

# Cálculo Diferencial e Integral 3

João A. M. Gondim

20 de junho de 2017



# Sumário

<b>1</b>	<b>Cálculo Vetorial de Curvas</b>	<b>1</b>
1.1	Funções Vetoriais . . . . .	1
1.2	Curvas Parametrizadas . . . . .	2
1.3	Comprimento de Curvas . . . . .	4
1.3.1	Reparametrização pelo comprimento de arco . . . . .	6
1.4	Integral de Linha de funções reais . . . . .	8
1.4.1	Aplicações . . . . .	11
1.5	Integrais de Linha de campos vetoriais . . . . .	12
1.6	Campos Conservativos . . . . .	14
1.6.1	O Teorema Fundamental das Integrais de Linha . . . . .	15
1.6.2	Independência do caminho . . . . .	17
1.6.3	Caracterização dos Campos Conservativos no Plano . . . . .	19
1.7	O Teorema de Green . . . . .	20
1.7.1	Cálculo de Áreas . . . . .	24
1.7.2	Versão estendida do Teorema de Green . . . . .	25
1.7.3	Mais Exemplos . . . . .	27
1.8	Exercícios . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Cálculo Vetorial de Superfícies</b>	<b>35</b>
2.1	Superfícies Parametrizadas . . . . .	35
2.2	Áreas de Superfícies . . . . .	38
2.3	Integrais de Superfície . . . . .	40
2.3.1	Integrais de Superfície de Funções Reais . . . . .	40
2.3.2	Orientação de Superfícies . . . . .	44
2.3.3	Integrais de Superfície de Campos Vetoriais . . . . .	44
2.3.4	Mais Exemplos . . . . .	47
2.4	Rotacional e Divergente . . . . .	49
2.4.1	Formas Vetoriais do Teorema de Green . . . . .	52
2.5	Teorema de Stokes . . . . .	54
2.6	Teorema da Divergência . . . . .	62
2.7	Exercícios . . . . .	67
<b>3</b>	<b>Sequências e Séries</b>	<b>71</b>
3.1	Sequências de Números Reais . . . . .	71
3.2	Séries Numéricas . . . . .	75
3.3	Séries de Termos Positivos . . . . .	79
3.3.1	Teste da Integral . . . . .	80
3.3.2	Os Testes da Comparação . . . . .	83
3.4	Convergência Absoluta . . . . .	85
3.4.1	Os Testes da Razão e da Raiz . . . . .	85
3.5	Exemplos gerais de séries - Estratégias para escolher os testes . . . . .	89
3.6	Séries de Potências . . . . .	92

3.6.1	Raio de convergência . . . . .	93
3.6.2	Representação de funções por séries de potências . . . . .	95
3.6.3	Derivação e integração de séries de potências . . . . .	97
3.6.4	Série Binomial . . . . .	99
3.7	Exercícios . . . . .	102

# Capítulo 1

## Cálculo Vetorial de Curvas

### 1.1 Funções Vetoriais

Ao longo destas notas, vamos estudar diversos tipos de funções, dentre os quais podemos destacar:

- **Funções Reais:** São funções que têm  $\mathbb{R}$  como contradomínio, ou seja, são as funções estudadas nos cursos anteriores de Cálculo;
- **Funções Vetoriais:** São as funções que têm como contradomínio um conjunto de vetores (para nós,  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ). Por exemplo, são funções vetoriais  $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ,  $f(t) = (t, t^2, t^3)$  e  $f(x, y) = (xe^y, \cos(xy))$ .

Funções da forma  $\vec{F} : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ou  $\vec{F} : X \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  serão chamadas de *campos vetoriais*. Funções vetoriais de uma variável serão nosso objeto de estudo no primeiro Capítulo, e serão representadas por  $\vec{r}$ ,  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\gamma}$ , etc.

Seja  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  uma função vetorial em  $\mathbb{R}^3$  (em  $\mathbb{R}^2$  seria análogo). As funções reais  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  são chamadas de *componentes* de  $\vec{r}$ . Já sabemos calcular limites das funções componentes, já que são funções como as que estudamos em Cálculo 1. Nada mais natural, então, que definir

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow a} x(t), \lim_{t \rightarrow a} y(t), \lim_{t \rightarrow a} z(t) \right), \quad (1.1.1)$$

desde que os limites dos componentes existam.

Diremos que  $\vec{r}$  é contínua em  $t = a$  quando

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a). \quad (1.1.2)$$

Se dissermos que  $\vec{r}$  é contínua, sem especificar onde, então  $\vec{r}$  é contínua em todo o seu domínio. Comparando (1.1.1) e (1.1.2), é claro que  $\vec{r}$  é contínua em  $t = a$  se, e somente se,  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  forem contínuas em  $t = a$ .

Todas as regras operacionais de limites valem para funções vetoriais:

- limite da soma = soma dos limites;
- limite da multiplicação por uma constante = produto da constante pelo limite;
- limite do produto escalar = produto escalar dos limites;
- limite do produto vetorial = produto vetorial dos limites.

## 1.2 Curvas Parametrizadas

**Definição 1.2.1.** Uma curva é a imagem de uma função vetorial contínua de uma variável  $\vec{r}(t)$ , que é chamada de uma *parametrização* da curva.

**Exemplo 1.2.1.** Parametrize o segmento de reta  $AB$ , percorrido de  $A = (1, 0, -1)$  a  $B = (3, -4, 2)$ .

**Solução.** Usamos o vetor diretor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2, -4, 3)$  na equação vetorial

$$\vec{r}(t) = A + t\overrightarrow{AB},$$

com  $0 \leq t \leq 1$ . Logo,

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (1, 0, -1) + t(2, -4, 3) \\ &= \boxed{(1 + 2t, -4t, -1 + 3t), \quad 0 \leq t \leq 1.}\end{aligned}$$

□

**Exemplo 1.2.2.** Obtenha uma parametrização para a curva  $\gamma$  que em coordenadas polares é dada por  $r = 1$ .

**Solução.** Sabemos que para passar de coordenadas polares para retangulares fazemos

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Como  $r = 1$ , fazendo  $\theta = t$  obtemos  $x(t) = \cos t$  e  $y(t) = \sin t$ . Logo,

$$\boxed{\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.}$$

□

A curva do exemplo acima é uma circunferência de raio 1. Em geral, uma circunferência de raio  $R$  tem parametrização

$$\vec{r}(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (1.2.2)$$

**Exemplo 1.2.3.** Identifique a curva de parametrização  $\vec{r}(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Solução.** Fazendo  $2t = \theta$ , vemos que a curva também é representada por  $\vec{r}(t) = (\cos \theta, \sin \theta)$ , logo é uma circunferência, mas  $0 \leq \theta \leq 4\pi$ , portanto são dadas duas voltas!

□

Os exemplos acima ilustram a diferença entre uma curva e uma curva parametrizada: a curva é apenas o conjunto dos pontos, enquanto a ordem e a quantidade de vezes com que esses pontos são percorridos também são levadas em conta na parametrização.

**Definição 1.2.2.** Dizemos que uma curva  $C$ , de parametrização  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , é *simples* se ela não se auto-intersecta em pontos intermediários  $t_1$  e  $t_2$ , isto é, se  $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$  para todos  $t_1, t_2 \in (a, b)$ . A única exceção permitida é termos  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ , quando dizemos que a curva é *fechada*. Observe a Figura 1.2.1.

**Exemplo 1.2.4.** Mostre que a curva parametrizada  $\vec{\gamma}(t) = (\sin t, \sin t \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , é fechada e simples.

**Solução.** Para mostrar que é fechada, basta ver que  $\vec{\gamma}(0) = \vec{\gamma}(\pi)$ . De fato, temos  $\vec{\gamma}(0) = (0, 0) = \vec{\gamma}(\pi)$ , logo  $\gamma$  é fechada.

Para vermos que é simples, devemos mostrar que  $\vec{\gamma}(t)$  é injetiva em  $(0, \pi)$ . Se  $\vec{\gamma}(t_1) = \vec{\gamma}(t_2)$ , com  $t_1, t_2 \in (0, \pi)$ , temos

$$\begin{cases} \sin t_1 &= \sin t_2 \\ \sin t_1 \cos t_1 &= \sin t_2 \cos t_2 \end{cases}$$

Como  $\sin t \neq 0$  nesse intervalo, segue que  $\cos t_1 = \cos t_2$ , e portanto  $\tan t_1 = \tan t_2$ . Como a função  $\tan x$  é injetiva em  $(0, \pi)$ , concluímos que  $t_1 = t_2$  e que  $\gamma$  é simples.

□

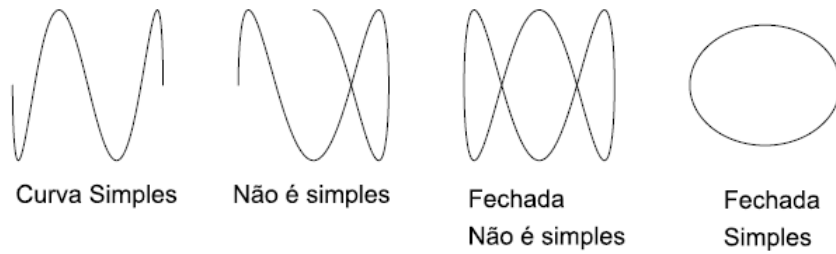


Figura 1.2.1: Tipos de Curvas

**Definição 1.2.3.** Definimos a derivada de uma função vetorial  $\vec{r}(t)$  como o limite

$$\vec{r}'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(a)}{t - a}. \quad (1.2.3)$$

Se  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , então segue de (1.1.1) que

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)). \quad (1.2.4)$$

Note que um *vetor tangente* à curva de parametrização  $\vec{r}(t)$  em  $t = a$  é  $\vec{r}'(a)$ .

**Exemplo 1.2.5.** Encontre uma parametrização para a curva  $\gamma$  dada em coordenadas polares por  $r = 1 + \cos \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , e ache a equação da reta tangente à curva num ponto  $P \in \gamma$  cuja distância até a origem vale  $3/2$ .

**Solução.** Temos  $x = r \cos \theta = (1 + \cos \theta) \cos \theta$  e  $y = (1 + \cos \theta) \sin \theta$ . Ponha  $\theta = t$ , então uma parametrização é

$$\vec{\gamma}(t) = (\cos t + \cos^2 t, \sin t + \sin t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Agora vamos encontrar o ponto desejado. A distância dele à origem corresponde ao  $r$  das coordenadas polares. Logo,

$$\frac{3}{2} = 1 + \cos t \Rightarrow \cos t = \frac{1}{2} \text{ e } t \in [0, \pi] \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}.$$

Temos  $P = \vec{\gamma}(\pi/3) = (3/4, 3\sqrt{3}/4)$ .

Temos ainda que

$$\vec{\gamma}'(t) = (-\sin t - 2 \cos t \sin t, \cos t + \cos^2 t - \sin^2 t).$$

Substituindo, vamos obter  $\vec{\gamma}'(\pi/3) = (-\sqrt{3}, 0)$ . Assim, as equações paramétricas da reta tangente são

$$\begin{cases} x &= \frac{3}{4} - \sqrt{3}t \\ y &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

□

**Exemplo 1.2.6.** Parametrize a curva obtida pela interseção do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  com o plano  $y + z = 2$ .

**Solução.** Podemos resolver  $x(t)$  e  $y(t)$  pela equação do cilindro, fazendo  $x = \cos t$  e  $y = \sin t$ , já que seus pontos sempre pertencem a uma circunferência de raio 1. Como  $y + z = 2$ , obtemos  $z = 2 - y = 2 - \sin t$ . Logo, a parametrização é dada por

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

□

**Exemplo 1.2.7.** Parametrize a interseção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  com o plano  $x + y = 0$ .

**Solução.** Como  $y = -x$ , podemos substituir na equação da esfera para obter  $x^2 + (-x)^2 + z^2 = 1$ , ou seja,  $2x^2 + z^2 = 1$ , que representa um cilindro elíptico. Podemos parametrizar a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

como se fosse uma “circunferência de raios distintos” correspondendo aos semi-eixos  $a$  e  $b$ :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases},$$

com  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Como a elipse tem equação

$$\frac{x^2}{(1/\sqrt{2})^2} + \frac{z^2}{1^2} = 1,$$

temos  $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t$ ,  $z = \sin t$  e  $y = -x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t$ . Logo, a parametrização da curva é

$$\vec{r}(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \sin t \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

□

### 1.3 Comprimento de Curvas

Seja  $C$  uma curva plana lisa de parametrização  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Isso significa que  $\vec{r}'$  é contínua e que  $\vec{r}'(t) \neq (0, 0)$  para todo  $t$ . Na prática, isso significa que a curva não possui “bicos”. Vamos dividir o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[t_{i-1}, t_i]$ , com  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ . Cada  $t_i$  fornece um ponto  $P_i = \vec{r}(t_i)$  sobre a curva. Chamaremos de  $\Delta s_i$  o comprimento do segmento  $\overline{P_{i-1}P_i}$ .

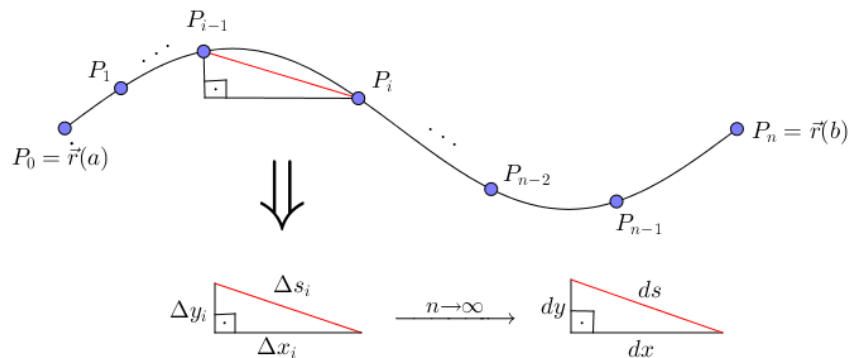


Figura 1.3.1: Comprimento de curvas

Podemos aproximar o comprimento da curva por meio da soma dos comprimentos dos segmentos  $\overline{P_{i-1}P_i}$ , de modo que o comprimento do arco  $S$  é tal que

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \int_a^b ds. \quad (1.3.1)$$



Pela Figura 1.3.1, vemos que  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , pelo Teorema de Pitágoras, logo

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \|\vec{r}'(t)\|.$$

Assim, definimos o *elemento de comprimento de arco*

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| dt \quad (1.3.2)$$

e o *comprimento de arco* de  $C$ :  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , como

$$S = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt. \quad (1.3.3)$$

**Exemplo 1.3.1.** Calcule o comprimento de arco da hélice circular de parametrização  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$  do ponto  $(1, 0, 0)$  até o ponto  $(1, 0, 2\pi)$ .

**Solução.** Observe que  $t \in [0, 2\pi]$  e que  $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ . Logo,

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2}.$$

Pela fórmula (1.3.3), temos

$$S = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = \boxed{2\sqrt{2}\pi}.$$

□

**Exemplo 1.3.2.** Calcule o comprimento da curva de parametrização  $\vec{r}(t) = (1, t^2, t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

**Solução.** Temos  $\vec{r}'(t) = (0, 2t, 3t^2)$ , logo

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = \sqrt{t^2(4 + 9t^2)} = t\sqrt{4 + 9t^2},$$

pois  $t \in [0, 1]$ . Pela fórmula (1.3.3), temos

$$S = \int_0^1 \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2} dt.$$

Mude a variável para  $u = 4 + 9t^2$ , de modo que  $du = 18t dt$ , e então

$$S = \frac{1}{18} \int_4^{13} \sqrt{u} du = \frac{1}{18} \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_4^{13} = \frac{1}{27} (13^{3/2} - 4^{3/2}) \Rightarrow \boxed{\frac{13^{3/2} - 8}{27}}.$$

□

**Exemplo 1.3.3.** Calcule o comprimento da curva de parametrização  $\vec{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

**Solução.** Temos  $\vec{r}'(t) = (\sqrt{2}, e^t, -e^{-t})$ , portanto

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + (e^t)^2 + (-e^{-t})^2} = \sqrt{(e^t)^2 + 2e^t e^{-t} + (e^{-t})^2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}.$$

Daí, pela fórmula (1.3.3) temos

$$S = \int_0^1 (e^t + e^{-t}) dt = (e^t - e^{-t}) \Big|_0^1 = \boxed{e - \frac{1}{e}}.$$

□

**Exemplo 1.3.4.** Calcule o comprimento da curva de parametrização  $\vec{r}(t) = (12t, 8t^{3/2}, 3t^2)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

**Solução.** Temos  $\vec{r}'(t) = (12, 12t^{1/2}, 6t)$ , logo

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{144 + 144t + 36t^2} = \sqrt{(12 + 6t)^2} = 12 + 6t,$$

pois  $0 \leq t \leq 1$ , portanto  $12 + 6t > 0$ . Assim, pela fórmula (1.3.3), temos

$$S = \int_0^1 (12 + 6t) dt = (12t + 3t^2)_0^1 = \boxed{15}.$$

□

### 1.3.1 Reparametrização pelo comprimento de arco

Observe que o comprimento de arco não depende da parametrização escolhida para  $C$ . De fato, isso é uma consequência do Teorema de Mudança de Variáveis para integrais, e é uma propriedade esperada, já que o comprimento de arco é uma propriedade da curva, e não da parametrização. Mesmo que o sentido da parametrização seja invertido, ainda assim o comprimento de arco é preservado.

Definimos a *função comprimento de arco* de uma curva lisa com parametrização  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , como

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(t)\| dt, \quad (1.3.4)$$

ou seja, o comprimento da curva entre os pontos  $\vec{r}(a)$  e  $\vec{r}(t)$ . Frequentemente é útil parametrizar a curva em relação ao comprimento de arco, pois este é uma propriedade natural da curva e não depende do sistema de coordenadas utilizado, como vimos acima. O procedimento usado para fazer isso está ilustrado nos exemplos a seguir:

**Exemplo 1.3.5.** Reparametrize pelo comprimento de arco a curva  $\vec{r}(t) = (2t, 1 - 3t, 5 + 4t)$  a partir de  $t = 0$  na direção crescente de  $t$ .

**Solução.** Temos  $\vec{r}'(t) = (2, -3, 4)$ , logo  $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{29}$ . Daí,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{29} dt = \sqrt{29}t.$$

Logo,

$$t = \frac{s}{\sqrt{29}}.$$

Agora substituímos na parametrização original para obter

$$\boxed{\vec{r}(t(s)) = \left( \frac{2s}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{3s}{\sqrt{29}}, 5 + \frac{4s}{\sqrt{29}} \right)}.$$

□

**Exemplo 1.3.6.** Reparametrize pelo comprimento de arco a partir do ponto onde  $t = 0$  na direção crescente de  $t$  a curva de parametrização  $\vec{r}(t) = (e^{2t} \cos(2t), 2, e^{2t} \sin(2t))$ .

**Solução.** Temos  $\vec{r}'(t) = (2e^{2t} \cos(2t) - 2e^{2t} \sin(2t), 0, 2e^{2t} \sin(2t) + 2e^{2t} \cos(2t))$ , logo

$$\begin{aligned} \|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{\left[2e^{2t}(\cos(2t) - \sin(2t))\right]^2 + \left[2e^{2t}(\sin(2t) + \cos(2t))\right]^2} \\ &= \sqrt{4e^{4t}[(\cos(2t) - \sin(2t))^2 + (\sin(2t) + \cos(2t))^2]} \\ &= 2e^{2t} \sqrt{\cos^2(2t) - 2\cos(2t)\sin(2t) + \sin^2(2t) + \sin^2(2t) + 2\cos(2t)\sin(2t) + \cos^2(2t)} \\ &= 2e^{2t} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Com isso,

$$s(t) = \int_0^t 2\sqrt{2}e^u du = \sqrt{2}e^u \Big|_0^t = \sqrt{2}(e^t - 1).$$

Dessa forma, podemos escrever

$$\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 = e^{2t} \Rightarrow 2t = \ln \left( 1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow t = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right).$$

Substituindo na parametrização original, obtemos a reparametrização pelo comprimento de arco

$$\vec{r}(t(s)) = \left( \left( 1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \cos \left( \ln \left( 1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right), 2, \left( 1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \sin \left( \ln \left( 1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right) \right).$$

□

Note que se o parâmetro  $t$  já for o comprimento de arco a partir de  $t = a$ , então

$$\|\vec{r}'(t)\| = \frac{ds}{dt} = 1,$$

já que nesse caso  $s = t - a$ . Reciprocamente, se  $\|\vec{r}'(t)\| = 1$ , então

$$s = \int_a^t \|\vec{r}'(u)\| du = \int_a^t du = t - a$$

e  $t$  é o comprimento de arco a partir de  $t = a$ . Com isso, provamos a

**Proposição 1.3.1.** *Uma curva de parametrização  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se,  $\|\vec{r}'(t)\| = 1$ .*

**Exemplo 1.3.7.** Considere a curva  $C$  de parametrização  $\vec{r}(t) = \left( \sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t, \frac{1}{2}t^2 \right)$ , com  $t \geq 0$ .

- (a) A curva está parametrizada pelo comprimento de arco?
- (b) Determine a função comprimento de arco a partir do ponto  $P = (0, 1, 0)$  no sentido de  $t$  crescente.
- (c) Ache as coordenadas de um ponto  $Q$  da curva cuja distância, sobre a curva, ao ponto  $P$  é  $\frac{\pi^2}{\sqrt{2}}$ .

**Solução.** Temos  $\vec{r}'(t) = (t \sin t, t \cos t, t)$ , logo

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{t^2 \sin^2 t + t^2 \cos^2 t + t^2} = \sqrt{2t^2} = t\sqrt{2},$$

logo a curva não está parametrizada pelo comprimento de arco. Além disso, podemos ver que  $P = (0, 1, 0) = \vec{r}(0)$ , logo a função comprimento de arco a partir do ponto  $P$  é

$$s(t) = \int_0^t u\sqrt{2} du = \sqrt{2} \frac{u^2}{2} \Big|_0^t = \boxed{\frac{t^2\sqrt{2}}{2}}.$$

Finalmente, se a distância do ponto  $Q = \vec{r}(t)$  ao ponto  $P$  sobre a curva vale  $\frac{\pi^2}{\sqrt{2}}$ , então  $s(t) = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}$ . Daí,

$$\frac{t^2\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \pi \Rightarrow Q = \vec{r}(\pi) = \boxed{\left( \pi, -1, \frac{\pi^2}{2} \right)}.$$

□

## 1.4 Integral de Linha de funções reais

Em Cálculo 1, aprendemos a calcular integrais de funções reais sobre intervalos fechados  $[a, b]$ . Nesta seção estudaremos uma integral mais geral, que nos permitirá integrar sobre uma curva  $C$ .

Suponha que  $C$  seja lisa, com parametrização  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ . Seja  $f$  uma função real de duas variáveis cujo domínio contém a curva  $C$ . Sabemos que o gráfico de  $z = f(x, y)$  é uma superfície. Vejamos como podemos calcular a área  $A$  da faixa vertical que tem base na curva e está abaixo da superfície, conforme a Figura 1.4.1.

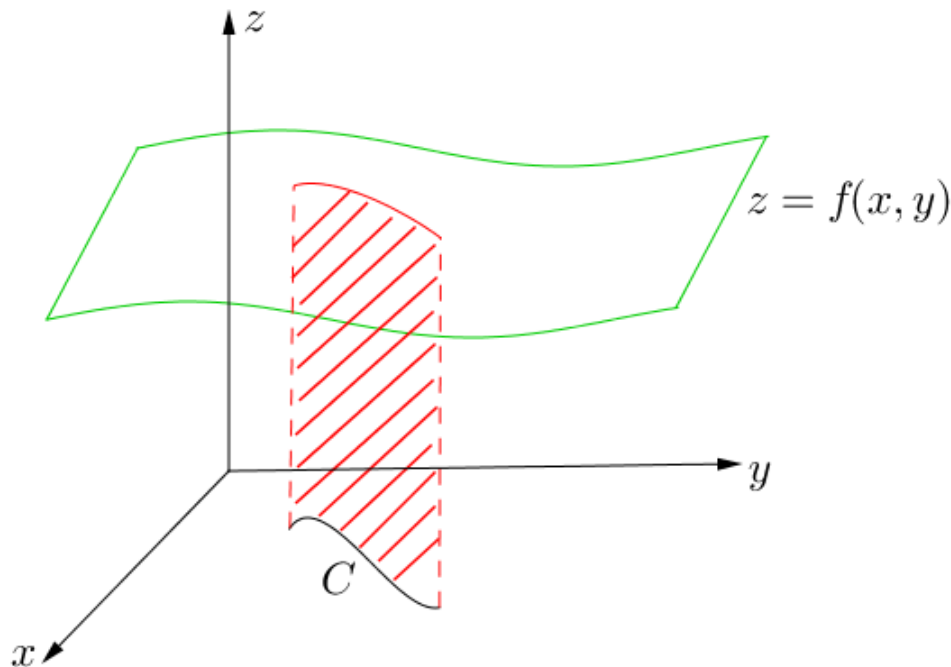


Figura 1.4.1: Construção da Integral de Linha

Assim como na seção anterior, vamos dividir o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[t_{i-1}, t_i]$ , com  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ . Os pontos  $P_i = \vec{r}(t_i) = (x_i, y_i)$  dividem  $C$  em  $n$  subarcos, cada um com um comprimento  $\Delta s_i$ . Vamos aproximar a área desejada pela soma de áreas de retângulos, de base  $\Delta s_i$  e de altura  $f(x_i, y_i)$ . À medida que  $n$  cresce, essa aproximação fica cada vez melhor e podemos escrever

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i. \quad (1.4.1)$$

A expressão acima motiva a

**Definição 1.4.1** (Integral de Linha - Função Real). Se  $f$  é definida sobre uma curva suave  $C$  de parametrização  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , então a *integral de linha* de  $f$  sobre  $C$  é

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i, \quad (1.4.2)$$

se esse limite existir.

É possível mostrar que o limite acima sempre existe quando  $f$  é contínua. Já vimos que  $ds = \|\vec{r}'(t)\| dt$ , então escrevendo (1.4.2) em termos da parametrização vamos obter

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt. \quad (1.4.3)$$

Como a integral está sendo calculada em relação ao comprimento de arco, ela não depende da parametrização escolhida para a curva  $C$ . Novamente, isso é consequência do Teorema de Mudança de Variáveis para integrais. Além disso, note que se  $f(x, y) = 1$ , então  $\int_C ds$  é o comprimento da curva, e aplicando (1.4.3) reobtemos a fórmula que deduzimos na seção anterior.

**Exemplo 1.4.1.** Calcule  $\int_C (2 + x^2 y) ds$ , onde  $C$  é a metade superior do círculo unitário  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Solução.** Começamos parametrizando a curva como  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  (pois queremos apenas a metade superior). Logo,  $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$  e  $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$ . Assim,

$$\int_C (2 + x^2 y) ds = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) dt = \int_0^\pi 2 dt + \int_0^\pi \cos^2 t \sin t dt.$$

A primeira integral vale  $2\pi$ . Para a segunda integral, faça  $u = \cos t$ , obtendo  $du = -\sin t dt$  e

$$\int_0^\pi \cos^2 t \sin t dt = \int_1^{-1} -u^2 du = \int_{-1}^1 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$$

Logo,

$$\boxed{\int_C (2 + x^2 y) ds = 2\pi + \frac{2}{3}}.$$

□

Analogamente ao que vimos acima para o caso plano, definimos a integral de linha para curvas espaciais. O exemplo a seguir ilustra esse fato:

**Exemplo 1.4.2.** Calcule  $\int_C xy^3 ds$ , onde  $C$  é a curva de parametrização  $\vec{r}(t) = (4 \sin t, 4 \cos t, 3t)$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

**Solução.** Temos  $\vec{r}'(t) = (4 \cos t, -4 \sin t, 3)$ , portanto  $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{16 \cos^2 t + 16 \sin^2 t + 9} = \sqrt{25} = 5$ . Segue então que

$$\int_C xy^3 ds = \int_0^{\pi/2} (4 \sin t)(4^3 \cos^3 t)(5 dt) = 1280 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^3 t dt.$$

Fazemos a substituição  $u = \cos t$ , de modo que  $du = -\sin t dt$ , logo

$$\int_C xy^3 ds = -1280 \int_1^0 u^3 du = 1280 \int_0^1 u^3 du = \frac{1280}{4} u^4 \Big|_0^1 = \boxed{320}.$$

□

**Exemplo 1.4.3.** Calcule  $\int_C (2x + 9z) ds$ , onde  $C$  é a curva de parametrização  $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

**Solução.** Temos  $\vec{r}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ , logo  $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$ . Daí,

$$\int_C (2x + 9z) ds = \int_0^1 (2t + 9t^3) \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} dt.$$

Fazendo a mudança de variável  $u = 1 + 4t^2 + 9t^4$ , obtemos  $du = 8t + 36t^3 = 4(2t + 9t^3)$ . Segue então que

$$\int_C (2x + 9z) ds = \int_1^{14} \frac{\sqrt{u}}{4} du = \frac{1}{4} \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^{14} = \boxed{\frac{14^{3/2} - 1}{6}}.$$

□

A definição de integral de linha também vale para curvas  $C$  lisas por partes, isto é,  $C$  é uma curva lisa por partes se  $C$  for a união de curvas lisas  $C_1, \dots, C_n$  tais que o ponto final de  $C_i$  coincide com o inicial de  $C_{i+1}$ . Nesse caso, temos

$$\int_C f(x, y) ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f(x, y) ds \quad (1.4.4)$$

A integral de linha que estudamos até aqui nesta seção é com relação ao comprimento de arco. Também podemos definir integrais de linha com relação a  $x$  e a  $y$ :

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt \quad \text{e} \quad \int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt. \quad (1.4.5)$$

Às vezes essas duas integrais aparecem juntas, e usamos a notação

$$\int_C P(x, y) dx + \int_C Q(x, y) dy = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (1.4.6)$$

**Exemplo 1.4.4.** Calcule  $\int_C \sin x dx + \cos y dy$ , onde  $C$  consiste na metade superior da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  de  $(1, 0)$  a  $(-1, 0)$  seguida pelo segmento de reta de  $(-1, 0)$  a  $(-2, 3)$ .

**Solução.** Se  $C_1$  é o arco de círculo e  $C_2$  o segmento de reta, podemos calcular a integral sobre  $C$  somando as integrais sobre  $C_1$  e sobre  $C_2$ , conforme a fórmula (1.4.4).

