AED-10/jun/2021 Intro Procesos Estocasticos

jueves, 10 de junio de 2021 12:39

Stochastic Process

sucesión ó secuencia!

A stochastic process is a collection of random variables $\{X_t, t \in I\}$. The set I is the *index set* of the process. The random variables are defined on a common *state space* $\mathcal{S}$.

Conjunto de índices $I \to I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ tiempo discreto

$I \sim I = [0; +\infty) \to$ tiempo continuo

$S \equiv$ espacio de estados

X_t si es una v.a discreta $\Rightarrow S$ es discreto

X_t " " " " continua $\Rightarrow S$ es continuo

I (índice) S (espacio de estados)

D ED

C EC

(D, ED) ; (D, EC)

(C, D) ; (C, EC)

Ejemplos !

a) **Example 1.3 (Monopoly)** The popular board game *Monopoly* can be modeled as a stochastic process. Let $X_0, X_1, X_2 \dots$ represent the successive board positions of an individual player. That is, X_k is the player's board position after k plays.

The state space is $\{1, \dots, 40\}$ denoting the 40 squares of a Monopoly board—from Go to Boardwalk. The index set is $\{0, 1, 2, \dots\}$ Both the index set and state space are discrete.

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 40\}$$

$t = 0 \sim X_0$

$t = 1 \sim X_1$

$t = 2 \sim X_2$

$I = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \sim$ tiempo discreto

$S = \{1, 2, \dots, 40\}$

b) Medición de la lluvia

$t = 0 \sim X_0$ las mediciones son hechas por día

$t = 1, \sim X_1$ $I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$t = 2, \sim \boxed{X_2}$

$\to$ medido en litros $S = [0; +\infty)$

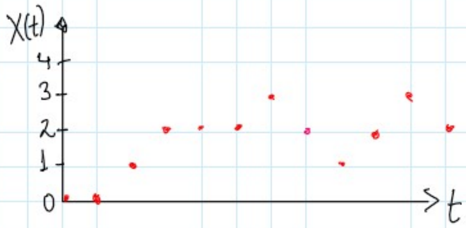
c) Número de partículas

Si se tiene un contador de partículas

$X(t) =$ cantidad de partículas en una sustancia.

$X(t)$ = cantidad de particulas en una sustancia.

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$



Example 1.5 (Continuous time, discrete state space) Danny receives text messages at random times day and night. Let X_t be the number of texts he receives up to time t. Then, $\{X_t, t \in [0, \infty)\}$ is a continuous-time stochastic process with discrete state space $\{0, 1, 2, \dots\}$.

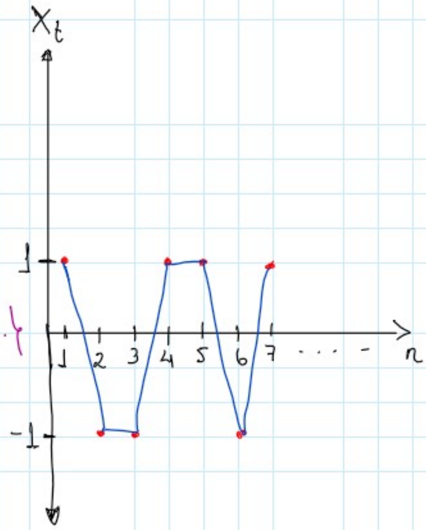
Example 1.6 (Random walk and gambler's ruin) A random walker starts at the origin on the integer line. At each discrete unit of time the walker moves either right or left, with respective probabilities p and $1 - p$. This describes a *simple random walk* in one dimension.

A stochastic process is built as follows. Let $X_1, X_2, \dots$ be a sequence of i.i.d. random variables with

$$X_k = \begin{cases} +1, & \text{with probability } p, \\ -1, & \text{with probability } 1 - p, \end{cases}$$

$S = \{+1, -1\}$

$I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$



for $k \geq 1$. Set

$S_n = X_1 + \cdots + X_n$, for $n \geq 1$, } v.a. discreta

↳ Suma

$S_n = 0$; $S_n = -3 = -1 -1 -1$
$S_n = 7$

↳ Su espacio de estados es $\mathbb{Z}$ los enteros

$S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$ } Proceso estocastico en tiempo discreto y el espacio de estados es discreto.

$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n ; n \geq 1$

↳ Es la posición despues de "n" pasos del paseo aleatorio.

Ruina del Jugador: Lanzas una moneda.

S_0 = "k" soles.

