Linear Programming Problem (Simplex Method)

Introduction (EN) The simplex method starts at a feasible corner point of the solution space and moves along the edges to adjacent corners that improve the objective value, until no further improvement is possible.

Einleitung (DE) Die Simplex-Methode beginnt an einem zulässigen Eckpunkt des Lösungsraums und bewegt sich entlang der Kanten zu benachbarten Ecken, die den Zielfunktionswert verbessern, bis keine weitere Verbesserung mehr möglich ist.

Problem.

$$\begin{aligned} \max\ Z(x) &= 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad -2x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &\ge -15, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\le 25, \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

(a) Convert inequalities to equalities (add slacks). Original constraints:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &\ge -15, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\le 25, \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

For the second constraint, we first convert the "$\ge$" sign into "$\le$" by multiplying the entire equation by -1:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \le 15.$$

Explanation (English): We do this because the simplex method starts with slack variables as part of the basis, and a slack variable is *defined* to be a nonnegative amount of unused capacity:

$$\text{slack} = (\text{available resource}) - (\text{used resource}) \quad \Rightarrow \quad s \ge 0.$$

If the inequality is "$\ge$", adding a positive slack variable directly would make the equation inconsistent (the slack would have to be negative), so we flip the inequality direction first.

Erklärung (Deutsch): Wir machen dies, weil die Simplex-Methode mit Schlupfvariablen (*Slack-Variablen*) als Startbasis arbeitet. Eine Schlupfvariable wird *definiert* als nichtnegative Menge ungenutzter Kapazität:

$$\text{Schlupf} = (\text{verfügbare Ressource}) - (\text{genutzte Ressource}) \quad \Rightarrow \quad s \ge 0.$$

Bei einer "$\ge$"-Ungleichung würde das direkte Hinzufügen einer positiven Schlupfvariablen die Gleichung inkonsistent machen (die Schlupfvariable müsste negativ werden). Daher drehen wir zuerst die Ungleichungsrichtung um.

Now add a nonnegative slack variable to each "$\le$" constraint to turn it into an equality:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 &= 20, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + s_2 &= 15, \\ x_1 + x_2 + x_3 + s_3 &= 25, \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

(b) Simplex Tableaux

Setup. Start with the basis $B = \{s_1, s_2, s_3\}$ and the Z-row of reduced costs $(-c)$.

EN: The pivot element is the intersection of the entering column and the leaving row. This element will be turned into 1, and all other entries in its column will be turned into 0. DE: Das Pivotelement ist der Schnittpunkt der eintretenden Spalte und der austretenden Zeile. Dieses Element wird auf 1 gesetzt, und alle anderen Einträge in dieser Spalte werden auf 0 gebracht.

Initial tableau

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
(1)	-2	1	3	1	0	0	20
(2)	1	2	-1	0	1	0	15
(3)	1	1	1	0	0	1	25
Z	-4	-2	-3	0	0	0	0

Choosing the entering variable (EN) In a maximization simplex tableau, an entering variable is chosen among the nonbasic variables with the most negative reduced cost in the Z-row. Here, the Z-row is $(-4, -2, -3)$ for (x_1, x_2, x_3), so x_1 enters (most negative: -4).

Why? A negative reduced cost means increasing that variable from 0 can increase the objective Z. The most negative promises the steepest ascent.

Wahl der eintretenden Variablen (DE) Im Maximierungsfall wählt man als eintretende Variable eine Nichtbasisvariable mit dem *stärksten* negativen reduzierten Kostenkoeffizienten in der Z-Zeile. Hier ist x_1 (Wert -4) am negativsten und tritt ein.

Warum? Negative reduzierte Kosten bedeuten, dass eine Erhöhung dieser Variable Z verbessert; je negativer, desto größer die erwartete Verbesserung.