$C_1$  tem parametrização  $\vec{r}_1(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . Logo,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \sin x dx + \cos y dy &= \int_0^\pi \sin(\cos t)(-\sin t) dt + \int_0^\pi \cos(\sin t) \cos t dt \\ &= \int_1^{-1} \sin u du + \int_0^0 \cos v dv \\ &= -\cos u \Big|_1^{-1} \\ &= -(\cos(-1) - \cos 1) = -(\cos 1 - \cos 1) = 0. \end{aligned}$$

$C_2$  tem vetor diretor  $\vec{v} = (-1, 3)$  e parametrização  $\vec{r}_2(t) = (-1 - t, 3t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \sin x dx + \cos y dy &= \int_0^1 \sin(-1 - t)(-1) dt + \int_0^1 \cos(3t) 3 dt \\ &= \int_{-1}^{-2} \sin u du + \int_0^3 \cos v dv \\ &= -\cos u \Big|_{-1}^{-2} + \sin v \Big|_0^3 \\ &= -\cos(-2) + \cos(-1) + \sin 3 - \sin 0 = \cos 1 - \cos 2 + \sin 3. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_C \sin x dx + \cos y dy = \cos 1 - \cos 2 + \sin 3.$$

□

**Exemplo 1.4.5.** Calcule  $\int_C x e^y dx$ , onde  $C$  é o arco de  $x = e^y$  de  $(1, 0)$  a  $(e, 1)$ .

**Solução.** Usamos a parametrização  $\vec{r}(t) = (e^t, t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , já que  $x$  é função de  $y$ . Temos que

$$\int_C x e^y dx = \int_0^1 e^t e^t e^t dt = \int_0^1 e^{3t} dt = \frac{1}{3} e^{3t} \Big|_0^1 = \boxed{\frac{e^3 - 1}{3}}.$$

□

As integrais de linha com relação a  $x$  e a  $y$  também não dependem da parametrização, desde que seja preservada a orientação da curva. Para ilustrar, suponha que no exemplo anterior a curva fosse percorrida de  $(e, 1)$  a  $(1, 0)$ . Poderíamos usar a parametrização  $\vec{r}_1(t) = (e^{-t}, -t)$ ,  $-1 \leq t \leq 0$ . Nesse caso,

$$\int_C x e^y dx = \int_{-1}^0 e^{-t} e^{-t} (-e^{-t}) dt = - \int_{-1}^0 e^{-3t} dt = \frac{1}{3} e^{-3t} - 1^0 = \boxed{\frac{1 - e^3}{3}}.$$

Esse fenômeno ocorre pois, quando invertemos a orientação da curva,  $\Delta x_i$  e  $\Delta y_i$  trocam de sinal. Observe que isso não ocorre com a integral de linha pelo comprimento de arco, pois  $\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$  é sempre positivo.

### 1.4.1 Aplicações

Se  $\rho(x, y)$  é a densidade linear de um arame fino com o formato de uma curva lisa  $C$ , então a massa  $m$  do arame pode ser calculada por

$$m = \int_C \rho(x, y) ds \quad (1.4.7)$$

Além disso, o centro de massa do arame tem coordenadas

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \int_C x \rho(x, y) ds \quad \text{e} \quad y_{CM} = \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y) ds \quad (1.4.8)$$

Finalmente, os momentos de inércia do arame em relação aos eixos  $x$  e  $y$  são

$$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y) ds \quad \text{e} \quad I_y = \int_C x^2 \rho(x, y) ds. \quad (1.4.9)$$

**Exemplo 1.4.6.** Um arame fino é entortado no formato de uma semicircunferência de equação  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x \leq 0$ ,  $y \leq 0$ . Se a densidade linear é dada por  $\rho(x, y) = x + y$ , determine a massa e o centro de massa do arame.

**Solução.** A parametrização é  $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ . Logo,  $\vec{r}'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$  e  $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = 2$ . Dessa forma, a massa é

$$m = \int_C \rho(x, y) ds = \int_0^{\pi/2} (2 \cos t + 2 \sin t) 2 dt = 4 \left( \sin t - \cos t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \boxed{8}.$$

Para o centro de massa, temos

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{1}{8} \int_C x \rho(x, y) ds = \frac{1}{8} \int_C (x^2 + xy) ds = \frac{1}{8} \int_C (x^2 + xy) ds \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (4 \cos^2 t + 4 \cos t \sin t) 2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (2 \cos^2 t + 2 \cos t \sin t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t) + \sin(2t)) dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{\cos(2t)}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \boxed{\frac{\pi + 2}{4}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{CM} &= \frac{1}{8} \int_C y \rho(x, y) ds = \frac{1}{8} \int_C (xy + y^2) ds \\
&= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (4 \cos t \operatorname{sen} t + 4 \operatorname{sen}^2 t) 2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}(2t) + 1 - \cos(2t)) dt \\
&= \frac{1}{2} \left( t - \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} \right)_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi + 2}{4}}.
\end{aligned}$$

□

Para o caso de curvas espaciais, as únicas fórmulas que mudam são as dos momentos de inércia:

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds, \quad I_y = \int_C (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds, \quad I_z = \int_C (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds \quad (1.4.10)$$

## 1.5 Integrais de Linha de campos vetoriais

**Definição 1.5.1.** Um *campo vetorial* é uma função da forma  $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ou  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Em outras palavras, a cada ponto do plano (ou espaço) associa-se um vetor do plano (ou do espaço).

Seja  $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  um campo vetorial contínuo em  $\mathbb{R}^2$ . Suponha que  $\vec{F}$  representa um campo de forças. Vejamos como calcular o trabalho  $W$  realizado por  $\vec{F}$  ao deslocar uma partícula ao longo de uma curva lisa  $C$  de parametrização  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ .

Novamente dividimos  $C$  em subarcos  $P_{i-1}P_i$ , cada um com comprimento  $\Delta s_i$ , que nos fornecem uma partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  para o intervalo  $[a, b]$  de definição do parâmetro  $t$ . Se  $\Delta s_i$  for suficientemente pequeno, então o movimento da partícula de  $P_{i-1}$  a  $P_i$  se dá aproximadamente na direção do versor tangente  $\vec{T}(x_i, y_i, z_i)$  em  $P_i$ .

Da Física, sabemos que o trabalho realizado por  $\vec{F}$  para mover a partícula de  $P_{i-1}$  a  $P_i$  é aproximadamente igual ao produto escalar

$$\vec{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot [\Delta s_i \vec{T}(x_i, y_i, z_i)] = [\vec{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{T}(x_i, y_i, z_i)] \Delta s_i \quad (1.5.1)$$

Daí, o trabalho pode ser calculado somando os trabalhos sobre os  $n$  subarcos e tomando o limite dessa soma com  $n \rightarrow \infty$ . Assim,

$$W = \int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{T}(x, y, z) ds = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds \quad (1.5.2)$$

A fórmula acima nos diz que o trabalho realizado por  $\vec{F}$  ao deslocar uma partícula ao longo de uma curva  $C$  é igual à integral de linha com relação ao comprimento de arco da componente tangencial de  $\vec{F}$ .

Como  $C$  tem parametrização  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , então o versor tangente pode ser calculado pela fórmula

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}.$$

Logo, a fórmula (1.4.3), temos

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_a^b \left[ \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \|\vec{r}'(t)\| \right] dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Isso nos leva à definição



**Definição 1.5.2.** Seja  $\vec{F}$  um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva lisa  $C$  de parametrização  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Então, a integral de linha de  $\vec{F}$  ao longo de  $C$  é

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt. \quad (1.5.3)$$

Observe ainda que, como  $\vec{F} = (P, Q, R)$  e  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (P, Q, R) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt = \int_C Px'(t) dt + Qy'(t) dt + Rz'(t) dt = \int_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

Isso mostra a relação entre a integral de linha de campos vetoriais e as integrais de linha de funções reais com relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , bem como mostra que trocando  $C$  por  $-C$  (ou seja, a curva percorrida no sentido oposto) o sinal da integral é trocado, de modo que

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.5.4)$$

**Exemplo 1.5.1.** Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  se  $\vec{F}(x, y) = (x^2y^3, -y\sqrt{x})$  e  $C$  tem parametrização  $\vec{r}(t) = (t^2, t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

**Solução.** Temos  $\vec{r}'(t) = (2t, 3t^2)$ . Logo,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^4t^9, -t^3\sqrt{t^2}) \cdot (2t, 3t^2) dt = \int_0^1 (2t^{14} - 3t^6) dt = \frac{2t^{15}}{15} - \frac{3t^7}{7} \Big|_0^1 = \boxed{-\frac{31}{105}}.$$

□

**Exemplo 1.5.2.** Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , se  $\vec{F}(x, y, z) = (z, y, -x)$  e  $C$  tem parametrização  $\vec{r}(t) = (t, \text{sent}, \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

**Solução.** Temos  $\vec{r}'(t) = (1, \cos t, -\text{sent})$ . Logo,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^\pi (\cos t, \text{sent}, -t) \cdot (1, \cos t, -\text{sent}) dt \\ &= \int_0^\pi (\cos t + \text{sent} \cos t + t \text{sent}) dt \\ &= \int_0^\pi \cos t dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi \text{sen}(2t) dt + \int_0^\pi t \text{sent} dt && (2 \text{ sent} \cos t = \text{sen}(2t)) \\ &= \int_0^\pi \cos t dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi \text{sen}(2t) dt - t \cos t \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos t dt && (\text{Por partes}) \\ &= \left( \text{sent} - \frac{1}{4} \cos(2t) - t \cos t + \text{sent} \right) \Big|_0^\pi = \boxed{\pi}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 1.5.3.** Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\vec{F}(x, y) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$  e  $C$  é a parábola  $y = 1 + x^2$  de  $(-1, 2)$  a  $(1, 2)$ .

**Solução.** Como a curva é descrita por uma equação que define  $y$  em função de  $x$ , podemos escolher  $x = t$  e parametrizá-la por  $\vec{r}(t) = (t, 1 + t^2)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ . Daí,  $\vec{r}'(t) = (1, 2t)$  e

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 \left( \frac{t}{\sqrt{t^2 + (1 + t^2)^2}}, \frac{1 + t^2}{\sqrt{t^2 + (1 + t^2)^2}} \right) \cdot (1, 2t) dt = \int_{-1}^1 \frac{3t + 2t^3}{\sqrt{t^4 + 3t^2 + 1}} dt = \boxed{0},$$

já que o integrando é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico em relação à origem.

□

## 1.6 Campos Conservativos

**Definição 1.6.1.** Dizemos que um campo vetorial  $\vec{F}$  é conservativo quando existe uma função real tal que  $\nabla f = \vec{F}$ . Nesse caso, dizemos que  $f$  é uma *função potencial* para  $\vec{F}$ .

**Exemplo 1.6.1.** Determine se  $\vec{F}(x, y) = (6x + 5y, 5x + 4y)$  é um campo conservativo.

**Solução.** Precisamos procurar uma função  $f(x, y)$  tal que  $\nabla f = \vec{F}$ . Isso significa que

$$\begin{cases} f_x &= 6x + 5y \\ f_y &= 5x + 4y \end{cases}$$

Integramos a primeira equação com respeito a  $x$ , obtendo

$$f(x, y) = 3x^2 + 5xy + g(y),$$

onde  $g$  é uma função que só depende de  $y$  e portanto funciona como constante numa integral com respeito a  $x$ .

Agora derivamos a expressão para  $f$  com respeito a  $y$  e igualamos a  $5x + 4y$ :

$$f_y = 5x + g'(y) = 5x + 4y \Rightarrow g'(y) = 4y \Rightarrow g(y) = 2y^2 + C.$$

Logo, os potenciais têm a forma

$$f(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2 + C.$$

Como queremos **um** potencial, e não todos, podemos escolher o valor de  $C$  acima, por exemplo,  $C = 0$ . Dessa forma,  $\vec{F}$  é conservativo. □

**Exemplo 1.6.2.** Determine se  $\vec{F}(x, y) = (6x + 4y, 5x + 4y)$  é um campo conservativo.

**Solução.** Precisamos procurar uma função  $f(x, y)$  tal que  $\nabla f = \vec{F}$ . Isso significa que

$$\begin{cases} f_x &= 6x + 4y \\ f_y &= 5x + 4y \end{cases}$$

Integramos a primeira equação com respeito a  $x$ , obtendo

$$f(x, y) = 3x^2 + 4xy + g(y),$$

onde  $g$  depende apenas de  $y$ . Agora derivamos com respeito a  $y$  e comparamos com a segunda equação. Temos

$$f_y = 4x + g'(y) = 5x + 4y \Rightarrow g'(y) = x + 4y,$$

mas isso é um absurdo, pois se  $g$  depende apenas de  $y$ , sua derivada não pode depender de  $x$ . Assim,  $\vec{F}$  não é conservativo. □

Em breve vamos estudar uma forma mais rápida de verificar que um campo não é conservativo.

**Exemplo 1.6.3.** Mostre que o campo  $\vec{F}(x, y, z) = (2xz + y^2, 2xy, x^2 + 3z^2)$  é um campo conservativo.

**Solução.** Precisamos encontrar um potencial  $f(x, y, z)$  tal que

$$\begin{cases} f_x &= 2xz + y^2 \\ f_y &= 2xy \\ f_z &= x^2 + 3z^2 \end{cases}$$

Começamos integrando a primeira equação com relação a  $x$  para obter

$$f(x, y, z) = x^2 z + xy^2 + g(y, z).$$

Agora derivamos com relação a  $y$  e comparamos com a segunda, equação, obtendo

$$f_y = 2xy + g_y = 2xy \Rightarrow g_y = 0 \Rightarrow g(y, z) = h(z).$$

Assim, temos por enquanto

$$f(x, y, z) = x^2 z + xy^2 + h(z).$$

Finalmente, derivamos com relação a  $z$  e comparamos com a terceira equação, para obter

$$f_z = x^2 + h'(z) = x^2 + 3z^2 \Rightarrow h'(z) = 3z^2 \Rightarrow h(z) = z^3 + K.$$

Tomando  $K = 0$ , obtemos

$$\boxed{f(x, y, z) = x^2 z + xy^2 + z^3}$$

e  $\vec{F}$  é conservativo. □

**Exemplo 1.6.4.** Mostre que o campo  $\vec{F}(x, y, z) = (e^y, xe^y, (z+1)e^z)$  é conservativo.

**Solução.** Temos que determinar  $f(x, y, z)$  tal que

$$\begin{cases} f_x &= e^y \\ f_y &= xe^y \\ f_z &= (z+1)e^z \end{cases}$$

Integrando a primeira equação com respeito a  $x$ , obtemos

$$f(x, y, z) = xe^y + g(y, z).$$

Derivando com respeito a  $y$  e comparando com a segunda equação, concluímos que

$$f_y = xe^y + g_y = xe^y \Rightarrow g_y = 0 \Rightarrow g(y, z) = h(z),$$

e portanto

$$f(x, y, z) = xe^y + h(z).$$

Finalmente, derivamos com respeito a  $z$  e comparamos com a terceira equação, de modo que

$$f_z = h'(z) = (z+1)e^z \Rightarrow h(z) = ze^z + K,$$

(usamos integração por partes). Escolhendo  $K = 0$  obtemos o potencial

$$\boxed{f(x, y, z) = xe^y + ze^z},$$

e o campo é conservativo. □

### 1.6.1 O Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Campos conservativos fornecem uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha, como mostra o Teorema a seguir:

**Teorema 1.6.1** (Teorema Fundamental das Integrais de Linha). *Seja  $C$  uma curva lisa de parametrização  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Seja  $f$  uma função real de duas ou três variáveis tal que  $\nabla f$  é contínuo sobre  $C$ . Então*

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)). \quad (1.6.1)$$

*Demonstração.* Vamos supor, sem perda de generalidades, que  $f$  é uma função real de três variáveis. Então

$$\begin{aligned}
 \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\
 &= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \\
 &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) dt && \text{(Pela Regra da Cadeia)} \\
 &= f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a)) && \text{(Pelo Teorema Fundamental do Cálculo)} \\
 &= f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))
 \end{aligned}$$

□

O Teorema acima mostra que, se  $\vec{F}$  for conservativo, então a integral de linha  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  depende apenas do valor do potencial nos pontos inicial e final da curva  $C$ .

**Exemplo 1.6.5.** Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\vec{F}(x, y) = (6x + 5y, 5x + 4y)$  e  $C$  é a curva de parametrização  $\vec{r}(t) = (e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

**Solução.** Já vimos no Exemplo 1.6.1 que  $\vec{F}$  é conservativo, e um potencial é  $f(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2$ . Então, o Teorema Fundamental nos fornece

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(\pi/2)) - f(\vec{r}(0)) = f(e^{\pi/2}, 0) - f(0, 1) = \boxed{3e^\pi - 2}.$$

□

**Exemplo 1.6.6.** Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (2xz + y^2, 2xy, x^2 + 3z^2)$  e  $C$  é a curva de parametrização  $\vec{r}(t) = (t^2, t + 1, 2t - 1)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

**Solução.** Já vimos no Exemplo 1.6.3 que  $\vec{F}$  é conservativo e que um potencial é  $f(x, y, z) = x^2z + xy^2 + z^3$ . Assim, pelo Teorema Fundamental temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) = f(1, 2, 1) - f(0, 1, -1) = 6 - (-1) = \boxed{7}.$$

□

**Exemplo 1.6.7.** Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde

$$\vec{F}(x, y, z) = (yz \cos(xz) + 1, \operatorname{sen}(xz) + 2, xy \cos(xz) + 3)$$

e  $C$  é o segmento de reta de  $A = (0, 0, 1)$  a  $B = (1, 1, 1)$ .

**Solução.** Vejamos primeiro que  $\vec{F}$  é conservativo. Para isso, precisamos obter uma função  $f(x, y, z)$  tal que

$$\begin{cases} f_x &= yz \cos(xz) + 1 \\ f_y &= \operatorname{sen}(xz) + 2 \\ f_z &= xy \cos(xz) + 3 \end{cases}$$

Integrando a segunda equação com respeito a  $y$ , obtemos  $f(x, y, z) = y \operatorname{sen}(xz) + 2y + g(x, z)$ . Agora derivando com respeito a  $x$  e comparando com a primeira equação vemos que  $yz \cos(xz) + g_x = yz \cos(xz) + 1$ ,

logo  $g(x, z) = x + h(z)$ . Daí,  $f(x, y, z) = y \sin(xz) + x + 2y + h(z)$ . Finalmente, derivando com respeito a  $z$  e comparando com a terceira equação obtemos  $xy \cos(xz) + h'(z) = xy \cos(xz) + 3$ , portanto  $h'(z) = 3$  e  $h(z) = 3z + C$ . Podemos escolher  $C = 0$  e obter o potencial

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z + y \sin(xz)$$

para o campo  $\vec{F}$  que, portanto, é conservativo.

Pelo Teorema Fundamental, teremos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1, 1, 1) - f(0, 0, 1) = 6 + \sin(1) - 3 = 3 + \sin(1).$$

□

### 1.6.2 Independência do caminho

Se  $\vec{F}$  for um campo vetorial contínuo com domínio  $D$ , diremos que a integral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  é *independente do caminho* se

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.6.2)$$

para quaisquer caminhos  $C_1$  e  $C_2$  contidos em  $D$  que tenham os mesmos pontos inicial e final. O Teorema 1.6.1 mostra, em particular, que as integrais de linha de campos conservativos são independentes do caminho.

O Teorema a seguir, por sua vez, mostra que os únicos campos vetoriais independentes do caminho são os conservativos. Vamos admitir que o domínio  $D$  do campo é *aberto* (isto é, que não contém nenhum ponto de sua fronteira) e *conexo por caminhos* (ou seja, que quaisquer dois pontos de  $D$  podem ser ligados por um caminho inteiramente contido em  $D$ ).

**Teorema 1.6.2.** *Seja  $\vec{F}$  um campo vetorial contínuo sobre uma região aberta e conexa por caminhos  $D$ . Se  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  for independente do caminho, então  $\vec{F}$  é conservativo.*

*Demonstração.* Faremos a demonstração para curvas planas, pois o caso espacial é análogo. Seja  $(a, b)$  um ponto fixo em  $D$ . Vamos mostrar que que uma função potencial para  $\vec{F} = (P, Q)$  é

$$f(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

com  $(x, y) \in D$ . Como a integral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  é independente do caminho, não há ambiguidade na definição de  $f$  pois não importa a forma como iremos de  $(a, b)$  a  $(x, y)$ .

Considere um ponto  $(x_1, y) \in D$ , com  $x_1 < x$ . Um ponto dessa forma sempre existe, pois como  $D$  é aberto então  $(x, y)$  não está na fronteira de  $D$ . Seja  $C_1$  um caminho qualquer de  $(a, b)$  a  $(x_1, y)$  e  $C_2$  o segmento de reta horizontal de  $(x_1, y)$  a  $(x, y)$ . Seja  $C$  o caminho de  $(a, b)$  a  $(x, y)$  composto por  $C_1$  seguido por  $C_2$ .

Temos

$$f(x, y) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Note que a primeira integral do lado direito não depende de  $x$ , logo derivando a equação acima com respeito a  $x$  vamos obter

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} P dx + Q dy.$$

Sobre  $C_2$ ,  $y$  é constante, logo  $dy = 0$ , e usando  $t$  como parâmetro para  $C_2$ ,  $x_1 \leq t \leq x$ , temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x P(t, y) dt = P(x, y)$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

Analogamente, tomando um ponto  $(x, y_1)$ , com  $y_1 < y$  e usando um segmento de reta vertical mostra-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y),$$

logo  $\nabla f = \vec{F}$  e  $\vec{F}$  é conservativo.

□

Suponha que  $\vec{F}$  é um campo conservativo. Sabemos que  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  é independente do caminho. Considere uma curva fechada  $C$  qualquer e escolha dois pontos  $A$  e  $B$  sobre  $C$ , de modo que  $C$  seja igual a um caminho  $C_1$  de  $A$  até  $B$  seguido de um caminho  $C_2$  de  $B$  até  $A$ . Observe que as curvas  $C_1$  e  $-C_2$  possuem os mesmos pontos inicial e final, logo

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Assim,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0,$$

ou seja, se  $\vec{F}$  é conservativo então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

para toda curva fechada  $C$ .

Reciprocamente, suponha que  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  para toda curva fechada  $C$ . Sejam  $C_1$  e  $C_2$  dois caminhos quaisquer ligando os pontos  $A$  e  $B$ . A curva  $C$  formada por  $C_1$  seguida de  $-C_2$  é uma curva fechada, logo

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Mas então

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

logo a integral independe do caminho. Com isso, provamos o seguinte Teorema:

**Teorema 1.6.3.** *Seja  $D$  uma região aberta e conexa por caminhos e  $\vec{F}$  um campo vetorial contínuo com domínio  $D$ . São equivalentes:*

(i)  $\vec{F}$  é conservativo;

(ii)  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  é independente do caminho em  $D$ ;

(iii)  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  para toda curva fechada  $C$  contida em  $D$ .

**Exemplo 1.6.8.** Considere o campo

$$\vec{F}(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Vamos calcular  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  ao longo da circunferência  $C$  de parametrização  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Temos  $\vec{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t)$ , logo

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{a \sin t}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}, \frac{a \cos t}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \right) \cdot (-a \sin t, a \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\sin t}{a}, \frac{\cos t}{a} \right) \cdot (-a \sin t, a \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Como  $C$  é uma curva fechada e a integral de  $\vec{F}$  ao longo de  $C$  não é igual a 0, concluímos pelo Teorema anterior que  $\vec{F}$  não é conservativo. □

### 1.6.3 Caracterização dos Campos Conservativos no Plano

Até aqui a única forma que temos de determinar se um campo  $\vec{F}$  é conservativo é calculando um potencial. Nesta seção vamos obter condições mais práticas para decidir quando  $\vec{F}$  é conservativo.

Suponha que  $\vec{F} = (P, Q)$  é conservativo e que  $P$  e  $Q$  possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Logo, existe uma função  $f$  tal que  $\partial f / \partial x = P$  e  $\partial f / \partial y = Q$ . Daí, as derivadas de segunda ordem de  $f$  são contínuas. Pelo Teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Com isso, provamos o

**Teorema 1.6.4.** Se  $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  é um campo conservativo e  $P$  e  $Q$  possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Observe que essa condição é apenas necessária. Todo campo conservativo tem essa propriedade, mas nem todo campo com essa propriedade é conservativo. Como vimos no Exemplo 1.6.8, o campo

$$\vec{F}(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

não é conservativo, apesar de termos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

No entanto, ainda podemos usar o Teorema 1.6.4 para mostrar que um campo  $\vec{F} = (P, Q)$  não é conservativo. Basta mostrar que

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

**Exemplo 1.6.9.** Mostre que  $\vec{F}(x, y) = (x^3 + 4xy, 4xy - y^3)$  não é conservativo.

**Solução.** Temos  $P(x, y) = x^3 + 4xy$  e  $Q(x, y) = 4xy - y^3$ , logo

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4x \neq 4y = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

logo  $\vec{F}$  não é conservativo. □

A recíproca do Teorema 1.6.4 só vale se considerarmos um tipo especial de região: diremos que uma região  $D$  é *simplesmente conexa* se for conexa e se toda curva fechada e simples contida em  $D$  contorna apenas pontos que estão em  $D$ . Intuitivamente, isso significa que  $D$  não contém buracos nem é formado por dois ou mais pedaços separados. Em particular,  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  são simplesmente conexos.

**Teorema 1.6.5.** *Seja  $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  um campo vetorial cujo domínio  $D$  é uma região aberta e simplesmente conexa. Suponha que  $P$  e  $Q$  possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

*em  $D$ . Então  $\vec{F}$  é conservativo.*

Demonstraremos esse resultado na próxima seção com o auxílio do Teorema de Green.

**Exemplo 1.6.10.** Determine se o campo vetorial  $\vec{F}(x, y) = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$  é ou não conservativo.

**Solução.** Temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Como o domínio de  $\vec{F}$  é  $\mathbb{R}^2$ , que é simplesmente conexo, concluímos que  $\vec{F}$  é conservativo. □

## 1.7 O Teorema de Green

Nesta seção vamos estudar o Teorema de Green, que fornece a relação entre uma integral de linha ao longo de uma curva plana fechada e simples  $C$  e uma integral dupla sobre a região  $D$  do plano cercada por  $C$ .

Diremos que uma curva fechada e simples  $C$  está orientada positivamente se, ao percorrermos a curva, a região plana delimitada por ela fica à esquerda.

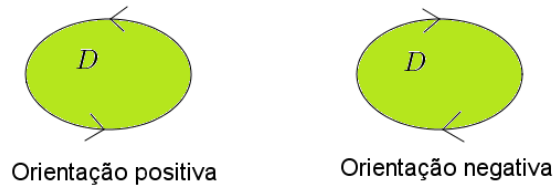


Figura 1.7.1: Orientações de Curvas



**Teorema 1.7.1** (Green). *Seja  $C$  uma curva plana simples, fechada, lisa por partes, orientada positivamente e seja  $D$  a região delimitada por  $C$ . Se as funções de duas variáveis  $P$  e  $Q$  possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha  $D$ , então*

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

- Às vezes usamos a notação  $\oint_C$  no lugar de  $\int_C$  para indicar que estamos integrando sobre uma curva fechada orientada positivamente.
- A notação para a curva fronteira de  $D$ , orientada positivamente, é  $\partial D$ .
- O Teorema de Green pode ser visto como a versão do Teorema Fundamental do Cálculo para a integral dupla, pois relaciona uma expressão envolvendo derivadas dentro da região com uma outra que envolve as funções originais sobre a fronteira dessa região.

*Demonstração.* Vamos demonstrar o Teorema de Green apenas quando  $D$  é uma região retangular, ou seja,

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Note que o Teorema estará demonstrado se verificarmos que

$$\int_C Pdx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \quad \text{e} \quad \int_C Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA.$$

Vamos provar apenas a primeira dessas igualdades, pois a segunda é análoga.

Primeiramente, note que

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_a^b [P(x, d) - P(x, c)] dx, \quad (1.7.1)$$

onde usamos o Teorema Fundamental do Cálculo.

Para calcular a integral de linha, vamos dividir a curva  $C$  em quatro partes: os segmentos de reta  $C_1$  de  $(a, c)$  a  $(b, c)$ ,  $C_2$  de  $(b, c)$  a  $(b, d)$ ,  $C_3$  de  $(b, d)$  a  $(a, d)$  e  $C_4$  de  $(a, d)$  a  $(a, c)$ . Daí, temos

$$\int_C Pdx = \int_{C_1} Pdx + \int_{C_2} Pdx + \int_{C_3} Pdx + \int_{C_4} Pdx.$$

Como  $x$  não varia ao longo de  $C_2$  e  $C_4$ , temos  $dx = 0$  ao longo dessas curvas, logo

$$\int_{C_2} Pdx = \int_{C_4} Pdx = 0.$$

Para as outras duas curvas, podemos parametrizar  $C_1$  por  $\vec{r}_1(x) = (x, c)$ ,  $a \leq x \leq b$  e  $-C_3$  por  $\vec{r}_3(x) = (x, d)$ ,  $a \leq x \leq b$ . Em ambos os casos,  $x'(t) = 1$ , portanto

$$\int_C Pdx = \int_{C_1} Pdx - \int_{C_3} Pdx = \int_a^b P(x, c) dx - \int_a^b P(x, d) dx = \int_a^b [P(x, c) - P(x, d)] dx. \quad (1.7.2)$$

Comparando (1.7.1) e (1.7.2) vemos que

$$\int_C Pdx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA,$$

como queríamos. □

Apesar de termos demonstrado o Teorema de Green apenas para retângulos, ele vale para regiões menos simples, como as do Tipo 1 e do Tipo 2 estudadas em Cálculo 2, como ilustra o exemplo a seguir.

**Exemplo 1.7.1.** Calcule  $\int_C x^2 y^2 dx + 4xy^3 dy$ , onde  $C$  é o triângulo com vértices  $(0,0)$ ,  $(1,3)$  e  $(0,3)$ , orientado positivamente.

**Solução.** Para calcular a integral de linha pela definição precisaríamos resolver três integrais. Vejamos que o Teorema de Green permite realizar um cálculo mais prático. A região  $D$  pode ser expressa como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 3x \leq y \leq 3\}.$$

Temos  $P(x, y) = x^2 y^2$  e  $Q(x, y) = 4xy^3$ , logo

$$\begin{aligned} \int_C x^2 y^2 dx + 4xy^3 dy &= \int_0^1 \int_{3x}^3 (4y^3 - 2x^2 y) dy dx \\ &= \int_0^1 (y^4 - x^2 y^2) \Big|_{y=3x}^{y=3} dx \\ &= \int_0^1 (81 - 9x^2 - 81x^4 + 9x^4) dx \\ &= 81x - 3x^3 - \frac{72x^5}{5} \Big|_0^1 \\ &= \boxed{\frac{318}{5}}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 1.7.2.** Calcule  $\int_C (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos(y^2)) dy$ , onde  $C$  é a fronteira da região delimitada pelas parábolas  $y = x^2$  e  $x = y^2$ , orientada positivamente.

**Solução.** A região  $D$  pode ser expressa como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Temos  $P(x, y) = y + e^{\sqrt{x}}$  e  $Q(x, y) = 2x + \cos(y^2)$ . Pelo Teorema de Green, temos que

$$\begin{aligned} \int_C (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos(y^2)) dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (2 - 1) dy dx \\ &= \int_0^1 y \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \\ &= \boxed{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 1.7.3.** Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\vec{F}(x, y) = (e^x + x^2 y, e^y - xy^2)$  e  $C$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = 25$ , orientada no sentido horário.

