Conceptos Básicos de Probabilidad

Jhon F. Bernedo Gonzales • 2021-I

Última revisión: 15 de abril de 2021

Índice

1 Introducción

Definición 1.1 (Experimento)
Una actividad o procedimiento que puede proporcionar un conjunto de resultados bien definidos es llamado un experimento.
El término **bien definidos** significa que se debe de conocer todos los resultados posibles del experimento.

Definición 1.2 (Espacio muestral)
El conjunto de todos los resultados de un experimento aleatorio es denominado espacio muestral.
Notación: Ω
Un elemento del espacio muestral en general será denotado por ω

Ejemplo 1.1
Si se lanza una moneda 2 veces se puede definir

$$\Omega = \{CC, CS, SC, SS\},$$

en que C indica salir cara y S salir sello.

Ejemplo 1.2
Lanzar un dado una ves tiene como espacio muestral

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ejemplo 1.3
Si se lanza un dado 2 veces tiene como espacio muestral

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\\ &\cancel{=} (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\\ &\cancel{=} \cdots\\ &= (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\},\end{aligned}$$

o de forma equivalente

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\},$$

Ejemplo 1.4
Observe la cantidad de minutos que un cliente pasa en una tienda de celulares. El espacio muestral es dado por

$$\Omega = \{T | T > 0\}$$

Ejemplo 1.5
Una empresa fabrica circuitos integrados y los prueba para determinar la calidad de estos. Los posibles resultados cuando un circuito va ser probado son aprobado (A) o rechazado (R) así

$$\Omega = \{A, R\}$$

Definición 1.3 (Evento)
Un evento es un subconjunto del espacio muestral.
Notación: Casi siempre los eventos son denotados por letras mayúsculas

$$A, B, C, D, E, F, \ldots,$$

estas letra mayúsculas pueden tener índices u otro tipo de adorno.

Ejemplo 1.6
Si se lanza una moneda 2 veces entonces se tiene que

$$\Omega = \{CC, CS, SC, SS\}.$$

Sea el evento: $A \equiv$ salir por lo menos una cara entonces >=1

$$A = \{CS, SC, CC\},$$

Nótese que $A \subseteq \Omega$

Ejemplo 1.7
Si se lanza 2 dados 1 vez se tiene

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}.$$

a) Sea el evento: $A \equiv$ el 1^o dado muestra un número impar y el 2^o dado muestra un número par

$$A = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$$

ó de forma equivalente

$$A = \{(i, j) : i \in \{1, 3, 5\}, j \in \{2, 4, 6\}\}$$

b) Sea $B \equiv$ el 1^o dado es mayor que el 2^o dado

$$B = \{(i, j) : i > j, \quad 1 \leq i, j \leq 6\}$$

Ejemplo 1.8
Observe la cantidad de minutos que un cliente pasa en una tienda de celulares. El espacio muestral es dado por

(0,+inf)

$$\Omega = \{T | T > 0\},$$

Sea el evento $A \equiv$ que el cliente por lo menos 7 minutos, luego

$$A = \{T | T \geq 7\}\}$$

Notas:

- Los eventos son conjuntos y por tal razón se puede usar la teoría de conjuntos para hacer operaciones con ellos.
- Si el resultado ω de un experimento está en el evento A se dice que A ocurre, $\omega \in A$.

- Si A no ocurre entonces el evento completar de A denotado por $\overline{A}$ (o A^c) debe de ocurrir, esto porque $\omega \in A$ ó $\omega \in \overline{A}$

Definición 1.4 (Eventos disjuntos)
Dos eventos A y B son denominados eventos **disjuntos, ajenos, incompatibles o mutuamente exclusivos** si ellos no tienen un resultado común

$$A \cap B = \emptyset$$

Evento cierto	Ω
Evento imposible	$\emptyset$
El evento A ocurre	A
El evento A no ocurre	$\overline{A}$
• Ambos eventos ocurren A y B • Los eventos ocurren conjuntamente	$A \cap B$
• Por lo menos uno de los eventos ocurre • Cualquiera de los eventos ocurre	$A \cup B$
• A ocurre pero no B • Sólo ocurre A	$A - B = A \cap \overline{B}$
• B ocurre pero no A • Sólo ocurre B	$B - A = B \cap \overline{A}$
• ocurre A o B pero no ambos	$\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$

