

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Ejercicios: Probabilidad Condicional y Teorema de Bayes

Docente: Dr. Jhon F. Bernedo Gonzales

Facultad: Ingeniería

Ejercicio 1.

Se tiene 5 fusiles que, cuando son apuntados apropiadamente y disparados, tienen probabilidades de dar en el blanco respectivamente como sigue: 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 y 0.9. Se elige aleatoriamente uno de los fusiles, se apunta y dispara. ¿Cuál es la probabilidad de dar en el blanco?

Ejercicio 2.

Se ha determinado que las probabilidades de que un televidente vea los programas A o B son: 0.5 y 0.4, respectivamente. Si se asume que cada persona ve los programas independientemente uno del otro, ¿cuál es la probabilidad de que un televidente vea por lo menos uno de los programas?

Ejercicio 3.

La empresa de calzado "El ñazo" está planeando abrir una nueva tienda en un lugar determinado. El analista de la empresa ha establecido que la probabilidad de tener éxito en este nuevo local es 0.7 si no se abre un negocio similar en las cercanías del lugar; pero si esto ocurre, la probabilidad de éxito será solo de 0.20. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa "El ñazo" tenga éxito en el negocio si la probabilidad de apertura de un negocio similar es 0.40?

Ejercicio 4.

En la siguiente tabla se presenta la distribución de 125 hogares de acuerdo con los ingresos de sus jefes de familia y con el hecho de ser propietarios de teléfonos y de aparatos de televisión. A partir de la información, elaborar las probabilidades conjuntas y contestar las siguientes preguntas.

	Con ingresos de \$1000 o menos		Con ingresos mas \$1000	
	Con teléfono	Sin teléfono	Con teléfono	Sin telefono
Con tv	27	20	18	10
Sin tv	18	10	12	10

- ¿Cuál es la probabilidad de elegir un hogar con TV?
- Si una familia con ingresos de más de \$1000 tiene teléfono, ¿cuál es la probabilidad de que tenga TV?
- ¿Cuál es la probabilidad de elegir a una familia que tenga TV, dado el hecho de que tiene teléfono?
- ¿Son independientes los eventos "tener TV" y "tener teléfono"?
- ¿Son independientes los eventos "ingresos de menos de \$1000" y "ser propietario de TV"?

Ejercicio 5.

La urna I tiene 3 bolas blancas y 7 negras. La urna II tiene 20 bolas de las cuales algunas son blancas y las demás son negras. Se escoge una urna al azar y de ella se extrae una bola, encontrándose que es blanca. Si la probabilidad que esta bola blanca provenga de la urna I es igual a $1/3$ determinar el número de bolas blancas que existían originalmente en la urna II.

Ejercicio 6.

Tres máquinas I, II y III manufacturan el 30 % , 30 % y 40 % de la producción total de un cierto artículo. Las máquinas producen 4 %, 3 % y 2 % de productos defectuosos, respectivamente. Se toma un artículo al azar, se prueba y resulta ser defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad que haya sido manufacturado por la máquina I? ¿La máquina II? ¿y la III?

Ejercicio 7.

La caja A contiene nueve cartas numeradas de 1 a 9. La caja B contiene cinco cartas numeradas de 1 a 5. Se elige una caja al azar y de ella se extrae una carta. Si la carta extraída es par. Calcular la probabilidad de que la carta provenga de la caja A.

Ejercicio 8.

Noventa y ocho por ciento de todos los niños sobreviven a un parto. Además, 15 % de todos los nacimientos envuelven cesáreas (C), y cuando una cesárea es hecha los bebés sobreviven en el 96 % de los casos. Si una gestante es aleatoriamente seleccionada y se sabe que su parto no hubo cesárea, cual es la probabilidad de que su bebé sobreviva?

Ejercicio 9.

Una compañía de seguros clasifica a las personas en una de tres categorías respecto al riesgo: bueno, promedio o malo. Sus registros indican que la probabilidad de que una persona se vea involucrada en un accidente en el lapso de un año es de 0.05, 0.15, y 0.30, respectivamente. Si 20 % de las personas están clasificadas como de riesgo bueno, 50 % como promedio y 30 % como malo, ¿qué proporción de las personas tienen accidentes durante un año? Si el poseedor de una póliza no tiene un accidente durante un año, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido clasificado como de riesgo promedio?

Ejercicio 10.

Un taller repara tanto componentes de audio como de video. Sea A el evento en que el siguiente componente traído a reparación es un componente de audio y sea B el evento en que el siguiente componente es un reproductor de discos compactos (así que $B \subset A$). Suponga que $P(A) = 0.6$ y $P(B) = 0.05$. ¿Cuál es $P(B|A)$

Ejercicio 11.

