CCOMPUTACION-10-NOVIEMBRE-BINOMIAL

sábado, 13 de noviembre de 2021 12:13

1 Proceso de Bernoulli

Existen varios experimentos que tienen dos posibles resultados tales como

- El lanzamiento de una moneda de 2 caras ✓
- El diagnóstico de un médico en relación a una enfermedad de un paciente ✓
- Un artículo manufacturado de una fábrica es seleccionado y revisado, este puede ser clasificado como defectuoso y no defectuoso. ✓
- Una fruta tomada de una caja de frutas puede estar malogrado o no malogrado

A los experimentos en que solo se observan dos posibles resultados son denominados de experimento (ensayo) de Bernoulli. Dependiendo del contexto del experimento aleatorio un resultado del experimento de Bernoulli puede ser indicado como éxito y el otro fracaso. Así se define la variable aleatoria X.

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si el resultado del experimento es un éxito} \\ 0, & \text{si el resultado del experimento es un fracaso} \end{cases}$$

Nótese que la probabilidad de observar un éxito es p, la probabilidad de observar un fracaso es $1-p$,

$$P(X=1) = p(1) = p, \quad \text{probabilidad de éxito}$$
$$P(X=0) = p(0) = 1-p, \quad \text{probabilidad de fracaso}$$

A la variable aleatoria en que asume dos resultados $X = 0, 1$ con probabilidad de éxito igual p y fracaso se le denomina variable aleatoria de Bernoulli. El proceso de Bernoulli consiste de:

1. una sucesión o repetición de experimentos de Bernoulli. Esto implica que en cada ensayo (repetición) se tiene solo dos resultados que se son éxito y fracaso. Nótese que

$$1 \equiv \text{ éxito}$$
$$0 \equiv \text{ fracaso}$$

2. La probabilidad de éxito en cada ensayo es p y de fracaso es $1-p$

$$P(X_i = 1) = p, \quad \text{probabilidad de éxito}$$
$$P(X_i = 0) = 1-p, \quad \text{probabilidad de fracaso}$$

   En cada ensayo o repetición es constante no cambia.

3. Los ensayos o repeticiones deben ser independientes.

2 Distribución Binomial

$\Omega = \{CCCSSSCCCSSS, \ldots \}$

Pregunta: Suponga que una moneda honesta es lanzada 12 veces. Calcular la probabilidad de obtener 4 caras. $|\Omega| = 2^{12}$

Posible Solución: La forma usual de responder es describir todos los resultados posibles y contar en cuantos resultados se observa 4 caras. Se tener en cuenta que $|\Omega| = 2^{12}$ resultados posibles. El cálculo

4 caras. $|\Omega| = 2$

Posible Solución: La forma usual de responder es describir todos los resultados posibles y contar en cuantos resultados se observa 4 caras. Se tener en cuenta que $|\Omega| = 2^{12}$ resultados posibles. El cálculo de la probabilidad pedida debe de tomar un tiempo para poder obtenerlo.

Una manera mas rápida: Para calcular la probabilidad de obtener 4 caras en los 12 lanzamientos de la moneda se usa la noción del proceso de Bernoulli y la distribución binomial.

Nótese que :

- en cada lanzamiento el éxito es obtener una cara y el fracaso es salir sello
- como la moneda es honesta entonces la probabilidad de éxito es $p = 1/2$.

Definición 2.1 (Distribución Binomial)**.** Dado n experimentos de Bernoulli, el número de éxitos, X, en los n ensayos (repeticiones) se denomina variable aleatoria binomial.
La distribución de probabilidad de la v.a discreta X tiene una distribución binomial con parametros n y p dada por

$$\mathbf{P}(X = x) = p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

en que $0 \leqslant p \leqslant 1$.

El número mínimo y máximo éxitos es $X = 0$ y $X = n$ respectivamente. Nótese que

$$\binom{n}{x} = C_x^n = C_{n,x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

representa el coeficiente binomial.
El valor esperado o media de la v.a X es

$$\mu = \mathbf{E}[X] = np,$$

y la varianza es dada por

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] = np(1-p)$$

Observación: Algunos textos de probabilidad utilizan

$$q = 1 - p$$

para indicar la probabilidad de fracaso.

Notación: Si X tiene una distribución de probabilidad binomial con parametros n y p se puede escribir como

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

Ejemplo 2.1.
La probabilidad de que cierta clase de componente sobreviva a una prueba de choque es $3/4$.

a) Encuentre la probabilidad de que sobrevivan exactamente 2 de los siguientes 4 componentes que se prueben

b) Cual es el número esperado de componentes que sobrevivirán al choque

Solución:

$X \sim Bin(4, 0.75)$?

éxito: probabilidad que sobrevivan

$$\mathbf{P}(X = x) = C_x^4 p^x (1-p)^{4-x}, x = 0, 1, 2, 3, 4$$

a) $\mathbf{P}(X = 2)$

$$p(2) = C_2^4 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{4-2}$$

éxito: probabilidad que sobrevivan

- $p = 3/4 = 0.75$
- $n = 4$
- sobreviven exactamente $x = 2$

$$p(2) = C_2^4 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{4-2}$$
$$p(2) = 0.2109$$

b) Número esperado

$$\mathbf{E}[X] = np = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$$

Se espera que 3 componentes sobrevivirán al choque.

Ejemplo 2.2.
Una cadena grande de tiendas compra cierto tipo de dispositivo electrónico de un fabricante. El fabricante indica que la tasa de defectuosos del dispositivo es 3 %.

a) El inspector de la cadena elige 20 artículos al azar de un cargamento. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos 1 artículo defectuoso entre estos 20? ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente 5 artículos defectuosos?

b) Suponga que el comprador recibe 10 cargamentos en un mes y que el inspector aleatoriamente prueba 20 dispositivos por cargamento. ¿Cuál es la probabilidad de que haya 3 cargamentos que contengan al menos un dispositivo defectuoso?

Solución:

a) ✍
éxito: encontrar artículos defectuosos

- $p = 3\,\% = 0.03$
- $n = 20$
- por lo menos 1 artículo defectuoso $x \geqslant 1$
- exactamente 5 artículos defectuosos $x = 5$

$$X \sim Bin(20, 0.03)$$

$$\mathbf{P}(X = x) = C_x^{20} p^x (1-p)^{20-x}, x = 0, 1, \ldots, 20$$

$$\mathbf{P}(X \geqslant 1) \to p(1) + p(2) + \ldots + p(20)$$

$$\mathbf{P}(X \geqslant 1) = \boxed{1 - \mathbf{P}(X < 1)}$$
$$= 1 - p(0) = 1 - C_0^{20}\,(0.03)^0\,(1-0.03)^{20-0}$$
$$= 1 - 0.97^{20} = 0.4562$$

$$\mathbf{P}(X = 5) = C_5^{20}\,(0.03)^5\,(1-0.03)^{20-5} = 0.00024$$

b) ✍
éxito: encontrar al menos un artículo defectuoso, esta probabilidad se calculó en el item anterior $\mathbf{P}(X \geqslant 1)$

- $p = \mathbf{P}(X \geqslant 1) = 0.4562$
- $n = 10$ cargamentos
- 3 cargamentos contengan al menos un dispositivo defectuoso $X = 3$

$$X \sim Bin(10, 0.4562)$$

$$\mathbf{P}(X = x) = C_x^{10} p^x (1-p)^{10-x}, x = 0, 1, \ldots, 10$$

$$\mathbf{P}(X = 3) = C_3^{10}\, 0.4562^3 (1 - 0.4562)^7 = 0.16022$$