$$\boxed{P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P(X_1=j|X_0=i),}$$ tiempo Homogeneo

Probabilidades de transición

Sean i y j dos estados de una cadena de Markov. A la probabilidad

$$\boxed{P(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i)}$$ probabilidades de transición en "un paso"

representa la probabilidad de transición del estado i en el tiempo n, al estado j en el tiempo $n+1$.

Notación:

$P_{ij}=P(X_1=j|X_0=i)$ $\rightsquigarrow$ $i \to j$ $\quad$ $i \to j \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{cases}$

$p_{ij}=p_{ij}(n,n+1)=P(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i)$

$S=\{0,1,2,\ldots\}\Big\}$ Cadena de Markov en tiempo discreto!

La entrada (i,j) de esta matriz es la probabilidad de transición p_{ij}, es decir, la probabilidad de pasar del estado i al estado j

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Matriz estocástica

$i,j \in S=\{0,1,2,3,\ldots\}$

$p_{00}=p_{00}(0,1)=P(X_1=0\,|\,X_0=0)=P_{00}$

$p_{02}=p_{02}(0,1)=P(X_1=2\,|\,X_0=0)=P_{02}$

$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $\Big\{$ estados finitos $\Big\}$ matriz estocastica finita

$$P=\begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 5 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 7 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 8 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 9 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \\ 10 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 16 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

10x10

$P(X_1=2\,|\,X_0=1)=1/6$

$P(X_1=3\,|\,X_0=1)=1/6$

$\vdots$

$P(X_1=7\,|\,X_0=1)=1/6$

$$\sum_j P_{ij}=\sum_j P(X_1=j|X_0=i)=\sum_j \frac{P(X_1=j,X_0=i)}{P(X_0=i)}=\frac{P(X_0=i)}{P(X_0=i)}=1,$$

matriz estocástica

La matriz de probabilidades de transición $P=(p_{ij})$ cumple las siguientes dos propiedades.

a) $p_{ij}\geqslant 0$.

b) $\sum_j p_{ij}=1$. } suma por filas!

En general toda matriz cuadrada que cumpla estas dos propiedades se dice que es una matriz estocástica. Debido a la propiedad de Markov, esta matriz captura la esencia del proceso y determina el comportamiento de la cadena en cualquier tiempo futuro. Si además la matriz satisface la condición $\sum_i p_{ij}=1$, es decir, cuando la suma por columnas también es uno, entonces se dice que es doblemente estocástica.

CALCULOS BASICOS

A powerful feature of Markov chains is the ability to use matrix algebra for computing probabilities. To use matrix methods, we consider probability distributions as vectors.

A *probability vector* is a row vector of non-negative numbers that sum to 1. Bold

$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots)$

$* \sum_{i\geq 1}\alpha_i=1$

A powerful feature of Markov chains is the ability to use matrix algebra for computing probabilities. To use matrix methods, we consider probability distributions as vectors.

A *probability vector* is a row vector of non-negative numbers that sum to 1. Bold Greek letters, such as $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\lambda}$, and $\boldsymbol{\pi}$, are used to denote such vectors.

Assume that X is a discrete random variable with $P(X = j) = \alpha_j$, for $j = 1, 2, \dots$. Then, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ is a probability vector. We say that *the distribution of* X is $\boldsymbol{\alpha}$. For matrix computations we will identify discrete probability distributions with row vectors.

For a Markov chain $X_0, X_1, \dots$, the distribution of X_0 is called the *initial distribution of the Markov chain*. If $\boldsymbol{\alpha}$ is the initial distribution, then $P(X_0 = j) = \alpha_j$, for all j.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$

* $\sum_{i\geq 1} \alpha_i = 1$

* $P(X = j) = \alpha_j$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ → es la distribución de X ; $X = 0, 1, 2, \dots, j, \dots$

Si $P(X_0 = j) = \alpha_j$
inicio
$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots$ { distribución inicial

n-Step Transition Probabilities

For states i and j, and $n \geq 1$, $P(X_n = j | X_0 = i)$ is the probability that the chain started in i hits j in n steps. The n-step transition probabilities can be arranged in a matrix. The matrix whose ijth entry is $P(X_n = j | X_0 = i)$ is the *n-step transition matrix* of the Markov chain. Of course, for $n = 1$, this is just the usual transition matrix $\boldsymbol{P}$.