Pivot 1: Enter x_1, determine leaving row by the *minimum ratio test.*

Minimum ratio test (EN) Look down the x_1 column for positive coefficients and compute RHS / coefficient:

$$\frac{20}{-2} \text{ (skip, not positive)}, \quad \frac{15}{1} = 15, \quad \frac{25}{1} = 25.$$

Smallest nonnegative ratio is 15 in row (2). Thus, *row (2) leaves* and the pivot element is $a_{2,1} = 1$.

Quotiententest (DE) Man betrachtet in der x_1-Spalte nur *positive* Koeffizienten und bildet RHS/Koeffizient:

$$\frac{20}{-2} \text{ (überspringen, nicht positiv)}, \quad \frac{15}{1} = 15, \quad \frac{25}{1} = 25.$$

Das kleinste nichtnegative Verhältnis ist 15 in Zeile (2). Also *verlässt Zeile (2)* die Basis; Pivotelement ist $a_{2,1} = 1$.

Row operations (EN) Normalize the pivot row (already 1), then eliminate x_1 from all other rows (including Z):

$$\begin{aligned} R_1 &\leftarrow R_1 - (-2)\, R_2 = R_1 + 2R_2, \\ R_3 &\leftarrow R_3 - (1)\, R_2, \\ Z &\leftarrow Z - (-4)\, R_2 = Z + 4R_2. \end{aligned}$$

Resulting tableau:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
(1)	0	5	1	1	2	0	50
(2)	1	2	-1	0	1	0	15
(3)	0	-1	2	0	-1	1	10
Z	0	6	-7	0	4	0	60

Zeilenoperationen (DE) Normiere die Pivotzeile (hier bereits 1) und eliminiere x_1 in allen anderen Zeilen (inkl. Z):

$$R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2, \qquad R_3 \leftarrow R_3 - R_2, \qquad Z \leftarrow Z + 4R_2.$$

Ergebnis siehe obige Tabelle.

Entering variable again (optimality check)

Check reduced costs (EN) In the new Z-row, only x_3 has a negative reduced cost (-7). Therefore, x_3 enters next.

Prüfe reduzierte Kosten (DE) In der neuen Z-Zeile ist nur x_3 negativ (-7). Also tritt x_3 als Nächstes ein.

Pivot 2: Enter x_3, choose leaving row by minimum ratio.

Minimum ratio test (EN) Consider only positive entries in the x_3 column:

$$\text{Row (1): } \frac{50}{1} = 50, \quad \text{Row (2): } \frac{15}{-1} \text{ (skip)}, \quad \text{Row (3): } \frac{10}{2} = 5.$$

Smallest nonnegative ratio is 5 (row (3)), so *row (3) leaves.* Pivot element is $a_{3,3} = 2$.

Quotiententest (DE) Nur positive Einträge in der x_3-Spalte betrachten:

$$\text{Zeile (1): } \frac{50}{1} = 50, \quad \text{Zeile (2): } \frac{15}{-1} \text{ (überspringen)}, \quad \text{Zeile (3): } \frac{10}{2} = 5.$$

Kleinstes nichtnegatives Verhältnis: 5 in Zeile (3). Also *verlässt Zeile (3)* die Basis. Pivot ist $a_{3,3} = 2$.

Row operations (EN) Normalize pivot row: $R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3 = [\,0, -0.5, 1, 0, -0.5, 0.5 \mid 5\,]$. Eliminate x_3 from the other rows:

$$\begin{aligned} R_1 &\leftarrow R_1 - 1 \cdot R_3 \;\Rightarrow\; [\,0, 5.5, 0, 1, 2.5, -0.5 \mid 45\,], \\ R_2 &\leftarrow R_2 - (-1) \cdot R_3 = R_2 + R_3 \;\Rightarrow\; [\,1, 1.5, 0, 0, 0.5, 0.5 \mid 20\,], \\ Z &\leftarrow Z - (-7) \cdot R_3 = Z + 7R_3 \;\Rightarrow\; [0, 2.5, 0, 0, 0.5, 3.5 \mid 95\,]. \end{aligned}$$

Resulting tableau:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
(1)	0	5.5	0	1	2.5	-0.5	45
(2)	1	1.5	0	0	0.5	0.5	20
(3)	0	-0.5	1	0	-0.5	0.5	5
Z	0	2.5	0	0	0.5	3.5	95

Zeilenoperationen (DE) Normiere die Pivotzeile: $R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3$. Eliminiere x_3 aus den übrigen Zeilen:

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_3, \quad R_2 \leftarrow R_2 + R_3, \quad Z \leftarrow Z + 7R_3.$$

Ergebnis siehe obige Tabelle.

