Martes C.C

martes, 17 de mayo de 2022 07:32

Distribución Exponencial

Sea X una v.a continua. Se dice que X sigue una distribución exponencial si su fdp

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; c.c \end{cases}$$

Valor Esperado: $E[X] = \frac{1}{\lambda}$

Varianza: $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

Función de distribución:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(u)du = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

Ejemplo 1:

Ejemplo 3.1.

Suponga que cada tres meses, en promedio, ocurre un temblor en una ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo temblor ocurra después de tres pero antes de siete meses?

Ejemplo 3.2.

Una refinería de azúcar tiene tres plantas de procesamiento, todas las cuales reciben azúcar en bruto a granel. La cantidad de azúcar que una planta puede procesar en un día se puede modelar por medio de una distribución exponencial con una media de 4 toneladas para c/u de las tres plantas.

a) Si las plantas operan de forma independiente, calcule la probabilidad de que exactamente dos de las tres plantas procesará más de 4 toneladas en un día determinado.

Ejemplo 3.1.
Suponga que cada tres meses, en promedio, ocurre un temblor en una ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo temblor ocurra después de tres pero antes de siete meses?

Ejemplo 3.2.
Una refinería de azúcar tiene tres plantas de procesamiento, todas las cuales reciben azúcar en bruto a granel. La cantidad de azúcar que una planta puede procesar en un día se puede modelar por medio de una distribución exponencial con una media de 4 toneladas para c/u de las tres plantas.

a) Si las plantas operan de forma independiente, calcule la probabilidad de que exactamente dos de las tres plantas procesará más de 4 toneladas en un día determinado.

Solución 3.1:

$E[X] = \frac{1}{\lambda}$ (Unidades) $\rightsquigarrow$ $E[X] = \mu = \frac{1}{\lambda} = 3$ $\rightsquigarrow$ $\lambda = \frac{1}{3}$

$$P(3 < X < 7) = \int_3^7 f(x)\,dx = \int_3^7 \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \int_3^7 \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\,dx = \ldots\ldots$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$$

$\rightarrow$ Es verdad si X es una v.a Continua.

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

$$P(3 < X < 7) = F(7) - F(3) = (1 - e^{-\lambda 7}) - (1 - e^{-\lambda 3})$$

$$= e^{-3\lambda} - e^{-7\lambda} = e^{-3 \cdot \frac{1}{3}} - e^{-7 \cdot 1/3} = \ldots\ldots$$

Valor esperado de una función:

Sea X una v.a discreta (ó continua) con Valor esperado $E[X]$

Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función de valor real

y: $Y = g(X)$ es una v.a

Se desea calcular

$$E[Y] = E[g(X)]$$

Se puede calcular si se conoce la fmp ó fdp de "Y".

Método: Ley del estadístico inconsciente (LOTUS)

Teorema: Sea X una v.a con fmp (ó fdp) y sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de valor real tq $Y = g(X)$ es una v.a discreta ó continua

Entonces:

$$E[Y] = E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x_i} g(x_i)\, p(x_i), & \text{Si } X \text{ es una v.a discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx; & \text{Si } X \text{ es una v.a continua.} \end{cases}$$

Resultado:

$g_1, g_2, \ldots, g_n$ funciones de valor real

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes

$$E[a_1 g_1(X) + a_2 g_2(X) + \dots + a_n g_n(X)] =$$

$$a_1 E[g_1(X)] + a_2 E[g_2(X)] + \dots + a_n E[g_n(X)]$$

Ejemplo 1

Sea X una v.a discreta

$$P(X=x) = p(x) = \begin{cases} x/15 \,; & x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Calcule:

$$E[\underbrace{X(6-X)}_{g(X)}] \qquad g(X) = X(6-X)$$

y

Solución:

$$E[X(6-X)] = \sum_i x_i(6-x_i)\,p(x_i) = \sum_{i\geq 1} x_i(6-x_i)\frac{x_i}{15}$$

$$= 1(6-1)\cdot\frac{1}{15} + 2(6-2)\frac{2}{15} + \dots + 5(6-5)\frac{5}{15}$$

$$= 7$$

Ejemplo: Un punto es seleccionado aleatoriamente en $(0; \pi/4)$. Calcule $E[\cos 2X]$ y $E[\cos^2 X]$

S

$E[\cos 2x]$ y $E[\cos^2 x]$

<u>Sol</u>:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ; x \in (a,b) \\ 0 & ; c.c \end{cases}$$

$x \in (0; \pi/4)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi/4} & ; x \in (0; \pi/4) \\ 0 & ; c.c \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \quad ; \quad x \in (0, \pi/4)$$

$$E[\underbrace{\cos 2x}_{g(x)}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2x \, f(x) \, dx = \int_0^{\pi/4} \cos 2x \cdot \frac{4}{\pi} \, dx$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \Big|_0^{\pi/4} \right] = \frac{2}{\pi}$$