Probabilidad y Estadística

Ejercicios v.a discreta: función masa de probabilidad, esperanza, varianza y momentos

Docente: Dr. Jhon F. Bernedo Gonzales
Facultad: Ingeniería

Ejercicio 1.
Para c/u de las siguientes funciones masa de probabilidad definidas sobre $X = 1, 2, 3, 4, \ldots$

a) $p(x) = c2^x/x!$

b) $p(x) = cp^x$; $0 \leq p \leq 1$

c) $p(x) = cx^{-1}p^x$; $0 \leq p \leq 1$

d) $p(x) = cx^{-2}$

Ejercicio 2.
Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad como se indica en la siguiente tabla calcule las siguientes probabilidades:

x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	1/8	1/8	1/2	1/8	1/8

a) $\mathbf{P}(X \leq 1)$

b) $\mathbf{P}(|X| \leq 1)$

c) $\mathbf{P}(X^2 \geq 1)$

d) $\mathbf{P}(X - X^2 < 0)$

Ejercicio 3.
Una urna contiene 5 bolas numeradas de 1 a 5. Se extraen dos bolas a la vez. Se define X como la suma de los números obtenidos. Determinar:

a) El rango de valores de la v.a de X, R_X

b) La distribución de probabilidades de X

c) $P(X = 5)$ y $P(6 \leq X \leq 8)$

d) La función de distribución acumulada de X

Ejercicio 4.
En un lote de ocho artículos hay dos defectuosos. Del lote se toma al azar una muestra de 2 artículos a la vez. Sea X el número de artículos defectuosos de la muestra. Determinar

a) El rango de valores de la v.a de X, R_X

b) La distribución de probabilidad de X

c) La función de distribución acumulada de X

Ejercicio 5.
La variable aleatoria X tiene la siguiente función de distribución acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 10 \\ 1/4, & 10 \leq x < 15 \\ 3/4, & 15 \leq x < 20 \\ 1, & x \geq 20 \end{cases}$$

a) Encontrar la distribución masa de probabilidad de la v.a X.

b) Calcular $P(X \leq 10.5) + P(X \geq 15.5)$.

c) Calcular $P(10.2 \leq X \leq 15.5)$

Ejercicio 6.
Una organización de protección al consumidor que habitualmente evalúa automóviles nuevos reporta el número de defectos importantes encontrados en cada carro examinado. Sea X el número de defectos importantes en un carro seleccionado al azar de cierto tipo. La función de distribución acumulativa de X es la siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.06, & 0 \leq x < 1 \\ 0.19, & 1 \leq x < 2 \\ 0.39, & 2 \leq x < 3 \\ 0.67, & 3 \leq x < 4 \\ 0.92, & 4 \leq x < 5 \\ 0.92, & 5 \leq x < 6 \\ 1.00 & x \geq 6 \end{cases}$$

Calcule las probabilidades

a) $\mathbf{P}(X = 2)$

b) $\mathbf{P}(X > 3)$

c) Calcular $\mathbf{P}(2 \leq X \leq 5)$

d) Calcular $\mathbf{P}(2 < X < 5)$

Ejercicio 7.
Dos dados de seis caras son lanzados al aire en forma independiente. Sea M el máximo de los dos lanzamientos, esto es, $M = \text{máx}\{x, y\}$, en que x es el resultado del primer dado y y del segundo dado. Por ejemplo, si se tiene como resultado del lanzamiento $(5, 3)$, entonces el máximo es $M = 5$

a) ¿Cuál es la fmp de M?

b) Determine la función de distribución acumulada de M y haga un gráfico

Ejercicio 8.
Hay 10 estudiantes inscritas en una clase de estadística, de entre los cuales 3 tiene 19 años, 4 tienen 20, 1 tiene 21, 1 tiene 24 y 1 tiene 26 años. De esta clase se seleccionan dos estudiantes a la vez. Sea X la edad promedio de los 2 estudiantes seleccionados. Hallar la distribución de probabilidad de X y su función de distribución.

