3 Distribución de Poisson

Si el interés es saber el número de eventos, X, que ocurren durante intervalo dado o en una región específica se llaman experimentos de Poisson.
La v.a X puede tomar diferentes valores, por ejemplo si no se observa ningún evento se tiene que $X = 0$, si observa 2 eventos $X = 2$, esto quiere decir que $X = 0, 1, 2, 3, ...$, nótese que no se indica un límite. El intervalo dado puede ser de cualquier longitud, como un minuto, un día, una semana, por ejemplo,

- El numero de llamadas que recibe una recepcionista en una oficina en una hora
- El número de autos que pasan por una avenida en media hora.
- Número de personas que son atendidas en un hospital en un día ...

La región específica podría ser un segmento de línea, un área, un volumen o una pieza de material, por ejemplo

- El número de imperfecciones en un metro de cable de cobre de corriente eléctrica.
- El número de bacterias en un litro de agua tomado del rio Chili.
- El número de manchas encontradas en un metro de tela ...

Definición 3.1 (Distribución de Poisson). Una v.a discreta X tiene una distribución de Poisson con parámetro λ $(\lambda > 0)$, si la función masa de probabilidad es dada por

$$\boxed{\mathbf{P}(X = x) = p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots} \to +\infty \tag{3.1}$$

Nótese que la letra e representa la base del sistema de logaritmos naturales en que su valor es $e \approx 2.71828$.

La media y varianza de una v.a discreta que tiene una distribución de Poisson son iguales

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \lambda$$
$$\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] = \lambda$$

Así λ representa el número promedio (medio) de ocurrencias de los eventos en una unidad de intervalo (periodo) o región.
Notación: Si X tiene una distribución de probabilidad de Poisson con parámetro λ, se puede escribir como

$$X \sim \text{Poi}(\lambda)$$

Ejemplo 3.1.
Durante un experimento de laboratorio el número promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador en un milisegundo es 4.

a) Calcule la probabilidad de que 6 partículas entren al contador en un milisegundo

b) Calcule la probabilidad de que por lo menos 2 partículas entren al contador en un milisegundo

c) Indique el número esperado de partículas que ingresen a través del contador en un milisegundo

Solución:
Para este caso se tiene que la variable aleatoria es dada por

Solución:
Para este caso se tiene que la variable aleatoria es dada por

X : el número promedio de partículas radioactivas que pasan por el contador en " un milisegundo, "

y esta variable tiene una distribución de Poisson con parámetro λ =4 por 1 milisegundo.

$$X \sim \text{Poi}(4) \rightsquigarrow P(X=x) = p(x) = \frac{e^{-4} \cdot 4^x}{x!} \;;\; x = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Calcule la probabilidad de que 6 partículas entren al contador en un milisegundo

$$\mathbf{P}(X = 6) = \frac{e^{-4}4^6}{6!} = 0.1042$$

b) Calcule la probabilidad de que por lo menos 2 partículas entren al contador en un milisegundo

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \geqslant 2) &= p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) + \ldots \\
&= 1 - \mathbf{P}(X < 2) \\
&= 1 - [p(0) + p(1)] \\
&= 1 - \left[\frac{e^{-4}4^0}{0!} + \frac{e^{-4}4^1}{1!}\right] \\
&= 1 - 0.09158 = 0.90842
\end{aligned}$$

c) Indique el número esperado de partículas que ingresen a través del contador en un milisegundo

$$\mathbf{E}[X] = \lambda = 4$$

3.1 Extensión o reducción del intervalo

Definición 3.2 (Distribución de Poisson: Extensión o reducción)**.** La probabilidad que ocurran x eventos en un intervalo de tiempo o región t es dado por

$$P(X = x) = p(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

en que, λ es número promedio de ocurrencias en un intervalo de tiempo o región.

Nota:
λt es el número promedio de eventos que ocurren en un intervalo (o región) de tamaño t.

Ejemplo 3.4.
El número de clientes que llegan por hora a ciertas instalaciones de servicio automotriz se supone que sigue una distribución de Poisson con media λ= 7. (x 1 hora)

a) Calcule la probabilidad de que más de 3 clientes lleguen en un periodo de 2 horas.

b) ¿Cuál es el número medio de llegadas durante un periodo de 2 horas?