**Solução.** Temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (e^x + x^2y)dx + (e^y - xy^2)dy.$$

Note que  $C$  está orientada negativamente, portanto vamos aplicar o Teorema de Green à curva  $-C$ . Temos que  $P(x, y) = e^x + x^2y$  e  $Q(x, y) = e^y - xy^2$ , logo

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (-y^2 - x^2)dA.$$

Como a região  $D$  é circular, usamos coordenadas polares

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{cases},$$

logo  $dA = r dr d\theta$ , de modo que

$$\begin{aligned} \int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \int_0^5 -(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^5 r^3 dr d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^4}{4} \right|_{r=0}^{r=5} d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{625}{4} d\theta \\ &= - \left. \frac{625\theta}{4} \right|_0^{2\pi} \\ &= - \frac{625\pi}{2}. \end{aligned}$$

Como  $\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , concluímos que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{625\pi}{2}.$$

□

**Exemplo 1.7.4.** Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\vec{F}(x, y) = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$  e  $C$  é qualquer curva fechada simples.

**Solução.** Temos

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x = \frac{\partial P}{\partial y},$$

logo

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = 0,$$

qualquer que seja a curva fechada simples  $C$ .

□

Agora, como prometido, exibimos a demonstração do Teorema 1.6.5.

*Demonstração.* Vamos usar o Teorema de Green para mostrar que se  $C$  for uma curva fechada simples em  $D$ , então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Temos que, se  $R$  é a região delimitada por  $C$ , então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = 0.$$

Agora se  $C$  for fechada (não necessariamente simples), então  $C$  pode ser quebrada em um certo número finito de curvas fechadas simples.

Mostramos que as integrais de linha de  $\vec{F}$  sobre essas curvas simples são todas iguais a zero, e somando as integrais vemos que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0,$$

qualquer que seja a curva fechada  $C$ . Pelo Teorema 1.6.3, isso garante que  $\vec{F}$  é conservativo. □

### 1.7.1 Cálculo de Áreas

Nos exemplos da seção anterior usamos o Teorema de Green para calcular a integral de linha, pois o cálculo da integral dupla era bem mais simples (tente calcular as integrais de linhas desses exemplos diretamente pela definição para se convencer disso rapidamente). Também podemos usar o Teorema no sentido oposto, quando calcular uma integral de linha for mais fácil.

Uma aplicação disso é no cálculo de áreas. Como a área de uma região  $D$  é  $\iint_D 1 dA$ , devemos escolher funções  $P$  e  $Q$  tais que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

Algumas possibilidades são:

- $P(x, y) = 0$  e  $Q(x, y) = x$ ;
- $P(x, y) = -y$  e  $Q(x, y) = 0$ ;
- $P(x, y) = -\frac{y}{2}$  e  $Q(x, y) = \frac{x}{2}$ .

**Exemplo 1.7.5.** Calcule a área da elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**Solução.** Usamos a terceira opção apresentada acima, parametrizando  $C$  por  $\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Temos pelo Teorema de Green que

$$\begin{aligned} A &= \int_C -\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(-b \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(b \cos t)] dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt \\ &= \boxed{\pi ab}. \end{aligned}$$

□

Resumindo, podemos usar as fórmulas abaixo para calcular a área da região  $D$  delimitada pela curva  $C$ :

$$A = \oint_C x dy = - \oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \quad (1.7.3)$$

**Exemplo 1.7.6.** Calcule a área da curva de parametrização  $\vec{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Essa curva é chamada de *astroide*.

**Solução.** Usando novamente a terceira fórmula apresentada, temos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \cos^3 t (3 \sin^2 t \cos t) - \sin^3 t (-3 \cos^2 t \sin t) \right) dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left( \cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t \right) dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) dt \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} 4 \cos^2 t \sin^2 t dt \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} (2 \sin t \cos t)^2 dt \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(4t)}{2} dt \\ &= \frac{3}{16} \left( t - \frac{\sin(4t)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \boxed{\frac{3\pi}{8}}. \end{aligned}$$

□

### 1.7.2 Versão estendida do Teorema de Green

O Teorema de Green também pode ser aplicado a regiões com furos, como na figura a seguir:

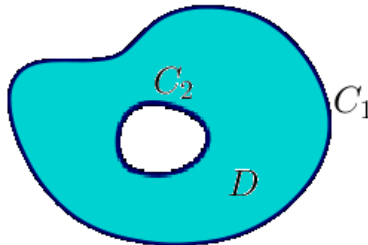


Figura 1.7.2: Uma região com furo

Observe que a fronteira de  $D$  é formada por duas curvas fechadas simples  $C_1$  e  $C_2$ . Note também que a orientação positiva de  $C_1$  é no sentido anti-horário, mas a de  $C_2$  é no sentido horário. Vamos dividir a região  $D$  em duas regiões  $D_1$  e  $D_2$  introduzindo os cortes mostrados na figura seguinte:

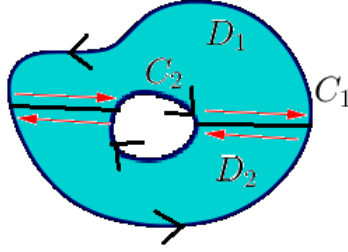


Figura 1.7.3: Cortes em uma região com furo

Vamos aplicar o Teorema de Green às regiões  $D_1$  e  $D_2$ . Temos

$$\iint_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D_1} Pdx + Qdy \quad \text{e} \quad \iint_{D_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D_2} Pdx + Qdy.$$

Somando as duas equações acima, as integrais sobre os cortes se cancelam, já que em cada integral eles são percorridos em sentidos opostos. A parte restante forma as curvas  $C_1$  e  $C_2$ , orientadas positivamente, ou seja, a fronteira da região  $D$ . Logo,

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} Pdx + Qdy, \quad (1.7.4)$$

que é o Teorema de Green para a região  $D$ .

Cuidado com a orientação das curvas! A fronteira exterior deve ser orientada no sentido anti-horário como de costume, mas a fronteira interior deve ser orientada no sentido horário!

**Exemplo 1.7.7.** Se

$$\vec{F}(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

mostre que  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$  para toda curva fechada simples que circunde a origem.

**Solução.** Não podemos usar o Teorema de Green diretamente pois  $P$  e  $Q$  não possuem derivadas parciais contínuas na origem. Consideremos o círculo  $C_1$  de raio  $a$  e centro na origem, com  $a$  suficientemente pequeno para que  $C_1$  esteja contida no interior de  $C$ , e orientada no sentido anti-horário. A região  $D$  compreendida entre  $C$  e  $C_1$  pode ser usada no Teorema de Green, pois  $P$  e  $Q$  têm derivadas parciais contínuas em um aberto contendo essa região.

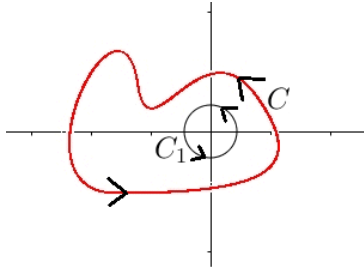


Figura 1.7.4: Região do Exemplo 1.7.7

Usamos a observação que fizemos acima:

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} Pdx + Qdy. \quad (1.7.5)$$

A fronteira de  $D$  é formada pelas curvas  $C$  e  $C_1$ . Já vimos no Exemplo 1.6.8 que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

logo a equação (1.7.5) pode ser reescrita como

$$0 = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{-C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Basta calcular essa última integral, mas já vimos, também no Exemplo 1.6.8, que

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$$

para toda circunferência  $\gamma$  centrada na origem orientada positivamente. Assim,

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi}$$

para toda curva fechada e simples que circunde a origem. □

### 1.7.3 Mais Exemplos

**Exemplo 1.7.8.** Seja  $C$  a curva dada pelo gráfico da função  $y = x\sqrt{1-x}$ ,  $x \in [0, 1]$ , e considere o campo vetorial  $\vec{F}(x, y) = ((y+1)^2, 2x + \sin^3 y)$ .

- Encontre uma parametrização  $\vec{r}(t)$  de  $C$ .
- Encontre uma parametrização  $\vec{r}_1(t)$  do segmento de reta  $C_1$  que junta os extremos de  $C$ .
- Usando o Teorema de Green, calcule a integral de linha  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

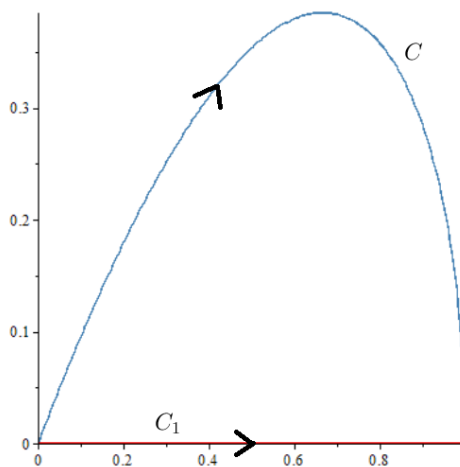


Figura 1.7.5: Curvas do Exemplo 1.7.8

**Solução.** Para o item (a), basta considerar  $\vec{r}(t) = (t, t\sqrt{1-t})$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Para o item (b), consideramos  $\vec{r}_1(t) = (t, 0)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Vamos usar o Teorema de Green na região  $D$  limitada pelas curvas  $C$  e  $C_1$ . Observe

a Figura 1.7.5. Podemos fazer isso pois as funções  $P(x, y) = (y + 1)^2$  e  $Q(x, y) = 2x + \sin^3 y$  possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre  $D$  e sobre sua fronteira, que é  $\partial D = (-C) \cup C_1$ , já com orientação positiva.

Temos

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2 \text{ e } \frac{\partial P}{\partial y} = 2y + 2,$$

logo pelo Teorema de Green

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = 2 \iint_D y dA. \quad (1.7.6)$$

Podemos expressar  $D$  na forma

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\sqrt{1-x}\},$$

logo

$$\iint_D y dA = \int_0^1 \int_0^{x\sqrt{1-x}} y dy dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=x\sqrt{1-x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2(1-x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

Substituindo em (1.7.6), vamos obter

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{12}. \quad (1.7.7)$$

Agora calculamos a integral ao longo de  $C_1$ . Note que como  $y$  é constante ao longo desta curva, temos  $dy = 0$ , logo

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} P dx + Q dy = \int_{C_1} P dx = \int_0^1 (0+1)^2 dt = 1.$$

Finalmente, substituindo em (1.7.7) e usando o fato de que  $\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \boxed{\frac{13}{12}}.$$

□

**Exemplo 1.7.9.** Considere o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y) = \left( -\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e sejam  $\gamma$  e  $\delta$ , respectivamente, as circunferências  $x^2 + y^2 = 1$  e  $(x-1)^2 + y^2 = 4$ , ambas percorridas no sentido anti-horário.

(a) Esboce  $\gamma$  e  $\delta$  em  $\mathbb{R}^2$ .

(b) Calcule  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

(c) Sendo  $\vec{F} = (P, Q)$ , mostre que  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ .

(d) Use o Teorema de Green para calcular  $\int_{\delta} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .



**Solução.** O esboço das curvas está na Figura 1.7.6. A curva  $\gamma$  tem parametrização  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , logo

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t, \cos t \sin^2 t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (\sin^4 t + \cos^2 t \sin^2 t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\
 &= \frac{t}{2} - \frac{\cos(2t)}{4} \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \boxed{\pi}.
 \end{aligned}$$

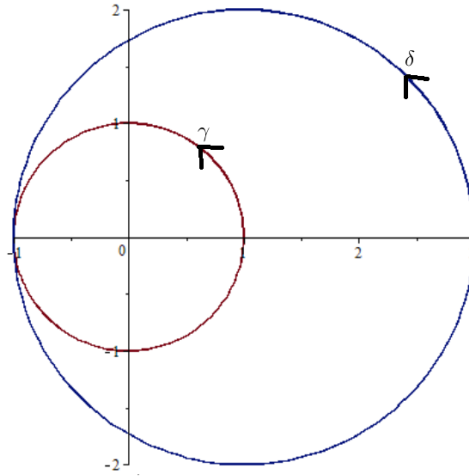


Figura 1.7.6: Circunferências  $\gamma$  e  $\delta$

Temos ainda que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^4 - 3x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Como  $P$  e  $Q$  possuem derivadas parciais contínuas sobre as curvas  $\gamma$  e  $\delta$  e na região  $D$  limitada por elas, o Teorema de Green nos fornece

$$\int_{\delta} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = 0,$$

já orientando a fronteira de  $D$  positivamente (considerando  $-\gamma$  ao invés de  $\gamma$ ). Dessa forma, concluímos que

$$\boxed{\int_{\delta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi}.$$

□

## 1.8 Exercícios

**Exercício 1.1.** Parametrize o segmento de reta que liga os pontos  $P$  e  $Q$  nos seguintes casos:

- (a)  $P(0, 0, 0)$  e  $Q(1, 2, 3)$ .
- (b)  $P(-1, 3, 5)$  e  $Q(0, 2, 9)$ .

**Exercício 1.2.** Parametrize a curva obtida pela interseção das superfícies nos seguintes casos:

- (a) O cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  e a superfície  $z = xy$ .
- (b) O cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e o plano  $z = 1 + y$ .
- (c) O parabolóide  $z = 4x^2 + y^2$  e o cilindro parabólico  $y = x^2$ .

**Exercício 1.3.** Determine o ponto na curva  $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t, e^t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , em que a reta tangente é paralela ao plano  $\sqrt{3}x + y = 1$ .

**Exercício 1.4.** Encontre uma equação para a reta tangente à curva de interseção dos cilindros  $x^2 + y^2 = 25$  e  $y^2 + z^2 = 20$  no ponto  $(3, 4, 2)$ .

**Exercício 1.5.** Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

- (a)  $x = t$ ,  $y = e^{-t}$ ,  $z = 2t - t^2$ ;  $(0, 1, 0)$ .
- (b)  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \operatorname{sen} t$ ,  $z = 4 \cos(2t)$ ;  $(\sqrt{3}, 1, 2)$ .

**Exercício 1.6.** Determine o comprimento da curva dada:

- (a)  $\vec{r}(t) = (t, 3 \cos t, 3 \operatorname{sen} t)$ ,  $-5 \leq t \leq 5$ .
- (b)  $\vec{r}(t) = (2t, t^2, \frac{1}{3}t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .
- (c)  $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \ln(\cos t))$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ .
- (d)  $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, 2)$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .
- (e)  $\vec{r}(t) = (t^2, \cos t + t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - t \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

**Exercício 1.7.** Reparametrize a curva pelo comprimento de arco a partir do ponto onde  $t = 0$  na direção crescente de  $t$ .

- (a)  $\vec{r}(t) = (3 + \cos t, 2 + \operatorname{sen} t)$ .
- (b)  $\vec{r}(t) = (\cos^3(t), \operatorname{sen}^3(t))$ .
- (c)  $\vec{r}(t) = (\frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2)$ .
- (d)  $\vec{r}(t) = (\operatorname{sen}(e^t), \cos(e^t), \sqrt{3}e^t)$ .
- (e)  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, ct)$ .

**Exercício 1.8.** Encontre uma função potencial para o campo  $\vec{F}$  do Exemplo 1.6.10.

**Exercício 1.9.** Considere a curva parametrizada por

$$\alpha(t) = (e^{t/2} \cos t, e^{t/2} \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

- (a) Ache  $ds$ , o elemento de comprimento de arco da curva parametrizada  $\alpha$ .

(b) Calcule o comprimento desta curva.

(c) Calcule

$$\int_{\alpha} y ds.$$

**Exercício 1.10.** Considere a curva  $C$  parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \left( \cos(t) + t \sin(t), \sin(t) - t \cos(t), \frac{1}{2}t^2 \right), \quad 0 \leq t \leq \ell.$$

(a) Para cada valor do parâmetro  $t$  encontre um vetor tangente e um vetor tangente unitário no ponto correspondente de  $C$ .

(b) Encontre o comprimento da curva  $C$ .

(c) Existe algum  $\alpha \in [0, \ell]$  tal que  $\vec{r}(0) = \vec{r}(\alpha)$ ?

(d) Se  $f(x, y, z) = z$ , calcule

$$\int_C f(x, y, z) ds.$$

(e) Calcule a integral de linha

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z^2)$ .

**Exercício 1.11.** Seja  $C$  o quarto de elipse de equação

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1, \quad x \geq 0, y \geq 0,$$

ou seja, aquele trecho da elipse localizado no primeiro quadrante, e considere a função escalar  $f(x, y) = \frac{9}{10}xy$ , definida em  $\mathbb{R}^2$ .

(a) Encontre uma parametrização  $\vec{r}(t)$  de  $C$ , o vetor tangente  $\vec{r}'(t)$  e um vetor normal  $\vec{N}$  no ponto  $\vec{r}(t)$ .

(b) Calcule a integral

$$\int_C f(x, y) ds$$

em relação ao comprimento de arco.

(c) Calcule a integral

$$\int_C f(x, y) dy$$

em relação à variável  $y$ .

**Exercício 1.12.** Calcule o comprimento da curva  $C$  de parametrização  $\vec{r}(t) = (e^{t/2\pi} \cos t, e^{t/2\pi} \sin t)$  do ponto  $(1, 0)$  ao ponto  $(e, 0)$ .

**Exercício 1.13.** Sendo  $\vec{F}(x, y, z) = (x, 0, yz^2)$  e  $C$  o segmento de reta de  $A = (1, 2, 3)$  a  $B = (0, 1, 2)$ , calcule

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

**Exercício 1.14.** Considere a cicloide de parametrização  $\vec{r}(\theta) = (a(\theta - \sin \theta), a(1 - \cos \theta))$ .

- (a) Calcule o comprimento do arco da cicloide para  $0 \leq \theta \leq \pi$ . **Dica:** Use a identidade  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$ .
- (b) Seja  $\vec{r}(s) = (x(s), y(s))$  a reparametrização pelo comprimento de arco da cicloide partindo de  $\theta_0 = 0$ . Encontre  $y(s)$ .

**Exercício 1.15.** Seja  $\gamma$  a curva de interseção dos cilindros  $x^2 + z^2 = 16$  e  $y^2 + z^2 = 16$  entre os pontos  $A = (2, 2, 2\sqrt{3})$  e  $B = (2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 2)$  e seja  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + z^2, x^2 + y^2, y^2 + z^2)$ .

- (a) Parametrize  $\gamma$  no sentido de  $A$  para  $B$ .
- (b) Calcule

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

**Exercício 1.16.** Calcule a integral de linha do Exemplo 1.6.7 sem usar o Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha.

**Exercício 1.17.** Considere o campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz + 1, x^2z + z, x^2y + y)$ .

- (a) Determine uma função potencial para  $\vec{F}$ .
- (b) Calcule a integral de linha de  $\vec{F}$  ao longo da curva dada pela interseção do parabolóide  $z = 4 - x^2 - y^2$  com o plano  $x - y = 0$ , com  $z \geq 0$ .

**Exercício 1.18.** Seja  $C$  a curva dada pela interseção do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  com a superfície  $z = e^{xy}$ , na região do espaço onde  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ . Considere o campo de força

$$\vec{F}(x, y, z) = (yz^2, xz^2 + 1, 2xyz).$$

- (a) Encontre uma parametrização  $\vec{r}(t)$  de  $C$ , um vetor tangente a  $C$  no ponto  $\vec{r}(t)$  e os extremos de  $C$ .
- (b) Encontre um potencial  $f(x, y, z)$  de  $\vec{F}(x, y, z)$ .
- (c) Calcule o trabalho feito pelo campo  $\vec{F}(x, y, z)$  para mover uma partícula ao longo de  $C$ , utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha.

**Exercício 1.19.** Considere o campo de vetores

$$\vec{F}(x, y) = \left( \frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^4}}, \frac{6y^3}{\sqrt{x^2 + y^4}} \right).$$

- (a) Ache um potencial para  $\vec{F}$ .
- (b) Calcule o trabalho realizado por  $\vec{F}$  ao deslocar uma partícula ao longo do arco de circunferência  $y = \sqrt{1 - x^2}$  do ponto  $A = (1, 0)$  até o ponto  $B = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .

**Exercício 1.20.** Considere o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y) = \left( \frac{y^2}{1 + x^2}, 2y \arctan(x) + 1 \right).$$

- (a)  $\vec{F}(x, y)$  é conservativo?
- (b) Determine uma função  $f$  tal que  $\vec{F} = \nabla f$ .
- (c) Calcule

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde  $C$  é dada por  $\vec{r}(t) = (t^2, 2t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

**Exercício 1.21.** Considere a cicloide  $\gamma(t) = (t - \operatorname{sent} t, 1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

(a) Calcule

$$\int_{\gamma_{B,O}} ydx - xdy,$$

onde  $\gamma_{B,O}$  é o arco de cicloide entre os pontos  $O = (0, 0)$  e  $B = (2\pi, 0)$ , percorrido de  $B$  para  $O$ .

(b) Calcule a área da região plana limitada superiormente pelo arco de cicloide do item anterior e inferiormente pelo eixo  $Ox$ .

**Exercício 1.22.** Use o Teorema de Green e o Exemplo 1.7.5 para calcular

$$\int_C e^x \operatorname{sen} y dx + (e^x \cos y + 3x) dy,$$

onde  $C$  é a elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ .



## Capítulo 2

# Cálculo Vetorial de Superfícies

### 2.1 Superfícies Parametrizadas

Vimos no Capítulo 1 que uma curva parametrizada é o conjunto imagem de uma função vetorial contínua de uma variável. Analogamente, uma função vetorial  $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  de duas variáveis contínua determina o que chamamos de *superfície parametrizada*, onde  $u$  e  $v$  são os parâmetros, com  $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ . As equações  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  e  $z = z(u, v)$  são as *equações paramétricas* da superfície.

**Exemplo 2.1.1.** O plano  $2x - 3y + 2z = 15$  pode ser parametrizado fazendo  $x = u$ ,  $y = v$ , e então  $z = \frac{15 - 2u + 3v}{2}$ . Uma parametrização é

$$\vec{r}(u, v) = \left( u, v, \frac{15 - 2u + 3v}{2} \right).$$

**Exemplo 2.1.2.** Usando coordenadas cilíndricas, o cilindro  $x^2 + y^2 = R^2$  tem parametrização

$$\vec{r}(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z).$$

**Exemplo 2.1.3.** A esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  pode ser parametrizada, usando coordenadas esféricas, por

$$\vec{r}(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi),$$

com  $0 \leq \phi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**Exemplo 2.1.4.** O parabolóide elíptico  $z = x^2 + 2y^2$  pode ser parametrizado usando  $x$  e  $y$  como parâmetros:

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, x^2 + 2y^2).$$

Em geral, sempre que uma das variáveis for dada como função das outras duas, podemos usar as duas variáveis independentes como parâmetros, como nos Exemplos 2.1.1 e 2.1.4.

**Exemplo 2.1.5.** A metade inferior do elipsoide  $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$  pode ser parametrizada como no Exemplo 2.1.3. Reescrevendo a equação como

$$\frac{x^2}{(1/\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(1/2)^2} + z^2 = 1,$$

podemos fazer

$$\vec{r}(\phi, \theta) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi \cos \theta, \frac{1}{2} \sin \phi \sin \theta, \cos \phi \right),$$

com  $\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

**Exemplo 2.1.6.** Parametrize a parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que está acima do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Solução.** A uma altura  $z$ , a seção transversal do cone é um círculo de raio  $z$ , logo o ângulo de abertura do cone é  $\pi/4$ . Logo, a superfície pode ser parametrizada em coordenadas esféricas como

$$\vec{r}(\phi, \theta) = (2 \sin \phi \cos \theta, 2 \sin \phi \sin \theta, 2 \cos \phi),$$

com  $0 \leq \phi \leq \pi/4$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

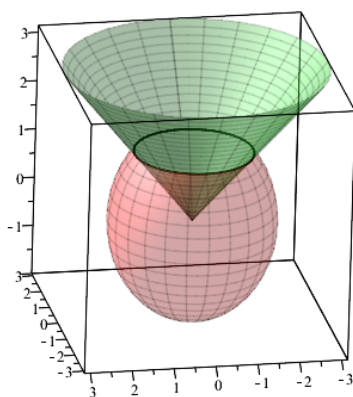


Figura 2.1.1: Interseção de Esfera e Cone

□

**Exemplo 2.1.7.** A superfície de revolução gerada pela rotação da curva  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  (com  $f(x) \geq 0$ ), em torno do eixo  $x$  pode ser parametrizada como  $x = x$ ,  $y = f(x) \cos \theta$ ,  $z = f(x) \sin \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo de rotação.

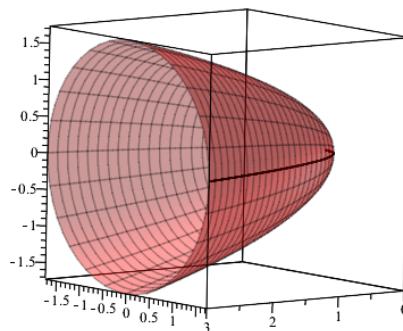


Figura 2.1.2: Superfície de Revolução



Por exemplo, a superfície gerada pela rotação de  $y = e^{-x}$ ,  $0 \leq x \leq 3$ , em torno do eixo  $x$ , tem parametrização  $\vec{r}(x, \theta) = (x, e^{-x} \cos \theta, e^{-x} \sin \theta)$ ,  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .  $\square$

Seja  $S$  uma superfície de parametrização  $\vec{r}(u, v)$ . Como podemos determinar um vetor tangente a  $S$  num ponto  $\vec{r}(u_0, v_0)$ ? Isso pode ser feito obtendo um vetor tangente a uma curva simples contida na superfície e que passe nesse ponto.

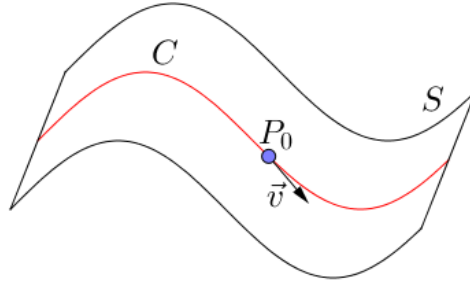


Figura 2.1.3: Um vetor tangente a  $S$  em  $P_0$

Podemos considerar a curva obtida percorrendo a superfície  $\vec{r}(u, v)$  variando  $u$  mas fazendo  $v = v_0$  constante. Obtemos uma curva  $\vec{r}(t, v_0)$ , com parâmetro  $t = u$ . Para obter um vetor tangente, tomamos a sua derivada, ou seja,  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ . Outra curva é obtida fazendo  $u = u_0$  constante e variando  $v$ , cujo vetor tangente é  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ . Essas curvas obtidas mantendo um dos parâmetros constantes e variando o outro são chamadas de *curvas da grade*.

O *plano tangente* a  $S$  no ponto  $P_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$  é o conjunto dos vetores tangentes a  $S$  nesse ponto. Se os vetores  $\vec{r}_u(u_0, v_0)$  e  $\vec{r}_v(u_0, v_0)$  não forem paralelos (ou seja, se  $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v \neq \vec{0}$ ), então esses vetores formam uma base para o plano tangente em  $P_0$ . Nesse caso, diremos que  $S$  é uma *superfície lisa*. Um vetor normal ao plano é  $\vec{n} = \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v$ .

**Exemplo 2.1.8.** Determine uma equação para o plano tangente à superfície de parametrização  $\vec{r}(u, v) = (u + v, 3u^2, u - v)$  no ponto  $(2, 3, 0)$ .

**Solução.** O ponto  $(2, 3, 0)$  é obtido quando  $u + v = 2$ ,  $3u^2 = 3$  e  $u - v = 0$ , ou seja, quando  $u = 1$  e  $v = 1$ . Temos  $\vec{r}_u(u, v) = (1, 6u, 1)$  e  $\vec{r}_v(u, v) = (1, 0, -1)$ , logo  $\vec{r}_u(1, 1) = (1, 6, 1)$  e  $\vec{r}_v(1, 1) = (1, 0, -1)$ . Portanto um vetor normal é

$$(1, 6, 1) \wedge (1, 0, -1) = (-6, 2, -6).$$

Daí, uma equação para o plano tangente é

$$-6(x - 2) + 2(y - 3) - 6(z - 0) = 0 \Rightarrow -6x + 2y - 6z = -6 \text{ ou } \boxed{3x - y + 3z = 3}.$$

$\square$

**Exemplo 2.1.9.** Determine uma equação para o plano tangente à superfície de parametrização  $\vec{r}(u, v) = (u^2, v^2, uv)$  no ponto  $P = \vec{r}(1, 1)$ .

**Solução.** Temos  $P = \vec{r}(1, 1) = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{r}_u(u, v) = (2u, 0, v)$  e  $\vec{r}_v(u, v) = (0, 2v, u)$ , logo  $\vec{r}_u(1, 1) = (2, 0, 1)$  e  $\vec{r}_v(1, 1) = (0, 2, 1)$ . Com isso, o vetor normal ao plano é

$$(2, 0, 1) \wedge (0, 2, 1) = (-2, -2, 4).$$

Assim, uma equação para o plano tangente é

$$-2(x - 1) - 2(y - 1) + 4(z - 1) = 0 \Rightarrow -2x - 2y + 4z = 0 \text{ ou } \boxed{x + y - 2z = 0}.$$

$\square$

## 2.2 Áreas de Superfícies

Nesta seção vamos obter uma expressão para a área da superfície  $S$  dada pela parametrização  $\vec{r}(u, v)$ , onde  $(u, v)$  está em uma região  $D$  do plano, a qual vamos supor retangular:  $D = [a, b] \times [c, d]$ . Particionamos os intervalos  $[a, b]$  e  $[c, d]$ , como de costume, dividindo o retângulo  $D$  em vários sub-retângulos, que são levados por  $\vec{r}$  em um pedaço quase retangular de  $S$ , o qual chamaremos de *retalho*.

