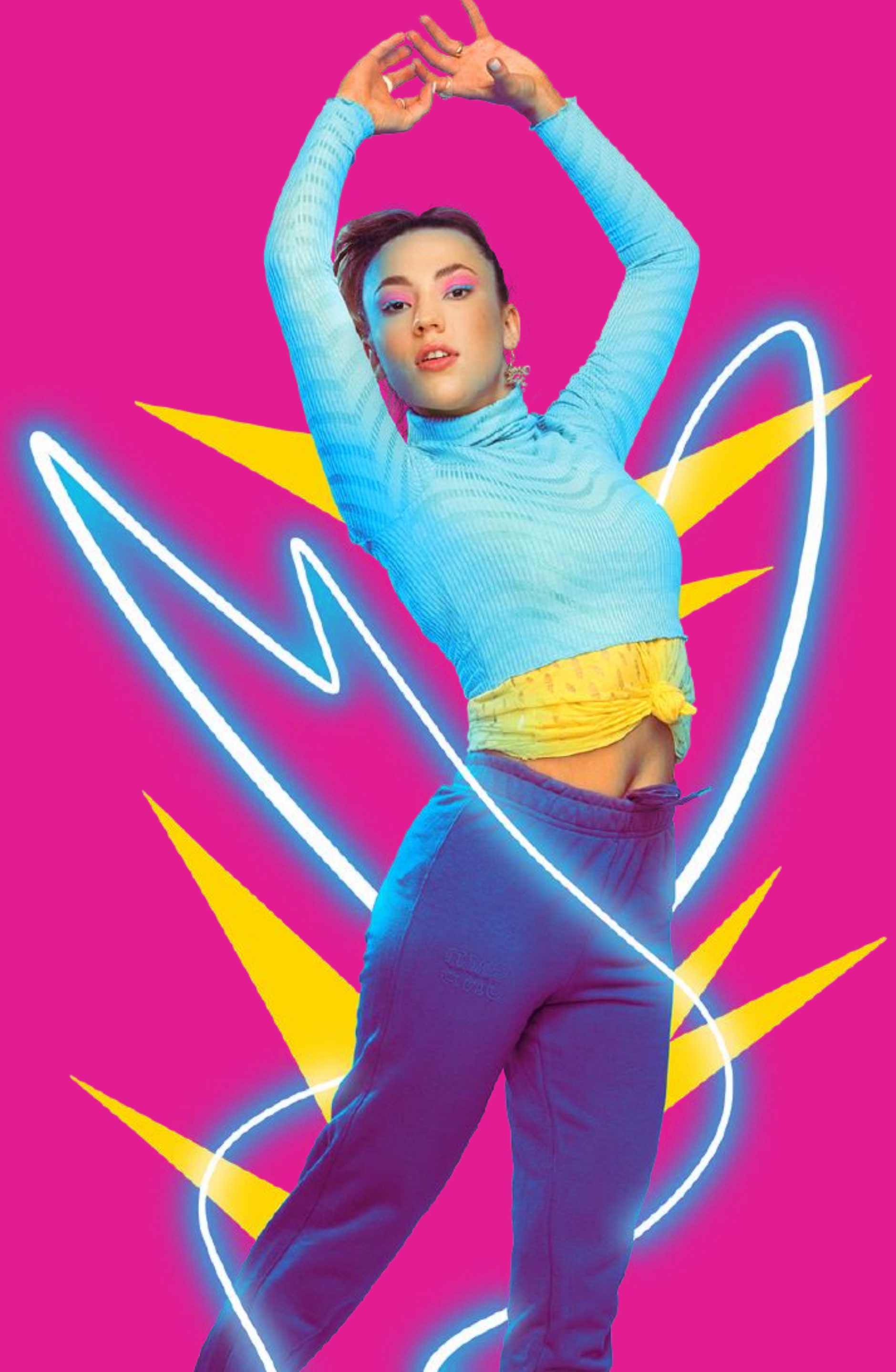

UNIVERSIDAD FIDÉLITAS

CÁLCULO 1

Lcda. Fabiola Díaz Benavides

Cálculo de límites en un punto

PROPIEDADES DE LÍMITES

Sean f y g funciones definidas en un intervalo abierto que contiene a "a", las cuales puede que no estén definidas en $x = a$ y sea c una constante real $(c \in \mathbb{R})$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe, entonces:

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$
2. $\lim\limits_{x \to a}[c \cdot f(x) \pm g(x)] = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}; \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$
5. $\lim\limits_{x \to a}[f(x)]^n = \lim\limits_{x \to a} f(x)^n$ con $n \in \mathbb{N}$
6. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$; si n es par se supone $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$
7. Si $f(x)$ es una función real de variable real bien definida en $x = a$; es decir, a pertenece al dominio real de f, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

SUSTITUCIÓN DIRECTA

Calcule, si existe, el siguiente límite.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+1}{x+2}$$

Calcule, si existe, el siguiente límite.

$$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{5+x} - \cos(\pi x)}{x^2 - 3}$$

Calcule, si existe, el siguiente límite.

$$\lim_{x \to 1} \left(4e^{x} - \ln x\right)$$

CÁLCULO DE LÍMITES UNILATERALES

Considere la siguiente función definida a trozos.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x > -3 \\ 4 & \text{si} \quad x = -3 \\ 2x+16 & \text{si} \quad x < -3 \end{cases}$$

De acuerdo con los datos de la función anterior, calcule si existe $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$. Justifique.

