots, N-2, \\ 1 & \text{si } k = N-1. \end{cases}$$

Quelques solutions explicites - Troisième cas

Theorem (Suite du deuxième théorème)

C_{t_k} est donné par

$$C_{t_k} = P_{t_k}^\alpha + (1 - P_{t_k})^\alpha C_{t_{k+1}} e^{\delta(t_{k+1} - t_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

La fonction de coût $J_{t_k}^*$ associée est

$$J_{t_k}^*(V_{t_k}) = S_{t_k} C_{t_k} \left[(N - k) + x_{t_k} + \sum_{j=k}^{N-1} A_{t_j} \right]^\alpha - S_{t_k} \sum_{j=k}^{N-1} (1 + A_{t_j})^\alpha e^{\delta(t_j - t_k)}$$

Quelques solutions explicites - Troisième cas

- Le dernier théorème met l'emphasis sur le fait que la solution à l'algorithme se complique rapidement lorsque les hypothèses se complexifient.
- Les résultats qui suivent sont déterminés numériquement en utilisant un algorithme d'approximation de la programmation dynamique.
- Approximation de la SDP basée sur une interpolation trilinéaire Ben-Ameur *et al.* (2013).

Analyse des solutions numériques au problème d'exécution optimale

Variabilité des prix dans le ask

Dans l'ensemble de ces analyses nous utilisons le mouvement brownien géométrique défini comme

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} e^{(\delta - \sigma^2/2)(t_k - t_{k-1}) + \sigma(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})},$$

où $W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ est l'incrément d'un mouvement brownien standard de loi $N(0, t_k - t_{k-1})$ et S_{t_0} est connue.

Premier cas - Hypothèses

Dans le premier cas, la fonction qui caractérise la résilience est définie comme

$$\begin{aligned} g : [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ t &\mapsto g(t) = g_0, \end{aligned}$$

où g_0 est une constante qui modélise la force de résilience dans le marché. Nous supposons que $\lambda = 0$.

Premier cas - Hypothèses

Le processus d'impact est donc donné par

$$A_{t_k} = \begin{cases} (A_{t_{k-1}} + u_{t_{k-1}})e^{-g_0(t_k - t_{k-1})} & \text{pour } k = 1, \dots, N-1, \\ 0 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

De plus dans l'ensemble des analyses s'il n'y a pas d'indication contraire les paramètres utilisés sont :

$T = 8, N = 8, S_0 = 15, B = 25, \alpha = 2, \delta = 0, g_0 = 1$ et $\sigma = 0, 2$.

Premier cas - Dérive

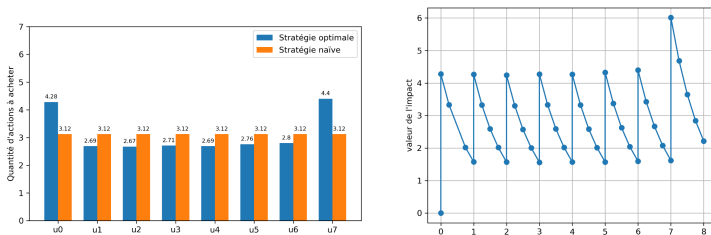


Figure 3: Marché avec dérive nulle $\delta = 0.00$.

- Coût de la stratégie optimale : 2673,04
- Coût de la stratégie naïve : 2702,03

Premier cas - Dérive

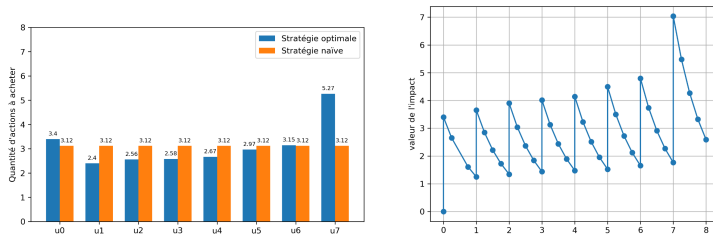


Figure 4: Marché avec dérive négative $\delta = -0.05$.