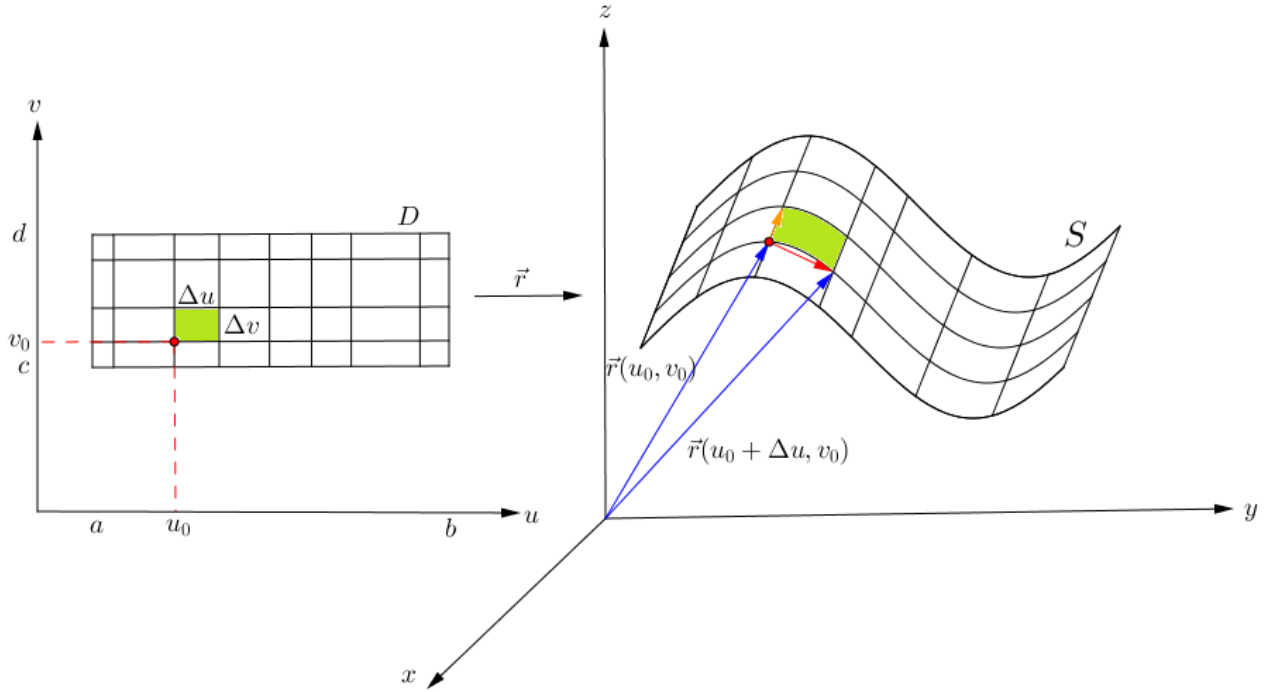


Figura 2.2.1: Os retalhos na superfície

Na figura da direita, o vetor vermelho é  $\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0)$ . Observe que se  $\Delta u$  for pequeno, então  $\vec{r}_u(u_0, v_0)$  é aproximadamente igual a

$$\frac{\vec{r}(u_0 + \Delta u) - \vec{r}(u_0, v_0)}{\Delta u},$$

logo o vetor vermelho é aproximadamente igual a  $\vec{r}_u(u_0, v_0)\Delta u$ , se  $\Delta u$  for pequeno. Analogamente, o vetor laranja pode ser aproximado por  $\vec{r}_v(u_0, v_0)\Delta v$  se  $\Delta v$  for pequeno. Assim, a área do retalho verde pode ser aproximada pela área do paralelogramo de lados  $\vec{r}_u\Delta u$  e  $\vec{r}_v\Delta v$ . Logo,

$$A(S) = \lim_{\Delta u, \Delta v \rightarrow 0} \sum \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| \Delta u \Delta v = \iint_D \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| dA.$$

Isso nos leva à definição:

**Definição 2.2.1.** A área de uma superfície lisa  $S$ , de parametrização  $\vec{r}(u, v)$ , com  $(u, v) \in D$ , é dada por

$$A(S) = \iint_D \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| dA. \quad (2.2.1)$$

**Exemplo 2.2.1.** Calcule a área da parte do plano  $x + 2y + z = 4$  que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ .

**Solução.** Temos  $\vec{r}(x, y) = (x, y, 4 - x - 2y)$ , logo  $\vec{r}_x = (1, 0, -1)$  e  $\vec{r}_y = (0, 1, -2)$ . Daí,

$$\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = (-1, 2, 1),$$

logo  $\|\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y\| = \sqrt{6}$ . A área é igual a

$$\iint_D \sqrt{6} dA = \sqrt{6} \iint_D dA = \sqrt{6} A(D),$$

onde  $D$  é o círculo  $x^2 + y^2 \leq 4$ , cuja área é  $4\pi$ . Logo,

$$\boxed{A(S) = 4\pi\sqrt{6}}.$$

□

**Exemplo 2.2.2.** Determine a área da superfície de uma esfera de raio  $R$ .

**Solução.** Uma parametrização é

$$\vec{r}(\phi, \theta) = (R \cos \phi \cos \theta, R \cos \phi \sin \theta, R \sin \phi),$$

com  $(\phi, \theta) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ . Temos

$$\vec{r}_\phi = (R \cos \phi \cos \theta, R \cos \phi \sin \theta, -R \sin \phi) \text{ e } \vec{r}_\theta = (-R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, 0),$$

logo após algumas contas vemos que

$$\vec{r}_\phi \wedge \vec{r}_\theta = (R^2 \sin^2 \phi \cos \theta, R^2 \sin^2 \phi \sin \theta, R^2 \sin \phi \cos \phi).$$

Após mais algumas contas concluímos que

$$\boxed{\|\vec{r}_\phi \wedge \vec{r}_\theta\| = R^2 \sin \phi}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \|\vec{r}_\phi \wedge \vec{r}_\theta\| dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \phi d\phi d\theta \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi \\ &= R^2 \cdot 2\pi (-\cos \phi)_0^\pi \\ &= -2\pi R^2 (\cos \pi - \cos 0) \\ &= \boxed{4\pi R^2}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.2.3.** Calcule a área da parte do paraboloide hiperbólico  $z = y^2 - x^2$  que está entre os cilindros  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$ .

**Solução.** Temos  $\vec{r}(x, y) = (x, y, y^2 - x^2)$ , onde  $(x, y)$  pertence à coroa circular  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ . Temos  $\vec{r}_x = (1, 0, -2x)$  e  $\vec{r}_y = (0, 1, 2y)$ , logo

$$\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = (-2x - 2y, 1).$$

Daí,  $\|\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$ .

Assim,

$$A = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA.$$

Usando coordenadas polares  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $1 \leq r \leq 2$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , temos

$$A = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{4r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \sin^2 \theta + 1} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr.$$

A primeira integral vale  $2\pi$ , enquanto a segunda usa a substituição  $u = 4r^2 + 1$ , logo  $du = 8r dr$ , e então

$$A = 2\pi \int_5^{17} \frac{\sqrt{u}}{8} du = 2\pi \frac{1}{8} \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_5^{17} = \frac{\pi}{6} (\sqrt{17^3} - \sqrt{5^3}) = \boxed{\frac{\pi(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})}{6}}.$$

□

Vejamos uma outra forma de calcular  $dS$ , que não envolva o produto vetorial. Sabemos que

$$dS = \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| dA.$$

Seja  $\theta$  o ângulo entre  $\vec{r}_u$  e  $\vec{r}_v$ . Então  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , mas sabemos da Geometria Analítica que

$$\sin \theta = \frac{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|}{\|\vec{r}_u\| \|\vec{r}_v\|} \text{ e } \cos \theta = \frac{\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u\| \|\vec{r}_v\|}.$$

Assim,

$$\frac{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|^2}{\|\vec{r}_u\|^2 \|\vec{r}_v\|^2} + \frac{(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2}{\|\vec{r}_u\|^2 \|\vec{r}_v\|^2} = 1.$$

Fazendo  $E = \|\vec{r}_u\|^2 = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$ ,  $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$  e  $G = \|\vec{r}_v\|^2 = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$  e arrumando a expressão acima, podemos escrever

$$\boxed{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| = \sqrt{EG - F^2}}.$$

Logo,

$$dS = \sqrt{EG - F^2} dA \tag{2.2.2}$$

Essa é uma fórmula mais prática de calcular o  $dS$ , pois é dada apenas em termos do produto escalar.

## 2.3 Integrais de Superfície

### 2.3.1 Integrais de Superfície de Funções Reais

De forma análoga à que fizemos para construir a integral de linha de uma função real em relação ao comprimento de arco, podemos construir a *integral de superfície*. Seja  $S$  uma superfície lisa com parametrização  $\vec{r}(u, v)$ , com  $(u, v) \in D$ , e  $f$  uma função cujo domínio contém  $S$ . Então:

$$\boxed{\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| dA} \tag{2.3.1}$$

**Exemplo 2.3.1.** Calcule  $\iint_S x^2 y z dS$ , onde  $S$  é a parte do plano  $z = 1 + 2x + 3y$  que está acima do retângulo  $[0, 3] \times [0, 2]$ .

**Solução.** A parametrização de  $S$  pode ser dada por

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, 1 + 2x + 3y).$$

O conjunto  $D$  é o retângulo  $[0, 3] \times [0, 2]$ . Temos  $\vec{r}_x = (1, 0, 2)$  e  $\vec{r}_y = (0, 1, 3)$ , logo usando a fórmula 2.2.2 temos  $E = \vec{r}_x \cdot \vec{r}_x = 5$ ,  $F = \vec{r}_x \cdot \vec{r}_y = 6$  e  $G = \vec{r}_y \cdot \vec{r}_y = 10$ , portanto

$$dS = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{14}dA.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 y z dS &= \int_0^2 \int_0^3 x^2 y (1 + 2x + 3y) \sqrt{14} dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^3 (x^2 y + 2x^3 y + 3x^2 y^2) \sqrt{14} dx dy \\ &= \sqrt{14} \int_0^2 \left( \frac{x^3 y}{3} + \frac{2x^4 y}{4} + x^3 y^2 \right)_{x=0}^{x=3} dy \\ &= \sqrt{14} \int_0^2 \left( 9y + \frac{81y}{2} + 27y^2 \right) dy \\ &= \sqrt{14} \left( \frac{9y^2}{2} + \frac{81y^2}{4} + \frac{27y^3}{3} \right)_0^2 \\ &= \boxed{171\sqrt{14}}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.3.2.** Calcule  $\iint_S x^2 z^2 dS$ , onde  $S$  é a parte do cone  $z^2 = x^2 + y^2$  que está entre os planos  $z = 1$  e  $z = 3$ .

**Solução.** Uma parametrização é

$$\vec{r}_1(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}),$$

com  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ . Uma outra parametrização mais agradável é

$$\vec{r}(s, \theta) = (s \cos \theta, s \sin \theta, s),$$

com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $1 \leq s \leq 3$ . Usaremos a segunda opção, que nos fornece  $\vec{r}_s = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$  e  $\vec{r}_\theta = (-s \sin \theta, s \cos \theta, 0)$ , logo  $E = \vec{r}_s \cdot \vec{r}_s = 2$ ,  $F = \vec{r}_s \cdot \vec{r}_\theta = 0$  e  $G = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = s^2$ , de modo que a fórmula 2.2.2 nos dá

$$dS = s\sqrt{2}dA$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 \iint_S x^2 y^2 dS &= \iint_D (s^2 \cos^2 \theta)(s^2)(s\sqrt{2})dA \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^3 s^5 \cos^2 \theta ds d\theta \\
 &= \sqrt{2} \int_1^3 s^5 ds \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \sqrt{2} \int_1^3 s^5 ds \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\
 &= \sqrt{2} \frac{s^6}{6} \Big|_1^3 \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \boxed{\sqrt{2} \frac{(3^6 - 1)}{6} \pi}.
 \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.3.3.** Calcule  $\iint_S xy dS$ , onde  $S$  é a fronteira da região sólida limitada pelo cilindro  $x^2 + z^2 = 1$  e pelos planos  $y = 0$  e  $x + y = 2$ .

**Solução.** A superfície  $S$  é formada pelos pedaços  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  indicados na Figura 2.3.1 abaixo. Vamos calcular a integral em cada pedaço e somar os resultados obtidos.

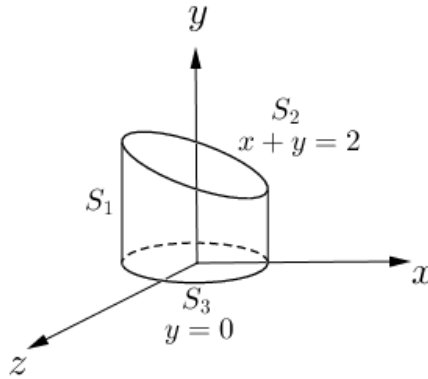


Figura 2.3.1: Um cilindro truncado

A superfície  $S_1$  tem parametrização

$$\vec{r}(\theta, y) = (\cos \theta, y, \sin \theta),$$

com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $0 \leq y \leq 2 - x = 2 - \cos \theta$ . Temos que  $\vec{r}_\theta = (\cos \theta, 0, -\sin \theta)$  e  $\vec{r}_y = (0, 1, 0)$ , portanto  $E = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = 1$ ,  $F = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_y = 0$  e  $G = \vec{r}_y \cdot \vec{r}_y = 1$ , logo

$$dS = 1dA.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_1} xy dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2-\sin\theta} \sin\theta y dy d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \sin\theta \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2-\sin\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin\theta (2 - \sin\theta)^2 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( 2 \sin\theta - 2 \sin^2\theta + \frac{1}{2} \sin^3\theta \right) d\theta
 \end{aligned}$$

Essa última integral pode ser dividida em três, que calculamos a seguir:

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = -\cos\theta \Big|_0^{2\pi} = -(\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0. \quad (2.3.2)$$

$$\int_0^{2\pi} -2 \sin^2\theta d\theta = -\int_0^{2\pi} (1 - \cos(2\theta)) d\theta = -\left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = -2\pi. \quad (2.3.3)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^3\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \sin\theta d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2\theta) \sin\theta d\theta = \int_1^{-1} (u^2 - 1) du = 0, \quad (2.3.4)$$

onde fizemos a substituição  $u = \cos\theta$ .

Usando os resultados de (2.3.2), (2.3.3) e (2.3.4), obtemos

$$\iint_{S_1} xy dS = \boxed{-2\pi}.$$

A superfície  $S_2$  tem parametrização  $\vec{r}(x, z) = (x, 2 - x, z)$ , onde  $x^2 + z^2 \leq 1$ . Temos  $\vec{r}_x = (1, -1, 0)$  e  $\vec{r}_z = (0, 0, 1)$ , logo  $E = 2$ ,  $F = 0$  e  $G = 1$ , de modo que

$$dS = \sqrt{2} dA.$$

Daí, usando coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_2} xy dS &= \iint_D x(2-x)\sqrt{2} dA \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r \sin\theta - r^2 \sin^2\theta) r dr d\theta \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r^2 \sin\theta - r^3 \sin^2\theta) dr d\theta \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{2r^3 \sin\theta}{3} - \frac{r^4 \sin^2\theta}{4} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{3} \sin\theta - \frac{1}{4} \sin^2\theta \right) d\theta \\
 &= \sqrt{2} \left( \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \right) \\
 &= \boxed{-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}}
 \end{aligned}$$

por (2.3.2) e (2.3.3).

Finalmente, na superfície  $S_3$  temos  $y = 0$ , logo

$$\iint_{S_3} xy dS = \boxed{0}.$$

Daí, somando os três resultados obtidos, concluímos que

$$\boxed{\iint_S xy dS = -2\pi - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}}.$$

□

### 2.3.2 Orientação de Superfícies

Para definirmos integrais de superfície de campos vetoriais precisamos considerar superfícies orientadas. Orientar uma superfície significa dizer, intuitivamente, qual é o seu “lado de cima”. Existem superfícies em que isso não é possível: a faixa de Möbius é o exemplo mais conhecido. Para construir uma faixa de Möbius, pegue uma tira de papel retangular e comprida, dê meia volta em um dos lados e cole as extremidades, como na Figura 2.3.2 a seguir.

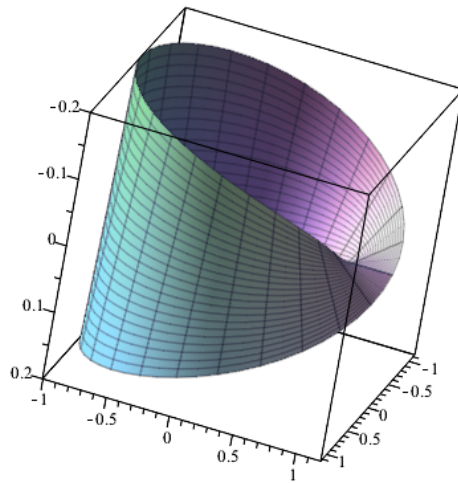


Figura 2.3.2: Faixa de Möbius

Se uma partícula se deslocasse sobre a faixa de Möbius, ela poderia passar do lado de dentro para o lado de fora sem cruzar nenhuma borda. Em outras palavras, essa superfície só tem um lado.

Para uma superfície orientável  $S$ , de parametrização  $\vec{r}(u, v)$ , uma parametrização natural é dada pelo versor normal

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|}.$$

O lado de cima é o lado para o qual  $\vec{n}$  aponta. No caso de  $S$  ser *fechada*, a orientação positiva é convencionalmente como sendo aquela em que  $\vec{n}$  aponta **para fora** de  $S$ .

### 2.3.3 Integrais de Superfície de Campos Vetoriais



**Definição 2.3.1.** A integral de superfície de um campo vetorial  $\vec{F}$  sobre uma superfície  $S$ , de parametrização  $\vec{r}(u, v)$ , com  $(u, v) \in D$ , é dada pela integral de superfície da componente normal de  $\vec{F}$ , isto é,  $\vec{F} \cdot \vec{n}$ , que é uma função real.

Assim,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \frac{\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|} \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| dA.$$

Portanto, obtemos a fórmula

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v) dA \quad (2.3.5)$$

A integral de superfície de um campo  $\vec{F}$  é também conhecida como o fluxo de  $\vec{F}$  através de  $S$ , pois mede como o campo “perfura” a superfície  $S$ . Em Eletrostática, por exemplo, a integral de superfície aparece na Lei de Gauss:

**Teorema 2.3.1** (Lei de Gauss). *A carga contida por uma superfície  $S$  é dada por*

$$Q = \epsilon_0 \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S},$$

onde  $\epsilon_0$  é a permissividade do vácuo, que vale aproximadamente  $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ , e  $\vec{E}$  é o campo elétrico.

**Exemplo 2.3.4.** Calcule o fluxo de  $\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$  através da parte do paraboloide  $z = 4 - x^2 - y^2$  que está acima do quadrado  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , com orientação para cima.

**Solução.** Começamos parametrizando  $S$  por

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2).$$

Logo,  $\vec{r}_x = (1, 0, -2x)$  e  $\vec{r}_y = (0, 1, -2y)$ . Temos

$$\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = (2x, 2y, 1).$$

Como a componente  $z$  desse vetor é positiva, isso significa que ele aponta para cima e a orientação está correta.

Assim,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(x, y)) \cdot (\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (xy, y(4 - x^2 - y^2), x(4 - x^2 - y^2)) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2x^2y + 8y^2 - 2x^2y^2 - 2y^4 + 4x - x^3 - xy^2) dx dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{2x^3y}{3} + 8xy^2 - \frac{2x^3y^2}{3} - 2xy^4 + 2x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2y^2}{2} \right)_0^1 dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{2y}{3} + 8y^2 - \frac{2y^2}{3} - 2y^4 + 2 - \frac{1}{4} - \frac{y^2}{2} \right) dy \\ &= \left( \frac{y^2}{3} + \frac{8y^3}{3} - \frac{2y^3}{9} - \frac{2y^5}{5} + 2y - \frac{y}{4} - \frac{y^3}{6} \right)_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{2}{9} - \frac{2}{5} + 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \\ &= \boxed{\frac{713}{180}}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.3.5.** Calcule  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z^4)$  e  $S$  é a parte do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  abaixo do plano  $z = 1$ , orientada para baixo.

**Solução.** Já vimos no Exemplo 2.3.2 que o cone pode ser parametrizado por

$$\vec{r}(s, \theta) = (s \cos \theta, s \sin \theta, s),$$

com  $0 \leq s \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Temos  $\vec{r}_s = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$  e  $\vec{r}_\theta = (-s \sin \theta, s \cos \theta, 0)$ , portanto

$$\vec{r}_s \wedge \vec{r}_\theta = (-s \cos \theta, -s \sin \theta, s).$$

Como  $0 \leq s \leq 1$ , a componente  $z$  é não-negativa, portanto essa parametrização induz a orientação para cima. Logo, devemos usar o vetor  $(s \cos \theta, s \sin \theta, -s)$ , ou então fazer a conta com o primeiro vetor e lembrar de trocar o sinal da integral no final dos cálculos.

Assim,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D (s \cos \theta, s \sin \theta, s^4) \cdot (s \cos \theta, s \sin \theta, -s) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (s^2 \cos^2 \theta + s^2 \sin^2 \theta - s^5) ds d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (s^2 - s^5) ds \\ &= 2\pi \left( \frac{s^3}{3} - \frac{s^6}{6} \right)_0^1 \\ &= 2\pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) \\ &= \boxed{\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.3.6.** Use a Lei de Gauss para calcular a carga contida no hemisfério sólido  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ,  $z \geq 0$ , se o campo elétrico é  $\vec{E}(x, y, z) = (x, y, 2z)$ .

**Solução.** A fronteira do hemisfério é  $S = S_1 \cup S_2$ , onde  $S_1$  e  $S_2$  são, respectivamente, a parte esférica a parte plana, como na Figura 2.3.3.

Pela Lei de Gauss,

$$Q = \epsilon_0 \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Temos que calcular o fluxo do campo elétrico sobre  $S_1$  e  $S_2$ , lembrando que como  $S$  é fechada, a orientação positiva é para fora.

Sobre  $S_2$ , que está no plano  $z = 0$ , a parametrização é  $\vec{r}(x, y) = (x, y, 0)$  e podemos usar  $\vec{n} = (0, 0, -1)$ . Logo,

$$\iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) dS = \boxed{0}.$$

Sobre  $S_1$ , a parametrização é

$$\vec{r}(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi),$$

com  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Usando cálculos já feitos no Exemplo 2.2.2, temos

$$\vec{r}_\phi \wedge \vec{r}_\theta = (a^2 \sin^2 \phi \cos \theta, a^2 \sin^2 \phi \sin \theta, a^2 \sin \phi \cos \phi).$$

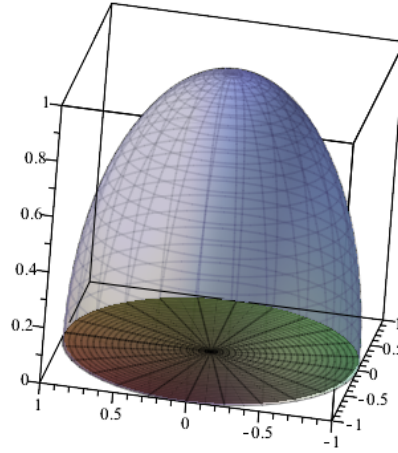


Figura 2.3.3: Um hemisfério sólido

Como  $\phi \in [0, \pi/2]$ , temos que  $\sin\phi \geq 0$  e  $\cos\phi \geq 0$ , logo a componente  $z$  desse vetor aponta para cima, ou seja, para fora de  $S$ .

Dai,

Assim,

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{8\pi a^3}{3},$$

portanto

$$Q = \frac{8\pi a^3 \epsilon_0}{3}.$$

□

### 2.3.4 Mais Exemplos

Também podemos calcular massas usando integrais de superfície. Se a densidade for dada por  $\rho(x, y, z)$ , então a massa da superfície  $S$  é

$$m = \iint_S \rho dS.$$

Além disso, o centro de massa tem coordenadas  $(x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})$  dadas por

$$x_{CM} = \iint_S x \rho dS, \quad y_{CM} = \iint_S y \rho dS \quad \text{e} \quad z_{CM} = \iint_S z \rho dS.$$

**Exemplo 2.3.7.** Calcule a massa da superfície  $S$  de parametrização  $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ ,  $u \in [1, 3]$ ,  $v \in [0, \pi/2]$ , sabendo que a densidade em cada ponto é  $\rho(x, y, z) = x^2 y^2$ .

**Solução.** Temos  $\vec{r}_u = (\cos v, \sin v, 1)$  e  $\vec{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$ , de modo que  $E = 2$ ,  $F = 0$  e  $G = u^2$ . Dai,  $dS = u\sqrt{2}dA$ . Com isso, temos

$$\begin{aligned}
m &= \iint_S \rho dS \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_1^3 u^2 \cos^2 v u^2 \sin^2 v u \sqrt{2} du dv \\
&= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} (\cos v \sin v)^2 dv \int_1^3 u^5 du \\
&= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(2v)}{4} dv \int_1^3 u^5 du \\
&= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(4v)}{8} dv \int_1^3 u^5 du \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \left( v - \frac{\sin(4v)}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} \frac{u^6}{6} \Big|_1^3 \\
&= \frac{\pi \sqrt{2} (3^6 - 1)}{96} \\
&= \boxed{\frac{91\pi\sqrt{2}}{12}}.
\end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.3.8.** Chamamos de toro a superfície obtida pela rotação ao redor do eixo  $z$  da circunferência  $(y - b)^2 + z^2 = a^2$ ,  $x = 0$ . Se  $a < b$ , ela pode ser parametrizada por

$$\vec{r}(\theta, \phi) = \begin{cases} x &= (b + a \cos \theta) \cos \phi \\ y &= (b + a \cos \theta) \sin \phi \\ z &= a \sin \theta \end{cases},$$

com  $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$ . Calcule a área dessa superfície.

**Solução.** Temos que  $\vec{r}_\theta = (-a \sin \theta \cos \phi, -a \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta)$  e  $\vec{r}_\phi = (-(b + a \cos \theta) \sin \phi, (b + a \cos \theta) \cos \phi, 0)$ . Logo, após algumas contas podemos ver que  $E = a^2$ ,  $F = 0$  e  $G = (b + a \cos \theta)^2$ , portanto

$$dS = \sqrt{EG - F^2} dA = (ab + a^2 \cos \theta) dA.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
A(S) &= \iint_S dS \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (ab + a^2 \cos \theta) d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} (ab + a^2 \cos \theta) d\theta \\
&= 2\pi(ab\theta + a^2 \sin \theta) \Big|_0^{2\pi} \\
&= \boxed{4\pi^2 ab}.
\end{aligned}$$

□

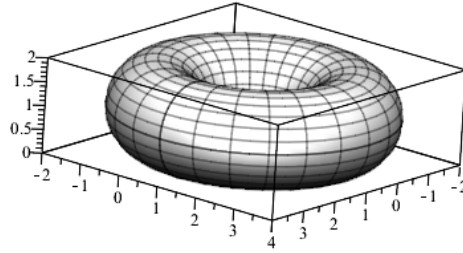


Figura 2.3.4: Um toro

**Exemplo 2.3.9.** Considere a superfície  $S$  parametrizada por

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, 1 - u^2),$$

com  $u > 0$ ,  $v > 0$  e  $u + v < 1$ . Calcule o fluxo do campo  $\vec{F}(x, y, z) = (1, xyz, -2x)$  através de  $S$ , em relação ao campo normal que aponta para baixo.

**Solução.** Temos  $\vec{r}_u = (1, 0, -2u)$  e  $\vec{r}_v = (0, 1, 0)$ , logo

$$\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v = (2u, 0, 1),$$

que aponta para cima já que sua componente  $z$  é positiva. Assim devemos considerar o vetor  $(-2u, 0, -1)$ , no cálculo da integral, que fazemos a seguir:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D (1, uv(1 - u^2), -2u) \cdot (-2u, 0, -1) dA \\ &= \iint_D (-2u + 2u) dA \\ &= \boxed{0}, \end{aligned}$$

onde  $D$  é o domínio dos parâmetros, que é dado por

$$D = \{(u, v) : u > 0, v > 0, u + v < 1\}.$$

□

## 2.4 Rotacional e Divergente

Nesta seção apresentamos duas operações entre campos vetoriais que são muito importantes nos Teoremas que veremos a seguir. Uma delas produz outro campo vetorial, enquanto a outra produz uma função escalar.

**Definição 2.4.1** (Rotacional). Se  $\vec{F} = (P, Q, R)$  é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$ , então o rotacional de  $\vec{F}$  é o campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Para obtermos uma forma mais simples de memorizar esta fórmula, vamos considerar o operador diferencial  $\nabla$ :

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

que quando opera sobre uma função real  $f$  produz seu gradiente:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Assim, o operador  $\nabla$ , ao atuar sobre uma função  $f$ , produz seu gradiente. Pensando no operador  $\nabla$  como um vetor, podemos calcular seu produto vetorial com o campo  $\vec{F}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \text{rot } \vec{F}. \end{aligned}$$

Obtemos então a fórmula

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \wedge \vec{F}, \quad (2.4.1)$$

que certamente é mais simples de ser memorizada.

**Exemplo 2.4.1.** Se  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$ , determine  $\text{rot } \vec{F}$ .

**Solução.** Pela fórmula (2.4.1), temos

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & xy^2z & xyz^2 \end{vmatrix} = (xz^2 - xy^2, x^2y - yz^2, y^2z - x^2z).$$

□

Dada uma função real  $f$  de três variáveis, sabemos que seu gradiente é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$ . É isso o que fazemos no Teorema a seguir:

**Teorema 2.4.1.** Se  $f$  é uma função real de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então  $\text{rot } \nabla f = \vec{0}$ .

*Demonstração.* Pela fórmula (2.4.1), temos

$$\begin{aligned} \text{rot } \nabla f &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \\ &= (0, 0, 0) = \vec{0} \end{aligned}$$

pelo Teorema de Clairaut.

□

Como todo campo conservativo é da forma  $\vec{F} = \nabla f$ , uma consequência direta do Teorema 2.4.1 é o

**Corolário 2.4.2.** Se  $\vec{F}$  é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  conservativo, então  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ .

**Exemplo 2.4.2.** Mostre que o campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = (xz, xyz, -y^2)$  não é conservativo.

**Solução.** Vamos calcular  $\text{rot } \vec{F}$ . Pela fórmula (2.4.1), temos

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} = (-y(2+x), x, yz),$$

portanto pelo Teorema 2.4.1,  $\vec{F}$  não é conservativo. □

Mais uma vez, o leitor deve entender bem o conteúdo do Teorema 2.4.1 e de seu Corolário. Eles afirmam que se  $\vec{F}$  é um campo conservativo, então seu rotacional é igual a  $\vec{0}$ . Em outras palavras, se  $\text{rot } \vec{F} \neq \vec{0}$ , então  $\vec{F}$  não é conservativo, como fizemos no Exemplo acima. A recíproca do Teorema 2.4.1, em geral, não é verdadeira, mas quando  $\vec{F}$  está definido em uma região aberta e simplesmente conexa de  $\mathbb{R}^3$ , ela vale. Este resultado é a versão tridimensional do Teorema 1.6.5, e para efeito de completude, o enunciamos a seguir. Sua demonstração, no entanto, só poderá ser feita após estudarmos o Teorema de Stokes.

**Teorema 2.4.3.** Se  $\vec{F}$  for um campo vetorial cujo domínio é uma região aberta e simplesmente conexa de  $\mathbb{R}^3$  e  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ , então  $\vec{F}$  é conservativo.

**Exemplo 2.4.3.** Mostre que  $\vec{F}(x, y, z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$  é um campo conservativo.

**Solução.** Temos

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 0),$$

logo  $\vec{F}$  é conservativo pois seu domínio é todo o  $\mathbb{R}^3$ , que é aberto e simplesmente conexo. □

A razão para o nome rotacional” pode ser encontrada na Mecânica dos Fluidos. Vamos supor que  $\vec{F}$  representa um campo de velocidades. As partículas próximas de  $(x, y, z)$  no fluido tendem a girar em torno do eixo que aponta na direção de  $\text{rot } \vec{F}$ , e a norma desse vetor nos indica a velocidade com que essa rotação acontece. Quando  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$  em um ponto  $P$ , então não há rotações no ponto  $P$  (por exemplo, não se forma nenhum redemoinho nesse ponto) e o fluido é dito **irrotacional** em  $P$ .

Vamos agora estudar a segunda operação importante desta seção.