Se pueden destacar otras operaciones entre conjuntos
Leyes de Morgan:

- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, que representa que no ocurre A y no ocurre B.
- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$, que representa que ambos eventos no van a ocurrir o equivalentemente al menos uno no ocurre

Es posible generalizar las propiedades anteriores: Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos tal que $A_i \in \Omega$ entonces

- $$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n} = \cap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$
- $$\overline{(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n} = \cup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

2 Axiomas de Probabilidad

A fin de definir las reglas de probabilidades es necesário indicar los **axiomas de probabilidad**

1. Sea A un evento en Ω entonces
$$0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$$

2. La probabilidad para el espacio muestral
$$\mathbf{P}(\Omega) = 1$$

3. **Regla de la adición:** Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una colección de eventos disjuntos, *i.e.*, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ entonces
$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots + \mathbf{P}(A_n)$$

Propiedades

a) $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$

b) $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$

c) Si A y B son eventos y son disjuntos *i.e.*, $A \cap B = \emptyset$ entonces
$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$

d) Si $A \subseteq B$ son eventos entonces
$$P(A) \leq \mathbf{P}(B) \quad \text{y} \quad \mathbf{P}(B - A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$$

e) Si A, B son eventos entonces
$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$$

f) Si A, B y C son eventos entonces
$$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo 2.1

Una cocina contiene dos alarmas de incendio. Una es activada por el humo y la otra por el calor.
La experiencia ha demostrado que la probabilidad de que la alarma del humo suene dentro de un minuto desde el inicio del incendio es 0.95. La probabilidad de que la alarma de calor suene dentro de un minuto desde el inicio del incendio es 0.91, y la probabilidad de que ambas suenen dentro de un minuto es 0.88. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una alarma suene dentro de un minuto?

Solución:

Se define los eventos
$A \equiv$ la alarma se activa por el humo
$B \equiv$ la alarma se activa por el calor
$A \cap B \equiv$ las dos alarmas se activan
Las probabilidades respectivas son

$$\mathbf{P}(A) = 0.95, \quad \mathbf{P}(B) = 0.91 \quad \text{y} \quad \mathbf{P}(A \cap B) = 0.88$$

El evento pedido es:
$A \cup B \equiv$ por lo menos una alarma suena
con probabilidad

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A \cup B) &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) \\
\mathbf{P}(A \cup B) &= 0.95 + 0.91 - 0.88 \\
\mathbf{P}(A \cup B) &= 0.98
\end{aligned}$$

3 Definición clásica

De acuerdo con la definición clásica de probabilidad, es necesario calcular el número de elementos en el evento y en Ω para el cálculo de probabilidades, esto es,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{casos favorables para A}}{\text{casos posibles}},$$

en que $|\,.\,|$ representa la cardinalidad (conteo) de elementos en el evento A.
Para encontrar el número de elementos en un evento y en Ω se utilizará reglas de conteo.

Ejemplo 3.1
Se lanza una moneda honesta 3 veces

a) calcule la probabilidad de obtener exactamente 2 caras =2

b) calcule la probabilidad de obtener por lo menos 2 caras >=2

Solución:
El espacio muestral asociado al experimento es dado por

$$\Omega = \{CCC, CCS, CSS, SCC, SSC, CSC, SCS, SSS\}$$

en que $|\Omega| = 8$.

a) Sea el evento A ≡obtener exactamente 2 caras luego se tiene

$$A = \{CCS, SCC, CSC\}, |A| = 3 \quad \rightarrow \mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$$

b) Sea el evento B ≡ obtener por lo menos 2 caras

$$B = \{CCC, CCS, SCC, CSC\}, |B| = 4 \quad \rightarrow \mathbf{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{8}$$

Ejemplo 3.2
Una pareja de recién casados planea tener 3 hijos. Calcule la probabilidad que la pareja tenga exactamente 2 varones. Suponga que los niños y las niñas son igualmente probables de nacer .