En este ejercicio no se utilizó $f(-3) = 4$ ya que el límite se evalúa alrededor de 3, no puntualmente en 3.

Considere la siguiente función definida a trozos.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{22}{5} & \text{si} \quad x > 7 \\ \dfrac{2x+8}{5} & \text{si} \quad 7 > x \geq 3 \\ \tan(x-3) & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$$

De acuerdo con los datos de la función anterior, hallar si existe $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$ y $\lim\limits_{x \to 7} g(x)$. Justifique cada afirmación.

Considere la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3kx}{x+5} & \text{si} \quad x < 2 \\ 3 + 5x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Hallar el valor del parámetro k para que $\lim_{x \to 2} f(x)$ exista.

CÁLCULO DE LÍMITES POR SIMPLIFICACIÓN ALGEBRAICA

¿CUÁNDO LO UTILIZAMOS?

Calcule (si existe) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 + 4x - 3}{8x^3 - 6x^2 + x}$

Calcule (si existe) $\lim_{x \to 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

Calcule (si existe) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{3x - x^3 - 2}{x^4 - x^3 - x + 1}$

Calcule (si existe) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

Calcule (si existe) $\lim_{x \to 3} \frac{2x-6}{2-|1-x|}$

Calcule (si existe) $\lim_{x \to -1^+} \dfrac{|x+1|}{2x^2 - |3x+1|}$

Calcule (si existe) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{|x - 2|}$

LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS INDETERMINADOS

LÍMITES ELEMENTALES

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{x} = k$, con k constante

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(kx)}{x} = k$, con k constante

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(kx)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(kx)-1}{x} = 0$, con k constante

Calcule el límite que se le presenta. $\lim_{x \to \pi} \dfrac{\sec x}{\operatorname{sen}^2 x + 1}$

IDENTIDADES PITAGÓRICAS

Identidad	Despeje
$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$	$1 - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha$ $1 - \cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha$
$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$	$\tan^2\alpha = \sec^2\alpha - 1$ $\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$
$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$	$\cot^2\alpha = \csc^2\alpha - 1$ $\csc^2\alpha - \cot^2\alpha = 1$

OTRAS IDENTIDADES

a) $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

b $\csc\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

c) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

d) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

e) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$

f) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

IDENTIDADES DE SUMA Y RESTA

a) $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen}\ a \cdot \cos\ b \pm \operatorname{sen}\ b \cdot \cos\ a$

b) $\cos(a \pm b) = \cos\ a \cdot \cos\ b \mp \operatorname{sen}\ a \cdot \operatorname{sen}\ b$

c) $\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan\ a\ \pm \tan\ b}{1 \mp \tan\ a \cdot \tan\ b}$

Calcule el límite que se le presenta.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x}$$

Calcule el límite que se le presenta.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{x\left(\cos x + 1\right)}$$

Calcule el límite que se le presenta.

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

Calcule el límite que se le presenta.

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \sec^2 x}{\tan x}$$

Calcule el límite que se le presenta.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x+\pi}{2}\right)}{x}$$

Calcule el límite que se le presenta.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} 3x}{\tan 2x}$$

CAMBIO DE VARIABLE

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) \underset{\substack{u = g(x) \\ x \to a \Rightarrow u \to g(a)}}{=} \lim_{u \to g(a)} f(u)$$

Es muy común emplear esta técnica en la simplificación de límites que presentan radicales con subradicales repetidos.

Calcule el siguiente límite por medio del método de sustitución.

$$\lim_{x\to 0} \frac{8-\sqrt{64+x}}{\sqrt[3]{64+x}-4}$$

$u^6 = 64 + x \longrightarrow 6$ es el mínimo común múltiplo de 2 y 3 $(\text{m.c.m}(2,3) = 6)$

Calcule el siguiente límite por medio del método de sustitución

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x-1} + 2\sqrt[4]{x-1} - 3}$$

Calcule el siguiente límite por medio del método de sustitución

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{-1+x}-1}{\sqrt[4]{x-1}-1}$$

GRACIAS

Correo

fdiaz70734@ufide.ac.cr