Distribuciones De Probabilidad Continua

Jhon F. Bernedo Gonzales

Última revisión: 27 de febrero de 2022

Índice

1. Distribución Uniforme **2**

2. Distribución Normal **7**
2.1. Propriedades 8
2.2. Distribución Normal Estándar 8
2.3. Calculo de probabilidades: distribución normal estándar 9
2.4. Estandarización o tipificación 13

3. Distribución exponencial **18**
3.1. Propiedad de falta de memoria 18

1 Distribución Uniforme

Definición 1.1 (Distribución Uniforme)
Una v.a continua es denominada uniforme en el intervalo $[a, b]$ si su fdp es dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{cc} \end{cases} \tag{1.1}$$

los parametros son "a" y "b"

Notación: Se denota por

$$X \sim U([a, b]),$$

si X sigue una distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$

La fdp de la v.a continua uniforme es constante para los los puntos en el intervalo $[a, b]$. Se denomina uniforme porque los intervalos que tienen la misma longitud dentro del intervalo $[a, b]$ poseen la misma probabilidad sin importar su posición (localización). La Figura 1.1 se muestra la función densidad de probabilidad para la distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$.

(b-a): es la longitud del intervalo

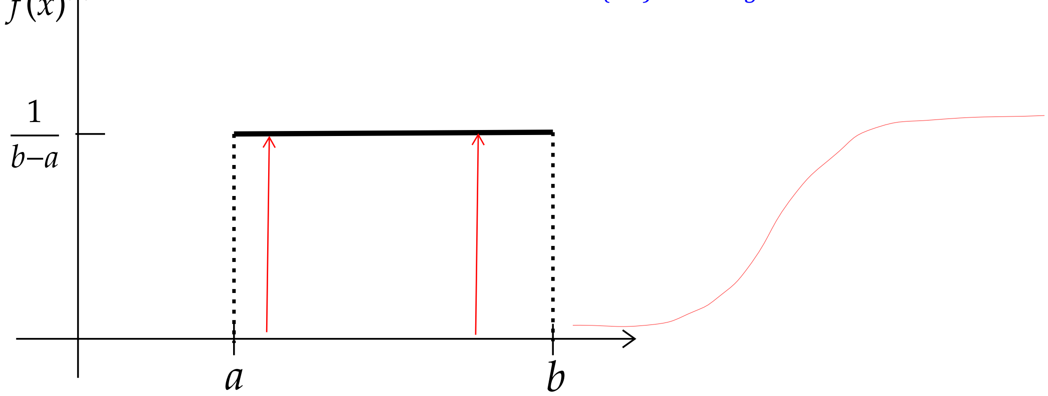


Figura 1.1: Función densidad de la v.a continua uniforme en $[a, b]$

La función de distribución (fda) para la v.a continua uniforme es dada por

$$\mathbf{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \tag{1.2}$$

La Figura 1.2 se muestra la función de distribución acumulativa para la distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$.

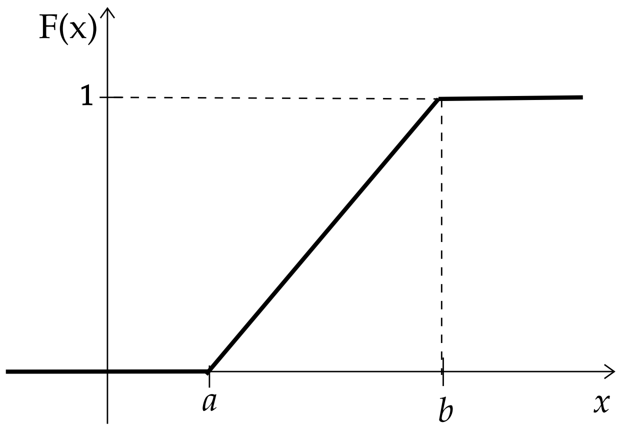


Figura 1.2: Función de distribución acumulativa para la distribución uniforme

La media y varianza de X son respectivamente

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \frac{a+b}{2} \quad \textit{punto medio del intervalo [a;b]} \tag{1.3}$$

y

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{1.4}$$

Ejemplo 1.1.
A partir de las 5:00 a.m. , cada media hora hay un vuelo desde Aeropuerto de San Francisco al aeropuerto internacional de Los Ángeles. Suponga que ninguno de estos aviones está completamente lleno y que siempre hay espacio para pasajeros. Una persona que desea volar a Los Angeles llega al aeropuerto de forma aleatoria entre las 8:45 a.m y 9:45 a.m. Encuentre la probabilidad de que esta persona espere.