Ejemplo 3.3

Durante la temporada inaugural de la liga mayor de fútbol soccer en Estados Unidos, los equipos médicos documentaron 256 lesiones que causaron la pérdida de tiempo de participación a jugadores. Los resultados de esta investigación, publicados en *The American Journal of Sports Medicine*, se muestran en la tabla siguiente.

	practica (P)	juego (J)	total
Menor (A)	66	88	154
Moderada (B)	23	44	67
Grave (G)	12	23	35
total	101	155	256

Si un individuo es sacado al azar de entre este grupo de 256 jugadores de fútbol soccer, encuentre las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$, $P(P)$, $P(\overline{B})$

b) $P(G \cap P)$, $P(G \cup P)$

P(A)=|A|/|omega| = 154/256

P(P)= 101/256

P(Bc) = 1 - P(B) = 1 - (67/256)

P(G inter P) = |G inter P|/|omega| = 12/256

4 Técnicas de Conteo

4.1 Principio de la multiplicación

Si un procedimiento puede ocurre de n_1 formas y si para cada una de estas formas un segundo experimento ocurre de n_2 formas, entonces los dos procedimientos juntos ocurren de $n_1 \times n_2$ formas.
Generalización: para k procedimientos o fases (experimentos/procesos)

- en la primera fase se tiene n_1 resultados
- para cada resultado de la primera fase se tiene n_2 resultados de la segunda fase
- para cada resultado de la segunda fase se tiene n_3 resultados de la tercera fase y si ...

entonces el número total de resultados de las k fases es

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$$

Ejemplo 4.1
Se puede usar la regla de la multiplicación para los siguientes casos

a) Cuantas diferentes placas de automóviles con 7 caracteres son posibles si los tres primeros campos son ocupados por letras y los 4 campos finales por números?

b) Cuantas placas de automóvil serian posibles si la repetición entre letras o números es prohibida?

Solución:
Se tiene que considerar que se tiene 10 números $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ y 26 letras del alfabeto sin considerar las letra ñ.

a) Se va denotar con el simbolo $*$ a la letras y por $\bullet$ a las letras

$*$	$*$	$*$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
26	26	26	10	10	10	10
A	A	A				

Así el número de placas diferentes es

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 26^3 \times 10^4$$

b) se tiene

$*_1$	$*_2$	$*_3$	$\bullet_1$	$\bullet_2$	$\bullet_3$	$\bullet_4$
26	25	24	10	9	8	7

El número de placas diferentes sin repetición es

$$26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7$$

Ejemplo 4.2
Una moneda honesta se lanza n veces. Cuantos resultados posibles se pueden obtener.

Solución:
Cuando una moneda se lanza una vez se tiene 2 resultados, esto es, {C, S}

1^o	2^o	3^o	$\cdots$	n^o
2	2	2	$\cdots$	2

Los resultados posibles es igual a

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$$

Ejemplo 4.3
Un dado honesto se lanza n veces. Cuantos resultados posibles se puden obtener.

Solución:
Cuando un dado es lanzado una vez se tiene 6 posibles resultados en cada lanzamiento, así

1^o	2^o	3^o	$\cdots$	n^o
6	6	6	$\cdots$	6

Los resultados posibles es igual a

$$6 \times 6 \times \cdots \times 6 = 6^n$$

4.2 Principio de la adición

Si un experimento ε_1(u operación) puede ocurrir de n_1 formas y un segundo experimento ε_2 de n_2 formas, entonces el experimento ε, que consiste en realizar ε_2 o ε_2 ocurre de

$$n_1 + n_2 \quad \text{formas,}$$

siempre que los espacios muéstrales Ω_1 y Ω_2 asociados a ε_1 y ε_2 respectivamente sean disjuntos.
Usando el lenguaje de conjuntos se tiene que:
Si A y B son conjuntos finitos tal que $A \cap B = \emptyset$ entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

El principio de Adición (PA) puede ser extendido a n conjuntos:
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geq 2$ conjuntos finitos en que son disjuntos dos a dos, $A_i \cap A_j$, $i \neq j$ entonces

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n| &= |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4
De A hacia B una persona puede viajar por aire, tierra y mar. Así, existen 3 diferentes formas de viajar por aire, 4 diferentes formas por tierra y 2 diferentes formas por mar.
Cuantas formas existen de viajar de A hacia B

Solución:
$A_1 \equiv$ viajar por aire
$A_2 \equiv$ viajar por tierra
$A_3 \equiv$ viajar por mar
$C \equiv$ viajar de A hacia B

$$\begin{aligned} |C| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &= 3 + 4 + 2 = 9 \end{aligned}$$

5 Muestras Ordenadas

Definición 5.1 (Permutación)
Una permutación es un ordenamiento o arreglo de todos o parte de un conjunto de objetos.
El número de permutaciones (ordenamientos o arreglos) diferentes de n objetos es dado por

$$P_n^n =_n P_n = n!$$

Ejemplo 5.1
¿De cuantas maneras se pueden colocar 12 niños en una fila, de manera que cuatro niños, en particular, queden juntos?

