Lista de Exercícios – 1ª Unidade

Cálculo Diferencial e Integral 3 – Professor João Gondim

01. Considere a curva parametrizada por

$$\alpha(t) = \left(e^{t/2}\cos t\,, e^{t/2}\operatorname{sen} t\right), \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

(a) Ache ds, o elemento de comprimento de arco da curva parametrizada α.
(b) Calcule o comprimento desta curva.
(c) Calcule

$$\int_\alpha y\,ds.$$

02. Considere a curva C parametrizada por

$$r(t) = \left(\cos(t) + t\operatorname{sen}(t)\,, \operatorname{sen}(t) - t\cos(t)\,, \frac{1}{2}t^2\right), \qquad 0 \leq t \leq \ell$$

(a) Para cada valor do parâmetro t encontre um vetor tangente e um vetor tangente unitário no ponto correspondente de C.
(b) Encontre o comprimento da curva C.
(c) Existe algum $a \in [0, \ell]$ tal que $r(0) = r(a)$? Justifique sua resposta.
(d) Se $f(x, y, z) = z$, calcule $\int_C f(x, y, z)ds$.
(e) Calcule a integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$.

03. Seja C o quarto de elipse de equação

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1, \qquad x \geq 0, y \geq 0,$$

ou seja, aquele trecho da elipse localizado no primeiro quadrante, e considere a função escalar $f(x, y) = \frac{9}{10}xy$, definida em $\mathbb{R}^2$.

(a) Encontre uma parametrização $r(t)$ de C, o vetor tangente $r'(t)$ e um vetor normal N no ponto $r(t)$.
(b) Calcule a integral $\int_C f(x, y)ds$ em relação ao comprimento de arco.
(c) Calcule a integral $\int_C f(x, y)dy$ em relação à variável y.

04. Calcule o comprimento da curva C de parametrização $r(t) = \left(e^{t/2\pi}\cos t\,, e^{t/2\pi}\operatorname{sen} t\right)$ do ponto $(1, 0)$ ao ponto $(e, 0)$.

05. Sendo $\vec{F}(x, y, z) = (x, 0, yz^2)$ e C o segmento de reta de $A = (1, 2, 3)$ a $B = (0, 1, 2)$, calcule

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

06. Considere a cicloide de parametrização $r(\theta) = \big(a(\theta - \operatorname{sen}\theta), a(1 - \cos\theta)\big)$.

(a) Calcule o comprimento do arco da cicloide para $0 \leq \theta \leq \pi$. **Dica:** Use a identidade $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$.

(b) Seja $r(s) = \big(x(s), y(s)\big)$ a reparametrização pelo comprimento de arco da cicloide partindo de $\theta_0 = 0$. Encontre $y(s)$.

07. Considere a curva C de parametrização $r(t) = \left(\operatorname{sen} t - t\cos t, \cos t + t \operatorname{sen} t, \frac{1}{2}t^2\right)$, com $t \geq 0$.

(a) A curva está parametrizada pelo comprimento de arco? Justifique.

(b) Determine a função comprimento de arco a partir do ponto $P = (0, 1, 0)$ no sentido de t crescente.

(c) Ache as coordenadas de um ponto Q da curva cuja distância, **sobre a curva**, ao ponto P é $\pi^2/\sqrt{2}$.

08. Seja γ a curva de interseção dos cilindros $x^2 + z^2 = 16$ e $y^2 + z^2 = 16$ entre os pontos $A = \big(2, 2, 2\sqrt{3}\big)$ e $B = \big(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 2\big)$ e seja $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + z^2, x^2 + y^2, y^2 + z^2)$.

(a) Parametrize γ no sentido de A para B.

(b) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

09. Seja $\vec{F}$ o campo de vetores em $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\vec{F}(x, y, z) = (yz\cos(xz) + 1, \operatorname{sen}(xz) + 2, xy\cos(xz) + 3)$$

(a) Determine um potencial para $\vec{F}$.

(b) Calcule $\int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde α é o segmento de reta determinado pelos pontos $A = (0, 0, 1)$ e $B = (1, 1, 1)$.