a) a lo mucho 10 minutos **R.** 1/3

b) al menos 15 minutos **R.** 1/2

Solución:
La persona llega aleatoriamente entre 8:45 a.m y 9:45 a.m esto quiere decir que llega de forma uniforme en ese intervalo de tiempo que es 1 hora. Así, como la persona llega de forma uniforme en en los horarios anteriores entonces el tiempo de llegada (X) se puede modelar por medio de la distribución uniforme en el intervalo $(0,60)$ en minutos, $X \sim U(0,60)$.
La función densidad de probabilidad es dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}, & \text{si } 0 \leq x \leq 60 \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$

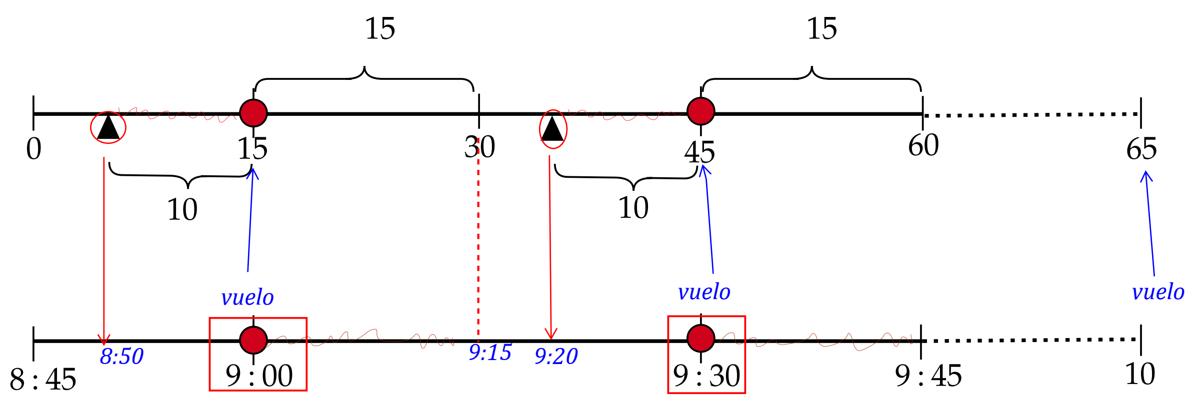


Figura 1.3: Tiempos de salidas de aviones en el horario de 8:45 a.m y 9:45 a.m

a) **calcule la probabilidad de que esta persona espere a lo mucho 10 min.**
En la Figura (1.3) describe los horarios en que existen los vuelos hacia Los Angeles. Los puntos en rojo representa el horario del vuelo del avión. Así se tiene dos intervalos de tiempo en que la personas esperará a lo mucho 10 min. Estos intervalos son $(5, 15)$ que representa $(8:50, 9:00)$ y $(35, 45)$ que representa $(9:20, 9:30)$. Luego

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\text{espera a lo mucho 10 min}) &= \int_{5}^{15} \frac{1}{60} dx + \int_{35}^{45} \frac{1}{60} dx \\
&= \frac{x}{60}\bigg|_{5}^{15} + \frac{x}{60}\bigg|_{35}^{45} \\
&= \frac{15-5}{60} + \frac{45-35}{60} = \frac{10}{60} + \frac{10}{60} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

b) **al menos 15 min**
En la Figura (1.3) se observa los horarios en que la personas tiene que esperar por lo menos 15 min, que son los intervalos $(15, 30)$ y $(45, 60)$. Luego

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\text{al menos 15 min}) &= \int_{15}^{30} \frac{1}{60} dx + \int_{45}^{60} \frac{1}{60} dx \\
&= \frac{x}{60}\bigg|_{15}^{30} + \frac{x}{60}\bigg|_{45}^{60} \\
&= \frac{30-15}{60} + \frac{60-45}{60} = \frac{15}{60} + \frac{15}{60} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.
Una persona llega a la estación de autobuses todos los días a las 7:00 a.m. Si un autobús llega a una hora aleatoria entre las 7:00 a.m. y 7:30 a.m. , ¿cuál es el tiempo promedio de espera? **R.** 15 min

2 Distribución Normal

El estudio de la distribución normal fue iniciado por Moivre, él publicó un folleto de la aplicación de la distribución normal para aproximar la distribución binomial, el folleto fue publicado el 12 de noviembre de 1933.