$X = \begin{cases} +1 ; & \text{si es cara, se gana 1 sol} \\ -1 ; & \text{si es sello ; se pierde 1 sol} \end{cases}$

$$X = \begin{cases} 1 ; & p \\ -1 ; & 1-p \end{cases}$$

El apostador para de jugar si gana "n" soles $(n > k)$ ó su pierde todo, esto es, se queda con "0" soles

Cual es la probabilidad q'el jugador se arruine ("0" soles)

Cual es la probabilidad q'el jugador se arruine ("0" soles)

Si $k = 20$; $p = 1/2$, $n = 60$ $\Rightarrow$ $2/3$

METODO DE MONTE CARLO PARA CALCULAR PROBABILIDADES

$$X_k = \begin{cases} 1; & \text{si el evento "A" ocurre} \\ 0, & \text{" " " " no ocurre.} \end{cases} \quad k \geq 1$$

$$P(A) \approx \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$ Si $n \to \infty$ entonces

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

TIPOS DE PROCESOS ESTOCASTICOS

Proceso de ensayos independientes
El proceso a tiempo discreto $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ puede estar constituido por variables aleatorias independientes. Este modelo representa una sucesión de ensayos independientes de un mismo experimento aleatorio, por ejemplo, lanzar un dado o una moneda repetidas veces. El resultado u observación del proceso en un momento cualquiera es, por lo tanto, independiente de cualquier otra observación pasada o futura del proceso.

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n)$

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ v.a's independientes

$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1)\, p_{X_2}(x_2) \dots p_{X_n}(x_n)$

$P(B|A) = P(B)$
$P(A|B) = P(A)$ independientes

Procesos de Markov
Estos tipos de procesos son modelos en donde, suponiendo conocido el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema. Esta condición se llama propiedad de Markov y puede expresarse de la siguiente forma: para cualesquiera estados $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ (pasado), x_n (presente), x_{n+1} (futuro), se cumple la igualdad

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n).$$

De esta forma la probabilidad del evento futuro $(X_{n+1} = x_{n+1})$ sólo depende el evento $(X_n = x_n)$, mientras que la información correspondiente al evento pasado $(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$ es irrelevante. Los procesos de Markov han sido estudiados extensamente y existe un gran número de sistemas que surgen en muy diversas disciplinas del conocimiento para los cuales el modelo de proceso estocástico y la propiedad de Markov son razonables. En particular, los sistemas dinámicos deterministas dados por una ecuación diferencial pueden considerarse procesos de Markov, pues su evolución futura queda determinada por la posición inicial del sistema y la ley de movimiento especificada.

Pasado	Presente	Futuro
X_{n-1}	X_n	X_{n+1}

$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)$

Proceso de Markov

$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$

Procesos estacionarios
Se dice que un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X_t : t \geqslant 0\}$ es estacionario en el sentido estricto si para cualesquiera tiempos $t_1, \dots, t_n$, la distribución del vector $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ es la misma que la del vector $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ para cualquier valor de $h > 0$. En particular, la distribución de X_t es la misma que la de X_{t+h} para cualquier $h > 0$.

$t_1 \; t_2 \dots t_n$

$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$

$t_1+h, t_2+h, \dots, t_n+h$

$(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$; $h > 0$

$$f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) = f(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$$

$$f(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) = f(x_{t_1+h}, \dots, x_{t_n+h})$$ $(x_{t_1+h}, x_{t_2+h}, \dots, x_{t_n+h})$; $h>0$

la distribución es la misma.

Cadenas de Markov:

Markov Chain

Let S be a discrete set. A Markov chain is a sequence of random variables $X_0, X_1, \dots$ taking values in S with the property that

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = i) \\ = P(X_{n+1} = j | X_n = i), \end{aligned} \tag{2.1}$$

for all $x_0, \dots, x_{n-1}, i, j \in S$, and $n \geq 0$. The set S is the *state space* of the Markov chain.

Si $X_n = i$, la cadena de Markov visita el estado "i" en el tiempo "n"
" " " " " toca (llega) al estado "i"

$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \equiv$ la prob. condicional que el valor futuro de la cadena en el paso "n+1" dado (condicionado) a $X_n = i$

Si el espacio de estados

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, N\}$$

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \rightarrow \begin{cases} P(X_n = 0 \mid X_n = i) \\ P(X_n = 1 \mid X_n = i) \\ \vdots \\ P(X_n = N \mid X_n = i) \end{cases}$$

Cadena de Markov en tiempo Homogeneo:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

↳ no depende de "n"

$$p(x_{n+1} = 7 \mid x_n = 10) = p(x_1 = 7 \mid x_0 = 10) = p(7 | 10)$$