Solución:
Nótese que $\lambda = 7$ por hora.

a) la media de clientes que llegan al servicio automotriz en un periodo de $t = 2$ horas es igual $\lambda t = 7(2) = 14$ por dos horas, así la distribución de Poisson es ahora

$$\mathbf{P}(X = x) = \frac{e^{-14}(14)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Luego, la probabilidad de que más de 3 clientes lleguen en un periodo de 2 horas es dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X > 3) &= p(4) + p(5) + p(6) + p(7) + \ldots \\
&= 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 3) \\
&= 1 - [p(0) + p(1) + p(2) + p(3)] \\
&= 1 - \left[\frac{e^{-14}(14)^0}{0!} + \frac{e^{-14}(14)^1}{1!} + \frac{e^{-14}(14)^2}{2!} + \frac{e^{-14}(14)^3}{3!}\right] \\
&= 1 - 0.00047 = 0.99953
\end{aligned}$$

$P(X \geq 4)$

b) el número medio de llegadas durante un periodo de 2 horas es igual $\lambda t = 7(2) = 14$

3.2 Aproximación: Binomial a la dist. Poisson

En el caso que n es grande es posible aproximar la distribución binomial a la distribución Poisson. Si $n \to \infty$ y $p \to 0$ de tal modo que np se aproxime a un valor λ, entonces la distribución binomial se aproxima a la distribución Poisson con parametro $\lambda = np$.
Regla empírica: La aproximación puede ser aplicada si $n \geqslant 30$ y $p \leqslant 0.1$.

Ejemplo 3.6.
Un artículo en *Los Ángeles Times* (3 de diciembre de 1993) reporta que una de cada 200 personas portan el gen defectuoso que provoca cáncer de colon hereditario. En una muestra de 1000 individuos, ¿cuál es la distribución de probabilidad aproximada del número de personas que porta este gen? Use esta distribución para calcular la probabilidad aproximada de que

a) Entre 5 y 8 porten el gen.

b) Por lo menos 3 porten el gen.

Solución:

- el tamaño de muestra $n = 1000$ ✓
- **éxito:** la persona porta el gen $\to p = 1/200 = 0.005$, luego se tiene que

$$X \sim \text{Bin}(1000, 0.005)$$

Como se satisface (se cumple) que $1000 \geqslant 30$ y $0.005 \leqslant 0.1$ entonces la distribución binomial se puede aproximar a la distribución de Poisson con parametro $\lambda = np = 1000 \times 0.005 = 5$, esto es

$$X \sim \text{Poi}(5)$$ $\to \lambda = 5$

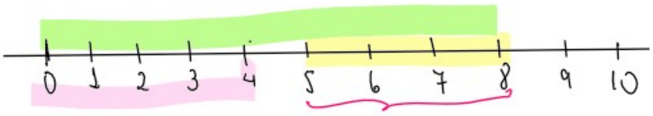
a) Entre 5 y 8 porten el gen

0.93191 - 0.44049

$$\mathbf{P}(5 \leqslant X \leqslant 8) = p(5) + p(6) + p(7) + p(8) = \mathbf{P}(X \leqslant 8) - \mathbf{P}(X \leqslant 4)$$

0.49171

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(5 \leqslant X \leqslant 8) &= p(5) + p(6) + p(7) + p(8) = \mathbf{P}(X \leqslant 8) - \mathbf{P}(X \leqslant 4) \\
&= \frac{e^{-5}(5)^5}{5!} + \frac{e^{-5}(5)^6}{6!} + \frac{e^{-5}(5)^7}{7!} + \frac{e^{-5}(5)^8}{8!} \\
&= 0.49142
\end{aligned}
$$



b) Por lo menos 3 porten el gen.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \geqslant 3) &= p(3) + p(4) + p(5) + p(6) + \ldots \\
&= 1 - \mathbf{P}(X < 3) \\
&= 1 - [p(0) + p(1) + p(2)] \\
&= 1 - \left[\frac{e^{-5}(5)^0}{0!} + \frac{e^{-5}(5)^1}{1!} + \frac{e^{-5}(5)^2}{2!}\right] \\
&= 1 - 0.12465 = 0.87535
\end{aligned}
$$