Definición 2.1 (Distribución Normal)
Sea X una variable aleatoria continua, se dice que X sigue una distribución normal con parámetros μ e σ^2 si su función de densidad de probabilidad es dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} \qquad -\infty < x < \infty, \tag{2.1}$$

en que μ e σ^2 son la media e varianza de X, respectivamente.

Notación: Si X sigue una distribución normal con media $\mathbf{E}[X] = \mu$ y varianza $\mathbf{Var}[X] = \sigma^2$ se denota por

$$X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}$$

La Figura 2.1 muestra diferentes formas de la función densidad de la distribución normal. En la izquierda de la Figura 2.1 se tiene la curva de densidad normal cuando $\mu = 2$. Nótese que en ambas gráficas están centradas alrededor de la media μ.

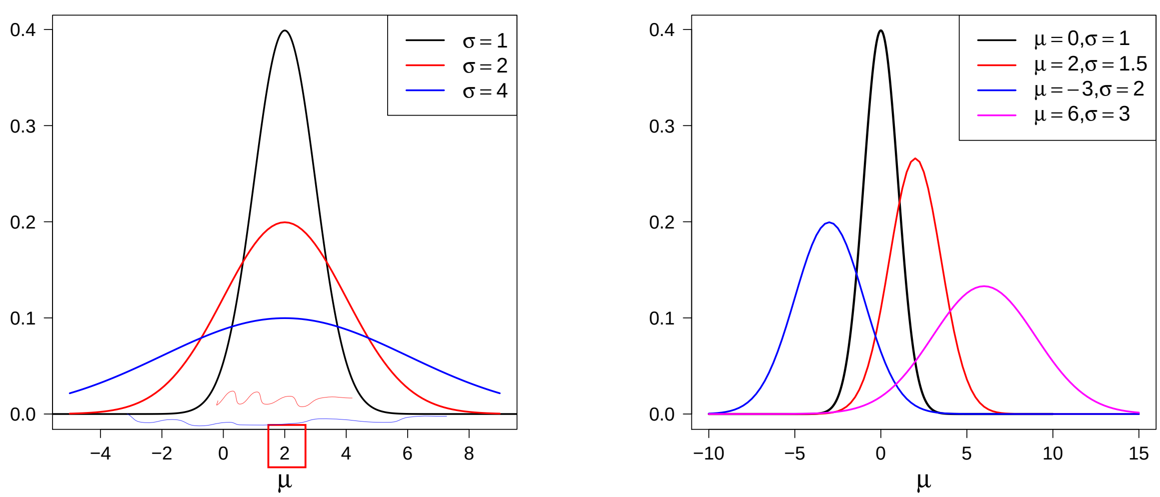


Figura 2.1: Diferentes formas de la curva de densidad de la distribución normal para diferentes valores de μ y σ.

2.1 Propriedades

- $f(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$
- A distribución normal tiene su punto máximo en $x = \mu$.
- La curva de densidad de la distribución normal es simétrica respecto de la media μ.
- $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ son puntos de inflexión de la función densidad de probabilidad $f(x)$.

Para determinar la probabilidad $\mathbf{P}(a < X < b)$ siendo que $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ se debe calcular

$$\mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx, \tag{2.2}$$

Sin embargo el calculo analítico de la integral anterior no es fácil. A fin de calcular la probabilidad $\mathbf{P}(a < X < b)$, será utilizada una transformación de X conocida como **estandarización**. Una vez que se estandariza la variable X es posible utilizar la tabla de probabilidades de la distribución normal estándar.
Es importante recordar que si X es una v.a continua se cumple que:

$$\mathbf{P}(a < X < b) = \mathbf{P}(a \leq X < b) = \mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(a \leq X \leq b)$$

2.2 Distribución Normal Estándar

Definición 2.2 (Distribución Normal Estándar)
Se dice que una v.a. continua Z tiene distribución normal estándar si su fdp es dada por

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty < z < \infty, \tag{2.3}$$

en que la media es igual a cero, $\mu = 0$, y la varianza es igual a uno, $\sigma^2 = 1$.
Frecuentemente, la función densidad de probabilidad de la distribución normal estándar es denotada por $\phi(z)$ (se pronuncia fi de z).
Notación: Se denota por

$$Z \sim \mathbf{N}(0, 1),$$

si Z si la v.a Z sigue una distribución normal estandar con media cero y varianza 1. La función de distribución es dada por

$$\mathbf{F}(z) = \Phi(z) = \mathbf{P}(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \tag{2.4}$$

La función de distribución de la distribución normal estándar $\mathbf{F}(z)$ es denotada por $\Phi(z)$.