Before checking optimality: *EN: Reduced costs tell us how much the objective function would change if we increased a nonbasic variable by one unit. In a maximization problem, if all reduced costs are nonnegative, there's no variable worth increasing — we are optimal. DE: Reduzierte Kosten zeigen an, um wie viel sich die Zielfunktion ändert, wenn wir eine Nichtbasisvariable um eine Einheit erhöhen. Im Maximierungsfall gilt: Sind alle reduzierten Kosten nichtnegativ, lohnt sich keine Erhöhung — wir sind optimal.*

Optimality test and reading the solution

Optimality (EN) All reduced costs in the Z-row are now ≥ 0. For a maximization problem, this means the current basic feasible solution is *optimal.*

Optimalität (DE) Alle reduzierten Kosten in der Z-Zeile sind nun ≥ 0. Im Maximierungsfall ist die aktuelle Basislösung damit *optimal.*

Read the basic feasible solution (EN) Identify basic variables by columns that are unit vectors in the tableau (one 1, rest 0):

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 5, \quad s_1 = 45, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0.$$

Objective value: $Z^\star = 95$.

Lese die Basislösung ab (DE) Basisvariablen entsprechen Einheitsvektoren in den Spalten:

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 5, \quad s_1 = 45, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0.$$

Zielfunktionswert: $Z^\star = 95$.

Notes / Hinweise

EN: If multiple reduced costs are equally negative, you may choose any (or use a tie-breaking rule like Bland's rule). If all eligible ratios are undefined/negative in the ratio test, the problem is unbounded.

DE: Sind mehrere reduzierte Kosten gleich negativ, kann man eine beliebige wählen (oder eine Regel wie die von Bland nutzen). Sind im Quotiententest alle zulässigen Verhältnisse undefiniert/negativ, ist das Problem unbeschränkt.

(c) How do we recognize optimality? / Woran erkennt man die Optimalität?

Explanation (EN) In the simplex method for a maximization problem, the current basic feasible solution is *optimal* if and only if there are **no negative reduced costs** in the Z-row (objective row). That is, for all nonbasic variables x_j:

$$\bar{c}_j \geq 0.$$

If every reduced cost is nonnegative, increasing any nonbasic variable from zero will not improve Z. Thus, no pivot can lead to a better solution.

Erklärung (DE) In der Simplex-Methode (Maximierungsproblem) ist die aktuelle Basislösung *optimal*, genau dann, wenn **keine negativen reduzierten Kosten** in der Z-Zeile vorhanden sind. Das heißt, für alle Nichtbasisvariablen x_j gilt:

$$\bar{c}_j \geq 0.$$

Sind alle reduzierten Kosten nichtnegativ, kann keine Nichtbasisvariable erhöht werden, um Z zu verbessern. Es gibt also keinen möglichen Pivot, der zu einer besseren Lösung führt.

In our problem / In unserem Problem: Final Z-row: $(0,\ 2.5,\ 0,\ 0,\ 0.5,\ 3.5) \geq 0$ optimal.