Ejercicio 9.
Una caja contiene 5 bolas de las cuales 2 son blancas. Se seleccionan estas bolas una por una y sin reemplazo. Sea X el número de selecciones necesarias hasta obtener todas las bolas blancas.

a) Hallar la fmp y fda de X

b) Calcular la probabilidad que sean necesarios al menos seis selecciones

c) La esperanza y varianza de X

Ejercicio 10.
La tabla siguiente es una distribución parcial de probabilidades para las ganancias proyectadas de JBG Company (X ganancias en miles de dólares) durante el primer año de operación (los valores negativos indican pérdida).

X	$P(X = x) = p(x)$
-100	0.1
0	0.2
50	0.3
100	0.25
150	0.1
200	?

a) Cuál es el valor adecuado para $p(200)$? ¿Qué interpretación le da a este valor?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa sea rentable?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa gane por lo menos \$100000?

d) Encuentre la media y varianza de X

Ejercicio 11.
Una pieza de equipo electrónico contiene seis chips de computadora, dos de los cuales son defectuosos. Al azar se seleccionan tres chips, se retiran del equipo y se inspeccionan. Sea X igual al número de defectos observados, donde $X = 0, 1, 2$.

a) Encuentre la distribución de probabilidad para X.

b) Construya la distribución acumulada, esto es, $F(x)$ de X

Ejercicio 12.
Un llavero contiene cuatro llaves de oficina que son idénticas en apariencia, pero sólo una abrirá la puerta de su oficina. Suponga que al azar selecciona una llave y prueba con ella. Si no es la buena, al azar selecciona una de las tres llaves restantes. Si tampoco es la buena, al azar selecciona una de las dos últimas.

a) Haga una lista de todos resultados posibles, osea, describa el espacio muestral Ω y encuentre la probabilidades respectivas.

b) Sea X igual al número de llaves con las que se intenta antes de hallar la que abre la puerta, $X = 1, 2, 3, 4$, encuentre la distribución de probabilidad de X.

c) Encuentre la $\mathbf{E}[X]$ y $\mathbf{Var}[X]$

Ejercicio 13.
Cada cliente que entra en una tienda de televisores compra una televisión de tamaño normal con probabilidad 0.3, compra un televisor de tamaño grande con probabilidad 0.1, o no compra ningún televisor con probabilidad 0.6. Calcule la probabilidad de que los próximos 5 clientes

a) Compren un total de 3 televisores de tamaño normal.

b) No compren ningún televisor de tamaño grande.

c) Compren un total de 2 televisores

Ejercicio 14.
¿Toma usted café? Si es así, ¿cuántos descansos para tomar café se da cuando está en el trabajo o en la escuela? Casi todas las personas que toman café se dan un poco de tiempo para tomarlo y muchas se dan más de un descanso al día para tomarlo. La tabla siguiente, adaptada de un Snapshot de USA Today muestra la distribución de probabilidad para X, el número de descansos diarios por día que se dan quienes toman café.

X	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.28	0.37	0.17	0.12	0.05	0.01

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que toma café, seleccionada al azar, no se dé descanso para tomar café durante el día?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que toma café, seleccionada al azar, se dé más de dos descansos para tomar café durante el día?

c) Calcule la media y desviación estándar para la variable aleatoria X

Ejercicio 15.

JBG Computer Company está considerando hacer una expansión a la fábrica para empezar a producir una nueva computadora. El presidente de la empresa debe determinar si hacer un proyecto de expansión a mediana gran escala. La demanda del producto nuevo es incierta, la cual, para los fines de planeación puede ser demanda pequeña, mediana o grande. Las probabilidades estimadas para la demanda son 0.20, 0.50 y 0.30, respectivamente. Con X y Y representando ganancia anual en miles de dólares, los encargados de planeación en la empresa elaboraron el siguiente pronóstico de ganancias para los proyectos de expansión a mediana y gran escala.

		X	$p(x)$	Y	$p(y)$
	Baja	50	0.2	0	0.2
Demanda	Mediana	150	0.5	100	0.5
	Alta	200	0.3	300	0.3

a) Calcule el valor esperado de las ganancias correspondientes a las dos alternativas de expansión. ¿Cuál de las decisiones se prefiere para el objetivo de maximizar la ganancia esperada?

b) Calcule la varianza de las ganancias correspondientes a las dos alternativas de expansión. ¿Cuál de las decisiones se prefiere para el objetivo de minimizar el riesgo o la incertidumbre?