La Figura 2.2 muestra la curva de la densidad de la distribución normal estándar (izquierda) y la función de distribución acumulada (derecha).

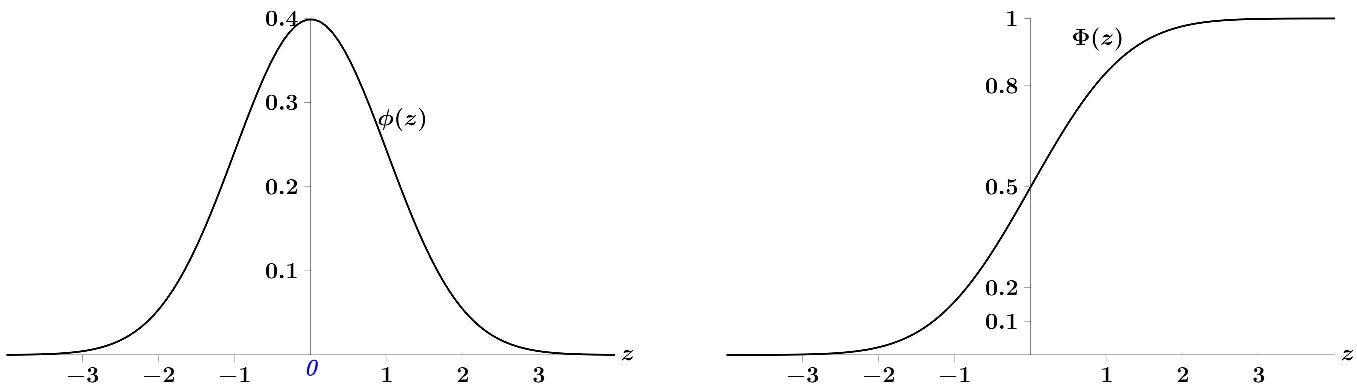


Figura 2.2: (Izquierda) Curva de densidad de la distribución normal estándar. (Derecha) Distribución acumulada de la normal estándar.

2.3 CALCULO DE PROBABILIDADES: DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

Para calcular las probabilidades cuando de la v.a. Z será utilizada la tabla Z

Uso de la Tabla

La tabla Z indica la probabilidad $\mathbf{P}(Z \leq z) = \Phi(z)$, esto es, la probabilidad es el área bajo la curva da densidad **a la izquierda de** z. La Figura 2.3 muestra la probabilidad acumulada, $\mathbf{P}(Z \leq z)$.

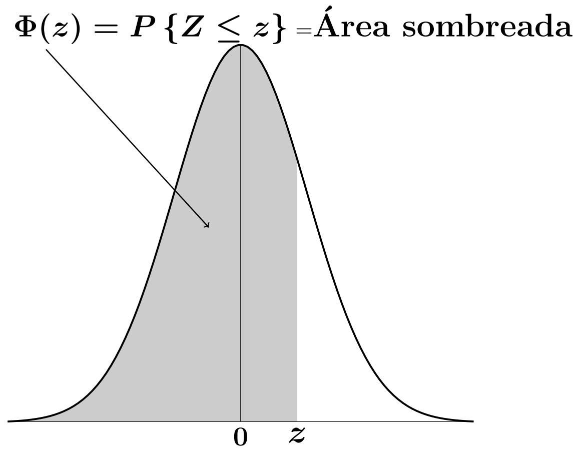


Figura 2.3: Probabilidad (área debajo de la curva), $\Phi(z) = \mathbf{P}(Z \leq z)$.