**Definição 2.4.2** (Divergente). Se  $\vec{F} = (P, Q, R)$  é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$ , então o divergente de  $\vec{F}$  é a função real

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Novamente, em termos do operador gradiente

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

podemos escrever

$$\boxed{\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}}.$$

**Exemplo 2.4.4.** Se  $\vec{F}(x, y, z) = (\text{sen}(yz), \text{sen}(zx), \text{sen}(xy))$ , calcule  $\text{div } \vec{F}$ .

**Solução.** Temos  $P(x, y, z) = \sin(yz)$ ,  $Q(x, y, z) = \sin(zx)$  e  $R(x, y, z) = \sin(xy)$ , logo

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

□

Se  $\vec{F}$  é um campo vetorial sobre  $\mathbb{R}^3$ , então  $\operatorname{rot} \vec{F}$  também é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$ , portanto podemos calcular seu divergente. É isso que fazemos no Teorema a seguir.

**Teorema 2.4.4.** *Se  $\vec{F} = (P, Q, R)$  é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  e  $P$ ,  $Q$  e  $R$  possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$ .*

*Demonstração.* Temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} &= \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{F}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \\ &= 0, \end{aligned}$$

novamente pelo Teorema de Clairaut. □

**Exemplo 2.4.5.** Mostre que o campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = (xz, xyz, -y^2)$  não pode ser escrito como o rotacional de outro campo vetorial.

**Solução.** Se fosse verdade que  $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{G}$  para algum campo vetorial  $\vec{G}$ , então o Teorema acima garante que

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{G} = 0.$$

Como  $\operatorname{div} \vec{F} = z + xz \neq 0$ , concluímos que  $\vec{F}$  não pode ser o rotacional de outro campo vetorial. □

A razão para o nome “divergente” também pode ser encontrada na Mecânica dos Fluidos. Se  $\vec{F}(x, y, z)$  é a velocidade de um fluido em um ponto  $P = (x, y, z)$ , então  $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z)$  fornece a taxa de variação, em relação ao tempo, da massa de fluido que escoa do ponto  $P$  por unidade de volume. Assim,  $\operatorname{div} \vec{F}$  mede a tendência do fluido de divergir do ponto  $P$ . Quando  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ , dizemos que  $\vec{F}$  é **incompressível**.

Para finalizar esta seção, vamos analisar o Teorema de Green sob o contexto do rotacional e do divergente.

### 2.4.1 Formas Vetoriais do Teorema de Green

Lembramos que se uma região plana  $D$  tem fronteira formada por uma curva fechada e simples  $C$  orientada positivamente, e  $\vec{F} = (P, Q)$  é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^2$  cujas componentes  $P$  e  $Q$  têm derivadas parciais contínuas sobre a curva  $C$  e sobre a região  $D$ , então

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA,$$

pelo Teorema de Green.

Vamos considerar  $\vec{F}$  como um campo em  $\mathbb{R}^3$  cuja terceira componente é nula, isto é,

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0).$$



Nesse caso, podemos calcular seu rotacional, obtendo

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Com isso,

$$(\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{k} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \cdot \vec{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

portanto podemos reescrever o Teorema de Green na sua primeira forma vetorial:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{k} dA.$$

Vejamos agora uma outra forma de escrever o Teorema de Green usando o divergente. Suponha que  $C$  tem parametrização

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Então o vetor tangente unitário a  $C$  é dado por

$$\vec{T}(t) = \left( \frac{x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}, \frac{y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \right).$$

É fácil ver que o vetor normal unitário que aponta para fora de  $C$  é dado por

$$\vec{n}(t) = \left( \frac{y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}, -\frac{x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \right).$$

Então, temos

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds &= \int_a^b (\vec{F} \cdot \vec{n})(t) \|\vec{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \left[ \frac{P(x(t), y(t))y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} - \frac{Q(x(t), y(t))x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \right] \|\vec{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t))y'(t) dt - Q(x(t), y(t))x'(t) dt \\ &= \oint_C P dy - Q dx \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA \end{aligned}$$

pelo Teorema de Green. Observe que o integrando na integral dupla é exatamente  $\text{div } \vec{F}$ , portanto podemos escrever a segunda forma vetorial do Teorema de Green:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \text{div } \vec{F}(x, y) dA.$$

Segundo essa versão, a integral de linha da componente normal de  $\vec{F}$  ao longo de  $C$  é igual à integral dupla do divergente de  $\vec{F}$  na região delimitada por  $C$ .

As formas vetoriais do Teorema de Green já nos ilustram a importância do rotacional e do divergente, mas veremos realmente o poder desses conceitos nas próximas seções, em que estudaremos os Teoremas de Stokes e de Gauss (ou da Divergência).

## 2.5 Teorema de Stokes

Nesta seção vamos obter uma nova versão do Teorema Fundamental do Cálculo, no contexto das integrais de superfície. Ela generaliza a primeira forma vetorial do Teorema de Green, estudada na seção anterior. Dada uma superfície orientada  $S$ , com fronteira  $C$ , dizemos que as orientações de  $C$  e  $S$  são **compatíveis** se elas satisfizerem a Regra da Mão Direita, isto é, ao girarmos a mão aberta no sentido percorrido pela curva, o polegar aponta no sentido do campo normal da superfície.

**Teorema 2.5.1** (Stokes). *Seja  $S$  uma superfície orientada, lisa por partes, cuja fronteira é formada por uma curva  $C$  simples, fechada, lisa por partes e com orientação compatível com a de  $S$ . Seja  $\vec{F}$  um campo vetorial cujos componentes tenham derivadas parciais contínuas em um aberto de  $\mathbb{R}^3$  que contenha  $S$ . Então*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (2.5.1)$$

*Demonstração.* Não demonstraremos o Teorema de Stokes em toda a sua generalidade, pois isso requer Matemática mais avançada do que temos disposição nesse Curso. Entretanto, somos capazes de demonstrar o caso particular em que  $S$  é um gráfico. Suponha então que  $S$  é dada por

$$z = g(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

onde  $g$  tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Nesse caso, uma parametrização para  $S$  é dada por  $\vec{r}(x, y) = (x, y, g(x, y))$ , com  $(x, y) \in D$ . Nesse caso,

$$\vec{r}_x = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ e } \vec{r}_y = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Daí,

$$\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix},$$

o que nos dá a fórmula

$$\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right). \quad (2.5.2)$$

Assim, lembrando que

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

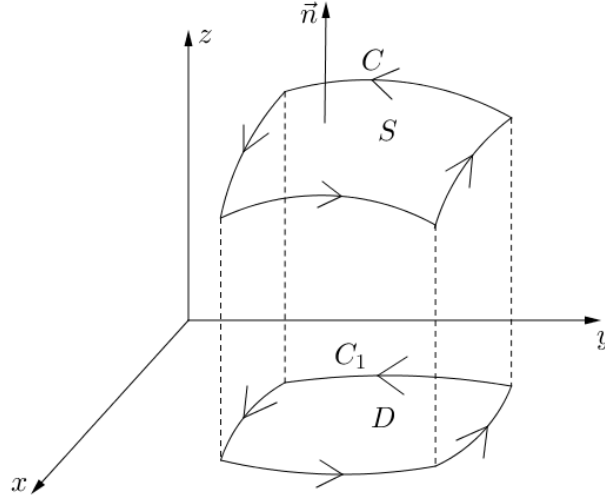
a integral de superfície no Teorema de Stokes pode ser calculada fazendo

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{r}_x \wedge \vec{r}_y dA \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) dA \\ &= \iint_D \left[ -\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \right] dA, \end{aligned}$$

onde as derivadas parciais de  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são calculadas em  $(x, y, g(x, y))$ .

Suponha também que a curva  $C_1$ , projeção de  $C$  sobre o plano  $xy$  e fronteira da região  $D$ , como na Figura 2.5.1, tem parametrização  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Nesse caso, a curva  $C$  pode ser parametrizada por  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  e  $z = g(x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ .

Dessa forma, a integral de linha do Teorema de Stokes pode ser calculada da seguinte forma

Figura 2.5.1: Curvas  $C$  e  $C_1$ 

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)) dt \\
 &= \int_a^b \left[ Px'(t) + Qy'(t) + R \left( \frac{\partial z}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y} y'(t) \right) \right] dt && \text{(Pela Regra da Cadeia)} \\
 &= \int_a^b \left[ \left( P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) x'(t) + \left( Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) y'(t) \right] dt \\
 &= \int_{C_1} \left( P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left( Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \\
 &= \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dA && \text{(Pelo Teorema de Green)} \\
 &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} - R \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) dA && \text{(Pela Regra da Cadeia)} \\
 &= \iint_D \left[ - \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dA && \text{(Pelo Teorema de Clairaut)} \\
 &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S},
 \end{aligned}$$

o que completa a demonstração, pelo que vimos acima.  $\square$

**Exemplo 2.5.1.** Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$  e  $C$  é a curva da interseção do plano  $y + z = 2$  com o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

**Solução.** Temos  $\text{rot } \vec{F} = (0, 0, 1 + 2y)$ . Para usar o Teorema de Stokes, precisamos de uma superfície  $S$  que tenha  $C$  como fronteira, com orientações compatíveis. Uma possibilidade é a porção do plano  $y + z = 2$

situada no interior do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , com orientação para cima. Uma parametrização de  $S$  é  $\vec{r}(x, y) = (x, y, 2 - y)$ , e então o campo normal que aponta para cima é  $\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = (0, 1, 1)$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (0, 0, 1+2y) \cdot (0, 1, 1) dx dy \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1+2y) dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1+2r \sin \theta) r dr d\theta && \text{(Coordenadas polares)} \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r+2r^2 \sin \theta) dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{r^2}{2} + \frac{2r^3}{3} \sin \theta \right)_{r=0}^{r=1} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin \theta \right) d\theta \\
 &= \left( \frac{\theta}{2} - \frac{2}{3} \sin \theta \right)_0^{2\pi} \\
 &= \boxed{\pi}.
 \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.5.2.** Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2)$  e  $C$  é o triângulo de vértices  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ , percorrido no sentido anti-horário quando visto de cima.

**Solução.** O rotacional de  $\vec{F}$  é  $\text{rot } \vec{F} = (-2z, -2x, -2y)$ . Para aplicar o Teorema de Stokes, vamos considerar a superfície  $S$  dada pela parte do plano determinado pelos 3 pontos dados, limitada pelo triângulo. Esse plano tem equação  $z = 1 - x - y$ , e o vetor normal compatível com a orientação de  $C$  é  $(1, 1, 1)$ , pois aponta para cima. O domínio dos parâmetros é a região

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\},$$

um triângulo retângulo no plano  $xy$ . Daí,

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} \\
 &= \iint_D (-2(1-x-y), -2x, -2y) \cdot (1, 1, 1) dA \\
 &= -2 \iint_D (x+y+1-x-y) dA \\
 &= -2 \iint_D dA \\
 &= -2 \text{Área}(D).
 \end{aligned}$$

Como  $D$  é um triângulo retângulo cujos catetos medem 1, sua área vale  $1/2$ , portanto

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \boxed{-1}.$$

□

**Exemplo 2.5.3.** Seja  $S$  a superfície formada pelos planos coordenados e limitada inferiormente pela curva  $C$  do Exemplo anterior, com a mesma orientação. Calcule o fluxo do rotacional do campo do Exemplo anterior através de  $S$ , orientada de modo compatível com a curva  $C$ .

**Solução.** Como  $S$  tem fronteira orientada  $C$ , o Teorema de Stokes garante que

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \boxed{-1}$$

pelo Exemplo anterior.

□

Esse fato é muito importante e merece ser registrado. Se  $S_1$  e  $S_2$  são superfícies orientadas com mesma curva fronteira orientada  $C$  e ambas satisfazem as hipóteses do Teorema de Stokes, então

$$\iint_{S_1} \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (2.5.3)$$

Note a semelhança com o que estudamos no Capítulo 1. Se  $\vec{F} = \nabla f$ , ou seja,  $\vec{F}$  é conservativo, vimos que  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$ , onde  $C$  é uma curva de ponto inicial  $A$  e ponto final  $B$ , ou seja, a integral de linha de  $\vec{F}$  era calculada a partir dos valores de  $f$  na fronteira de  $C$ , os seus extremos, de modo que a integral não depende da curva (mantendo a mesma orientação). Agora, vimos que se  $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$ , então  $\vec{G} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{G} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$  para qualquer superfície  $S$  que tenha fronteira  $C$ , com orientações compatíveis, ou seja, a integral de linha de um rotacional não depende da superfície!

Isso é bastante útil quando queremos integrar sobre uma superfície, mas é mais simples integrar sobre outra, como veremos no Exemplo a seguir.

**Exemplo 2.5.4.** Calcule  $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (xyz, xy, x^2yz)$  e  $S$  é formada pelo topo e pelos quatro lados (mas não pelo fundo) do cubo de vértices  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , orientado para fora.

**Solução.** A superfície está representada na Figura 2.5.2.

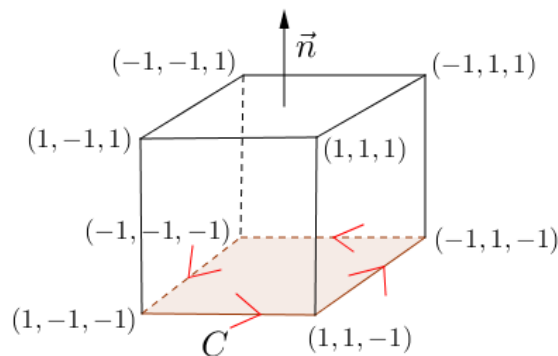


Figura 2.5.2: Cubo sem fundo

A fronteira é a curva  $C$  formada pelo quadrado de vértices  $(\pm 1, \pm 1, -1)$ , orientada no sentido anti-horário quando visto de cima (note que uma “normal resultante” sobre  $S$  aponta para cima). Observe que calcular

$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$  diretamente pela definição envolve o cálculo de cinco integrais, portanto é melhor procurar outra saída.

Pelo Teorema de Stokes, podemos obter a resposta calculando  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , mas para isso teremos que resolver quatro integrais. Ao invés disso, vamos considerar  $S_1$ , a parte do plano  $z = -1$  limitada por  $C$  (com orientação para cima para ficar compatível com  $C$ ). Tanto  $S$  como  $S_1$  possuem mesma fronteira orientada, logo

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

como vimos. A segunda integral, como veremos, é bem mais simples!

$S_1$  tem parametrização  $\vec{r}(x, y) = (x, y, -1)$ , logo  $\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = (0, 0, 1)$ , que aponta para cima, como queríamos. O rotacional de  $\vec{F}$  é  $\text{rot } \vec{F} = (x^2z, -2xyz + xy, y - xz)$ , logo

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_1} \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_D \text{rot } \vec{F}(\vec{r}(x, y)) \cdot \vec{r}_x \wedge \vec{r}_y dA \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (-x^2, 3xy, x + y) \cdot (0, 0, 1) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (x + y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} + xy \right)_{x=-1}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 2y dy \\ &= y^2 \Big|_{-1}^1 \\ &= \boxed{0}. \end{aligned}$$

□

Já mencionamos acima, mas vale a pena ressaltar: esse método de trocar a superfície por outra não vale para qualquer integral de superfície, apenas quando o campo for um rotacional!

**Exemplo 2.5.5.** Seja  $C$  a curva interseção do cilindro de equação  $x^2 + y^2 = 1$  com o parabolóide hiperbólico  $z = 2xy$ .

- (a) Parametrize  $C$  no sentido anti-horário quando vista de cima.
- (b) Calcule o rotacional do campo  $\vec{F}(x, y, z) = (y + \sin x, z^2 + \cos y, x^3)$ .
- (c) Calcule  $\int_C (y + \sin x) dx + (z^2 + \cos y) dy + x^3 dz$ .

**Solução.** Parametrizamos  $C$  fazendo  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$ , pois  $x$  e  $y$  sempre pertencem a um cilindro de raio 1 e centro na origem, e daí  $z(t) = 2 \cos t \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . De fato, essa parametrização faz com que a curva seja percorrida no sentido anti-horário quando vista de cima.

Além disso,

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y + \sin x & z^2 + \cos y & x^3 \end{vmatrix} = (-2z, -3x^2, -1).$$

A integral é igual a  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Para usar o Teorema de Stokes, precisamos de uma superfície  $S$  que tenha  $C$  como fronteira e com orientação compatível com a de  $C$ , ou seja, com campo normal apontando para cima. Uma possibilidade é a porção do gráfico de  $z = 2xy$  que está no interior do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ . (Guarde essa ideia: considerar a superfície  $S$  como sendo um gráfico sempre que possível.) Assim, o vetor normal é dado por  $(-2y, -2x, 1)$ , que aponta para cima, devido à fórmula (2.5.2). Os parâmetros  $x$  e  $y$  variam no círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

Dessa forma, fazendo  $z = 2xy$  no rotacional, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (-2(2xy), -3x^2, -1) \cdot (-2y, -2x, 1) dx dy \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (8xy^2 + 6x^3 - 1) dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (8r^3 \cos \theta \sin^2 \theta + 6r^3 \cos^3 \theta - 1) r dr d\theta && \text{(Coordenadas polares)} \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (8r^4 \cos \theta \sin^2 \theta + 6r^4 \cos^3 \theta - r) dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{8r^5}{5} \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{6r^5}{5} \cos^3 \theta - \frac{r^2}{2} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{8}{5} \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{6}{5} \cos^3 \theta - \frac{1}{2} \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{8}{5} \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{6}{5} \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) - \frac{1}{2} \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{5} \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{6}{5} \cos \theta - \frac{1}{2} \right) d\theta \\
 &= \frac{2}{5} \int_0^{2\pi} \cancel{u^2} du + \frac{6}{5} \cancel{\sin \theta} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta && \text{(Fizemos } u = \sin \theta \text{ na primeira integral)} \\
 &= \boxed{-\pi}.
 \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.5.6.** Considere o campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = (y(\sin z - 1), 0, 0)$  e  $S$  a porção do parabolóide  $z = 1 - x^2 - y^2$  acima do plano  $z = 0$ .

(a) Parametrize a superfície  $S$ .

(b) Calcule o fluxo do rotacional de  $\vec{F}$  através da superfície  $S$  com a normal apontando para cima.

**Solução.** Basta parametrizar  $S$  como gráfico:  $\vec{r}(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$ . Pela fórmula (2.5.2), o campo normal é dado por  $(2x, 2y, 1)$ , que aponta para cima, conforme desejado. A fronteira  $C$  de  $S$  é dada pela interseção de  $S$  com o plano  $z = 0$ , que é a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ , e deve ser orientada no sentido anti-horário quando vista de cima para que fique compatível com  $S$ . Para isso, devemos parametrizá-la como

$\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sent} t, 0)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Assim, vamos usar o Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}
 \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sent} t, 0, 0) \cdot (-\operatorname{sent} t, \cos t, 0) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2t)) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left( t - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} \right)_0^{2\pi} \\
 &= \boxed{\pi}.
 \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.5.7.** Seja  $S$  a porção do parabolóide  $z = x^2 + 2y^2$  que fica abaixo do plano  $4x + 4y - z + 3 = 0$ . Considere o campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = (-\operatorname{sen} z \cos z - (4 + \sqrt{2})y, 3 + \ln(y^6 + 1), 2y \cos^2 z)$ .

- O que é a fronteira  $C$  de  $S$ ? Parametrize-a.
- Parametrizando  $S$  como gráfico, qual é a região  $D$  em que os parâmetros variam?
- Encontre outra superfície limitada cuja fronteira é  $C$  e parametrize-a.
- Calcule o rotacional de  $\vec{F}$ .
- Calcule o fluxo do rotacional de  $\vec{F}$  através de  $S$ , com orientação para cima.

**Solução.** A fronteira de  $S$  é uma elipse. Para obtermos equações que a descrevam, vamos eliminar  $z$  no sistema

$$\begin{aligned}
 z &= x^2 + 2y^2 \\
 z &= 4x + 4y + 3
 \end{aligned}$$

Obtemos  $x^2 + 2y^2 = 4x + 4y + 3$ . Passando para o outro lado e completando os quadrados, chegamos a

$$x^2 - 4x + 2(y^2 - 2y) = 3 \Rightarrow (x - 2)^2 + 2(y - 1)^2 = 9,$$

logo a projeção da fronteira de  $C$  no plano  $xy$  tem equação

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{9/2} = 1. \quad (2.5.4)$$

Essa elipse no plano  $xy$  pode ser parametrizada fazendo

$$x(t) = 2 + 3 \cos t \text{ e } y(t) = 1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{sent} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

logo substituindo na equação do plano obtemos  $z(t) = 4(2 + 3 \cos t) + 4 \left( 1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{sent} t \right)$ . Essa parametrização percorre  $C$  no sentido anti-horário quando vista de cima, que é a orientação compatível com a desejada para  $S$ .



Nossos cálculos acima nos permitem descrever a região  $D$  como

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{9/2} \leq 1 \right\},$$

que nada mais é que uma elipse de centro  $(2, 1)$ ,  $a = 3$  e  $b = 3/\sqrt{2}$ . Uma outra superfície  $S_1$  que tem  $C$  como fronteira é a porção do plano  $z = 4x + 4y + 3$  que está no interior do parabolóide  $z = x^2 + 2y^2$ , com  $(x, y) \in D$ . O vetor normal, novamente usando a fórmula (2.5.2), é  $(-4, -4, 1)$ , que aponta para cima, que também é compatível com a orientação de  $C$ .

O rotacional de  $\vec{F}$  é

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -\text{sen } z \cos z - (4 + \sqrt{2})y & 3 + \ln(y^6 + 1) & 2y \cos^2 z \end{vmatrix} = (2 \cos^2 z, \text{sen}^2 z - \cos^2 z, 4 + \sqrt{2}).$$

Finalmente, vamos calcular a integral sobre  $S_1$  ao invés de calculá-la sobre  $S$ , o que nos é permitido pelo Teorema de Stokes. Temos que fazer  $z = 4x + 4y + 3$  no rotacional, mas vamos esperar para fazer isso após simplificarmos as contas, se necessário, para que elas não fiquem tão grandes.

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_1} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{S} \\ &= \iint_D (2 \cos^2 z, \text{sen}^2 z - \cos^2 z, 4 + \sqrt{2}) \cdot (-4, -4, 1) dA \\ &= \iint_D (-8 \cos^2 z - 4 \text{sen}^2 z + 4 \cos^2 z + 4 + \sqrt{2}) dA \\ &= \iint_D (-4 \cos^2 z - 4 \text{sen}^2 z + 4 + \sqrt{2}) dA \\ &= \iint_D (-4 + 4 + \sqrt{2}) dA \\ &= \sqrt{2} \iint_D dA \\ &= \sqrt{2} \text{Área}(D) \\ &= \sqrt{2} \left( \pi \cdot 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \boxed{9\pi}, \end{aligned}$$

onde usamos que a área de uma elipse é  $A = \pi ab$ , como vimos no Exemplo 1.7.5. □

Finalmente, finalizamos a seção mostrando como o Teorema de Stokes pode ser usado para demonstrar o Teorema 2.4.3 no caso em que  $\mathbb{R}^3$  é o domínio do campo  $\vec{F}$ . Suponha que  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$  em todo o  $\mathbb{R}^3$ . Dada uma curva fechada e simples  $C$ , é sempre possível obter uma superfície orientada  $S$  que tenha  $C$  como fronteira. Isso é bastante difícil de se demonstrar, mas vamos admitir este fato como verdade. Adequando a orientação de  $S$  à de  $C$ , o Teorema de Stokes garante que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Se  $C$  não fosse simples, poderíamos dividi-la em várias curvas fechadas e simples  $C_1 \cup C_2 \cdots \cup C_n = C$ , com a integral de linha ao longo de cada uma delas igual a zero pelo que acabamos de mostrar. Somando todas essas integrais, vamos obter  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ . Como isso vale para qualquer curva fechada, o Teorema 1.6.3 nos permite concluir que  $\vec{F}$  é conservativo, como queríamos.

## 2.6 Teorema da Divergência

O Teorema da Divergência é a versão do Teorema Fundamental do Cálculo para a Integral Tripla. Ele também é conhecido como Teorema de Gauss-Ostrogradski em homenagem aos matemáticos Carl F. Gauss e Mikhail Ostrogradski, alemão e ucraniano, respectivamente. O enunciado do Teorema é o seguinte:

**Teorema 2.6.1** (Teorema da Divergência). *Seja  $E$  uma região sólida simples e  $S$  a sua fronteira (que é uma superfície fechada), orientada positivamente (para fora). Seja  $\vec{F} = (P, Q, R)$  um campo vetorial cujos componentes têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma região aberta que contenha  $E$ . Então*

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV \quad (2.6.1)$$

O Teorema da Divergência fornece uma generalização para a segunda forma vetorial do Teorema de Green. No enunciado do Teorema dizemos que  $E$  é uma **região simples sólida simples**. Isso significa que  $E$  é uma região dos tipos 1, 2 e 3, conforme a nomenclatura adotada nos cursos de Cálculo 2. Nessas condições, provemos o Teorema, por meio de argumentos semelhantes aos usados na demonstração do Teorema de Green:

*Demonstração.* Como  $\vec{F} = (P, Q, R)$ , temos

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

logo

$$\iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV.$$

Por outro lado, se  $\vec{n}$  é o campo normal unitário para fora de  $S$ , então

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_S (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_S P\vec{i} \cdot \vec{n} dS + \iint_S Q\vec{j} \cdot \vec{n} dS + \iint_S R\vec{k} \cdot \vec{n} dS. \end{aligned}$$

Assim, vemos que o Teorema estará provado se mostrarmos que

$$\iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} dV = \iint_S P\vec{i} \cdot \vec{n} dS, \quad \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \iint_S Q\vec{j} \cdot \vec{n} dS \quad \text{e} \quad \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_S R\vec{k} \cdot \vec{n} dS.$$

As três igualdades podem ser demonstradas de formas inteiramente análogas, por isso provaremos apenas a terceira igualdade. Como  $E$  é uma região do tipo 1, podemos escrevê-la como

$$E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\},$$

onde  $D$  é a projeção de  $E$  sobre o plano  $xy$ . Daí,

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_D \left[ \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dz \right] dA,$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo segue que

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_D \left[ R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y)) \right] dA.$$

A fronteira de  $S$  é formada, em geral, por três superfícies:

- A superfície inferior  $S_1$ , a porção do gráfico de  $z = u_1(x, y)$  que está acima da região  $D$  no plano  $xy$ ;
- A superfície superior  $S_2$ , a porção do gráfico de  $z = u_2(x, y)$  que está acima da região  $D$  no plano  $xy$ ;
- Possivelmente, também exista uma superfície lateral  $S_3$ , que é vertical e situa-se exatamente acima da região  $D$ . Note que em alguns casos  $S_3$  não existe, por exemplo, se  $S$  for uma esfera.

Ao longo de  $S_3$  o vetor  $\vec{n}$  é horizontal. Como  $\vec{k}$  é vertical, temos que  $\vec{k} \cdot \vec{n} = 0$ , logo

$$\iint_{S_3} R\vec{k} \cdot \vec{n} dS = 0,$$

logo sempre podemos escrever

$$\iint_S R\vec{k} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} R\vec{k} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} R\vec{k} \cdot \vec{n} dS,$$

independente da superfície vertical  $S_3$  existir ou não.

Em  $S_2$  o vetor normal é  $\left(-\frac{\partial u_2}{\partial x}, -\frac{\partial u_2}{\partial y}, 1\right)$ , pela fórmula (2.5.2). Daí,

$$\iint_{S_2} R\vec{k} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} R\vec{k} \cdot d\vec{S} = \iint_D (0, 0, R(x, y, u_2(x, y))) \cdot \left(-\frac{\partial u_2}{\partial x}, -\frac{\partial u_2}{\partial y}, 1\right) dA = \iint_D R(x, y, u_2(x, y)) dA.$$

Analogamente, em  $S_1$  o vetor normal é  $\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, -1\right)$ , pois ele deve apontar para baixo, portanto

$$\iint_{S_1} R\vec{k} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} R\vec{k} \cdot d\vec{S} = \iint_D (0, 0, R(x, y, u_1(x, y))) \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, -1\right) dA = -\iint_D R(x, y, u_1(x, y)) dA.$$

Com isso, concluímos que

$$\iint_S R\vec{k} \cdot \vec{n} dS = \iint_D [R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y))] dA,$$

exatamente o mesmo resultado que havíamos obtido para a integral tripla do Teorema, o que conclui a demonstração.  $\square$

**Exemplo 2.6.1.** Calcule o fluxo de  $\vec{F}(x, y, z) = (z, y, x)$  sobre  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Solução.** Temos que  $\text{div } \vec{F} = 1$ , logo

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E 1 dV = V(E) = \boxed{\frac{4\pi}{3}},$$

pois  $E$  é uma esfera de raio 1.  $\square$

**Exemplo 2.6.2.** Calcule  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ , se  $\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \text{sen}(xy))$  e  $S$  é a fronteira do sólido limitado pelo cilindro parabólico  $z = 1 - x^2$  e pelos planos  $z = 0$ ,  $y = 0$  e  $y + z = 2$ .

**Solução.** O divergente de  $\vec{F}$  é  $\text{div } \vec{F} = 3y$ . A região  $E$  pode ser descrita como

$$E = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} 3y dy dz dx \\ &= 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=2-z} dz dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} (2-z)^2 dz dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} (4 - 4z + z^2) dz dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left( 4z - 2z^2 + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{z=0}^{z=1-x^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left( 4(1-x^2) - 2(1-x^2)^2 + \frac{(1-x^2)^3}{3} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (7 - 3x^2 - 3x^4 - x^6) dx && \text{(Simplificando)} \\ &= \int_0^1 (7 - 3x^2 - 3x^4 - x^6) dx && \text{(Pois o integrando é uma função par)} \\ &= \left( 7x - x^3 - \frac{3x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^1 \\ &= \boxed{\frac{184}{35}}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.6.3.** Calcule o fluxo de  $\vec{F}(x, y, z) = (3xy^2, xe^z, z^3)$  através da fronteira do sólido limitado pelo cilindro  $y^2 + z^2 = 1$ , por  $x = -1$  e  $x = 2$ .

**Solução.** O divergente de  $\vec{F}$  é  $\text{div } \vec{F} = 3(y^2 + z^2)$ . Usando coordenadas cilíndricas  $x = x$ ,  $y = r \cos \theta$  e  $z = r \sin \theta$ , com  $-1 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , temos

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_E 3(y^2 + z^2) dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^2 \int_0^1 3r^2 r dr dx d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^2 dx \int_0^1 r^3 dr \\ &= 18\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \\ &= \boxed{\frac{9\pi}{2}}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.6.4.** Calcule o fluxo de  $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z + xy^2, xe^{-z}, \text{sen} y + x^2 z)$  através da fronteira do sólido limitado pelo parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e pelo plano  $z = 4$ .

**Solução.** Temos  $\text{div } \vec{F} = x^2 + y^2$ , logo

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E (x^2 + y^2) dV.$$

Usamos coordenadas cilíndricas  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  e  $z = z$ , com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq 2$  e  $z$  variando do parabolóide, ou seja, de  $z = x^2 + y^2 = r^2$ , a  $z = 4$ .

