3 Variable Aleatoria Continua

Definición 3.1 (Variable Aleatoria Continua)
Una v.a. X se dice que es **continua** si el conjunto de posibles valores de X consiste en un **intervalo** de recta de los números reales $\mathbb{R}$, esto es, un conjunto infinito (no numerable) de números reales. Esto es equivalente a decir que X es una v.a **contínua** si $\mathbf{P}(X = x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. También, X es una v.a continua si y solo si $\mathbf{F}_X$ es continua en $\mathbb{R}$.

Frecuentemente se estudia un tipo de variable continua que se presenta en muchos casos y aplicaciones. Esta tipo de v.a continua es denominada v.a **absolutamente continua**.

Definición 3.2 (Variable Absolutamente Continua)
Sea X una v.a continua, X es una v.a **absolutamente continua** si existe una función, $f_X = f$, no negativa definida en $\mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{F}_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du,$$

en que f_X es llamada **función de densidad** de X.

Notas:

a) $f_X(x)$ es denominada **función de densidad de probabilidad (fdp)**.

b) Siempre que no haya confusión la fdp $f_X(x)$ de X será denota por $f(x)$.

c) Una X una v.a que no es discreta ni continua es denominada v.a mixta.

Ejemplo 3.1
Un compuesto químico es seleccionado aleatoriamente y se desea determinar su pH. Sea X que indica o pH del compuesto químico, entonces, X es una v.a. continua porque cualquier valor de pH puede estar entre 0 e 14. Por ejemplo, el pH de una cerveza esta alrededor de $4 \leq X \leq 5$.

Ejemplo 3.2
Sea X la v.a definida como el tiempo que pasa (en horas), para que un radar detecte entre conductores sucesivos a los que exceden los límites de velocidad. La variable aleatoria X asume valores x tal que $x \geq 0$, de esta X es una v.a continua.

Observación: Generalmente todo lo que esta relacionado con mediciones y proporción son variables aleatorias continuas. Por ejemplo: la longitud de una hoja, el peso de una persona, tiempo de vida útil de aparato electrónico, la proporción de personas que consumen una cierta bebida ...

Definición 3.3 (Función de densidad de probabilidad)
Sea X una v.a. continua. La distribución de probabilidad o **función de densidad de probabilidad (fdp)** de X es una función $f(x)$ tal que, para cualquier dos números a e b $(a \leq b)$ se tiene que

$$\mathbf{P}(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Así, para que a función $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad, $f(x)$ debe satisfacer dos condiciones a seguir

Así, para que a función $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad, $f(x)$ debe satisfacer dos condiciones a seguir

I) $f(x) \geq 0$ para todo número real x

II) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

El gráfico de la función densidad $f(x)$ es denominada curva de densidad y esta encima del eje de las abscisas. Nótese que el área abajo de la curva de $f(x)$ por definición es igual a 1.

Observación: Se X es una v.a. contínua entonces la probabilidad de X para cualquier valor en los números reales es igual a cero,

$$\mathbf{P}(X = x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La probabilidad de una v.a. continua X asuma un determinado valor en algún intervalo, por ejemplo, $[a, b]$ es dada por la área sobre la curva comprendida entre $x = a$ e $x = b$ como se puede observar en la figura de abajo

Si X es una v.a. continua entonces

$$\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \mathbf{P}(a \leq X < b) = \mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(a < X < b)$$

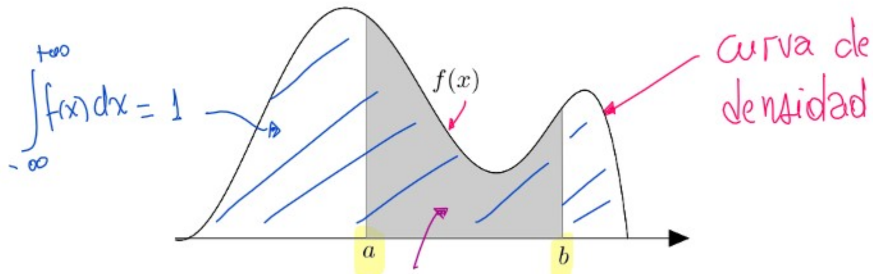


Figura 3.1: $\mathrm{P}(a \leq x \leq b)$ = área abajo da curva

Ejemplo 3.3

El tiempo de vida útil (**en años**) de un equipo electrónico de un determinado tipo puede ser expresado por una v.a. continua X, cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 0.5e^{-0.5x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