Solución:

I) Como los cuatro niños deben quedar juntos entonces estos 4 niños puedene ser considerados como una unidad, luego se tiene 9 niños, entonces las formas diferentes de ordenar 9 niños es 9!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
*	*	*	*	*	*	*	*	•			

II) Los 4 niños estando juntos pueden ser ordenados de formas diferentes, así estos 4 niños pueden ser ordenados de 4! formas diferentes

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
*	*	*	*	*	*	*	*	•			
*	*	*	*	*	*	*	*	•	•	•	•

Finalmente las formas que se pueden colocar 12 niños en una fila, de manera que cuatro niños, en particular, queden juntos es igual

$$9! \times 4! = 8709120$$

Ejemplo 5.2
¿De cuántas maneras se pueden colocar 10 personas en una fila, de manera que dos personas en particular, no queden juntas?

Solución:
Sea

- $|\Omega| \equiv$ número de formas (total) de ordenar 10 personas en una fila
- $|A| \equiv$ número de formas que las dos personas en particular queden juntas
- $|\overline{A}| \equiv$ número de formas que las dos personas en particular **no queden juntas**.

luego

$$\begin{aligned} |\Omega| &= |A| + |\overline{A}| \\ 10! &= 9! \times 2! + |\overline{A}| \\ |\overline{A}| &= 10! - 9! \times 2! = 9! \times 8 \end{aligned}$$

Si una población tiene n objetos y se desea seleccionar un muestra de tamaño k, siendo que $k < n$, y los elementos pueden ser seleccionados una de cada vez. La muestra resultante se puede visualizar como una secuencia

$$\left(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}\right)$$

El número de formas o muestras diferentes que se pueden obtener depende si el proceso es llevado con **reemplazo o sin reemplazo**

- **Muestreo con reemplazo (con devolución):** Consiste en que cada elemento extraído de la población es retornado (devuelto) a la población.
- **Muestreo sin reemplazo (sin devolución):** Consiste en que cada elemento extraído de la población y no es retornado (devuelto) a la población.

Definición 5.2 (Muestreo con reemplazo)
El número de permutaciones (formas o muestras) diferentes de k objetos tomados n objetos cuando la selección es con reemplazo es dado por

$$n^k$$

Ejemplo 5.3
Los números de teléfono en una ciudad es compuesto por 7 dígitos en secuencia. Sin embargo, el primer dígito de los números de telefono debe ser diferente de 0 ó 1. Cuantos diferentes número de telefono se pueden obtener?

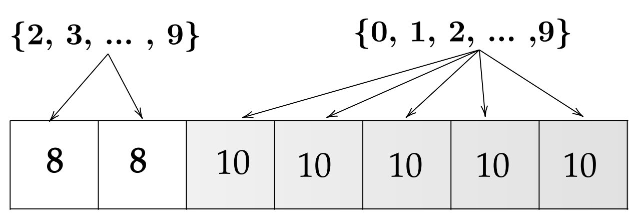
Solución:
Como se puede observar en el diagrama abajo

- los dos primero dígitos debe ser diferentes de 0 y 1 luego se tiene 8 posibles números que se pueden ser seleccionados para estos dígitos luego esto se puede ser de

$$8 \times 8 = 8^2 \quad \text{formas}$$

- los restantes 5 digitos pueden ser elegidos sin restricciones, asi para c/u de estos digitos se tiene 10 valores posibles, asi esto se puede hacer de

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5 \quad \text{formas}$$



Finalmente, los números diferentes de teléfono se pueden obtener es igual a

$$8^2 \times 10^5$$

Definición 5.3 (Permutaciones de n en k (Muestreo sin reemplazo)) orden
El número de permutaciones (formas o muestras) diferentes de k objetos tomados n objetos cuando la selección es **sin reemplazo** es dado por

$$P_k^n = P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Nótese que para este caso el **orden de los elementos en la muestra es importante**

Ejemplo 5.4
Un grupo está formado por 5 personas y desean formar una comisión integrada por presidente y secretario. ¿De cuántas maneras puede nombrarse esta comisión?