Premier cas - Dérive

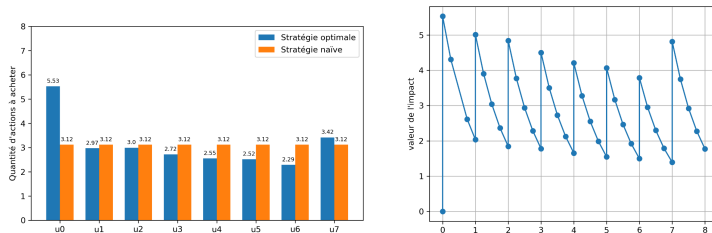


Figure 5: Marché avec dérive positive $\delta = 0.05$.

Premier cas - Dérive

- $\mathbb{E}[S_{t_{k+1}} | \mathcal{F}_{t_k}] = S_{t_k} e^{\delta(t_{k+1} - t_k)}.$
- Si $\delta \geq 0$ le processus est une sous-martingale, l'investisseur s'attend à une augmentation du prix dans le temps.
- Si $\delta \leq 0$ le processus est une sur-martingale, l'investisseur s'attend à une diminution du prix dans le temps.
- Si $\delta = 0$ le processus est une martingale, l'investisseur est indifférent dans le temps.
- Retrouve les résultats de Obizhaeva et Wang (2005) et Predoiu *et al.* (2011), car la résilience ne dépend pas du temps.

Premier cas - Résilience

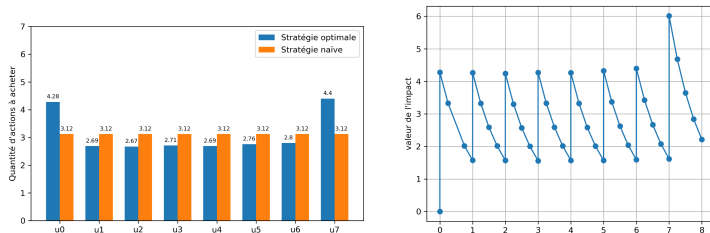


Figure 6: Marché avec force de résilience moyen $g_0 = 1.0$.

Premier cas - Résilience

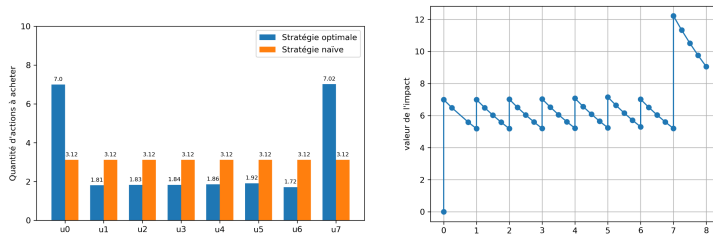


Figure 7: Marché avec force de résilience faible $g_0 = 0.3$.

Premier cas - Résilience

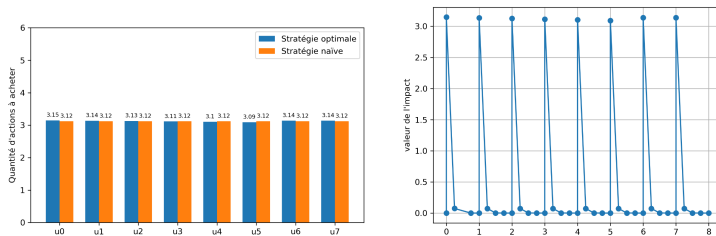


Figure 8: Marché avec force de résilience élevée $g_0 = 15.0$.

Premier cas - Résilience

- Un marché avec une force de résilience élevée signifie que les petits investisseurs envoient plusieurs ordres pour remplacer ceux exécutés. L'impact est rapidement supprimé. L'investisseur est indifférent au moment de transiger.
- Au contraire, un marché avec une force de résilience faible signifie peu de nouveaux ordres limites. L'impact prend du temps à être supprimé. L'investisseur doit transiger rapidement et laisser le marché se rétablir.
- Résilience très forte \approx pas d'impact à long terme. C'est la stratégie naïve.

Premier cas - Convexité

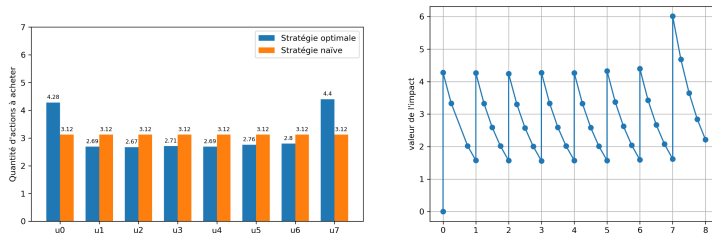


Figure 9: Marché avec convexité moyenne $\alpha = 2.00$.