En una gasolinería, 40 % de los clientes utilizan gasolina regular, 35 % usan gasolina plus y 25 % utilizan premium. De los clientes que utilizan gasolina regular, sólo 30 % llenan sus tanques. De los clientes que utilizan plus, 60 % llenan sus tanques, mientras que los que utilizan premium, 50 % llenan sus tanques.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente pida gasolina plus y llene el tanque ?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llene el tanque

Ejercicio 12.

Un satélite está programado para ser lanzado desde Cabo Cañaveral en Florida y otro lanzamiento está programado para la Base de la Fuerza Aérea Vandenberg en California. Sea A el evento en que el lanzamiento en Vandenberg se hace a la hora programada y B el evento en que el lanzamiento en Cabo Cañaveral se hace a la hora programada. Si A y B son eventos independientes con $P(A) > P(B)$ y $P(A \cup B) = 0.626$, $P(A \cap B) = 0.144$, determine los valores de $P(A)$ y $P(B)$.

Ejercicio 13.

Tres cocineros, A, B y C, preparan un tipo especial de torta y se da el caso que la torta no crece (no toma forma) con respectivas probabilidades 0.02, 0.03 y 0.05. En el café-pastelería donde trabajan los cocineros se tiene que, A cocina 50 %, B cocina 30 % y C cocina 20 % de esas tortas. **Que proporción de "fracasos" lo realiza A?**

Ejercicio 14.

Hay 3 monedas en una caja. Una de ellas tiene dos caras, la otra es honesta y la última es una moneda cargada en que se obtiene cara en un 75 % de las veces. Una de las 3 moneda es seleccionada aleatoriamente y es lanzada y se obtiene cara. **Cual es "la"probabilidad de que la moneda lanzada sea la moneda con dos caras?**

Ejercicio 15.

Una máquina produce foto detectores en pares. Las pruebas muestran que el primer foto detector es aceptable con una probabilidad de $3/5$. Cuando el primer foto detector es aceptable, el segundo foto detector es aceptable con probabilidad $4/5$. Si el primer foto detector es defectuoso, el segundo es aceptable con probabilidad $2/5$.

- a) Encuentre la probabilidad de que exactamente uno del par de foto detectores sea aceptable.
- b) Encuentre la probabilidad de que ambos foto detectores estén defectuosos.

Ejercicio 16.

En días lluviosos, João llega atrasado al trabajo con probabilidad 0.3, en días no lluviosos, el llega atrasado con probabilidad 0.1. Si La probabilidad que llueva mañana es 0.7

- a) Determine la probabilidad de João llegue temprano mañana
- b) Dado que João haya llegado temprano, cual es la probabilidad de que haya llovido?

Ejercicio 17.

Suponga que se tiene 10 monedas tales que si la i -ésima moneda es lanzada, la probabilidad de obtener cara es igual a $i/10$, $i = 1, 2, \dots, 10$. Una de las monedas es seleccionada aleatoriamente y es lanzada obteniéndose cara. **Cual es la probabilidad condicional de que haya sido la quinta moneda?**

Ejercicio 18.

Una familia tiene j hijos con probabilidad p_j , donde $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.25$, $p_3 = 0.35$ y $p_4 = 0.3$. Un hijo de esta familia es elegida aleatoriamente. Dado que él es el primogénito, determine la probabilidad condicional de que la familia tenga:

- a) sólo 1 hijo. **R.** 0.24
- b) 4 hijos. **R.** 0.18

Ejercicio 19.

El cáncer de próstata es un tipo de cáncer mas común entre los hombres. Para verificar se alguien tiene cáncer de próstata, los médicos realizan con frecuencia una prueba que mide el nivel de PSA producido por la próstata. Sin embargo, a pesar que altos niveles de PSA sean indicativos de cáncer, la prueba es notoriamente poco confiable. De hecho, la probabilidad de que un hombre que no tenga cáncer presente niveles elevados de PSA es de aproximadamente 0.135, valor que crece para aproximadamente 0.268 si el hombre tuviera cáncer. Si, en base en otros factores, un médico tiene un 70 % de certeza de que un hombre tiene cáncer de próstata, cual es la probabilidad condicional de que el tenga cáncer dado que

- a) La prueba tenga indicado un nivel elevado de PSA?. **R.** 0.822
- b) La prueba no tenga indicado un nivel elevado de PSA?. **R.** 0.633

