Jueves-19

jueves, 19 de mayo de 2022 07:28

$Y = h(X)$; X es una v.a → discreta / → Continua

$E[X] = \mu$ → $E[h(X)] = \sum_{i \geq 1} h(x_i)\, p(x_i)$; Discreto

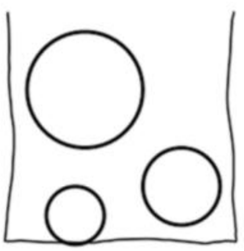
$$E[h(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, f(x)\, dx$$

Nótese que: $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x) dx$ no necesariamente se puede calcular de forma analítica

→ Simulación monte Carlo → integración monte Carlo

Ejemplo:

Sea "R" el radio de un disco seleccionado al azar de una caja.



La fmp de "R"

$$p(R) = \begin{cases} \frac{1}{10} & ; R = 1, 2, 3, \ldots, 10 \\ 0 & ; \text{c.c} \end{cases}$$

10 discos

Calcule el valor esperado del área de un disco seleccionado al azar

Solución:

$A = \pi R^2$ → $E[\pi R^2]$

$Y = h(X)$ → $h(R)$ → $E[h(R)] = \sum_{i \geq 1} h(R_i)\, p(R_i)$

$$E[A] = \sum_{i \geq 1} \pi R_i^2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{\pi}{10} \sum R_i^2 = \frac{\pi}{10}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{10}(\ldots) = 38.5\pi$$

$= \frac{\pi}{10}(\,..\,) = 38.5\,\pi$

Función de densidad de una función de una v.a

Sea X una v.a continua → fdp $f(x) = f_X(x) \rightarrow f(.)$

→ fda $F(x) = P(X \leq x) = F_X(x) = F(.)$

$Y = h(X)$ → función de una v.a "X"

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Sin embargo, muchas veces es necesario obtener (encontrar) la fdp de Y. Para obtener la fdp de Y se tiene 2 métodos:

i) Método de la función de distribución

ii) Método de la transformación.

I) Método de la función de distribución: → $G(y)$

$Y = h(x)$ → calcular $F_y(y)$

$F(y) = P(Y \leq y) = P(h(x) \leq y)$

Nótese que: la v.a X esta definida en "A" → $h(x) \leq y$

Si se obtiene $P(h(x) \leq y)$ entonces se puede calcular la fdp de Y, $g(y)$ → se calcula por diferenciación!

Ejemplo 1:

Sea X una v.a continua con fdp

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} ; & 1 < x < 2 \\ 0 ; & c.c. \end{cases}$$

Encuentre, la fdp de $Y = x^2$ y su fda $G(y)$.

Solución:

$G(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$ $\quad 1 < x < 2$

Solución:

$$G(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$$

$1 < x < 2$

$1 < \underset{y}{x^2} < 4$

$$G(y) = \begin{cases} 0 & ;\ \text{si } y < 1 \\ P(1 \le X \le \sqrt{y}) & ;\ \text{si } 1 \le y < 4 \end{cases}$$

$$P(1 \le X \le \sqrt{y}) = \int_1^{\sqrt{y}} \frac{2}{x^2}\,dx = -\frac{2}{x}\Big|_1^{\sqrt{y}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{y}}$$

$$G(y) = \begin{cases} 0 & ;\ y < 1 \\ 2 - \frac{2}{\sqrt{y}} & ;\ 1 \le y < 4 \\ 1 & ;\ y \geq 4 \end{cases}$$

$P(Y \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$

$P(Y \le 5) = P(1 \le X \le \sqrt{5})$

$$\int_1^{\sqrt{5}} f(x)\,dx = \cancel{\int_1^2 f(x)\,dx}^{\,1} + \cancel{\int_2^{\sqrt{5}} f(x)\,dx}^{\,0}$$

$$f(y) = \frac{d}{dy}(G(y)) = G'(y) = \frac{d}{dy}\left(2 - \frac{2}{\sqrt{y}}\right)$$

$$= y^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{y^3}} = \frac{1}{y\sqrt{y}}$$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{y\sqrt{y}} & ;\ 1 \le y < 4 \\ 0 & ;\ \text{c.c.} \end{cases}$$

Método de la transformación:

$Y = h(X)$

- "h" es una función continua
- "h" estrictamente creciente o decreciente
- "h" diferenciable

$\Rightarrow$ h tiene inversa

Teorema: Sea X una v.a continua con fdp $f_X(x)$.

Sea $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua, diferenciable y q' tiene inversa

Entonces la fdp de $Y = h(X)$ es dada por:

$$f_Y(y) = \left| f_X(h^{-1}(y)) \right| \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right| \ ;\ \text{si, } y = h(x)\ ;\ \text{para el qún } x$$

$$f_y(y) = \begin{cases} f_x(h^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right| & ; si, y = h(x) \ ; \text{ para algún } x \\ 0 & ; si \ y \neq h(x) \end{cases}$$

$x \rightsquigarrow$ "A" $\rightsquigarrow$ $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$A \to h(A) = B$

Ejemplo :

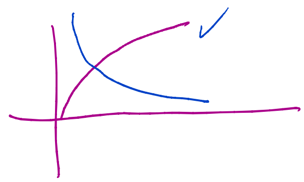
$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & ; x > 0 \\ 0 & ; c.c \end{cases}$$

$A = (0; +\infty)$

$h: A \to B$

$h(A) = B = (0, +\infty)$

Calcular fdp de $Y = \sqrt{x}$.



Sol :

$h(x) = \sqrt{x} = y \rightsquigarrow x = y^2 = h^{-1}(y)$

$$f_y(y) = f_x(h^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right| = f_x(y^2) \cdot \left| \frac{d}{dy}(y^2) \right|$$

$$= 2e^{-2y^2} |2y| = 4e^{-2y^2} \cdot y \quad ; \ y > 0$$

$$f_y(y) = \begin{cases} 4e^{-2y^2} \cdot y & ; \ y > 0 \\ 0 & ; \ c.c. \end{cases}$$