(c) Calcule a integral acima, desta vez sem usar o potencial do campo $\vec{F}$.

10. Considere o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz + 1, x^2z + z, x^2y + y)$.

(a) Determine uma função potencial para $\vec{F}$.

(b) Calcule a integral de linha de $\vec{F}$ ao longo da curva dada pela interseção do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ com o plano $x - y = 0$, com $z \geq 0$.

11. Seja C a curva dada pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com a superfície $z = e^{xy}$, na região do espaço onde $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Considere o campo de força

$$\vec{F}(x, y, z) = (yz^2, xz^2 + 1, 2xyz).$$

(a) Encontre uma parametrização $r(t)$ de C, um vetor tangente a C no ponto $r(t)$ e os extremos de C.

(b) Encontre um potencial $f(x, y, z)$ de $\vec{F}(x, y, z)$.

(c) Calcule o trabalho feito pelo campo $\vec{F}(x, y, z)$ para mover uma partícula ao longo de C, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha.

12. Considere o campo de vetores

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^4}}, \frac{6y^3}{\sqrt{x^2 + y^4}}\right).$$

(a) Ache um potencial para $\vec{F}$.

(b) Calcule o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao deslocar uma partícula ao longo do arco de circunferência $y = \sqrt{1-x^2}$ do ponto $A = (1,0)$ até o ponto $B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

13. Considere o campo vetorial

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{y^2}{1+x^2}, 2y\arctan(x) + 1\right).$$

(a) $\vec{F}(x,y)$ é conservativo? Justifique sua resposta.

(b) Determine uma função f tal que $\vec{F} = \nabla f$.

(c) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é dado por $r(t) = (t^2, 2t)$, $0 \leq t \leq 1$.

14. Considere o campo vetorial

$$\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}, \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e sejam γ e δ, respectivamente, as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $(x-1)^2 + y^2 = 4$ ambas percorridas no sentido anti-horário.

(a) Esboce γ e δ em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

(c) Sendo $\vec{F} = (P, Q)$, mostre que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

(d) Use o Teorema de Green, com as devidas justificativas, para calcular $\int_\delta \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

15. Considere a cicloide $\gamma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$.

(a) Calcule

$$\int_{\gamma B,O} y\,dx - x\,dy$$

onde $\gamma B, O$ é o arco de cicloide entre os pontos $O = (0,0)$ e $B = (2\pi, 0)$, percorrido de B para O.

(b) Mostre como podemos usar o Teorema de Green para calcular áreas delimitadas por curvas fechadas e, em seguida, calcule a área da região plana limitada superiormente pelo arco de cicloide do item anterior e inferiormente pelo eixo Ox.

16. Use o Teorema de Green para calcular a área da elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $a > 0$, $b > 0$.

17. Seja C a curva dada pelo gráfico da função $y = x\sqrt{1-x}$, $x \in [0,1]$ e considere o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = ((y+1)^2, 2x + \operatorname{sen}^3 y)$.

(a) Encontre uma parametrização $r(t)$ de C.

(b) Encontre uma parametrização $r_1(t)$ do segmento de reta ℓ que junta os extremos de C e encontre o vetor tangente a ℓ.

(c) Usando o Teorema de Green, calcule a integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

18.

(a) Use o Teorema de Green para mostrar que a área de uma região plana limitada por uma curva C, simples e fechada, percorrida no sentido anti-horário, é

$$A = \frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy.$$

(b) Calcule a área da região limitada pela curva $r(t) = (a\cos^3 t\,, a\,\mathrm{sen}^3\, t)$, com $t \in [-\pi, \pi]$, onde $a > 0$.

19. Use o Teorema de Green e o exercício 16 para calcular

$$\int_C e^x\,\mathrm{sen}\, y\, dx + (e^x \cos y + 3x)dy,$$

onde C é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

20. Considere o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

(a) Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde γ é uma circunferência de raio arbitrário a: $r(t) = (a\cos t\,, a\,\mathrm{sen}\, t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

(b) $\vec{F}(x,y)$ é conservativo? Justifique.

(c) Use o Teorema de Green e o resultado obtido nos itens anteriores para mostrar que $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.