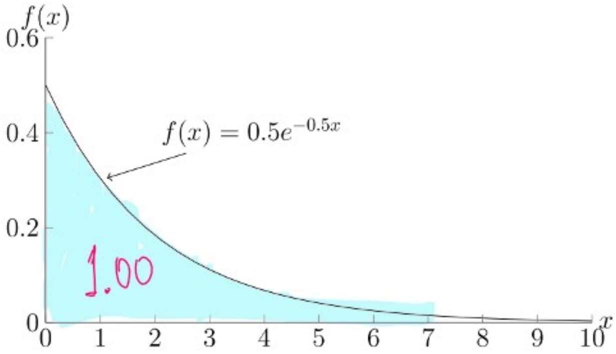
Determine la probabilidad de que el equipamiento dure:

a) más de 3 años

b) entre 6 y 18 meses

Solución:

A fin de calcular las probabilidades que fueron pedidos en los items **(a)** y **(b)** se debe considerar el hecho que X es una v.a. contínua y así X asume valores en un **intervalo** de la reta de los números reales. La Figura de abajo muestra el gráfico de la función densidad de probabilidad (curva de densidad).



a) mas de tres años significa todos los valores mayores que 3 o sea el conjunto de valores $(X > 3)$ y nótese que ese conjunto es el intervalo $]3, \infty[$, luego

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(X > 3) = \mathbf{P}\left(3 < X < +\infty\right) &= \int_{3}^{+\infty} f(x)dx \\
&= \int_{3}^{+\infty} 0.5e^{-0.5x}dx \\
&= -e^{-0.5x}\Big|_{3}^{+\infty} \\
&= -e^{-\infty} + e^{-1.5} \\
&= 0 + e^{-1.5} \approx 0.2231
\end{aligned}
$$

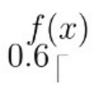
Esto quiere decir que aproximadamente el 22.3 % de los equipamientos de este tipo duran mas de tres años.

b) entre seis y 18 meses significa que X esta en el intervalo $0.5 < X < 1.5$ (fue convertido en años), luego

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(0.5 < X < 1.5\right) &= \int_{0.5}^{1.5} f(x)dx \\
&= \int_{0.5}^{1.5} 0.5e^{-0.5x}dx \\
&= -e^{-0.5x}\Big|_{0.5}^{1.5} \\
&= -e^{-0.5(1.5)} + e^{-0.5^2} \approx 0.3064
\end{aligned}
$$

Aproximadamente el 30.6 % de los casos, el tiempo de vida del equipamiento varia entre 6 y 18 meses.

La Figura de abajo muestra las áreas debajo de la curva para os items anteriores.



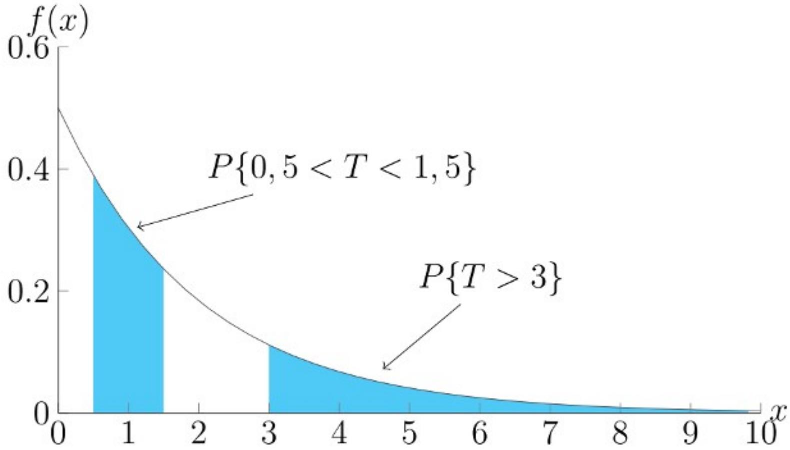


Figura 3.2: Probabilidades (área abajo de la curva) para los itens **a)** e **b)** .

Definición 3.4 (Función de distribución)
Sea X una v.a. contínua, con función densidad $f(x)$, la función de distribución acumulativa (fda) F(x) de X es definida por

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}\left(\mathrm{X} \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du, \quad \text{para todo número } x \in \mathbb{R}$$

Nótese que, para cada x, $\mathbf{F}(x)$ es el área abajo de la curva de densidad a la izquierda de x.