Daí,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r^2 r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 z r^3 \Big|_{z=r^2}^{z=4} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r^3 - r^5) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^3 - r^5) dr \\ &= 2\pi \left( r^4 - \frac{r^6}{6} \right)_0^2 \\ &= \boxed{\frac{32\pi}{3}}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.6.5.** Calcule o fluxo de  $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 + y \sin(z), y^3 + z \sin(x), 3z)$  através da fronteira do sólido limitado pelos hemisférios  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ,  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  e pelo plano  $z = 0$ .

**Solução.** Temos  $\text{div } \vec{F} = 3(x^2 + y^2 + 1)$ , logo  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E 3(x^2 + y^2 + 1) dV$ . Usamos coordenadas esféricas  $x = \rho \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \phi \sin \theta$  e  $z = \rho \cos \phi$ , com  $1 \leq \rho \leq 2$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Daí,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 3(\rho^2 \sin^2 \phi + 1) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 (\rho^4 \sin^3 \phi + \rho^2 \sin \phi) d\rho d\phi d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\rho^5 \sin^3 \phi}{5} + \frac{\rho^3 \sin^3 \phi}{3} \right) \Big|_{\rho=1}^{\rho=2} d\phi d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{31}{5} \sin^3 \phi + \frac{7}{3} \sin \phi \right) d\phi d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \left( \frac{31}{5} \sin^3 \phi + \frac{7}{3} \sin \phi \right) d\phi \\ &= 6\pi \left[ \frac{31}{5} \left( \frac{\cos^3 \phi}{3} - \cos \phi \right) - \frac{7}{3} \cos \phi \right]_0^{\pi/2} \\ &= 6\pi \left( -\frac{31}{15} + \frac{31}{5} + \frac{7}{3} \right) \\ &= \boxed{\frac{194\pi}{5}}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.6.6.** Considere o campo vetorial em  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = \left( \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right).$$

- Calcule a divergência do campo  $\vec{F}$ .
- Calcule diretamente o fluxo de  $\vec{F}$  através da superfície esférica  $S$  de equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , em relação ao campo normal que aponta para fora da esfera.
- Explique por que não é correto usar o Teorema da Divergência para efetuar o cálculo acima.
- Calcule o fluxo de  $\vec{F}$  através do elipsoide  $P$   $4x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 36$ , em relação ao campo normal que aponta para fora do elipsoide.

**Solução.** Se  $\vec{F} = (P, Q, R)$ , então

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \text{ e } \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

logo  $\text{div } \vec{F} = 0$ .

A superfície esférica tem parametrização

$$\vec{r}(\phi, \theta) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi),$$

com  $0 \leq \phi \leq \pi$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Daí,  $\vec{r}_\phi = (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, -\sin \phi)$  e  $\vec{r}_\theta = (-\sin \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \phi, 0)$ , logo

$$\vec{r}_\phi \wedge \vec{r}_\theta = (\cos \theta \sin^2 \phi, \sin \theta \sin^2 \phi, \sin \phi \cos \phi).$$

Na parte superior da esfera sabemos que o vetor normal deve apontar para cima, ou seja, sua componente  $z$  é positiva. Essa região corresponde a  $0 \leq \phi \leq \pi/2$ , e nesse intervalo a componente  $z$  de  $\vec{r}_\phi \wedge \vec{r}_\theta$  é positiva, logo esse vetor normal aponta para cima.

Note que nos pontos da superfície esférica vale  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , portanto  $\vec{F}(\vec{r}(\phi, \theta)) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi)$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi) \cdot (\cos \theta \sin^2 \phi, \sin \theta \sin^2 \phi, \sin \phi \cos \phi) d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\cos^2 \theta \sin^3 \phi + \sin^2 \theta \sin^3 \phi + \sin \phi \cos^2 \phi) d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin^3 \phi + \sin \phi \cos^2 \phi) d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi d\phi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi \\ &= 2\pi \left( -\cos \phi \right)_0^\pi \\ &= \boxed{4\pi}. \end{aligned}$$

Observe que, se usássemos o Teorema da Divergência para fazer o cálculo acima, teríamos

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \text{div } \vec{F} dV = 0,$$

onde  $E$  é a região delimitada por  $S$ , o que não é verdade. Como o campo  $\vec{F}$  não está definido na origem, que está no interior da região delimitada por  $S$ , as suas componentes  $P$ ,  $Q$  e  $R$  não possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um aberto que contém  $E$ , o que é necessário para podermos aplicar o Teorema. Assim, não é correto usá-lo nesse momento.

Finalmente, note que a superfície  $S$  está contida na região interior a  $P$ . Seja  $E_1$  a região compreendida entre  $S$  e  $P$ . Como a origem não está em  $E_1$ , temos que  $P$ ,  $Q$  e  $R$  possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um aberto contendo  $E_1$ , logo nessa região vale o Teorema da Divergência. Lembrando que a orientação da fronteira de  $E_1$  deve ser para fora, de modo que em  $S$  o campo normal deve apontar para dentro da esfera, e em  $P$  para fora do elipsoide. Considerando  $\partial E_1 = (-S) \cup P$ , temos

$$0 = \iiint_{E_1} \operatorname{div} \vec{F} dV = \iiint_{\partial E_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{-S} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_P \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

logo

$$\iint_P \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \iint_{-S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \boxed{4\pi}.$$

□

## 2.7 Exercícios

**Exercício 2.1.** Calcule a área da região do plano  $x + y + z = 2$  contida no interior do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Exercício 2.2.** Calcule a massa da superfície  $S$  dada por  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $1 \leq z \leq 2$ , cuja densidade em um ponto  $(x, y, z)$  é  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**Exercício 2.3.** Calcule o fluxo do campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = (xze^y, -xze^y, z)$  através da porção do plano  $x + y + z = 1$  situada no primeiro octante, em relação ao campo normal que aponta para baixo.

**Exercício 2.4.** Calcule o fluxo do campo  $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, z^2)$  através do helicóide  $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ , com  $0 \leq u \leq 1$  e  $0 \leq v \leq \pi$ .

**Exercício 2.5.** Calcule a área da superfície  $S$  de parametrização  $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ , com  $u \in [1, 3]$  e  $v \in [0, \pi/2]$ .

**Exercício 2.6.** Considere a superfície  $S$  de equações paramétricas  $\vec{r}(u, v) = (uv, u+v, u-v)$ , com  $u^2 + v^2 \leq 1$ .

- Mostre que o ponto  $P(2, 3, -1)$  pertence à superfície.
- Encontre uma equação para o plano tangente à superfície nesse ponto.
- Encontre uma equação cartesiana para  $S$ .
- Calcule a área da superfície  $S$ .

**Exercício 2.7.** Obtenha fórmulas semelhantes a (2.5.2) quando  $S$  é da forma  $x = g(y, z)$  e  $y = g(x, z)$ .

**Exercício 2.8.** Existe algum campo  $\vec{G}$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\operatorname{rot} \vec{G} = (x \sin y, \cos y, z - xy)$ ? Explique.

**Exercício 2.9.** Calcule o trabalho realizado pelo campo  $\vec{F}(x, y, z) = (2y, -z, 2x)$  no deslocamento de uma partícula sobre a curva de interseção do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  com o plano  $2y + z = 0$ , orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

**Exercício 2.10.** Considere o campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, 3z, 5y)$ .

- Calcule  $\operatorname{rot} \vec{F}$ .

(b) Parametrize a porção do plano  $x + z = 4$  limitada pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 16$ .

(c) Use o Teorema de Stokes para calcular  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $C$  é a curva obtida pela interseção entre o plano  $x + z = 4$  e o cilindro  $x^2 + y^2 = 16$ , orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

**Exercício 2.11.** Considere a porção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  que está no primeiro octante. Seja  $\vec{F}(x, y, z) = (e^{x^2 \cos x} + z^2, 0, 0)$ . Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $C$  é a fronteira desta porção, orientada no sentido anti-horário quando vista da origem.

**Exercício 2.12.** Considere a curva  $C$  de interseção do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  com o plano  $z = x + 4$  e o campo  $\vec{F}(x, y, z) = (2z, 4x, 5y)$ .

(a) Use o Teorema de Stokes para calcular  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

(b) Explícite uma parametrização de  $C$  compatível com o vetor normal usado no item anterior.

**Exercício 2.13.** Considere a superfície  $S$  definida por  $z = 1 - x^2 - y^2$  com  $z \geq 0$  e o campo de vetores  $\vec{F}(x, y, z) = (-y + \cos x, x, x^2 + y^2)$ .

(a) Determine o elemento de área  $dS$  e o campo normal unitário  $\vec{n}$  que aponta para cima da superfície  $S$ .

(b) Calcule  $\text{rot } \vec{F}$ .

(c) Use o Teorema de Stokes para calcular a integral de linha  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $C$  é a fronteira da superfície  $S$  orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

**Exercício 2.14.** Considere o campo  $\vec{F}(x, y, z) = (x \sin(xz) + e^{y^5 z^3}, y^2, 1)$  e seja  $S$  a parte do hemisfério  $x = \sqrt{9 - y^2 - z^2}$  que está dentro do cilindro  $y^2 + z^2 = 4$ . Calcule, usando o Teorema de Stokes, o fluxo de  $\text{rot } \vec{F}$  através de  $S$ , em relação ao campo normal que tem a primeira componente positiva.

**Exercício 2.15.** Calcule  $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (x - x^2 z, yz^3 - y^2, x^2 y - xz)$  e  $S$  é a superfície

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad z \geq 0,$$

com a normal apontando para fora de  $S$ .

**Exercício 2.16.** Use o Teorema de Stokes para calcular  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 y - xy^2, z^3)$$

e  $C$  é a curva de interseção do plano  $3x + 2y + z = 6$  e do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ , orientada no sentido horário quando vista de cima.

**Exercício 2.17.** Use o Teorema de Stokes para calcular  $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$ , onde

$$\vec{F}(x, y, z) = \left( \sin(y + z) - yx^2 - \frac{y^3}{3}, x \cos(y + z), \cos(2y) \right)$$

e  $S$  é formada pelo topo e pelos quatro lados (mas não pelo fundo do cubo de vértices  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , orientado para fora.



**Exercício 2.18.** Considere o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (0, -z^2, yz).$$

- (a) Existe um campo vetorial  $\vec{G}$  tal que  $\text{rot } \vec{G} = \vec{F}$ ? Justifique.
- (b)  $\vec{F}$  é um campo conservativo? Justifique.
- (c) Considere o hemisfério  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0\}$ . Calcule diretamente a integral de superfície

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

escolhendo uma orientação para  $S$ .

- (d) Usando o Teorema de Stokes, verifique se a sua resposta para o item anterior está correta (lembre-se de parametrizar a fronteira de  $S$  de forma adequada à orientação que você escolheu para  $S$ ).

**Exercício 2.19.** Sejam  $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, \sin(x^7 y^8 z^9))$  e  $S$  a superfície  $z = 9 - x^2 - y^2$ ,  $z \geq 0$ .

- (a) Parametrize a curva fronteira de  $S$ .
- (b) Calcule o fluxo do rotacional de  $\vec{F}$  através da superfície  $S$ , em relação ao campo normal que aponta para fora.

**Exercício 2.20.** Seja  $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, xyz)$  e seja  $S$  a parte da superfície esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  que está abaixo do plano  $z = 4$ , orientada de modo que o vetor normal unitário em  $(0, 0, -5)$  seja  $(0, 0, 1)$ .

- (a) Obtenha uma parametrização para a fronteira  $C$  de  $S$ . Qual é a orientação de  $C$  que é compatível com a de  $S$ ?

- (b) Use o Teorema de Stokes para calcular  $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$ .

**Exercício 2.21.** Mostre que podemos calcular o volume de um corpo sólido por meio de uma integral de superfície.

**Exercício 2.22.** Considere o campo vetorial

$$\vec{E}(x, y, z) = \left( \frac{z - y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{x - z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y - x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

- (a) Calcule a divergência do campo  $\vec{E}$ .
- (b) Calcule o fluxo do campo através da superfície esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .
- (c) Calcule o fluxo do campo através de uma superfície esférica de raio  $b < 1$  e centrada no ponto  $(1, 0, 0)$ . Faça o mesmo para  $b > 1$ . Em ambos os casos, justifique.

**Exercício 2.23.** Calcule o fluxo do campo  $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 - y^3, y^3 - z^3, z^3 - x^3)$  através da fronteira do sólido limitado por  $z = 2 - x^2 - y^2$  com  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  e  $z \geq 0$ , com orientação para cima.

**Exercício 2.24.** Calcule o fluxo do campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (\cos z + xy^2, xe^{-z}, \text{sen } y + x^2 z)$$

através da superfície do sólido limitado pelo parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e pelo plano  $z = 4$ , com orientação para fora do sólido.

**Exercício 2.25.** Considere a superfície fechada  $S$ , definida pelo gráfico de  $z = \sqrt{4 - x^2}$  e pelos planos  $y = -1$ ,  $y = 1$  e  $z = 0$ , e a região  $E$  do espaço limitada por  $S$ .

- (a) Esboce a superfície ilustrando o campo normal que aponta para fora.
- (b) Calcule  $\text{div } \vec{F}$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2yz, x^2z, y^2z^2)$ .
- (c) Use o Teorema da Divergência para calcular a integral

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

com orientação para fora.

**Exercício 2.26.** Considere o campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = (z \arctan(y^2), z^3 \ln(x^2 + 1), z)$  e seja  $\Omega$  a região do espaço delimitada superiormente pelo parabolóide  $z = 2 - x^2 - y^2$  e inferiormente pelo plano  $z = 1$ . Calcule o fluxo do campo  $\vec{F}$  através da superfície fronteira do sólido  $\Omega$ , em relação à normal que aponta para fora de  $\Omega$ .

**Exercício 2.27.** Sejam  $S$  a fronteira da região  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 2\}$  e o campo  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 \sin(2y) - z \arctan(y), x(z^3 + \cos(2y)), x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)$ . Calcule o fluxo de  $\vec{F}$  que sai da superfície  $S$  (normal exterior).

**Exercício 2.28.** Seja  $V$  uma região fechada e limitada do  $\mathbb{R}^3$ , cuja fronteira é a união de duas superfícies  $S_1$  e  $S_2$ , orientadas com vetor normal exterior à região  $V$ . Calcule o fluxo de  $\vec{F}$  através de  $S_2$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (2x + y^2e^{3z} - \cos(y^2 + z^2), xz^2 + \ln(1 + x^2), 4 - z)$ , sabendo que  $S_1$  é uma porção do plano  $z = 0$  com 6 unidades de área, que  $S_2$  está abaixo do plano  $z = 0$  e que  $V$  tem 20 unidades de volume.

**Exercício 2.29.** Seja  $W$  uma região fechada e limitada de  $\mathbb{R}^3$ , cuja fronteira é a união de duas superfícies  $S_1$  e  $S_2$ , orientadas com vetor normal exterior a  $W$ . Calcule o fluxo de  $\vec{F}$  através de  $S_2$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = (e^{y^2+z^2}, y, -2y)$ , sabendo que  $S_1$  é uma porção do plano  $2y + z = 1$  com 5 unidades de área e que  $W$  possui 30 unidades de volume.

**Exercício 2.30.** Considere o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z).$$

- (a) Calcule o fluxo do campo  $\vec{F}$  através da esfera  $S_a$ , de centro na origem e raio  $a > 0$ , com vetor normal apontando para fora.
- (b) Calcule o fluxo de  $\vec{F}$  através do cubo  $-17 \leq x \leq 17, -17 \leq y \leq 17, -17 \leq z \leq 17$ , com vetor normal apontando para fora.

**Exercício 2.31.** Seja  $E_1$  a região sólida delimitada pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e pelos planos  $z = 0$  e  $z = 1$ . Seja  $E_2$  a região sólida cônica acima de  $E_1$ , delimitada pelo cone  $x^2 + y^2 = (2 - z^2)$ , de vértice  $(0, 0, 2)$  e pelos planos  $z = 1$  e  $z = 2$ . Seja agora  $E = E_1 \cup E_2$  a região sólida obtida como união das duas. Considere o campo de força

$$\vec{F}(x, y, z) = (1 - x^2 - y^2, z(1 - x^2 - y^2), 2xz + yz^2 + z - 1).$$

- (a) Descreva a fronteira de  $E$ ,  $\partial E$ .
- (b) Calcule a componente normal de  $\vec{F}$  sobre a face lateral  $S_1$  de  $E_1$  e sobre a sua face de baixo  $D$ .
- (c) Calcule a divergência de  $\vec{F}$ .
- (d) Calcule o fluxo de  $\vec{F}$  através da superfície lateral  $S_2$  de  $E_2$  (a porção do cone), com a orientação externa a  $E$ .

## Capítulo 3

# Sequências e Séries

### 3.1 Sequências de Números Reais

Uma sequência é uma lista ordenada (infinita) de números reais. Mais precisamente, trata-se de uma função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde escrevemos  $f(n) = a_n$ , o **termo geral da sequência**.

**Notação:**  $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ . Muitas vezes abreviaremos a notação apenas como  $(a_n)$ .

#### Exemplo 3.1.1.

- (a)  $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ .
- (b)  $(b_n)_{n=1}^{\infty} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ .
- (c)  $(c_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots)$ .

Além de podermos representar a sequência listando todos os seus termos (o que é complicado por serem infinitos), podemos fazê-lo de duas outras formas. A primeira é através de uma lei de formação, isto é, uma fórmula que fornece  $a_n$  em função de  $n$ . No Exemplo acima, as leis de formação seriam

$$a_n = n, b_n = (-1)^{n+1} \text{ e } c_n = \frac{1}{n}.$$

A segunda forma é por meio de uma fórmula de recorrência, ou seja, a fórmula nos permite obter cada termo a partir de termos anteriores. Um exemplo clássico de fórmula de recorrência é a Sequência de Fibonacci  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ , que é dada pela relação de recorrência

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ se } n \geq 3,$$

isto é, os dois termos iniciais são iguais a 1 e os demais são iguais à soma dos dois termos anteriores. Assim, vemos que

$$(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots).$$

Fórmulas de recorrência são menos desejáveis que leis de formação, já que para determinar o termo  $a_n$  em uma recorrência precisamos conhecer todos os termos anteriores, o que não ocorre quando temos a lei de formação.

Voltando ao exemplo, as duas primeiras sequências não parecem se aproximar de nenhum número real à medida que  $n$  cresce. A terceira sequência, no entanto, parece aproximar-se de 0. Dessa ideia surge o conceito de **limite de sequência**:

**Definição 3.1.1.** Uma sequência  $(a_n)$  é **convergente**, com limite  $L$ , se pudermos tornar  $a_n$  tão próximo de  $L$  quanto quisermos, desde que tomemos  $n$  suficientemente grande. Nesse caso, escrevemos

$$\lim a_n = L \text{ ou } a_n \rightarrow L.$$

Quando  $(a_n)$  não é convergente, dizemos que é **divergente**.

Formalmente, dizemos que  $\lim a_n = L$  se para todo  $\epsilon > 0$  existir  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - L| < \epsilon$  sempre que  $n \geq n_0$ .

Note que a definição dada para limite de sequência é praticamente a mesma de limite de uma função  $f(x)$ , de variável real, quando  $x$  tende a  $+\infty$ . Dessa forma, as propriedades de limites de funções de variável real possuem versões análogas no caso de sequências, de modo que valem:

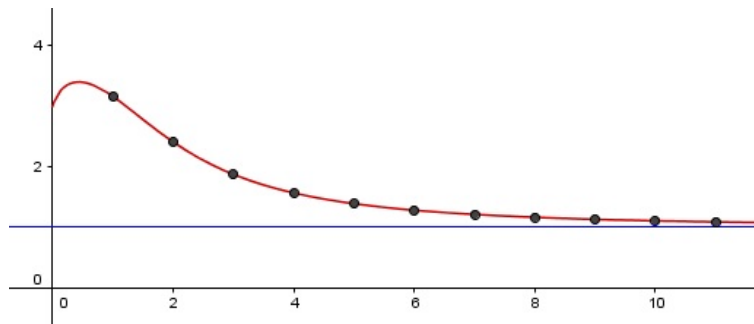
- Limite da soma (subtração) = Soma (subtração) dos limites.
- Limite do produto = Produto dos limites.
- Limite do quociente = Quociente dos limites, desde que o limite do denominador não seja zero.
- O Teorema do Confronto.

Um conceito com o qual também temos familiaridade é o de limite infinito. Por exemplo,  $\lim a_n = \infty$  se pudermos tornar  $a_n$  tão grande quanto quisermos, desde que  $n$  seja tomado suficientemente grande.

Como vimos, a definição precisa de limite é complicada. Para contornar este problema, usaremos algumas propriedades. A primeira delas está enunciada a seguir.

**Teorema 3.1.1.** Se  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  e  $f(n) = a_n$  para  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\lim a_n = L$ .

A figura a seguir ilustra esse Teorema. Temos o gráfico da função  $f(x) = \frac{x^3 + 15x + 3}{x^3 + 4x + 1}$ , e nele estão marcados os pontos em que  $x$  é natural, ou seja, os pontos da sequência  $a_n = \frac{n^3 + 15n + 3}{n^3 + 4n + 1}$ . Sabemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ , e como os pontos da sequência fazem parte do gráfico de  $f$ , esses pontos são carregados para o mesmo limite.



Assim, podemos trocar  $a_n$ , uma função de variável natural, por uma função de variável real que tenha a mesma fórmula que  $a_n$ , trocando  $n$  por  $x$ , e usar nossos conhecimentos de Cálculo 1. Em particular, como  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$ , concluímos que  $\lim 1/n = 0$ .

Podemos obter uma sequência omitindo termos de uma outra sequência e preservando a ordem dos termos restantes. A nova sequência é uma **subsequência** da original. Por exemplo,  $x_n = n + 1 = (2, 3, 4, \dots)$  e  $y_n = 2n = (2, 4, 6, \dots)$  são subsequências de  $a_n = n$ . É claro que se  $a_n \rightarrow L$ , então todas as suas subsequências também convergem para  $L$ . Assim, se  $(a_n)$  **tem duas subsequências com limites distintos, então  $(a_n)$  tem que ser divergente**. Desse modo,  $b_n = (-1)^{n+1}$  é divergente, pois se considerarmos apenas  $n$  ímpar, teremos  $b_{2n-1} = (1, 1, 1, \dots)$  convergindo para 1, e para  $n$  par, teremos  $b_{2n} = (-1, -1, -1, \dots)$  convergindo para -1.

Um outro Teorema importante está enunciado abaixo:

**Teorema 3.1.2.** Se  $\lim |a_n| = 0$ , então  $\lim a_n = 0$ .

Não demonstraremos esse Teorema, mas a ideia por trás dele é a seguinte. Digamos que  $|a_n| \rightarrow L$ , com  $L \neq 0$ . Então nada podemos concluir sobre  $\lim a_n$ : poderíamos ter  $a_n \rightarrow L$ ,  $a_n \rightarrow -L$ , ou até nenhuma das duas possibilidades. Por exemplo, na sequência  $b_n = (-1)^{n+1}$ , temos  $|b_n| = 1$ , logo é claro que  $|b_n| \rightarrow 1$ , mas  $b_n$  é divergente. Essas possibilidades não ocorrem quando  $L = 0$ , já que  $+0$  e  $-0$  são iguais. Ressaltamos mais uma vez que isso não é uma demonstração, apenas uma tentativa de justificar. Um bom exercício para o leitor é tentar demonstrar essa propriedade usando a definição formal de limite.

**Exemplo 3.1.2.** Calcule os limites das seguintes sequências:

- (a)  $a_n = \frac{n+1}{3n-1}$ . Dividimos numerador e denominador pela maior potência de  $n$ :

$$\lim \frac{n+1}{3n-1} = \lim \frac{1+1/n}{3-1/n} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

Também poderíamos ter considerado a função  $f(x) = \frac{x+1}{3x-1}$  e usado a Regra de L'Hospital.

- (b)  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$ . Temos  $|a_n| = \frac{n}{n^2+1}$ . Dividimos novamente pela maior potência de  $n$ , obtendo

$$\lim |a_n| = \lim \frac{n}{n^2+1} = \lim \frac{1/n}{1+1/n^2} = 0,$$

logo  $\lim a_n = \boxed{0}$  pelo Teorema 3.1.2. Novamente poderíamos ter usado a Regra de L'Hospital, porém havia uma maneira mais simples de resolver.

- (c)  $a_n = \frac{\ln n}{n}$ . Usamos  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  e notamos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

pela Regra de L'Hospital. Logo,  $\lim a_n = \boxed{0}$  pelo Teorema 3.1.1.

- (d)  $a_n = \frac{n!}{n^n}$ . Observe que

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{n} \left( \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \right) \leq \frac{1}{n}.$$

Logo,

$$0 < a_n \leq \frac{1}{n}$$

para todo  $n$ , mas  $\lim 0 = \lim 1/n = 0$ . Pelo Teorema do Confronto, concluímos que  $\lim a_n = \boxed{0}$ .

- (e)  $a_n = \cos(n\pi)$ . Note que  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = -1$ ,  $a_4 = 1$ , e assim por diante, ou seja,  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ . Com isso, vemos que  $(a_n)$  é divergente por ter duas subsequências que convergem para limites diferentes.

- (f)  $a_n = \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$ . Nesse caso, basta escrever

$$a_n = \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{1}{(n+1)n},$$

logo é claro que  $a_n \rightarrow 0$ .

Os próximos dois exemplos possuem mais importância, por isso vamos separá-los dos demais:

**Exemplo 3.1.3.** Considere a sequência  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Ao tentarmos calcular o limite de  $a_n$  quando  $n \rightarrow \infty$  obtemos uma indeterminação da forma  $1^\infty$ . Precisamos usar a Regra de L'Hôpital na função  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ . Note que  $\ln f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ , o que nos permite escrever

$$f(x) = e^{x \ln(1+1/x)}.$$

Pela continuidade da função exponencial, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln(1+1/x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1+1/x)}.$$

O novo limite é do tipo  $0 \cdot \infty$ , portanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + 1/x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 1/x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+1/x}(1/x)'}{(1/x)'} = 1.$$

Isso nos permite concluir que

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

□

Usamos acima o seguinte resultado, que é bastante útil pois nos permite “passar o limite para dentro” de uma função contínua.

**Teorema 3.1.3.** Se  $(a_n)$  e  $(b_n)$  são sequências tais que  $a_n = f(b_n)$ , onde  $f$  é uma função contínua de variável real, então  $\lim a_n = f(\lim b_n)$ .

Esse resultado simplifica algumas contas. Por exemplo, se  $a_n = \sin(1/n)$ , então  $\lim a_n = \sin(\lim 1/n) = \sin(0) = 0$ .

**Exemplo 3.1.4.** Considere  $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$ . Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , obtemos uma indeterminação do tipo  $\infty^0$ , logo novamente fazemos  $\ln a_n = \frac{1}{n} \ln(n)$ , logo

$$a_n = e^{\frac{\ln(n)}{n}}.$$

Usando a continuidade da função exponencial, temos

$$\lim a_n = e^{\lim \frac{\ln(n)}{n}} = e^0 = 1,$$

pelo que vimos no Exemplo 3.1.2. Logo,

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

Note que também podemos mostrar que  $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ , se  $a > 0$ , com contas praticamente iguais (até um pouco mais simples):

$$\lim \sqrt[n]{a} = e^{\lim \frac{\ln(a)}{n}} = e^0 = 1.$$

Não precisamos usar a Regra de L'Hôpital, e observe que precisamos ter  $a > 0$  para não encontrar problemas quando  $n$  for par e para que o  $\ln(a)$  faça sentido.

□

Vejam os mais algumas definições:

**Definição 3.1.2.** Diremos que  $(a_n)$  é **monótona** nos seguintes casos:

- $(a_n)$  é crescente se  $a_{n+1} > a_n$  para todo  $n$ . É não-decrescente se  $a_{n+1} \geq a_n$  para todo  $n$ .

- $(a_n)$  é decrescente se  $a_{n+1} < a_n$  para todo  $n$ . É não-crescente se  $a_{n+1} \leq a_n$  para todo  $n$ .

**Exemplo 3.1.5.**

- (a) A sequência  $a_n = \frac{3}{n+5}$  é decrescente, pois

$$a_n = \frac{3}{n+5} > \frac{3}{n+6} = \frac{3}{(n+1)+5} = a_{n+1}.$$

- (b) A sequência  $a_n = \frac{n}{n^2+1}$  também é decrescente. Note que  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  tem derivada igual a

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2},$$

que é negativa para  $x > 1$ , que é onde os naturais se encontram.

**Definição 3.1.3.** Diremos que  $(a_n)$  é **limitada superiormente** se existir  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n \leq M$  para todo  $n$ , e é **limitada inferiormente** se existir  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n \geq m$  para todo  $n$ . Se  $(a_n)$  for limitada superiormente e inferiormente, diremos apenas que é **limitada**.

**Exemplo 3.1.6.**

- (a) A sequência  $a_n = (-1)^n$  é limitada inferiormente por  $-1$  e superiormente por  $1$ .
- (b)  $a_n = n$  é limitada inferiormente por  $1$  mas é ilimitada superiormente.
- (c)  $a_n = (-1)^n n$  não é limitada nem superiormente, nem inferiormente.
- (d)  $a_n = 1 - 1/n$  é limitada inferiormente por  $0$  e superiormente por  $1$ . Note que  $\lim a_n = 1$  e que  $a_n$  é crescente. Esse exemplo ilustra o seguinte Teorema, que é importantíssimo e será usado mais à frente:

As duas últimas definições se unem no seguinte resultado, importantíssimo do ponto de vista teórico e que nos permitirá saber muitas vezes que uma sequência é convergente sem calcular o seu limite.

**Teorema 3.1.4** (Teorema da Sequência Monótona). *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

## 3.2 Séries Numéricas

Seja  $(a_n)$  uma sequência de números reais. A partir de  $(a_n)$  construiremos uma nova sequência  $(S_n)$  definida por

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Essa sequência  $(S_n)$  é chamada de **sequência das somas parciais** de  $(a_n)$ . Se  $(S_n)$  for convergente, com  $\lim S_n = S$ , diremos que a série infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente, com soma  $S$ . Se  $(S_n)$  for divergente,

diremos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

**Exemplo 3.2.1.** A série geométrica  $a + ar + ar^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$  é convergente se  $|r| < 1$ , com soma igual a  $\frac{a}{1-r}$ , e é divergente caso contrário.

Com efeito, temos  $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$ . Daí,  $rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$ . Se fizermos  $S_n - rS_n$ , vamos obter

$$S_n(1-r) = a - ar^n,$$

logo

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-r}.$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  e notando que  $r^n \rightarrow 0$  se  $|r| < 1$  (basta ver que  $|r|^x$  é uma exponencial decrescente e usar o Teorema 3.1.2), vamos obter

$$S = \frac{a}{1-r},$$

como queríamos demonstrar.

Note que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$  também pode ser escrita como  $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ .

**Exemplo 3.2.2.**

- (a) A série  $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$  é convergente, pois  $|2/3| < 1$ .
- (b) Como  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$ , essa série é divergente pois  $\pi/3 > 1$ .
- (c) Como  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot 3}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n$ , essa série diverge pois  $4/3 > 1$ .

