Exercícios (Cálculo 3)

Questão 1: Calcule a area da região D limitada pela curva de parametrização $r(t) = (\mathrm{a}\cos^3(t)\,, b\,\mathrm{sen}^3(t))$, $-\pi \leq t \leq \pi$, onde $a > 0$ (essa curva é chamada astroide).

Resposta: $A = \frac{3a^2\pi}{8}$

Questão 2: Considere o campo vetorial $F(x,y) = \left(-\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}, \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$ em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e sejam γ e δ, respectivamente, as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $(x-1)^2 + y^2 = 4$, ambas percorridas no sentido anti-horário.

(a) Calcule $\int_\gamma F \cdot dr$.

(b) Sendo $F = (P, Q)$, mostre que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

(c) Use o Teorema de Green para calcular $\int_\delta F \cdot dr$.

Questão 3: Calule a massa e o centro de massa de um arame fino no formato de um arco de circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, com $x \geq 0$ e $y \geq 0$, sabendo que a função densidade é $\rho(x,y) = x + y$.

Questão 4: Se uma curva tem equação $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$, em coordenadas polares, mostre que seu comprimento pode ser calculado pela fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Considere a curva de equação polar $r = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$. Calcule seu comprimento com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$. Parametrize essa curva (ou seja, obtenha $r(t) = \big(x(t), y(t)\big)$). Que curva é essa? Verifique que seu cálculo para o comprimento está certo.

Dica: Para parametrizar a curva, lembre-se que a relação entre as coordenadas retangulares e polares é dada por $x = r\,cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Questão 5: Considere o campo vetorial $F(x, y, z) = (-z^2 \operatorname{sen} x, 2, 2z \cos x)$ e a curva C de parametrização $r(t) = (e^t + e^{-t}, e^t - e^{-t}, 2t)$, $t \in [0, \ln 2]$.

(a) Calcule o comprimento da curva.

(b) Mostre que o campo é conservativo.

(c) Calcule $\int_C F \cdot dr$