Nótese que en tabla se considera valores entre $-3.4 \leq z \leq 3.4$. Así, la primera probabilidad que aparece es 0.0003 que esta relacionado con el valor $z = -3.4$, así $\mathrm{P}(Z \leq -3.4) = 0.0003$.
La distribución normal estándar es simétrica entonces se tiene la siguiente propiedad

$$\mathbf{P}(Z \leq -z) = 1 - \mathbf{P}(Z \leq z) \tag{2.5}$$

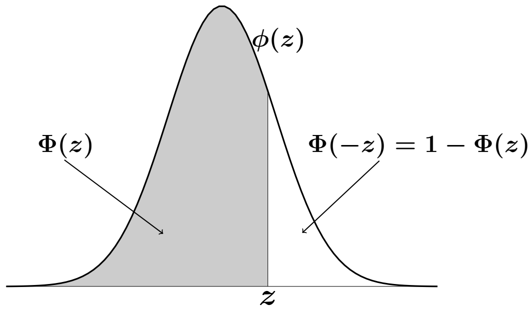


Figura 2.4: Probabilidad considerando la propiedad $\Phi(z) = P\{Z \leq z\}$.

Se sabe que Z es una v.a continua entonces se cumple que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z_a \leq Z \leq z_b) &= \mathbf{P}(z_a < Z < z_b) = \mathbf{P}(z_a \leq Z < z_b) = \mathbf{P}(z_a < X \leq z_b) \\ &= \mathbf{P}(Z \leq z_b) - \mathbf{P}(Z \leq z_a) \\ &= \mathbf{F}(z_b) - \mathbf{F}(z_a) = \Phi(z_b) - \Phi(z_a) \end{aligned} \tag{2.6}$$

en que $z_a < z_b$.
Para lo que resta de esta lectura, la tabla proporcionada en clase será llamada de **tabla normal estandarizada**, **tabla normal** ó tabla Z.

Lectura de la tabla

La primera columna (que tiene z como nombre de esa columna) representa los valores de z con el **primer decimal**, por ejemplo, -2.1 o 1.7. En la primera fila esta el **segundo decimal** para cada valor de z, así se tiene la columna **0.00** que indica cuando la segundo decimal es cero, esto es, el valor de z solo tiene un decimal, por ejemplo, $z = 1.7 = 1.70$. La columna **0.01** indica que el segundo decimal de z es **1**, por ejemplo, si z=**1.71**.

Ejemplo 2.1.
Sea Z una v.a. con distribución normal estándar, $Z \sim N(0,1)$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $\mathbf{P}(Z \leq 1.5)$

b) $\mathbf{P}(Z \geq 1.5)$

Solución:

a) Recuérdese que la **tabla normal** proporciona las probabilidades de la forma $P(Z \leq z)$ (área a la izquierda de z). Así, para determinar la probabilidad $P(Z \leq 1.5)$ se busca en la tabla normal. Para tal fin, se observa en la tabla normal a fila $\boldsymbol{z}$ =**1.5** (el segundo decimal de 1.5 es cero) **junto con** la columna **0.00 entonces** la probabilidad requerida es la intersección de la fila $\boldsymbol{z}$ =**1.5** con la columna **0.00**, por tanto se tiene que

$$\mathbf{P}(Z \leq 1.5) = 0.9332$$

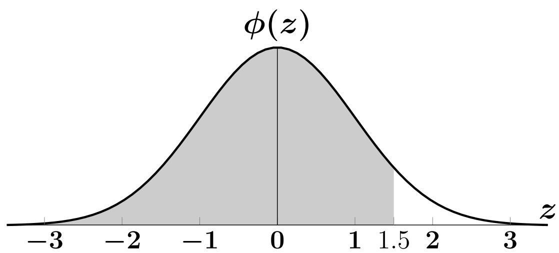


Figura 2.5: Probabilidad (área abajo de la curva) para $\mathbf{P}(Z \leq 1.5) = 0.9332$

b) Se sabe que

se usa el complemento

$$\mathbf{P}(Z \geq 1.5) = 1 - P(Z < 1.5),$$

luego del item anterior $P(Z < 1.5) = P(Z \leq 1.5) = 0.9332$.
Por tanto, $P(Z \geq 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$. La figura abajo muestra la probabilidad.

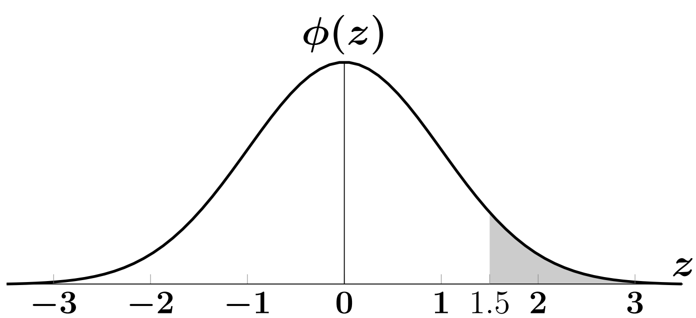


Figura 2.6: $P(Z \geq 1.5)$ =0.0668.