**Exemplo 3.2.3.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ . Esta série não é geométrica, então precisamos de outra análise. Vamos olhar para as somas parciais. Para isso, precisamos escrever o termo geral

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

de outra forma, usando frações parciais:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} \Rightarrow A(n+1) + Bn = 1.$$

Daí, fazendo  $n = 0$  obtemos  $A = 1$  e  $n = -1$  nos dá  $B = -1$ , ou seja,

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 = 1 - \frac{1}{2} \\ S_2 &= a_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}, \end{aligned}$$



de modo que o padrão é

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Assim,  $\boxed{\lim S_n = 1}$ , e a série é convergente com soma  $\boxed{1}$ .

**Exemplo 3.2.4.**  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ . Nesse caso,

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{2}{(n+1)(n-1)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n-1} = \frac{A(n-1) + B(n+1)}{n^2-1} \Rightarrow A(n-1) + B(n+1) = 2.$$

Assim, fazendo  $n = 1$  obtemos  $B = 1$  e fazendo  $n = -1$  obtemos  $A = -1$ , de modo que

$$\boxed{a_n = \frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}}.$$

Vamos calcular algumas somas parciais até encontrarmos um padrão:

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 - \frac{1}{3} \\ S_3 &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ S_4 &= 1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\ S_5 &= 1 + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

de modo que o padrão é

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Dessa forma,  $\boxed{\lim S_n = 3/2}$ , e a série converge, com soma igual a  $\boxed{3/2}$ .

Exemplos como os dois anteriores, em que as somas parciais possuem parcelas que se cancelam, são chamadas de **séries telescópicas**.

**Exemplo 3.2.5.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Vamos mostrar que essa série, conhecida como **série harmônica**, é divergente.

Para isso, vamos mostrar que a sequência das somas parciais possui uma subsequência divergente. Observe:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1/2} = 1 + \frac{2}{2} \\ S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{1/2} = 1 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Em geral, o padrão é

$$S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}.$$

Como  $\lim(1 + n/2) = \infty$ , temos que  $S_{2^n} \rightarrow \infty$ , logo essa subsequência é divergente, de modo que a sequência das somas parciais é divergente, provando que a série harmônica é divergente.

**Exemplo 3.2.6.** Na próxima seção mostraremos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  é convergente. Um fato impressionante é que é possível demonstrar (embora não faremos isto nestas notas) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nossa intuição nos indica que se  $\sum a_n$  converge, então  $\lim a_n = 0$ , para que a contribuição dos termos com  $n$  grande não altere a soma. Mostraremos a seguir que isso é verdade, mas cuidado, pois **a recíproca é falsa!** Como vimos no exemplo anterior, a série harmônica tem termo geral que tende a zero, mas é divergente!

**Teorema 3.2.1.** Se  $\sum a_n$  é convergente, então  $\lim a_n = 0$ .

*Demonstração.* Como  $\sum a_n$  converge, então existe  $\lim S_n = S$ , onde  $(S_n)$  é a sequência das somas parciais. Como  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , temos

$$\lim a_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0.$$

□

Podemos usar esse Teorema da seguinte forma: se  $\lim a_n \neq 0$ , então  $\sum a_n$  é divergente. Esse é o nosso primeiro critério para testar séries, que chamaremos de **Teste para Divergência**.

**Exemplo 3.2.7.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$  diverge, pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4} = \frac{1}{5} \neq 0$ .

Se as séries  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  forem convergentes, com  $\sum a_n = A$  e  $\sum b_n = B$ , então também são convergentes as séries  $\sum (a_n \pm b_n)$  e  $\sum ca_n$  ( $c \in \mathbb{R}$ ), com somas  $A \pm B$  e  $cA$ , respectivamente.

**Exemplo 3.2.8.** Como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{6}\right)^n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$ , essa série é convergente, pois  $\sum (1/2)^n$  e  $\sum (1/3)^n$  são séries geométricas convergentes.

**Exemplo 3.2.9.** Vamos mostrar que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{5^n} + \frac{2}{n} \right)$  é divergente. De fato, sabemos que  $\sum 2/n = 2 \sum 1/n$  diverge e que  $\sum 3/5^n = \sum 3(1/5)^n$  converge. Se  $\sum (3/5^n + 2/n)$  convergisse, teríamos

$$\sum \frac{2}{n} = \sum \left( \frac{3}{5^n} + \frac{2}{n} \right) - \sum \frac{3}{5^n},$$

logo  $\sum 2/n$  seria convergente por ser diferença entre séries convergentes. Como sabemos que isso não é verdade, temos que  $\sum (3/5^n + 2/n)$  diverge.

O argumento acima serve para mostrar que **a soma de uma série convergente com uma divergente é sempre divergente!** Se  $\sum a_n$  converge e  $\sum b_n$  diverge, então  $\sum (a_n \pm b_n)$  diverge.

**Definição 3.2.1.** Uma série é **alternada** se seus termos são alternadamente positivos e negativos.

**Exemplo 3.2.10.** As seguintes séries são alternadas:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \dots$$

Toda série alternada é da forma  $\sum (-1)^{n+1} b_n$  ou  $\sum (-1)^n b_n$ , onde  $b_n > 0$  para todo  $n$ , dependendo se o termo inicial é positivo ou negativo.

**Teorema 3.2.2** (Teste da Série Alternada - Leibniz).

Se uma série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$  ou  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$  satisfizer

(i)  $b_{n+1} \leq b_n$  para todo  $n$ ;

(ii)  $\lim b_n = 0$ ,

então a série é convergente.

**Exemplo 3.2.11.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ . Aqui temos  $b_n = 1/n$ . É claro que  $\lim b_n = 0$ . Além disso,

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n,$$

logo  $(b_n)$  é decrescente. Pelo Teste da Série Alternada, esta série é convergente.

Note que  $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$ , portanto a série do exemplo anterior é igual a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

**Exemplo 3.2.12.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 1}$ . Dessa vez temos  $b_n = \frac{n^2}{n^3 + 1}$ . Também é claro que  $\lim b_n = 0$ . Para

mostrar que  $b_{n+1} \leq b_n$ , vamos estudar a derivada da função  $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$ . Temos

$$f'(x) = \frac{x(2 - x^3)}{(x^3 + 1)^2} \text{ (Faça as contas!!!)}$$

Como só estamos interessados em valores positivos de  $x$ , teremos  $f'$  negativa se  $2 - x^3 < 0 \Rightarrow x^3 > 2 \Rightarrow x > \sqrt[3]{2} > 1$ . Logo,  $(b_n)$  é decrescente para  $n \geq 2$ . Isso basta para nossos propósitos: a sequência  $(b_n)$  deve ser **eventualmente decrescente**, ou seja, a partir de certo valor de  $n$  ser decrescente (ou não-crescente). Logo, a série converge pelo Teste da Série Alternada.

Na prática, mostramos que a série  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3 + 1}$  converge, mas então

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3 + 1} = -\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3 + 1}$$

também converge! Isso ilustra o seguinte fato: **omitir uma quantidade finita de termos iniciais não altera a convergência da série!**

### 3.3 Séries de Termos Positivos

Seja  $\sum a_n$  uma série tal que  $a_n \geq 0$  para todo  $n$ . Então teremos

$$S_n = a_1 + \dots + a_n \leq a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_{n+1},$$

ou seja,  $(S_n)$  é **uma sequência monótona não-decrescente**. Assim, se mostrarmos que  $(S_n)$  é limitada superiormente, então teremos garantida a convergência da série pelo Teorema 3.1.4.

### 3.3.1 Teste da Integral

Começamos esta subseção com uma breve revisão sobre integrais impróprias. Existem outros tipos de integrais impróprias, mas para nós elas serão integrais da forma

$$\int_a^\infty f(x)dx, \quad (3.3.1)$$

ou seja, uma integral definida, mas com um intervalo de integração infinito. Como integrais definidas foram construídas apenas em intervalos limitados da forma  $[a, b]$ , a ideia da definição dessa integral será trocar o limite  $\infty$  por um parâmetro  $t$ , calcular a integral, e em seguida fazer  $t \rightarrow \infty$ , ou seja,

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx. \quad (3.3.2)$$

Quando o limite acima existe, dizemos que a integral converge. Caso contrário, ela diverge.

**Exemplo 3.3.1.** Calcule  $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ .

**Solução.** Pela definição acima, temos

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(x) \Big|_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t) \\ &= \boxed{\infty}, \end{aligned}$$

logo a integral diverge. □

**Exemplo 3.3.2.** Calcule  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ .

**Solução.** Temos

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{t} \right) \\ &= \boxed{1}, \end{aligned}$$

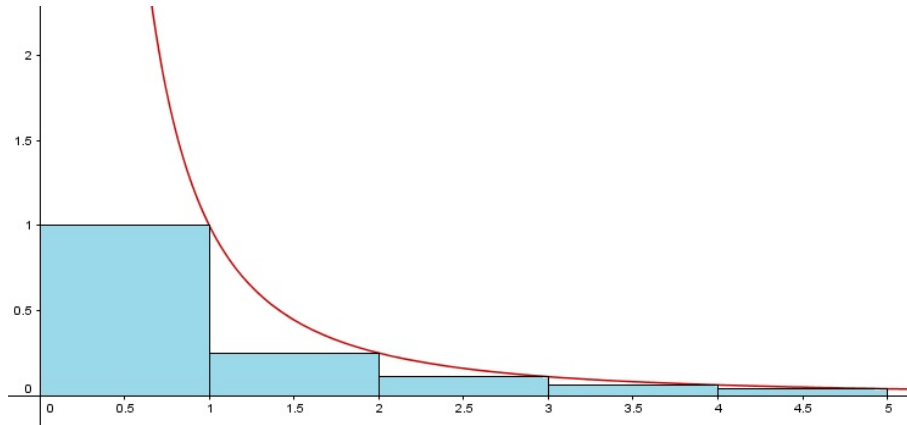
logo a integral converge. □

O Teste da Integral relaciona a convergência de uma série infinita com a de uma integral imprópria.

**Teorema 3.3.1** (Teste da Integral). *Suponha que  $f(x)$  seja uma função contínua, positiva e decrescente (eventualmente) em  $[1, \infty)$  e seja  $a_n = f(n)$ . Então:*

(i) Se  $\int_1^\infty f(x)dx$  converge, então  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  converge.

(ii) Se  $\int_1^\infty f(x)dx$  diverge, então  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  diverge.



*Demonstração.* Começemos supondo que a integral imprópria converge. Na Figura 3.3.1 temos o gráfico de uma função  $f(x)$  contínua, positiva e decrescente para  $x \geq 1$ .

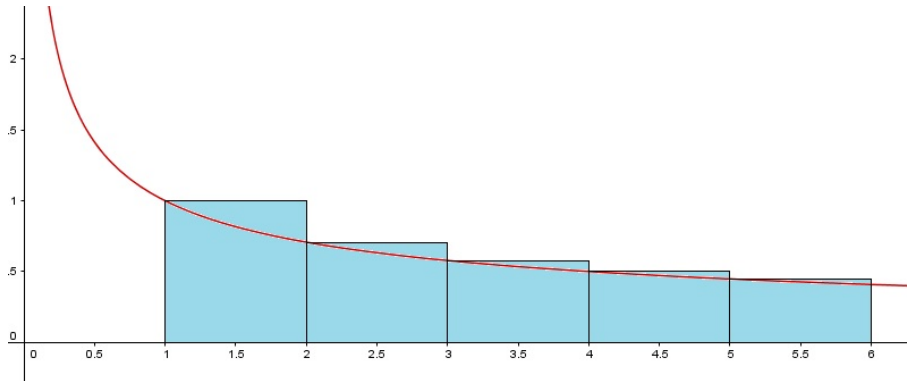
O primeiro retângulo tem base medindo 1 e altura igual a  $f(1) = a_1$ , logo sua área é igual a  $a_1$ . Em geral, observe que o  $n$ -ésimo retângulo tem base medindo 1 e altura igual a  $f(n) = a_n$ , logo a soma das áreas dos retângulos é igual a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Excluindo o primeiro retângulo, a soma das áreas dos restantes é menor que a área sob o gráfico de  $y = f(x)$  para  $x \geq 1$ , ou seja,  $\int_1^{\infty} f(x)dx$ .

Assim,

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n < 1 + \int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Como a integral imprópria converge, ela é igual a um número real  $L$ , logo a expressão acima nos mostra que  $S_n$  é menor que  $1 + L$  para todo  $n$ , ou seja  $(S_n)$  é limitada! Pela observação feita no começo desta seção, temos que  $(S_n)$  é convergente, logo a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente.

Suponha agora que a integral diverge e considere a Figura 3.3.1.



Agora a área abaixo da curva para  $x \geq 1$  é menor que a soma das áreas dos retângulos, ou seja

$$\int_1^{\infty} f(x)dx < \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Como a integral diverge, ela deverá ser igual a  $\infty$ , logo a série também é igual a infinito por ser maior que a integral, e portanto diverge.  $\square$

**Exemplo 3.3.3.** O Exemplo 3.3.1 nos fornece outra demonstração de que a série harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge,

e o Exemplo 3.3.2 nos mostra que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge.

**Exemplo 3.3.4.** Vamos generalizar o Exemplo anterior e determinar para que valores de  $p$  a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge. Estas séries são conhecidas como  **$p$ -séries**. Vamos fazer uma análise geral do caso  $p \neq 1$ .

Se  $p = 0$ , o termo geral da série é  $a_n = 1$ , portanto  $\lim a_n = 1 \neq 0$  e a série diverge pelo Teste para Divergência. Além disso, se  $p < 0$ , então  $q = -p > 0$  e o termo geral é  $a_n = n^{-p} = n^q$ , portanto  $\lim a_n = \infty$  e a série diverge pelo mesmo motivo. Se  $0 < p \neq 1$ , então a função  $f(x) = 1/x^p$  é contínua, positiva e decrescente para  $x \geq 1$ . Aplicamos o Teste da Integral:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{dx}{x^p} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_{x=1}^{x=t} \\ &= \frac{1}{1-p} \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{1-p} - 1) \\ &= \begin{cases} \infty, & \text{se } p < 1 \\ \frac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Com isso, podemos afirmar que uma  $p$ -série **converge se  $p > 1$  e diverge se  $p \leq 1$** . □

Como aplicação do Exemplo acima, temos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  converge e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$  diverge.

**Exemplo 3.3.5.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ . Considere a função  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ . Essa função é contínua e positiva. Além disso,  $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} < 0$  para  $x \in [1, \infty)$ . Assim, podemos usar o Teste da Integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan(x) \Big|_{x=1}^{x=t} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\arctan(t) - \arctan(1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Logo, a série é convergente. □

**Exemplo 3.3.6.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ . Temos que a função  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  é não-negativa para  $x \geq 1$ , é contínua. Além disso,  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$  para  $x > e$ , logo  $f$  é eventualmente decrescente. Assim, fazendo a substituição  $u = \ln x$ , obtemos  $du = dx/x$ , logo

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\ln t} u du = \lim_{t \rightarrow \infty} \left. \frac{u^2}{2} \right|_{u=0}^{u=\ln t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty,$$

logo a série é divergente pelo Teste da Integral. □

**Exemplo 3.3.7.**  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$ . A função  $f(x) = x e^{-x^2}$  é positiva e contínua para  $x \geq 1$  e  $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$  é negativa se  $x > 1$ . Assim, podemos usar o Teste da Integral. Fazendo a substituição  $u = -x^2$ , temos  $du = -2x dx$ , logo

$$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x e^{-x^2} dx = -\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-1}^{-t^2} \frac{e^u}{2} du = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} e^u \Big|_{u=-1}^{u=-t^2} = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t^2} - e^{-1}) = \frac{1}{2e},$$

logo a série é convergente. □

### 3.3.2 Os Testes da Comparação

**Teorema 3.3.2** (Teste da Comparação). *Sejam  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  duas séries de termos positivos e tais que  $a_n \leq b_n$ . Então:*

(i) *Se  $\sum b_n$  for convergente, então  $\sum a_n$  é convergente.*

(ii) *Se  $\sum a_n$  for divergente, então  $\sum b_n$  é divergente.*

*Demonstração.* (i) Suponha que  $\sum b_n = B$ . Sejam  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$  e  $T_n = \sum_{i=1}^n b_i$ . Então, como  $0 \leq a_n \leq b_n$ , temos  $S_n \leq T_n < B$ , logo  $(S_n)$  é limitada superiormente, e portanto  $\sum a_n$  é convergente pelo comentário no início desta seção.

(ii) Se  $\sum b_n$  fosse convergente, então a parte (i) garantiria que  $\sum a_n$  teria que ser convergente, mas essa série é divergente por hipótese. Logo,  $\sum b_n$  tem que ser divergente.  $\square$

**Exemplo 3.3.8.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ . Note que  $n^2 < 2n^2 + 4n + 3$ , logo

$$\frac{1}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{n^2}.$$

Como  $\sum 5/n^2$  é convergente e as duas séries são de termos positivos, então a série dada converge pelo Teste da Comparação.

**Exemplo 3.3.9.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ . Já vimos que essa série diverge pelo Teste da Integral, mas usemos esse exemplo para mostrar que às vezes mais de um teste pode se aplicar para determinar se uma série converge. Temos que

$$\frac{1}{n} < \frac{\ln n}{n}$$

se  $n \geq 3$ . Como  $\sum 1/n$  é divergente e os termos são todos positivos, concluímos que a série dada diverge pelo Teste da Comparação.

**Exemplo 3.3.10.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ . Note que

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2 = 2^{n-1}$$

(as igualdades ocorrem para  $n = 1$  e  $n = 2$ ). Logo

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Como  $\sum (1/2)^{n-1}$  é uma série geométrica convergente (pois  $|1/2| < 1$ ) e os termos gerais são todos positivos, concluímos que a série dada converge pelo Teste da Comparação.

Mostraremos no Exemplo 3.6.6 que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ .

**Exemplo 3.3.11.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ . Note que

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n \cdot n} \leq \frac{2}{n^2}$$

se  $n \geq 2$ , já que  $\frac{3 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot \dots \cdot n} \leq 1$  se  $n > 2$ . Como  $\sum 2/n^2$  converge e os termos são positivos, a série dada converge pelo Teste da Comparação.

**Teorema 3.3.3** (Teste da Comparação do Limite). *Sejam  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  duas séries de termos positivos tais que*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = c,$$

*onde  $c \in \mathbb{R}$  e  $c > 0$ . Então as duas séries têm o mesmo comportamento, ou seja, ou ambas convergem ou ambas divergem.*

*Demonstração.* Como existe o limite  $\lim a_n/b_n = c > 0$ , podemos tornar  $\frac{a_n}{b_n}$  tão próximo de  $c$  quanto quisermos, desde que tomemos  $n$  suficientemente grande. Assim, podemos obter um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{c}{2}$$

se  $n \geq n_0$ . Em outras palavras, se  $n \geq n_0$ , então

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2},$$

logo

$$\frac{c}{2}b_n < a_n < \frac{3c}{2}b_n.$$

Como  $c > 0$ , as três sequências que aparecem na desigualdade acima são de termos positivos, logo podemos usar o Teste da Comparação para determinar as convergências. Se  $\sum a_n$  converge, então a desigualdade

$$\frac{c}{2}b_n < a_n$$

garante que  $\sum b_n$  converge. Da mesma forma, se  $\sum b_n$  converge, então a desigualdade

$$a_n < \frac{3c}{2}b_n$$

garante que  $\sum a_n$  converge, portanto quando uma das séries converge, a outra também converge, e analogamente podemos mostrar que quando uma diverge, o mesmo ocorre com a outra, o que conclui a demonstração.  $\square$

**Exemplo 3.3.12.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{3n^4 + 1}$ . Compare com  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , que é convergente (tome as maiores potências de  $n$  presentes no numerador e no denominador). Como

$$\lim \frac{\frac{n^2-1}{3n^4+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^4 - n^2}{3n^4 + 1} = \frac{1}{3} > 0,$$

a série dada também converge.

**Exemplo 3.3.13.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5} + n^5}$ . Compare com  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , que é divergente. Como

$$\lim \frac{\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5}+n^5}}{\frac{n^2}{\sqrt{n^5}}} = \lim \left( \sqrt{\frac{n^5}{5+n^5}} \frac{2n^2+3n}{n^2} \right) = 2 > 0,$$

a série dada também diverge.

**Exemplo 3.3.14.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$ . Temos que  $\sum e^{-n} = \sum (1/e)^n$  é uma série geométrica convergente e

$$\lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}}{e^{-n}} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1 > 0,$$

logo a série dada também converge.



### 3.4 Convergência Absoluta

**Definição 3.4.1.** Uma série  $\sum a_n$  é **absolutamente convergente** se  $\sum |a_n|$  for convergente.

**Exemplo 3.4.1.**

- (a) A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$  é convergente pelo Teste da Série Alternada e é absolutamente convergente pois  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge.
- (b) A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  é convergente pelo Teste da Série Alternada, mas não é absolutamente convergente pois  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge.

**Definição 3.4.2.** Se  $\sum a_n$  converge, mas não converge absolutamente, dizemos que  $\sum a_n$  **converge condicionalmente**.

Uma das importâncias da convergência absoluta dá-se pelo seguinte resultado:

**Teorema 3.4.1.** *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

*Demonstração.* Suponha que  $\sum a_n$  converge absolutamente. Logo,  $\sum |a_n|$  converge. Note que

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|.$$

Pelo Teste da Comparação, a série  $\sum (a_n + |a_n|)$  é convergente. Mas então  $\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$  converge por ser igual à diferença entre séries convergentes.  $\square$

**Exemplo 3.4.2.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ . Observe que

$$0 \leq \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Assim,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$  converge pelo Teste da Comparação. Concluímos que a série dada converge absolutamente e, portanto, converge.

#### 3.4.1 Os Testes da Razão e da Raiz

Dois dos testes de convergência mais poderosos envolvem a convergência absoluta. Eles levam uma enorme vantagem sobre os Testes da Comparação pois não necessitam de uma outra série que saibamos de antemão se converge ou diverge. De certa forma, estes testes comparam uma série com ela própria, como veremos na demonstração do próximo Teorema.

**Teorema 3.4.2** (Teste da Razão - D'Alembert). *Suponha que  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ . Então:*

- (a) *Se  $L < 1$ , então  $\sum a_n$  converge absolutamente.*
- (b) *Se  $L > 1$ , então  $\sum a_n$  diverge.*
- (c) *Se  $L = 1$ , nada podemos afirmar.*

*Demonstração.* Primeiramente, note que  $L \geq 0$  pois  $a_{n+1}/a_n > 0$  para todo  $n$ . Suponha que  $L < 1$  e escolha  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $L < c < 1$ . Novamente, a ideia será usar o Teste da Comparação. Como  $\lim |a_{n+1}/a_n| = L < c$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < c < 1$$

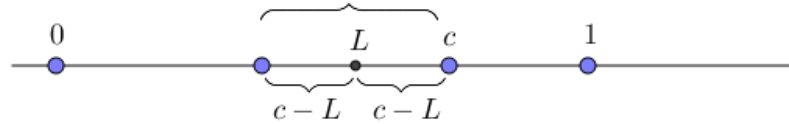
para todo  $n \geq N$  (conforme a Figura 3.4.1). Com isso, temos  $|a_{n+1}| < c|a_n|$  para todo  $n \geq N$ , ou seja,  $|a_{N+1}| < c|a_N|$ ,  $|a_{N+2}| < c|a_{N+1}| < c^2|a_N|$ ,  $|a_{N+3}| < c|a_{N+2}| < c^3|a_N|$ , etc. Em geral, temos  $|a_{N+n}| < c^n|a_N|$ , de modo que para  $n \geq N$ , a sequência  $(|a_n|)$  torna-se sempre menor que o termo geral da série geométrica  $\sum |a_N|c^n$ , que é convergente pois  $0 \leq c < 1$ , logo o Teste da Comparação garante que  $\sum |a_n|$  converge, ou seja,  $\sum a_n$  é absolutamente convergente.

Por outro lado, se  $L > 1$ , então existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

sempre que  $n \geq N$  (novamente, conforme a Figura 3.4.1. Daí,  $|a_{n+1}| > |a_n|$  para todo  $n \geq N$ , logo  $(|a_n|)$  é (eventualmente) crescente, de modo que  $\lim a_n \neq 0$ , o que garante que  $\sum a_n$  diverge.  $\square$

$L < 1$ : Todos os termos entram nesse intervalo a partir de um certo valor  $N$



$L > 1$ : Todos os termos entram nesse intervalo a partir de um certo valor  $N$

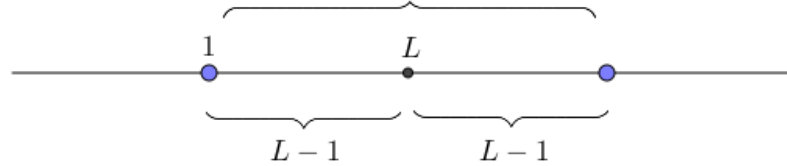


Figura 3.4.1: Ilustração da demonstração

**Exemplo 3.4.3.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^n}$ . Temos

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} = \lim \left( \frac{n+1}{n} \right)^3 \frac{3^n}{3^{n+1}} = \lim \left( \frac{n+1}{n} \right)^3 \frac{3^n}{3 \cdot 3^n} = 1^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

logo a série converge absolutamente.

**Exemplo 3.4.4.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$ . Nesse caso,

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}}{\frac{n!}{e^n}} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} \frac{e^n}{e^{n+1}} = \lim \frac{(n+1)n!}{n!} \frac{e^n}{e e^n} = \frac{1}{e} \lim (n+1) = \infty > 1.$$

Logo, a série diverge.

**Exemplo 3.4.5.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ . Temos que

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{(n+1)(n+1)^n n!}{n^n (n+1)n!} = \lim \left( \frac{n+1}{n} \right)^n$$

Mas

$$\lim \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1$$

pelos cálculos que fizemos acima. Logo, a série diverge.

**Exemplo 3.4.6.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2n)}{n!}$ . Note que

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2n)}{n!} = \frac{(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \cdot \dots \cdot (2n)}{n!} = \frac{2^n n!}{n!} = 2^n.$$

Logo, a série é igual a  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ , uma série geométrica divergente.

**Exemplo 3.4.7.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$ . Temos

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{\frac{10^{n+1}}{[(n+1)+1]4^{2(n+1)+1}}}{\frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}} = \lim \frac{10^{n+1}}{10^n} \frac{n+1}{n+2} \frac{4^{2n+1}}{4^{2n+3}} = 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4^2} = \frac{10}{16} < 1.$$

Logo, a série converge absolutamente.

**Teorema 3.4.3** (Teste da Raiz - Cauchy). *Suponha que  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$ . Então:*

(i) Se  $L < 1$ , então  $\sum a_n$  converge absolutamente.

(ii) Se  $L > 1$ , então  $\sum a_n$  diverge.

(iii) Se  $L = 1$ , nada podemos afirmar.

*Demonstração.* A ideia é a mesma da demonstração do Teste da Razão. Se  $0 \leq L < 1$ , escolha  $c$  tal que  $L < c < 1$ . Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\sqrt[n]{|a_n|} < c < 1$  para todo  $n \geq N$  (mais uma vez, de acordo com a Figura 3.4.1), portanto  $|a_n| < c^n$  para todo  $n \geq N$ . Assim, para os valores de  $n$  a partir de  $N$ , a sequência  $(|a_n|)$  é menor que o termo geral de uma série geométrica convergente, pois  $0 < c < 1$ , logo  $\sum |a_n|$  converge pelo Teste da Comparação, o que garante que  $\sum a_n$  converge absolutamente.

Por outro lado, se  $L > 1$ , então existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n| > 1$  se  $n \geq N$  (observe, novamente, a Figura 3.4.1), mas isso impede que  $\lim a_n$  seja igual a zero e  $\sum a_n$  diverge.  $\square$

**Exemplo 3.4.8.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$ . Temos

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1,$$

logo a série é absolutamente convergente.

**Exemplo 3.4.9.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\arctan n)^n}$ . Temos

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{1}{\arctan n} = \frac{1}{\lim \arctan n} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} < 1,$$

logo a série converge absolutamente.

**Exemplo 3.4.10.** Determine se a série  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$  converge ou não. Em caso afirmativo, determine se a convergência é condicional ou absoluta.

Para determinar se a série converge, usamos o Teste da Série Alternada. É claro que  $\lim \frac{1}{n \ln n} = 0$ . A função  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  é positiva e decrescente para  $x \geq 2$  por ser produto de funções positivas e decrescentes. Logo,  $b_n = \frac{1}{n \ln n}$  é decrescente, e a série **converge**.

Para verificar a convergência absoluta, temos que analisar  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ . Como  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  é contínua, positiva e decrescente para  $x \geq 2$ , vemos que o Teste da Integral se aplica. Fazendo a mudança de variável  $u = \ln x$ , de modo que  $du = dx/x$ , obtemos

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{du}{u} = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln u \Big|_{u=\ln 2}^{u=\ln t} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln(\ln t) - \ln(\ln 2)) = \infty,$$

portanto a série diverge. Assim, a convergência da série dada é apenas **condicional**.

**Exemplo 3.4.11.** Vale ressaltar que **sempre que um dos Testes da Razão ou da Raiz for inconclusivo (ou seja, se  $L = 1$ ), então o outro Teste também é!** Vejamos dois casos que mostram quem realmente nada podemos concluir no caso  $L = 1$ .

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Temos

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{1/(n+1)}{1/n} = \lim \frac{n}{n+1} = 1,$$

e a série é divergente.

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Temos

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \lim \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 = 1^2 = 1,$$

e a série é convergente.

Os testes da Razão e da Raiz também podem ser usados para calcular limites de sequências, pois se  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$  ou  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ , então  $\lim a_n = 0$ , pois nesses casos os testes afirmam que  $\sum a_n$  é convergente.

### 3.5 Exemplos gerais de séries - Estratégias para escolher os testes

Nas seções anteriores, nosso trabalho de escolher qual teste de convergência usar foi facilitado pois cada uma abordava um teste específico (por exemplo, quando falamos sobre o Teste da Integral, os exemplos que fizemos obviamente usariam esse teste). Nesta seção vamos resolver mais Exemplos, mas sem tratar apenas de um teste especificamente, e com isso definiremos algumas estratégias de quais testes são mais eficazes com determinados tipos de séries.

**Exemplo 3.5.1.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+n}$ . Como o termo geral é uma função racional, podemos usar o Teste da Com-

paração do Limite comparando com  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , que é uma  $p$ -série divergente. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n-1}{n^2+n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n^2 + n} = 1,$$

que é um número real positivo, logo o Teste da Comparação do Limite garante que as duas séries divergem.

**Exemplo 3.5.2.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+n}$ . A série é alternada, então a estratégia óbvia é usar o Teste da Série Alternada. Antes disso convém verificar se a série é absolutamente convergente, pois se fosse, sua convergência já estaria garantida, mas isso não ocorre pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n-1}{n^2+n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+n},$$

que é a série divergente do Exemplo anterior.