For $n \geq 1$, one of the central computational results for Markov chains is that the n-step transition matrix is precisely $\boldsymbol{P}^n$, the nth matrix power of $\boldsymbol{P}$.

$P(X_n = j | X_0 = i) = P^n_{ij}$

n-Step Transition Matrix

Let $X_0, X_1, \dots$ be a Markov chain with transition matrix $\boldsymbol{P}$. The matrix $\boldsymbol{P}^n$ is the n-step transition matrix of the chain. For $n \geq 0$,

$$P^n_{ij} = P(X_n = j | X_0 = i), \quad \text{for all } i, j.$$

$P(X_4 = j | X_0 = i) = ?$
↓
P^4
matriz

Note that $P^n_{ij} = (\boldsymbol{P}^n)_{ij}$. Do not confuse this with $(P_{ij})^n$, which is the number P_{ij} raised to the nth power. Also note that $\boldsymbol{P}^0$ is the identity matrix. That is,

$$P^0_{ij} = P(X_0 = j | X_0 = i) = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

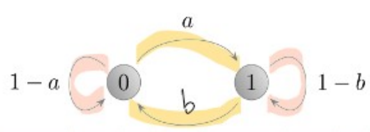
Ejemplos

Cadena de dos estados

Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1\}$, y con matriz y diagrama de transición como aparece en la Figura 3.2, en donde $0 \leqslant a \leqslant 1$, y $0 \leqslant b \leqslant 1$. Suponga que la distribución inicial está dada por $p_0 = P(X_0 = 0)$ y $p_1 = P(X_0 = 1)$.

$S = \{0, 1\}$

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-a & a \\ 1 & b & 1-b \end{array}$$



$P(X_1 = 0 | X_0 = 0) = 1 - a$
$P(X_1 = 1 | X_0 = 0) = a$.
$P(X_1 = 0 | X_0 = 1) = b$
$P(X_1 = 1 | X_0 = 1) = 1 - b$

Si las v.a's son independientes → $a = 1 - b$

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-a & a \\ 1 & 1-a & a \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} P(X_n = 0) &= 1 - a \\ P(X_n = 1) &= a \end{aligned}$$

$P^n = ?$ → Recordar: $A = LU$ → $A = OOO$

Cadena de variables aleatorias independientes

Sea $\xi_1, \xi_2, \dots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con valores en el conjunto $\{0, 1, \dots\}$, y con idéntica distribución dada por las probabilidades $a_0, a_1, \dots$ Definiremos varias cadenas de Markov a partir de esta

Cadena de variables aleatorias independientes

Sea $\xi_1, \xi_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con valores en el conjunto $\{0, 1, \ldots\}$, y con idéntica distribución dada por las probabilidades $a_0, a_1, \ldots$. Definiremos varias cadenas de Markov a partir de esta sucesión.

Sea $X_n = \xi_n$. La sucesión $\{X_n : n \geqslant 1\}$ es una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, \ldots\}$, y con probabilidades de transición $p_{ij} = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = P(X_n = j) = a_j$. Es decir, la matriz de probabilidades de transición es de la siguiente forma:

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Por la hipótesis de independencia, esta cadena tiene la cualidad de poder pasar a un estado cualquiera siempre con la misma probabilidad en cualquier momento, sin importar el estado de partida. En consecuencia, para cualquiera estados i y j, y para cualquier entero $n \geqslant 1$, las probabilidades de transición en n pasos son fáciles de calcular y están dadas por $p_{ij}(n) = a_j$. Esta cadena puede modelar, por ejemplo, una sucesión de lanzamientos independientes de una moneda.

$$P(A \mid B) = P(A)$$

$$P(X_1 \mid X_2) = P(X_1)$$

$$P(X_0 = j) = a_j \; ; \; j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$P(X_1 = j \mid X_0 = i) = P(X_1 = j) = a_j$$

$$P(X_2 = j \mid X_1 = i) = P(X_2 = j) = a_j$$