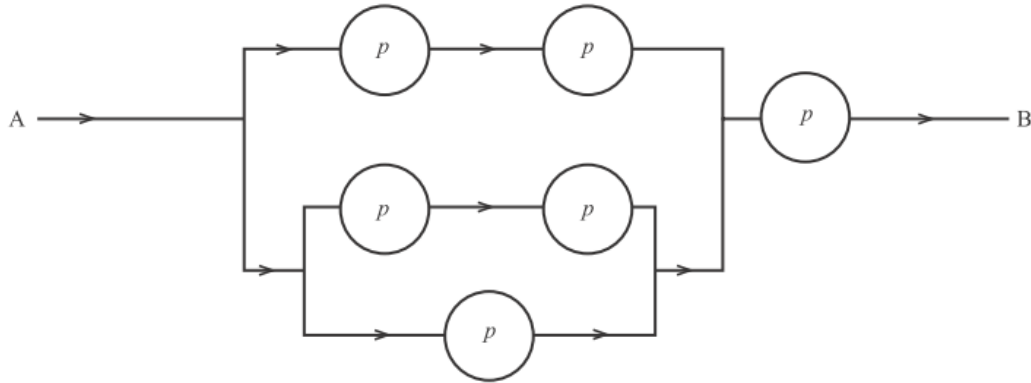
Ejercicio 20.

Un modelo simplificado para la variación del precio de una acción supone que en cada día el precio de la acción suba 1 dolar con probabilidad p o baje 1 dolar con probabilidad $1 - p$. Bajo la suposición que las variaciones sean independientes

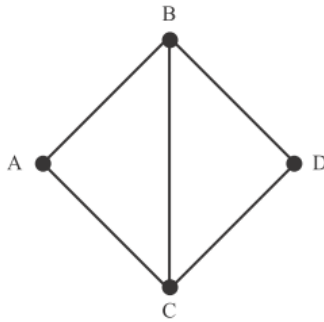
- a) Cual es la probabilidad de que después de 2 días el precio de la acción esté en su valor original?.
R. $2p(1 - p)$
- b) Cual es la probabilidad de que después 3 días el precio de la acción haya subido 1 dolar?. **R.**
 $3p^2(1 - p)$
- c) Dado que después de 3 días el precio de la acción haya subido 1 dolar, cual es la probabilidad de que la acción haya subido el primer día? **R.** $2/3$

Ejercicio 21.

Suponga que un sistema puede ser representado con la figura de abajo. Suponga que cada componente funcione independientemente del otro con probabilidad p . Calcule la probabilidad de que el sistema funcione. **R.** $p [1 - (1 - p)(1 - p^2)^2]$

**Ejercicio 22.**

Cuatro ciudades están conectadas por cinco carreteras, como se muestra en la figura de abajo. Cada vía puede estar bloqueado por la nieve independientemente con probabilidad p . ¿Cuál es la probabilidad de que ud. pueda conducir su automóvil de A a D?



$$\mathbf{R.} (1 - p^2)^2(1 - p) + p [1 - \{1 - (1 - p)^2\}^2]$$

Ejercicio 23.

Bárbara e Diana van a practicar tiro al blanco (de forma independiente), en que el blanco es un pato de madera. Cada uno de los tiros de Bárbara tienen una probabilidad p_1 de acertar al blanco. Por otro lado, la probabilidad de acertar al blanco en cada tiro de Diana es p_2 . Suponga que ellas disparen simultáneamente y ocurre que el pato de madera es derrumbado (indicando que fue acertado). **Cual es la probabilidad de que:**

a) ambos tiros hayan acertado al pato?.

$$\mathbf{R.} \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$$

b) el tiro de Bárbara haya acertado al pato?

$$\mathbf{R.} \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$$

Ejercicio 24.

Dos dados son lanzados n veces. Encuentre la probabilidad de salir el número 6 por primera vez en un número impar de lanzamientos.

R. 6/11

Ejercicio 25.

Dos jugadores A y B se turnan para lanzar un dado. Cada jugador necesita un puntaje diferente para ganar. Si no obtienen el puntaje requerido, el juego continúa, eso es, seguir lanzando el dado. En cada uno de sus intentos, el jugador A gana con probabilidad α , mientras que B gana con probabilidad β . ¿Cuál es la probabilidad de que A gane el juego si el lanza primero el dado?. ¿Qué pasa si él lanza en el segundo turno?.

R. Sea p_1 la probabilidad de ganar si A lanza primero y p_2 la probabilidad de ganar A si B lanza primero

$$p_1 = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)}$$
$$p_2 = \frac{(1 - \beta)\alpha}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)}$$