Ejemplo 2.2.
Sea $Z \sim \mathbf{N}(0,1)$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $\mathbf{P}(Z \geq -0.57)$

b) $\mathbf{P}(-1.33 \leq Z \leq 1.25)$

c) $\mathbf{P}(|Z| > 0.2)$

d) $\mathbf{P}(|Z| \leq 1)$

Solución:

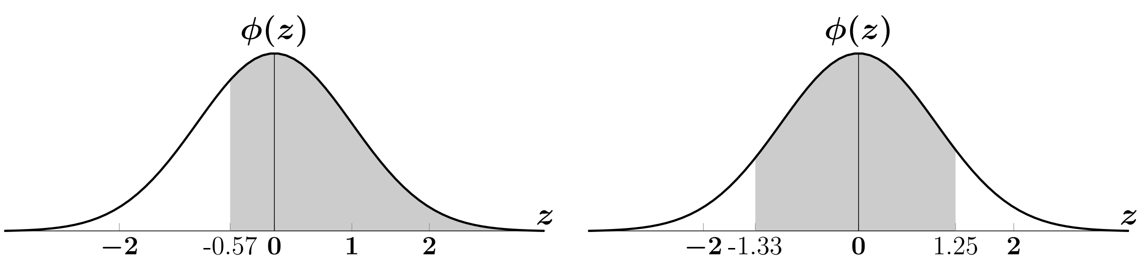
a) Se tiene que z =**-0.57** tiene 2 cifras decimales. Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(Z \geq -0.57\right) &= 1 - \mathbf{P}\left(Z < -0.57\right) \\ &= 1 - 0.2843 \\ &= 0.7157 \end{aligned}$$

b) Para calcular $\mathbf{P}\left(-1.33 \leq Z \leq 1.25\right)$ se utiliza la propiedad dada en (2.6)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(-1.33 \leq Z \leq 1.25) &= \mathbf{P}(Z \leq 1.25) - \mathbf{P}(Z \leq -1.33) \\ &= 0.8944 - 0.0918 \\ &= 0.8026 \end{aligned}$$

La Figura 2.7 muestra las áreas sombreadas para los items **(a)** e **(b)**



(a) **(b)**

Figura 2.7

Para calcular la probabilidad en los itens (c) y (d) se deja como ejercicio al lector. Como sugerencia para ambos ejercicios debe de considerarse las siguientes propiedades para desigualdades con valor absoluto: Sea $a > 0$ es una constante

- $|x| > a \Leftrightarrow x > -a$ ó $x > a$
- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

2.4 Estandarización o tipificación

Definición 2.3 (Estandarización)
Si X tiene una distribución normal con media μ y varianza σ, $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}} \quad \textit{transformacion}$$

tiene una distribución normal estándar. De esta forma, la distribución acumulada de X puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x) = \mathbf{P}(X \leq x) &= \mathbf{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \mathbf{P}(Z \leq z) \\ &= \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) \end{aligned}$$

Si $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces para el calculo de la probabilidad

$$\boxed{\mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx,}$$

se considera la estandarización, esto es, $Z = (X - \mu)/\sigma$, luego

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(a < X < b) &= \mathbf{P}\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{estandarizar los limites} \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \mathbf{P}(Z < z_b) - \mathbf{P}(Z < z_a), \quad z_a = \frac{a-\mu}{\sigma} \quad \text{y} \quad z_b = \frac{b-\mu}{\sigma} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.
Sea X una v.a. continua con distribución normal con media $\mu = 2$ y varianza $\sigma^2 = 1.5^2$, $X \sim \mathbf{N}(2, 1.5^2)$. Calcule las siguientes probabilidades

a) $P(X > 0.2)$,

b) $P(X \leq -0.77)$

c) $P(0.5 \leq X \leq 3)$

Solución:
Dado que $X \sim N(2, 1.5^2)$ y para determinar las probabilidades anteriores es necesario **estandarizar** la v.a. X. La **estandarización** es hecha por medio de la transformación $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ en que $\mu = 2$ (media) e $\sigma = 1.5$ (desviación estándar)