Então, aplicamos o Teste da Série Alternada. Temos  $b_n = \frac{n-1}{n^2+n}$ , logo é claro que  $\lim b_n = 0$ . Falta mostrar que  $(b_n)$  é (eventualmente) decrescente, o que faremos calculando a derivada da função  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$ , que é

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x)^2}.$$

O denominador é positivo para  $x > 0$ , e o numerador é uma função quadrática côncava para baixo, portanto torna-se negativo a partir de um certo valor de  $x$  (observe a Figura 3.5.1), logo  $f$  é decrescente a partir desse valor de  $x$ .

Daí,  $(b_n)$  é eventualmente decrescente, e portanto a série converge pelo Teste da Série Alternada.

**Exemplo 3.5.3.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 3n + 1}{n^3 + 7n + 9}$ . Nesse caso, o termo geral também é uma função racional, então o Teste da Comparação do Limite já deve surgir como candidato, mas não é necessário. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n + 1}{n^3 + 7n + 9} = 1 \neq 0,$$

a série diverge pelo Teste para Divergência.

**Exemplo 3.5.4.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{1+8n} \right)^n$ . O termo geral é uma grande potência, portanto o Teste da Raiz é uma escolha um tanto quanto óbvia. Temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{3n}{1+8n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{1+8n} = \frac{3}{8} < 1,$$

logo a série converge!

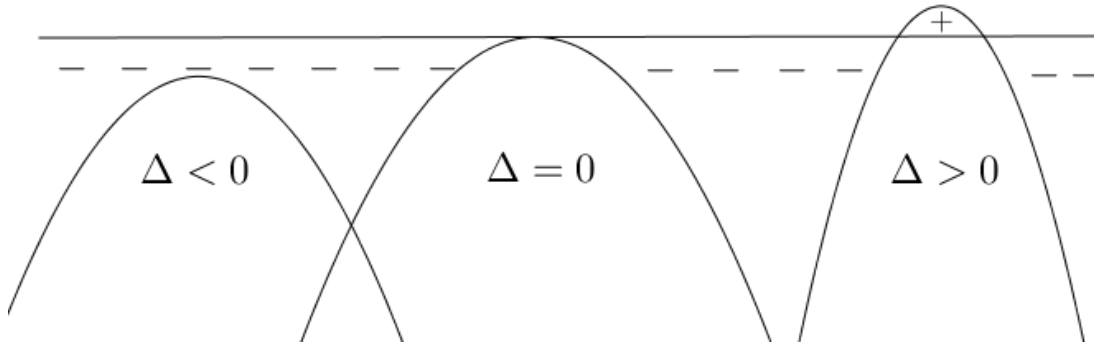


Figura 3.5.1: Parábolas côncavas para baixo

**Exemplo 3.5.5.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(n+2)!}$ . Como o termo geral apresenta fatoriais, o Teste da Razão é o mais indicado.

Temos

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+3)!}}{\frac{2^n n!}{(n+2)!}} = \lim 2 \frac{(n+1)n!}{n!} \frac{(n+2)!}{(n+3)(n+2)!} = 2 \lim \frac{n+1}{n+3} = 2 > 1,$$

logo a série diverge.

**Exemplo 3.5.6.**  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ . Uma série como essa é uma das poucas que chama pelo Teste da Integral, pois seu termo geral pode ser simplificado através de uma substituição. Antes de usar esse teste, precisamos mostrar que a função  $f(x) = x^2 e^{-x^3}$  é contínua, positiva e (eventualmente) decrescente para  $x \geq 1$ .

Bem, é claro que  $f(x)$  é contínua e positiva. Além disso, sua derivada é

$$f'(x) = x e^{-x^2} (2 - 3x^3).$$

Como estamos interessados apenas em valores positivos de  $x$ , basta analisar o sinal de  $2 - 3x^3$ , que é negativo para todo  $x > \sqrt[3]{2/3}$ , portanto  $f$  é decrescente para  $x > \sqrt[3]{2/3}$ , e o mesmo vale para  $(b_n)$ .

Agora podemos calcular a integral. Temos

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^2 e^{-x^3} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-1}^{-t^3} \left( -\frac{e^u du}{3} \right) && \text{(Fazendo } u = -x^3, du = -3x^2 dx) \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} e^u \Big|_{u=-1}^{u=-t^3} \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t^3} - e^{-1}) \\ &= \boxed{\frac{1}{3e}} \end{aligned}$$

Como a integral imprópria é convergente, a série também é.

**Exemplo 3.5.7.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \text{senn}$ . Basta ver que, como  $\lim \text{senn}$  não existe, a série diverge pelo Teste para Divergência.

**Exemplo 3.5.8.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 25}$ . Novamente, temos uma série alternada. Testando a convergência absoluta, temos que analisar a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 25}$ , que pode ser testada usando o Teste da Comparação do Limite com a série  $\sum 1/n$ , que é divergente. No entanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^2 + 25}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 25} = 1,$$

portanto ambas as séries divergem e a série deste Exemplo não converge absolutamente.

Então, usamos o Teste da Série Alternada. Temos  $b_n = \frac{n}{n^2 + 25}$ , logo é claro que  $\lim b_n = 0$ . Além disso, a derivada da função  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 25}$  é

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 25}{(x^2 + 25)^2},$$

que é negativa para  $x > 5$ , portanto  $(b_n)$  decresce para  $n > 5$ . Daí, a série é convergente.

**Exemplo 3.5.9.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ . Nesse caso, podemos ver pela Regra de L'Hospital que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2} = 0,$$

logo o Teste para Divergência não nos ajuda. O Teste da Razão também é inconclusivo, pois

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)/(n+1)^2}{\ln(n)/n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \right) && \text{(Propriedade dos Limites)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} && \text{(Pela Regra de L'Hospital)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assim, o Teste da Raiz também é inconclusivo. Como não há nenhuma série óbvia para fazermos comparação, vamos usar o Teste da Integral. Temos que mostrar que a função  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$  é contínua, positiva e (eventualmente) decrescente para  $x \geq 1$ .

É claro que  $f$  é contínua e positiva para  $x > 1$ , então só falta mostrar que é decrescente. Temos que

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}.$$

Como  $x > 1$ , o denominador será sempre positivo, portanto o sinal da derivada é o mesmo do numerador, que é negativo se  $1 - 2 \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1/2 \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$ , logo  $f$  é eventualmente decrescente.

Com isso, podemos calcular a integral:

$$\begin{aligned}
 \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{\ln x}{x} \Big|_1^t + \int_1^t \frac{dx}{x^2} && \text{(Integramos por partes)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^t \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + 1 \right) \\
 &= 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln t}{t} \right) \\
 &= 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1/t}{1} && \text{(Pela Regra de L'Hospital)} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Daí, a integral imprópria é convergente, e portanto a série também é.

**Exemplo 3.5.10.**  $\sum_{n=1}^\infty \frac{n+5}{5^n}$ . Como o termo geral contém uma potência, podemos usar tanto o Teste da Razão quanto o Teste da Raiz. Usaremos o da Razão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)+5}{5^{n+1}}}{\frac{n+5}{5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+6}{5^{n+1}}}{\frac{n+5}{5^n}} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+6}{n+5} = \frac{1}{5} < 1,$$

logo a série converge.

**Exemplo 3.5.11.**  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n + n \cos^2 n}$ . O termo  $\cos^2 n$  indica que o Teste da Comparação pode ser útil. Temos  $\cos^2 n \leq 1$  para todo  $n$ , logo  $n \cos^2 n \leq n$  para todo  $n$ . Daí,  $n + n \cos^2 n \leq 2n$ , logo

$$\frac{1}{n + n \cos^2 n} \geq \frac{1}{2n}$$

para todo  $n$ . Como a série de termo geral  $\sum 1/2n$  é divergente, concluímos pelo Teste da Comparação que a série dada é divergente.

### 3.6 Séries de Potências

Uma série de potências é uma série da forma  $\sum_{n=0}^\infty c_n x^n$ , onde os  $c_n$ 's são os coeficientes da série e  $x$  é uma variável. Mais geralmente, podemos considerar séries de potências de  $(x - a)$ , ou ao redor de  $x = a$ , cuja forma é  $\sum_{n=0}^\infty c_n (x - a)^n$ .

Para cada valor de  $x$  fixado, uma série de potências torna-se uma série numérica, que pode convergir ou não. Por exemplo, se  $c_n = 1$  para todo  $n$ , temos uma série geométrica  $\sum_{n=0}^\infty x^n$ , que converge para  $\frac{1}{1-x}$  se  $|x| < 1$  e diverge caso contrário.

Como vimos no exemplo acima, a soma da série é a função  $\frac{1}{1-x}$ , cujo domínio é  $|x| < 1$ , o conjunto no qual a série converge. Nosso objetivo inicial será estudar o conjunto no qual uma dada série de potências é



convergente. É claro que uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  sempre converge quando  $x = a$  (a soma da série é igual a zero).

### 3.6.1 Raio de convergência

**Exemplo 3.6.1.** Determine onde as séries de potências são convergentes.

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ . Vamos usar o Teste da Razão:

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = \lim (n+1)|x| = \infty > 1$$

se  $x \neq 0$ . Logo, a série converge apenas para  $x = 0$ , pela observação acima.

- (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Nesse caso,

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} \right| = \lim \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

para todo  $x$ . Logo, a série converge (absolutamente) para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ . Aqui temos

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| \frac{(x-3)^{n+1}/(n+1)}{(x-3)^n/n} \right| = \lim |x-3| \frac{n}{n+1} = |x-3|.$$

Assim, o Teste da Razão nos diz que:

- A série converge (absolutamente) se  $|x-3| < 1$ , ou seja, se  $x \in (2, 4)$ .
- A série diverge se  $|x-3| > 1$ , ou seja, se  $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$ .
- Quando  $|x-3| = 1$ , ou seja, se  $x = 2$  ou  $x = 4$ , o teste é inconclusivo.

Desse modo, precisamos verificar separadamente o que ocorre nesses pontos. Quando  $x = 2$ , a série torna-se  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ , que é convergente (consulte o Exemplo 3.2.11 ou use o Teste da Série Alternada),

e quando  $x = 4$  a série é  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , a série harmônica, que é divergente. Assim, a série converge se

$$\boxed{x \in [2, 4]}.$$

O exemplo anterior ilustra o seguinte Teorema:

**Teorema 3.6.1.** Dada uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ , uma das possibilidades a seguir sempre ocorre:

- A série converge apenas quando  $x = a$ .
- A série converge para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- Existe  $R > 0$  tal que a série converge se  $|x-a| < R$  e diverge se  $|x-a| > R$ .

O número  $R$  no Teorema acima é chamado de **raio de convergência** da série. Definimos  $R = 0$  e  $R = \infty$  nos casos (i) e (ii), respectivamente. Como vimos nos Exemplos acima, a técnica fundamental para determinar o raio de convergência de uma série de potências é o Teste da Razão, mas também podemos usar o Teste da Raiz.

O caso (iii) diz que a série converge se  $x \in (a - R, a + R)$  e diverge se  $x \in (-\infty, a - R) \cup (a + R, \infty)$ . Como nada é dito sobre o que ocorre nos pontos  $x = a - R$  e  $x = a + R$ , precisamos testar a convergência nesses valores separadamente.

O conjunto de pontos em que a série converge é chamado de **intervalo de convergência**.

**Exemplo 3.6.2.**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ . Temos

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| \frac{(-3)^{n+1} x^{n+1} / \sqrt{n+2}}{(-3)^n x^n / \sqrt{n+1}} \right| = \lim 3|x| \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = 3|x|.$$

Para que a série seja absolutamente convergente, devemos ter  $3|x| < 1$ , logo  $|x| < 1/3$ , ou seja, o raio de convergência é  $\boxed{R = 1/3}$ .

Logo, o Teste da Razão diz que a série converge absolutamente se  $x \in (-1/3, 1/3)$ . Agora testamos nos extremos: se  $x = -1/3$ , a série é  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (-1/3)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ , que é divergente (**faça as contas!**), e se  $x = 1/3$ , a série é  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (1/3)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ , que converge pelo Teste da Série Alternada. Logo, o intervalo de convergência é  $\boxed{(-1/3, 1/3]}$ .

**Exemplo 3.6.3.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$ . Nesse caso,

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{|x|^{n+1} / (n+1)^3}{|x|^n / n^3} = \lim |x| \frac{n^3}{(n+1)^3} = |x|,$$

logo devemos ter  $|x| < 1$  para que a série seja absolutamente convergente, portanto o raio de convergência é  $\boxed{R = 1}$ .

Pelo Teste da Razão, a série converge absolutamente se  $x \in (-1, 1)$ . Quando  $x = -1$ , a série é  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-1)^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n^3} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ , que é uma  $p$ -série convergente (note que  $2n - 1$  é ímpar, logo  $(-1)^{2n-1} = -1$ ). Quando  $x = 1$ , a série é  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$ , que é uma série alternada convergente. Assim, o intervalo de convergência é  $\boxed{[-1, 1]}$ .

**Exemplo 3.6.4.**  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^n}$ . Usamos o Teste da Raiz:

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{|x|}{\ln n} = 0 < 1$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Logo, o intervalo de convergência é  $\mathbb{R}$  e o raio é infinito.

**Exemplo 3.6.5.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 3^n}$ . Mais uma vez, o Teste da Raiz nos dá

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{|x|}{3 \sqrt[n]{n}} = \frac{|x|}{3},$$

logo para que a série seja absolutamente convergente devemos ter  $|x|/3 < 1$ , portanto  $|x| < 3$ . Daí, o raio de convergência é  $\boxed{R=3}$  e a série converge absolutamente se  $x \in (-3, 3)$ .

Quando  $x = -3$ , a série torna-se  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ , que converge, e quando  $x = 3$ , temos  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , que diverge. Logo, o intervalo de convergência é  $\boxed{[-3, 3)}$ .

### 3.6.2 Representação de funções por séries de potências

No início da seção vimos que  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$  se  $|x| < 1$ , ou seja, temos uma função sendo representada por uma série de potências.

Suponha que  $f(x)$  tem representação em série de potências de  $(x-a)$  dada por  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ , ou seja,

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots \quad (\Delta)$$

Vamos usar a equação  $(\Delta)$  acima para obter uma fórmula para os coeficientes  $c_n$  da série.

- Comece fazendo  $x = a$  em  $(\Delta)$ . Obtemos  $c_0 = f(a)$ .
- Derive  $(\Delta)$ . Temos  $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots$ . Fazendo  $x = a$  obtemos  $c_1 = f'(a)$ .
- Derive mais uma vez. Obtemos  $f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + \dots$ . Faça  $x = a$  para obter  $c_2 = f''(a)/2$ .
- Derivando mais uma vez e aplicando  $x = a$ , obtemos  $c_3 = f'''(a)/6$ .
- Em geral, ao derivarmos  $(\Delta)$   $n$  vezes, obtemos  $f^{(n)}(x) = n!c_n + (\text{potências de } (x-a))$ . Logo, fazendo

$$x = a \text{ resta apenas } f^{(n)}(a) = n!c_n, \text{ portanto } \boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}}.$$

Acabamos de demonstrar o seguinte Teorema:

**Teorema 3.6.2.** Se  $f$  tem representação em série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ , então  $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ .

A série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$  é chamada de **série de Taylor** de  $f$  em torno de  $x = a$ . Quando  $a = 0$ , obtemos a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ , que é chamada de **série de Maclaurin** de  $f$ . Não confunda  $f^{(n)}$  (uma derivada) com  $f^n$  (uma potência). Adotaremos a convenção  $f^{(0)}(x) = f(x)$ .

**Exemplo 3.6.6.** Obtenha a série de Maclaurin da função  $f(x) = e^x$ .

**Solução.** Temos  $f^{(n)}(x) = e^x$  para todo  $n$ , logo  $f^{(n)}(0) = 1$  para todo  $n$ , e a série é  $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$ . Já mostramos que essa série converge para todo  $x \in \mathbb{R}$ , logo

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Fazendo  $x = 1$ , obtemos a fórmula

$$\boxed{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}.$$

□

**Exemplo 3.6.7.** Obtenha a série de Maclaurin da função  $f(x) = e^{-x^2}$ .

**Solução.** Usamos a conta feita acima, trocando  $x$  por  $-x^2$ . Obtemos

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}}.$$

□

**Exemplo 3.6.8.** Obtenha a série de Maclaurin da função  $f(x) = \text{sen}(x)$ .

**Solução.** Note que  $f^{(0)}(x) = \text{sen}(x)$ ,  $f^{(1)}(x) = \cos(x)$ ,  $f^{(2)}(x) = -\text{sen}(x)$ ,  $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$  e  $f^{(4)}(x) = \text{sen}(x)$ , logo o padrão se repetirá! Teremos  $f^{(0)} = 0$ ,  $f^{(1)}(0) = 1$ ,  $f^{(2)}(0) = 0$ ,  $f^{(3)}(0) = -1$ ,  $f^{(4)}(0) = 0$ ,  $f^{(5)}(0) = 1$ ,  $f^{(6)}(0) = 0$ ,  $f^{(7)}(0) = -1$ , sempre repetindo o ciclo  $(0, 1, 0, -1)$ . Assim, a série é

$$\text{sen}(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + 0 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Assim, podemos escrever

$$\boxed{\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

□

**Exemplo 3.6.9.** Obtenha a série de Maclaurin da função  $f(x) = x \text{sen}(x)$ .

**Solução.** Novamente aproveitamos as contas já feitas. Temos

$$f(x) = x \text{sen}(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!}}$$

□

**Exemplo 3.6.10.** Represente a função  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  como série de potências.

**Solução.** Usamos a série geométrica:  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  se  $|x| < 1$ . Assim,

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-(-x/2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-x/2)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}}.$$

A série geométrica converge se o módulo de sua razão, que é  $-x/2$ , for menor que 1:

$$|-x/2| < 1 \Rightarrow |x| < 2,$$

portanto o raio de convergência é  $R = 2$  e o intervalo de convergência é  $(-2, 2)$ . Esse é o conjunto de pontos em que a igualdade acima é verdadeira (já sabemos que uma série geométrica não converge nos extremos de seu intervalo de convergência).

□

**Exemplo 3.6.11.** Represente a função  $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$  como série de potências.

**Solução.** Escrevemos  $f(x) = x^3 \frac{1}{x+2}$  e usamos a série do item anterior:

$$f(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+3}}{2^{n+1}}}$$

□

**Exemplo 3.6.12.** Represente a função  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  como série de potências.

**Solução.** Novamente fazemos

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}}$$

□

### 3.6.3 Derivação e integração de séries de potências

**Teorema 3.6.3.** Se  $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ , com raio de convergência  $R$ , então

$$(i) \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

$$(ii) \quad \int f(x) dx = C + c_0(x-a) + c_1 \frac{(x-a)^2}{2} + c_2 \frac{(x-a)^3}{3} + \dots = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n (x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Além disso, as duas séries de potência acima também têm seus raios de convergência iguais a  $R$

Note que o Teorema acima garante o mesmo raio, mas não o mesmo intervalo de convergência!

Nos exemplos abaixo, vamos obter uma representação em série de potências para a função dada e calcular o raio e o intervalo de convergência.

**Exemplo 3.6.13.**  $f(x) = \arctan(x)$ .

**Solução.** Já vimos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Como  $(\arctan(x))' = 1/(1+x^2)$ , por integração obtemos

$$\arctan(x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Para determinar a constante, faça  $x = 0$  para obter

$$0 = \arctan(0) = C + 0 \Rightarrow C = 0.$$

Daí, encontramos

$$\boxed{\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}}$$

Como a série para  $1/(1+x^2)$  tinha raio de convergência  $R = 1$ , então esse também é o raio de convergência para  $\arctan(x)$ , que portanto converge se  $x \in (-1, 1)$ . Precisamos testar os extremos do intervalo:

- $\boxed{x = -1}$  A série é  $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ , que é convergente (por que?).
- $\boxed{x = 1}$  A série é  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ , que é convergente.

Assim, o intervalo de convergência é  $[-1, 1]$ , apesar de o da série original ser  $(-1, 1)$ .

□

**Exemplo 3.6.14.**  $f(x) = \cos(x)$

**Solução.** Já vimos, no Exemplo 3.6.8, que

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Por derivação, vamos obter

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}$$

Para determinar o raio de convergência dessas séries, usamos o Teste da Razão:

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \lim |x|^2 \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = |x|^2 \lim \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Logo, as duas séries convergem para todo  $x \in \mathbb{R}$  e possuem raio de convergência infinito.

□

**Exemplo 3.6.15.**  $f(x) = \ln(1-x)$ .

**Solução.** Sabemos que  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ . Por integração, obtemos

$$-\ln(1-x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Para determinar a constante, faça  $x = 0$  para obter  $C = 0$ . Daí, temos que

$$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

com raio de convergência  $R = 1$ , o mesmo da série original. Temos garantia de convergência para  $x \in (-1, 1)$ . Nos extremos, temos:

- $\boxed{x = -1}$  A série é  $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ , que é convergente (**por que?**).
- $\boxed{x = 1}$  A série é  $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ , que é divergente (**por que?**).

Assim, o intervalo de convergência é  $\boxed{[-1, 1)}$ .

□

**Exemplo 3.6.16.**  $f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2}$ .

**Solução.** Vamos escrever  $f(x) = x^2 \frac{1}{(1-2x)^2}$  e analisar  $\frac{1}{(1-2x)^2}$ . Se conseguirmos representar  $\frac{1}{(1-x)^2}$  como série de potências, podemos obter a representação de  $\frac{1}{(1-2x)^2}$  trocando  $x$  por  $2x$ .

Observe que  $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ . Logo,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Daí, temos

$$\frac{1}{(1-2x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(2x)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}x^{n-1}.$$

Finalmente,

$$\frac{x^2}{(1-2x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}x^{n+1}$$

Note que também poderíamos escrever

$$\frac{x^2}{(1-2x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)2^n x^{n+2}$$

Como  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  converge se  $|x| < 1$ , sua derivada  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$  herda o raio de convergência  $R = 1$ . Assim,  $\sum_{n=1}^{\infty} n(2x)^{n-1}$  converge se  $|2x| < 1 \Rightarrow |x| < 1/2$ . O mesmo vale para  $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}x^{n+1}$ . Falta testar os extremos:

- $x = -1/2$  A série é  $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}(-1/2)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{4}$ , que diverge (**Por que?**).
- $x = 1/2$  A série é  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4}$ , que também diverge (**Por que?**).

Assim, o raio de convergência é  $R = 1/2$  e o intervalo de convergência é  $\boxed{(-1/2, 1/2)}$ .

□

### 3.6.4 Série Binomial

Sejam  $k$  e  $n$  inteiros não-negativos. Chamamos de *número binomial* de  $k$  sobre  $n$ , que denotamos por  $\binom{k}{n}$  o número de maneiras de se colocar  $k$  objetos em  $n$  lugares, sem levar em conta a ordem, ou seja, o número de combinações sem repetição de  $k$  objetos em  $n$  lugares. Do Ensino Médio, sabemos que

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{(k-n)!n!}.$$

Equivalentemente, podemos escrever

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1) \cdots (k-(n-1))(k-n)!}{(k-n)!n!} = \frac{k(k-1) \cdots (k-(n-1))}{n!}.$$

**Exemplo 3.6.17.** Temos  $\binom{k}{0} = \frac{k!}{(k-0)!0!} = 1$ ,  $\binom{k}{1} = \frac{k!}{(k-1)!1!} = \frac{k(k-1)!}{(k-1)!} = k$ ,  $\binom{k}{k} = \frac{k!}{(k-k)!k!} = 1$ ,  $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ .

Uma das maiores aplicações dos números binomiais ocorre no Teorema Binomial. Por exemplo,

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Os coeficientes dessa expansão são exatamente  $\binom{2}{0} = 1$ ,  $\binom{2}{1} = 2$  e  $\binom{2}{2} = 1$ . Analogamente,

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3,$$

cujos coeficientes são  $\binom{3}{0} = 1$ ,  $\binom{3}{1} = 3$ ,  $\binom{3}{2} = 3$  e  $\binom{k}{n} = 1$ . Em geral, temos o

**Teorema 3.6.4** (Teorema Binomial). *Seja  $k$  um inteiro não negativo. Então*

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n.$$

A série binomial aparece quando generalizamos o Teorema Binomial para qualquer expoente racional, incluindo negativos e frações. Para isso, seja  $k \in \mathbb{Q}$ . Vamos determinar a série de Maclaurin da função  $f(x) = (1+x)^k$ . Temos

$n$	$f^{(n)}x$	$f^{(n)}(0)$
0	$(1+x)^k$	1
1	$k(1+x)^{k-1}$	$k$
2	$k(k-1)(1+x)^{k-2}$	$k(k-1)$
3	$k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3}$	$k(k-1)(k-2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$k(k-1)(k-2) \cdots (k-(n-1))(1+x)^{k-n}$	$k(k-1)(k-2) \cdots (k-(n-1))$

Assim, a série de Maclaurin de  $f(x)$  é

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2) \cdots (k-(n-1))}{n!} x^n.$$

Note que os coeficientes da série possuem a mesma fórmula dos números binomiais, a diferença é que agora  $k$  não precisa ser um inteiro não-negativo. Assim, vamos denotar esses coeficientes também como números binomiais e escrever a série binomial

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n. \quad (3.6.1)$$

**Exemplo 3.6.18.** Continuamos calculando os binomiais como antes. Por exemplo,

$$\binom{-2}{3} = \frac{(-2)(-3)(-4)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = -4$$

e

$$\binom{1/2}{2} = \frac{(1/2)(1/2-1)}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{8}.$$



Vamos determinar o raio de convergência desta série por meio do Teste da Razão, como de costume. Temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|k(k-1)(k-2) \cdots (k-(n-1))(k-n)|}{(n+1)!} |x|^{n+1}}{\frac{|k(k-1)(k-2) \cdots (k-(n-1))|}{n!} |x|^n} \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{|k(k-1)(k-2) \cdots (k-(n-1))(k-n)|}{|k(k-1)(k-2) \cdots (k-(n-1))|} \right) \left( \frac{n!}{(n+1)!} \right) \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|k-n|}{n+1} \\ &= |x|, \end{aligned}$$

pois como  $n \rightarrow \infty$ ,  $k-n < 0$  para todo  $n > k$ , logo  $|k-n| = n-k$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-k}{n+1} = 1$ . Daí, a série converge absolutamente se  $|x| < 1$  e diverge se  $|x| > 1$ , ou seja, o raio de convergência de toda série binomial é igual a 1.

**Exemplo 3.6.19.** Obtenha a série de Maclaurin de  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ .

**Solução.** Podemos determinar essa série a partir da série geométrica por derivação e substituição, semelhante ao que fizemos no Exemplo 3.6.16. Desta vez, vamos escrever a função como  $f(x) = (1+x)^{-2}$ , logo podemos usar a série binomial com  $k = -2$ . Assim,

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} x^n.$$

Para finalizar, precisamos detectar o padrão nos coeficientes binomiais para substituí-los na fórmula acima. Temos:

Número Binomial	Resultado
$\binom{-2}{0}$	1
$\binom{-2}{1}$	-2
$\binom{-2}{2}$	$\frac{(-2)(-3)}{2 \cdot 1} = 3$
$\binom{-2}{3}$	$\frac{(-2)(-3)(-4)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = -4$
$\binom{-2}{4}$	$\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$
$\vdots$	$\vdots$
$\binom{-2}{n}$	$(-1)^n (n+1)$

Com isso, concluímos que

$$\boxed{\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n.}$$

□

**Exemplo 3.6.20.** Determine a série de Maclaurin de  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^4}$ .

**Solução.** Vamos determinar a série de Maclaurin de  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^4} = (1+x)^{-4}$ , o que pode ser feito pela série binomial com  $k = -4$ , e depois substituir  $x$  por  $-x$ . Assim,

$$\frac{1}{(1+x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-4}{n} x^n.$$

Para os coeficientes, temos:

Número Binomial	Resultado
$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$	1
$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$	-4
$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\frac{(-4)(-5)}{2 \cdot 1} = 10$
$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\frac{(-4)(-5)(-6)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = -20$
$\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\frac{(-4)(-5)(-6)(-7)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$
$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\frac{(-4)(-5)(-6)(-7)(-8)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$
$\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\frac{(-4)(-5)(-6)(-7)(-8)(-9)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$
$\vdots$	$\vdots$
$\begin{pmatrix} -4 \\ n \end{pmatrix}$	$\frac{(-1)^n (n+1)(n+2)(n+3)}{6}$

Daí,

$$\frac{1}{(1+x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n,$$

e portanto

$$\frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(n+2)(n+3)}{6} (-x)^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n}.$$

□

### 3.7 Exercícios

**Exercício 3.1.** Determine se as seguintes sequências convergem ou divergem. Quando convergirem, calcule o limite.

- |  |  |  |
|--|--|--|
| (a) $a_n = \frac{3+5n^2}{n+n^2}.$        | (d) $a_n = n \sin(1/n).$               | (g) $a_n = \frac{n!}{2^n}.$                    |
| (b) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}.$ | (e) $a_n = \ln(n+1) - \ln(n).$         | (h) $a_n = \frac{(-3)^n}{n!}.$                 |
| (c) $a_n = \frac{\ln(n)}{\ln(2n)}.$      | (f) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}.$ | (i) $a_n = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots)$ |

**Exercício 3.2.** Calcule o limite da sequência  $a_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ , onde  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 3.3.** Seja  $(a_n)$  uma sequência convergente.

- (a) Mostre que  $\lim a_{n+1} = \lim a_n$ .
- (b) Uma sequência é definida recursivamente por  $a_1 = 1$  e  $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$  para  $n \geq 1$ . Assumindo que  $(a_n)$  é convergente, calcule seu limite.

**Exercício 3.4.** Determine se a sequência é crescente ou decrescente e se é limitada.

(a)  $a_n = \frac{1}{5^n}.$

(c)  $a_n = \frac{2n-3}{3n+4}.$

(b)  $a_n = \frac{1}{2n+3}.$

(d)  $a_n = ne^{-n}.$

**Exercício 3.5.** (a) Fibonacci colocou o seguinte problema: suponha que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com dois meses de idade. Se começarmos com um par recém nascido, quantos coelhos teremos no  $n$ -ésimo mês? Mostre que a resposta é  $(f_n)$ , a sequência de Fibonacci.

(b) Seja  $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$  e mostre que  $a_{n-1} = 1 + \frac{1}{a_{n-2}}$ . Assumindo que  $(a_n)$  é convergente, calcule o seu limite. O valor desse limite é conhecido como “razão áurea” e tem importância em várias áreas do conhecimento humano como a Biologia, a Arquitetura e a Pintura.

**Exercício 3.6.** Mostre que a sequência  $(a_n)$  dada pela fórmula de recorrência  $a_1 = \sqrt{2}$  e  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$  é convergente e calcule o seu limite. (**Dica:** Pesquise sobre indução matemática.)

**Exercício 3.7.** Determine se as seguintes séries convergem. Em caso positivo, calcule suas somas.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$

(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4}.$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right).$

(f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt[n]{e}}.$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}.$

(g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10-n}{n}\right)^n.$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{4^{3n+2}}.$

(h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \right].$