Solución:
El número grupo total de personas es igual a n=5 de los cuales se tomará k =2 personas.Nótese que se considera el orden, esto porque, existe una jerarquía en la comisión, así se tiene que calcular el número de permutaciones posibles

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20 \text{ posibles formas}$$

6 Combinaciones y Partición

Definición 6.1 (Combinación)
El número de formas de seleccionar k objetos de n objetos distintos **sin importar el orden** es dado por

$$C_k^n = \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

que es denominado una combinación o una muestra no ordenada.
También se puede indicar que se puede elegir un subconjunto (subpoblación) de tamaño k de C_k^n maneras diferentes

Ejemplo 6.1
Se extraen dos cartas de una baraja de 52 cartas. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

Solución:
Se desea seleccionar k =2 cartas de n =52 cartas, además en esta selección **no importa el orden de la selección** , así el número de formas de seleccionar dos cartas es igual a

$$C_2^{52} = \frac{52!}{2!(52-2)!} = 1326$$

Ejemplo 6.2
Un estudiante tiene que contestar 8 de 10 preguntas en un examen.

a) ¿De cuántas maneras puede el estudiante escoger las 8 preguntas?

b) Si las tres primeras preguntas son obligatorias. ¿De cuántas maneras puede elegir las preguntas?

Solución:

a) El estudiante puede elegir k =8 preguntas entre las n =10 preguntas, en esta elección **no importa el orden** de las preguntas, luego el número de seleccionar estas preguntas

$$C_8^{10} = \frac{10!}{8!(10-8)!} = 45 \text{ formas}$$

b) Como las tres primeras preguntas son obligatorias entonces el estudiante tiene que elegir 5 de las 7 preguntas restantes **sin importar el orden** para completar las 8 preguntas. Luego, el número de formas para elegir las preguntas es igual a

$$C_5^7 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = 21 \text{ formas}$$

Ejemplo 6.3
¿Cuántas comisiones integradas por un chico y una chica pueden formarse de cinco chicos y ocho chicas, si cierto chico rehúsa trabajar con dos chicas?

Solución:
Para saber cuantas comisiones son posibles con la restricción del muchacho que no puede formar grupo con dos señoritas se debe de considerar lo siguiente

- Si se elige al muchacho en particular entonces sólo se podrá elegir a 6 señoritas entre las 8 muchachas porque él no puede hacer grupo con 2 chichas en particular así el número de formas de seleccionar una señorita entre las 6 chicas es

$$C_1^6$$

- Por otro lado, si no se elige a este chico en particular entonces se puede elegir 1 muchacho entre los 4 restantes y se puede elegir una chica entre las 8 señoritas, así el número de formas para obtener una pareja es igual

$$C_1^4 \times C_1^8 = 4 \times 8 = 32$$

  Finalmente, el número de comisiones formada por una pareja (hombre y mujer) que se puede formar con la restricción que un chico no puede trabajar con dos chicas es igual a

$$C_1^6 + C_1^4 \times C_1^8 = 6 + 32 = 38$$

6.1 Particiones

Definición 6.2 (Partición)
Si se tiene n objetos de los cuales se tiene n_1 objetos de un tipo, n_2 de un segundo tipo y así sucesivamente hasta n_k objetos del tipo k, esto es,

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n,$$

entonces el número de permutaciones distintas de los n objetos es

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!},$$

que es denominado también **coeficiente multinomial**

Ejemplo 6.4
¿Cuántas palabras distintas se pueden formar permutando las letras de la palabra **papa**?

Ejemplo 6.5
En una delegación policial de una pequeño pueblo es formado por 10 policias. Si la política de la comisaria consiste en que 5 de los policias estén patrullando las calles, 2 de ellos trabajando todo el tiempo en la comisaria y los 3 restantes en la reserva. Cuantos grupos diferentes de los 10 policias en los tres grupos son posibles?