a) Considerando la estandarización se tiene que

$$\begin{aligned} P(X > 0.2) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{0.2-2}{1.5}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{-1.8}{1.5}\right) \\ &= P(Z > -1.2). \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} P(Z > -1.2) &= 1 - P(Z \leq -1.2) \\ &= 1 - 0.1151 \\ &= 0.8849 \end{aligned}$$

b) $P(X \leq -0.77)$

$$\begin{aligned} P(X \leq -0.77) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{-0.77-2}{1.5}\right) \\ &= P(Z \leq -1.846667) \quad \text{(aproximación para 2 decimales)} \\ &= P(Z \leq -1.85) \\ &= 0.0322 \end{aligned}$$

c) $P(0.5 \leq X \leq 3)$

$$\begin{aligned} P(0.5 \leq X \leq 3) &= P\left(\frac{0.5-2}{1.5} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{3-2}{1.5}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0.6666667) \quad \text{(aproximación para 2 decimales)} \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0.67) \\ &= P(Z \leq 0.67) - P(Z \leq -1) \\ &= 0.7486 - 0.1587 = 0.5899 \end{aligned}$$

0.74751 - 0.15866 =

Ejemplo 2.4.
Suponga que el diámetro (pulg) a la altura del pecho de árboles de un cierto tipo está normalmente distribuido con media $\mu = 8.8$ y varianza $\sigma^2 = 2.8^2$ como se sugiere en el artículo “Simulating a Harvester-Forwarder Softwood Thinning” (*Forest Products J.* mayo de 1997; 36-41).

a) Calcule la probabilidad que el diámetro de un árbol seleccionado al azar sea por lo menos de 10 pulg

b) Calcule la probabilidad que el diámetro de un árbol seleccionado al azar sea de más de 20 pulg

c) Calcule la probabilidad que el diámetro de un árbol seleccionado al azar esté entre 5 y 10 pulg

d) Para que valor de c el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el 98 % de todos los valores de diámetro

Solución:

a) Calcule la probabilidad que el diámetro de un árbol seleccionado al azar sea por lo menos de 10 pulg

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 10) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{10-8.8}{2.8}\right) \\
&= P\left(Z \geq \frac{1.2}{2.8}\right) \\
&= P(Z \geq 0.4287514286) \qquad \text{(aproximación para 2 decimales)} \\
&= P(Z \geq 0.43) \\
&= 1 - P(Z < 0.43) \\
&= 1 - 0.6664 = 0.3336
\end{aligned}
$$

b) Calcule la probabilidad que el diámetro de un árbol seleccionado al azar sea de más de 20 pulg

$$
\begin{aligned}
P(X > 20) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{20-8.8}{2.8}\right) \\
&= P\left(Z > \frac{11.2}{2.8}\right) \\
&= P(Z > 4) \\
&\approx 0
\end{aligned}
$$

c) Calcule la probabilidad que el diámetro de un árbol seleccionado al azar esté entre 5 y 10 pulg

$$
\begin{aligned}
P(5 \leq X \leq 10) &= P\left(\frac{5-8.8}{2.8} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{10-8.8}{2.8}\right) \\
&= P(-1.357142 \leq Z \leq 0.428751) \qquad \text{(aproximación para 2 decimales)} \\
&= P(-1.36 \leq Z \leq 0.43) \\
&= P(Z \leq 0.43) - P(Z \leq -1.36) \\
&= 0.6664 - 0.0869 = 0.5795
\end{aligned}
$$

d) Para que valor de c el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el 98 % de todos los valores de diámetro

$$P(8.8 - c \le X \le 8.8 + c) = 0.98$$
$$P\left(\frac{8.8 - c - 8.8}{2.8} \le \frac{X - \mu}{\sigma} \le \frac{8.8 + c - 8.8}{2.8}\right) = 0.98$$
$$P\left(\frac{-c}{2.8} \le Z \le \frac{c}{2.8}\right) = 0.98$$