Premier cas - Convexité

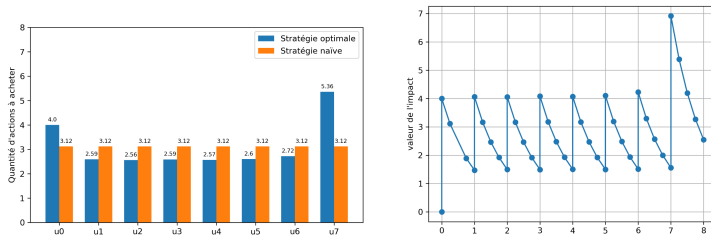


Figure 10: Marché avec convexité faible $\alpha = 1.01$.

Premier cas - Convexité

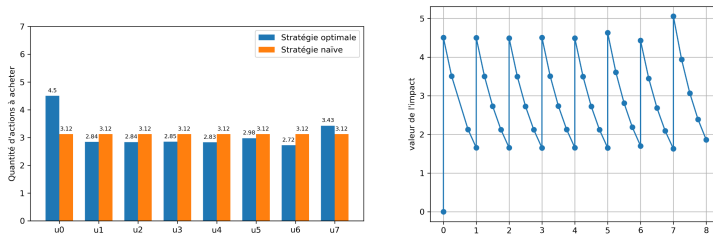


Figure 11: Marché avec convexité forte $\alpha = 5.00$.

Premier cas - Convexité

- Un paramètre de convexité faible signifie un marché très profond. L'impact des transactions diminue et les prix varient moins. L'investisseur veut quitter le marché avec une grosse transaction.
- Un paramètre de convexité élevé signifie un marché peu profond. L'impact joue un rôle majeur. L'investisseur veut transiger plus quand l'impact est à son minimum.

Deuxième cas - Hypothèses

Dans le deuxième cas, la fonction qui caractérise la résilience est définie comme

$$\begin{aligned} g : [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ t &\mapsto g(t) = g_0 * t, \end{aligned}$$

où g_0 est une constante qui modélise la force de résilience dans le marché. Nous supposons que $\lambda = 0$.

Deuxième cas - Hypothèses

Le processus d'impact est donc donné par

$$A_{t_k} = \begin{cases} (A_{t_{k-1}} + u_{t_{k-1}})e^{-\frac{g_0}{2}(t_k^2 - t_{k-1}^2)} & \text{pour } k = 1, \dots, N-1, \\ 0 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Deuxième cas - Résilience

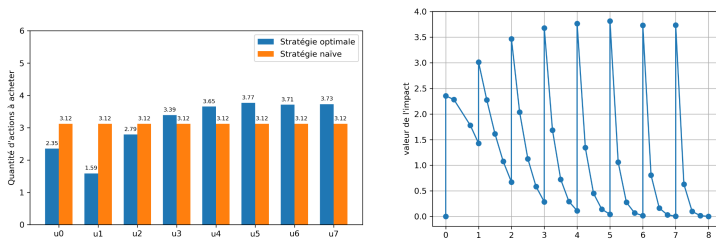


Figure 12: Marché avec force de résilience moyenne $g_0 = 1.0$.

Deuxième cas - Résilience

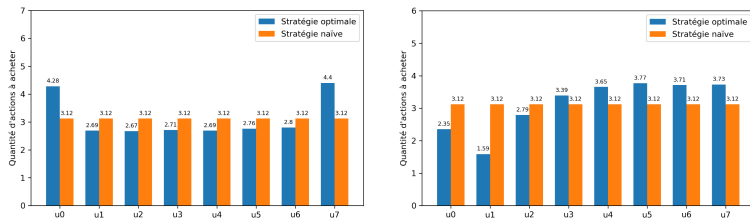


Figure 13: Fonction de résilience indépendante du temps versus croissante dans le temps.

Deuxième cas - Résilience

- Une résilience croissante en fonction du temps implique que l'impact diminue plus rapidement dans le temps.
- Incite l'investisseur à transiger de plus en plus. Stratégie croissante.
- Le taux de résilience à le même impact que dans le premier cas.
- Le même phénomène est observé par Fruth *et al.* (2014).