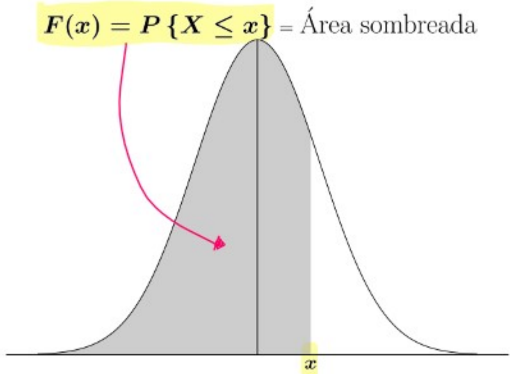


Figura 3.3: Función de distribución acumulada $\mathbf{F}(x)$.

La función de distribución acumulativa $\mathbf{F}(x)$ tiene las siguientes propiedades

a) Se X es una v.a. contínua con fdp $f(x)$ y fda $\mathbf{F}(x)$ entonces, para cualquier valor de x en que la derivada F$'(x)$ existe, se tiene que

$$f(x) = \frac{d\mathbf{F}(x)}{dx} = \mathbf{F}'(x)$$

b) $\mathbf{F}$ es una función no decreciente, osea,

$$x < y \quad \text{implica} \quad \mathbf{F}(x) \leq \mathbf{F}(y)$$

creciente
$x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$

c) $\text{lím}_{x\to-\infty} \mathbf{F}(x) = 0$ $\rightsquigarrow F(-\infty) = 0$

d) $\text{lím}_{x\to+\infty} \mathbf{F}(x) = 1$ $\rightsquigarrow F(+\infty) = 1$

e) Para cualquier número real a,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\mathrm{X} > a\right) &= 1 - \mathbf{P}\left(\mathrm{X} \leq a\right) \\ &= 1 - \mathbf{F}(a) \end{aligned}$$

complemento!

$\int^{b} f(x)dx$

f) Sean a y b dos números reales, con $a < b$

$$= 1 - \mathbf{F}(a)$$

f) Sean a y b dos números reales, con $a < b$,

$\int_a^b f(x)dx$

$$\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \mathbf{P}(a \leq X < b) = \mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(a < X < b) = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$$ Si X es una v.a continua

Ejemplo 3.4

Sea la v.a. contínua X presentado en el Ejemplo 3.3. El calculo de la fda de X, $\mathbf{F}(x)$, es dada por
Si $x < 0$ a fdp de X es cero, esto es, $f(x) = 0$. Así

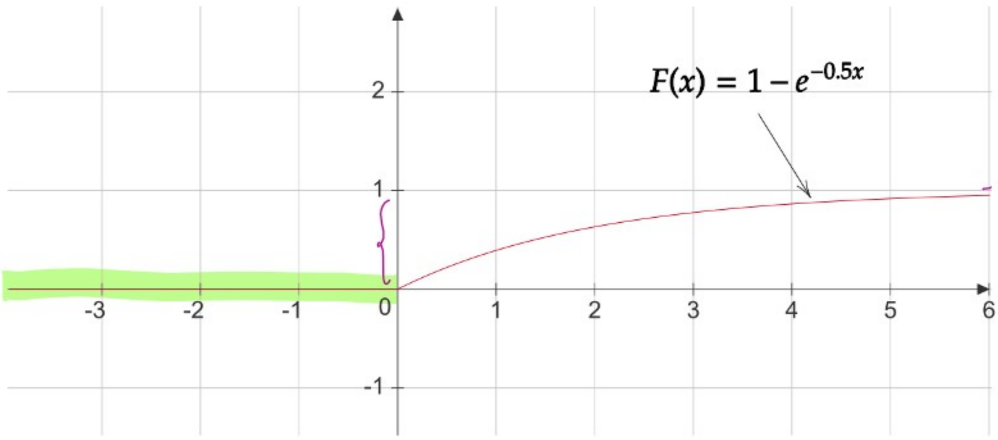
$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{x} 0du = 0$$ si $x < 0$

Ahora si $x \geq 0$, se tiene que la fdp es dada por $f(x) = 0.5e^{-0.5x}$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{x} f(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{x} 0.5e^{-0.5u}du \\ &= 1 - e^{-0.5x}\end{aligned}$$

Por tanto a fda para X es dada por

$$\mathbf{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-0.5x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



El porcentaje de los equipos electrónicos que duran mas de 18 meses puede calcular por medio de $\mathbf{F}(x)$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > 1.5) &= 1 - \mathbf{P}(X \leq 1.5) = 1 - \mathbf{F}(1.5) \\ &= 1 - (1 - e^{-0.5\times1.5}) \\ &= e^{-0.5\times1.5} \approx 0.472\end{aligned}$$