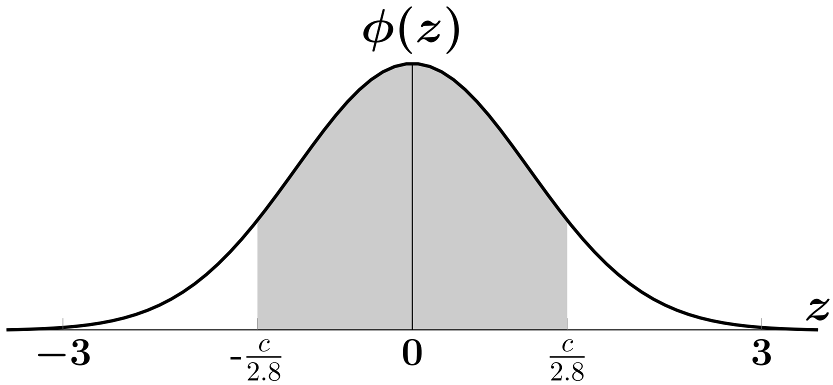


Figura 2.8: Área sombreada indicando la probabilidad $P\left(\frac{-c}{2.8} \le Z \le \frac{c}{2.8}\right) = 0.98$.

La Figura 2.8 proporciona la descripción gráfica de la probabilidad anterior. Nótese que debido a la simetría de la distribución normal estándar alrededor de 0 (su media) se tiene que

$$P\left(Z < \frac{-c}{2.8}\right) = 0.01 = P\left(Z > \frac{c}{2.8}\right)$$

Luego, el objetivo ahora es encontrar el valor de z^* que satisfaga:

$$P(Z < z^*) = 0.01$$

Buscando en la tabla normal se tiene que $z^* = -2.33$, así se tiene que

$$-\frac{c}{2.8} = -2.33,$$

lo que finalmente se tiene $c = 6.524$

Ejemplo 2.5.
Un método para llegar a pronósticos económicos es usar una propuesta de consensos. Se obtiene un pronóstico de cada uno de un número grande de analistas y el promedio de estos pronósticos individuales es el pronóstico de consenso. Suponga que los pronósticos individuales de la tasa de interés preferente de enero de 2008, hechos por analistas económicos, están normalmente distribuidos en forma aproximada con la media igual a 8.5 % y una desviación estándar igual a 0.02 %. Si al azar se selecciona un solo analista de entre este grupo, ¿cuál es la probabilidad de que el pronóstico del analista de la tasa preferente tome estos valores?

a) Rebase de 8.75 %.

b) Sea menor a 8.375 %.

3 Distribución exponencial

Definición 3.1 (Distribución Exponencial)
La distribución exponencial es una de las mas simples e importantes distribuciones utilizadas en el modelado de datos que representan el tiempo hasta la ocurrencia de algún evento de interés. La misma ha sido utilizada intensivamente en análisis de supervivencia y de confiabilidad.
Una variable aleatoria no negativa y continua X, tiene distribución exponencial, con parámetro $\lambda > 0$, si su función densidad de probabilidad (fdp) es dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

en que el valor esperado y varianza son respectivamente

$$E[X] = \mu = \frac{1}{\lambda} \quad \text{y} \quad Var[X] = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Notación: Se denota por $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ en que λ representa la tasa de falla.

La funncion de distribucion es dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.1.
Suponga que cada tres meses, en promedio, ocurre un temblor en una ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo temblor ocurra después de tres pero antes de siete meses?

Ejemplo 3.2.
Una refinería de azúcar tiene tres plantas de procesamiento, todas las cuales reciben azúcar en bruto a granel. La cantidad de azúcar que una planta puede procesar en un día se puede modelar por medio de una distribución exponencial con una media de 4 toneladas para c/u de las tres plantas.

a) Si las plantas operan de forma independiente, calcule la probabilidad de que exactamente dos de las tres plantas procesará más de 4 toneladas en un día determinado.

b) ¿Cuánta azúcar sin refinar debe almacenarse para esa planta cada día para que la probabilidad de quedarse sin producto sea solo de 0.05?

3.1 Propiedad de falta de memoria

Sea X una v.a continua que posee una distribución exponencial con parametro λ. Se dice que X tiene la propiedad de falta de memoria si

$$\mathbf{P}(X > s + t \mid X > t) = \mathbf{P}(X > s) \tag{3.3}$$

Esta propiedad se puede interpretar, por ejemplo, si X es la vida útil de algún tipo de equipo electrónico, entonces 3.3 significa que no hay deterioro con la edad del equipo.
Así, la probabilidad de que este equipo dure s años mas dado que este haya durado más de t años es la misma que la probabilidad de que el equipo dure por lo menos s años.
En otras palabras, la probabilidad de que dicho equipo se deteriore en los próximos años no depende de la antigüedad del instrumento.