(d) Slack variables and interpretation / Schlupfvariablen und Interpretation

Computation (EN) Slack variables measure unused capacity in each constraint. From the final solution $(x_1, x_2, x_3) = (20, 0, 5)$, we compute:

$$\begin{aligned} s_1^\star &= 20 - \big(-2 \cdot 20 + 0 + 3 \cdot 5 \big) = 45, \\ s_2^\star &= 15 - (20 + 0 - 5) = 0, \\ s_3^\star &= 25 - (20 + 0 + 5) = 0. \end{aligned}$$

Berechnung (DE) Schlupfvariablen geben die ungenutzte Kapazität in jeder Nebenbedingung an. Aus der Endlösung $(x_1, x_2, x_3) = (20, 0, 5)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} s_1^\star &= 20 - \big(-2 \cdot 20 + 0 + 3 \cdot 5 \big) = 45, \\ s_2^\star &= 15 - (20 + 0 - 5) = 0, \\ s_3^\star &= 25 - (20 + 0 + 5) = 0. \end{aligned}$$

Interpretation (EN) - $s_1^\star = 45 > 0$: The first constraint is *nonbinding* — 45 units of capacity are unused. - $s_2^\star = 0$ and $s_3^\star = 0$: The second and third constraints are *binding* — all available capacity is used.

Interpretation (DE) - $s_1^\star = 45 > 0$: Die erste Nebenbedingung ist *nicht bindend* — es bleiben 45 Einheiten ungenutzte Kapazität. - $s_2^\star = 0$ und $s_3^\star = 0$: Die zweite und dritte Nebenbedingung sind *bindend* — die gesamte Kapazität wird genutzt.

Analogy (EN) A slack variable is like unused space in a container — if it's positive, the container isn't full (nonbinding constraint). If it's zero, the container is exactly full (binding constraint).

Analogie (DE) Eine Schlupfvariable ist wie ungenutzter Platz in einem Behälter — ist sie positiv, ist der Behälter nicht voll (nicht bindende Nebenbedingung). Ist sie null, ist der Behälter genau gefüllt (bindende Nebenbedingung).

Simplex Method Cheat Sheet (EN / DE)

Step 1: Convert to Standard Form EN: Turn all inequalities into equalities by adding slack variables for "$\leq$" constraints. For "$\geq$" constraints, multiply by -1 first, then add slack. DE: Wandle alle Ungleichungen in Gleichungen um, indem du Schlupfvariablen für "$\leq$"-Bedingungen hinzufügst. Bei "$\geq$"-Bedingungen zunächst mit -1 multiplizieren, dann Schlupf hinzufügen.

Step 2: Initial Tableau EN: Set up the tableau with basic variables as slacks, Z-row with $-c$ for nonbasic variables. DE: Erstelle das Starttableau mit den Schlupfvariablen als Basis, Z-Zeile mit $-c$ für Nichtbasisvariablen.

Step 3: Choose Entering Variable EN: Pick the most negative reduced cost in Z-row (maximization). DE: Wähle den negativsten reduzierten Kostenwert in der Z-Zeile (Maximierung).

Step 4: Choose Leaving Variable (Minimum Ratio Test) EN: For positive entries in the entering column, compute RHS / entry; smallest ratio leaves. DE: Für positive Einträge in der eintretenden Spalte RHS / Eintrag berechnen; kleinstes Verhältnis verlässt die Basis.

Step 5: Pivot EN: Make pivot element = 1, other entries in column = 0 via row operations. DE: Pivotelement auf = 1 setzen, andere Einträge in Spalte auf = 0 bringen (Zeilenoperationen).

Step 6: Repeat Until Optimal EN: If any reduced cost < 0, repeat Steps 3–5. If all ≥ 0, optimal solution found. DE: Falls reduzierter Kostenwert < 0, wiederhole Schritte 3–5. Wenn alle ≥ 0, optimale Lösung erreicht.

Step 7: Read Solution EN: Basic variable values from RHS, nonbasic variables = 0. Z from Z-row RHS. DE: Basisvariablen aus RHS ablesen, Nichtbasisvariablen = 0. Z-Wert aus RHS der Z-Zeile.

Extra Notes / Zusätzliche Hinweise EN: Slack $> 0 \rightarrow$ constraint not binding. Slack $= 0 \rightarrow$ constraint binding. DE: Schlupf $> 0 \rightarrow$ Nebenbedingung nicht bindend. Schlupf $= 0 \rightarrow$ Nebenbedingung bindend.