Ejercicio 16.

Ted Olson, director de la compañía Overnight Delivery, está preocupado respecto al número de cartas de primera clase que su compañía ha perdido. Debido a que estas cartas son transportadas en camión y avión, el señor Olson ha clasificado las cartas extraviadas durante los dos últimos años de acuerdo con el medio de transporte en el que se extraviaron. Los datos son los siguientes:

Cartas	E	F	Ma	A	My	Jn	Jl	Ag	S	O	N	D
Camión	4	5	2	3	2	1	3	5	4	7	0	1
Avión	5	6	0	2	1	3	4	2	4	7	4	0

El señor Olson planea investigar a uno de los dos departamentos, el de tierra o el de aire, pero no a ambos. Si decide abrir una investigación en el departamento que tenga el mayor número esperado de cartas perdidas por mes, ¿a cuál departamento deberá investigar?. Asuma que cada mes del año tiene la misma probabilidad.

Ejercicio 17.

Dada una moneda sesgada en que la probabilidad de salir cara es $P(C) = 4/7$ y de salir sello es $P(S) = 3/7$. Suponga que la moneda es la lanzada 3 veces sea X la v.a que indica el número de cara obtenidas.

a) Encuentre la distribución masa de probabilidad de X

b) Calcule $E[X]$ y $Var[X]$

Ejercicio 18.
Un distribuidor de enseres para el hogar vende tres modelos de congeladores verticales de 13.5, 15.9 y 19.1 pies cúbicos de espacio de almacenamiento, respectivamente. Sea X :la cantidad de espacio de almacenamiento adquirido por el siguiente cliente que compre un congelador. Suponga que X tiene la función masa de probabilidad

x	13.5	15.9	19.1
$p(x)$	0.2	0.5	0.3

a) Calcule $E[X]$, $E[X^2]$ y $Var[X]$

b) Si el precio de un congelador de X pies cúbicos de capacidad es $25X - 8.5$, ¿cuál es el precio esperado pagado por el siguiente cliente que compre un congelador?

c) ¿Cuál es la varianza del precio $25X - 8.5$ pagado por el siguiente cliente?

Ejercicio 19.
La demanda de una determinada revista semanal en un quiosco es una variable aleatoria con función de masa de probabilidad

$$p(i) = \frac{10-i}{18}, \quad i = 4, 5, 6, 7$$

Si la revista se vende por a soles y le cuesta $2a/3$ soles al vendedor, y las revistas no vendidas no se pueden devolver, ¿cuántas revistas debe pedir el vendedor cada semana para maximizar la ganancia esperada?

Ejercicio 20.
Suponga que la v.a X sea igual al número de aciertos obtenidos por cierto jugador de béisbol en sus tres chances como bateador. Si

$$P(X=1) = 0.3 \quad P(X=2) = 0,2 \quad \text{y} \quad P(X=0) = 3P(X=3),$$

determine $E[X]$

Ejercicio 21.
Suponga que $P(X=0) = 1 - P(X=1)$. Si $E[X] = 3Var[X]$, determine $P(X=0)$.

Ejercicio 22.
Se lanzan dos monedas, en la primera moneda se tiene que la probabilidad de salir cara es 0.6 y en la segunda moneda es 0.7. Bajo la suposición de independencia de los lanzamientos y que X es el número de caras que se obtienen en los lanzamientos

a) Determine $P(X=1)$

b) Calcule $E[X]$, $E[X^2]$ y $Var[X]$

Ejercicio 23.
Sea X una v.a tal que

$$P(X=1) = p = 1 - P(X=-1)$$

Determine $c \neq 1$ tal que $E[c^X] = 1$

Ejercicio 24.
Los n candidatos para un trabajo fueron clasificados como $1, 2, 3, \ldots, n$. Sea X el rango de un candidato seleccionado al azar, de modo que X tenga la función masa de probabilidad

$$p(x) = \frac{1}{n}, \quad x = 1, 2, \ldots, n$$

Calcule $E[X]$ y $Var[X]$.

Ejercicio 25.
Suponga que X es una v.a discreta con

$$\mathbf{E}[X] = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{E}[X(X-2)] = 3$$

Encuentre $\mathbf{Var}[-3X + 5]$