Troisième cas - Hypothèses

Dans le troisième cas, la fonction qui caractérise la résilience est définie comme

$$\begin{aligned} g : (0, \infty) &\rightarrow (0, \infty) \\ t &\mapsto g(t) = g_0/t, \end{aligned}$$

où g_0 est une constante qui modélise la force de résilience dans le marché. Nous supposons que $\lambda = 0$.

Troisième cas - Hypothèses

Le processus d'impact est donc donné par

$$A_{t_k} = \begin{cases} (A_{t_{k-1}} + u_{t_{k-1}}) \left(\frac{t_{k-1}}{t_k} \right)^{g_0} & \text{pour } k = 1, \dots, N-1, \\ 0 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Troisième cas - Comparaison

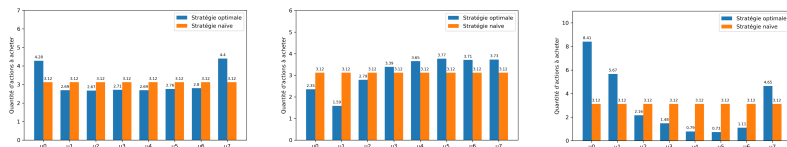


Figure 14: Comparaison entre la fonction de résilience indépendante du temps, croissante dans le temps et décroissante dans le temps.

Troisième cas - Comparaison

- Stratégie contraire au deuxième cas.
- Le taux de résilience à le même impact que précédemment.

Quatrième cas - Hypothèses

- Mêmes hypothèses que dans le premier cas.
- Ajout du paramètre d'aversion au risque.

Quatrième cas - Aversion au risque

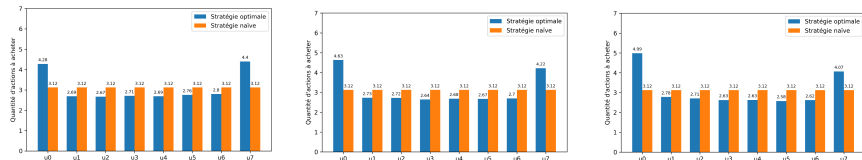


Figure 15: Paramètres λ : 0,0000 vs 0,0001 vs 0,0002.

Quatrième cas - Aversion au risque

- Augmentation de la valeur du paramètre implique plus de poids sur les transactions initiales.
- Plus l'investisseur est averse au risque plus il veut transiger rapidement pour ne pas faire face à l'incertitude du marché.

Fin

- Almgren, R. et Chriss, N. (1999). Optimal execution of portfolio transactions. *Journal of Risk*, 3, 5–39.
- Bellman, R. (1957). *Dynamic Programming* (1 éd.). Princeton, NJ, USA: Princeton University Press.
- Ben-Ameur, H., [de Frutos], J., Fakhfakh, T. et Diaby, V. (2013). Upper and lower bounds for convex value functions of derivative contracts. *Economic Modelling*, 34, 69 – 75. Recent Developments in Computational Economics and Finance: 2nd ISECF Conference (Tunis, 2012), <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.econmod.2012.12.003>
- Bertsekas, D. P. (2012). *Dynamic programming and optimal control* (4 éd.). Athena Scientific.
- Bertsimas, D. et Lo, A. (1998). Optimal control of execution costs. *Journal of Financial Markets*, 1(1), 1–50.
<https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:finmar:v:1:y:1998:i:1:p:1-50>.

- Boyd, S. et Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press.
- Fruth, A., Schöneborn, T. et Urusov, M. (2014). Optimal trade execution and price manipulation in order books with time-varying liquidity. *Mathematical Finance*, 24(4), 651–695.
<http://dx.doi.org/10.1111/mafi.12022>
- Obizhaeva, A. et Wang, J. (2005). Optimal trading strategy and supply/demand dynamics. (11444).
<http://dx.doi.org/10.3386/w11444>
- Predoiu, S., Shaikhet, G. et Shreve, S. (2011). Optimal execution in a general one-sided limit-order book. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2(1), 183–212.
<http://dx.doi.org/10.1137/10078534X>
- Simard, C. (2014). General model for limit order books and market orders. Social Science Research Network. Available at SSRN:
<http://ssrn.com/abstract=2435198> or
<http://doi.org/10.2139/2435198.ssrn>.