Variable Aleatoria

Jhon F. Bernedo Gonzales • Ronny I. Gonzales Medina • 2020

Última revisión: 6 de noviembre de 2020

Índice

1 Variables Aleatorias

El resultado de un experimento aleatorio (ε) puede ser de naturaleza numérica o no numérica. En este sentido, se sabe que el **espacio muestral** es el conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio es denominado de espacio muestral, Ω.

Ejemplo 1.1.
Algunos ejemplos de experimentos aleatorios

- el lanzamiento de una moneda dos veces

$$\Omega =$$

- el número de carros que pasan por la avenida Independencia

$$\Omega =$$

- el resultado de un diagnóstico médico etc

$$\Omega =$$

Con frecuencia, es de interés asociar un resultado, ω (punto muestral), del espacio muestral con un número real.
A fin de asociar un punto del espacio muestral, ω con un número real se utiliza una regla de asociación (función) denominada **variable aleatoria**.

Definición 1 (Variable Aleatoria)
Una variable aleatoria (v.a) es una función que asocia un valor numérico a cada resultado, ω, del espacio muestral, Ω.
Así, una variable aleatoria es una función cuyo dominio es Ω y el rango es un subconjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

El rango de valores de la v.a X es denotada por S_X

Notación:

- En probabilidad frecuentemente una v.a es representada por **letras mayúsculas** del alfabeto, por ejemplo, X, Y, W, Z, ...
- Para representar un valor (observado) de una v.a. X se utiliza **letras minúsculas**, así un valor observado o un valor que asume X se denota por x. Nótese que, $X(\omega) = x$, esto significa que x es el valor asociado al punto muestral ω
- El rango de valores para X están en S_X,

$$S_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

que se puede escribir también de la forma

$$X = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Ejemplo 1.2.
Suponga el lanzamiento de una moneda tres veces. El espacio muestral asociado es dado por

$$\Omega = \{SSS, SSC, SCS, CSS, SCC, CSC, CCS, CCC\},$$

en que C y S representa el resultado de tener una cara y un sello respectivamente. Sea X : el número de caras obtenidas

ω	SSS	SSC	SCS	CSS	SCC	CSC	CCS	CCC
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

Se observa que X asume los valores $S_X = \{0,1,2,3\}$. Además, para cada valor de X es asociado un resultado del espacio muestral. Por ejemplo, SCS es asociado con $X = 1$, $X(\{SCS\}) = 1$, esto por el hecho que en este resultado se tiene 1 cara e 2 sellos.

Ejemplo 1.3.
Los componentes que salen de una línea de ensamble son clasificados como defectuoso o no defectuoso. Se puede definir la v.a X

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el componente es defectuoso} \\ 0 & \text{si el componente no es defectuoso} \end{cases}$$

La asignación de 1 ó 0 es arbitraria, sin embargo se puede usar otros valores, tales como -1 y 1, pero generalmente se usa 1 y 0. Una v.a que asume sólo 2 valores (generalmente son 0 y 1) se llama **variable aleatoria de Bernoulli**

Existen varios tipos de variables aleatorias tales como

a) discreta

b) continua

c) mixtas: discreta y continua

Con frecuencia se estudian las dos primeras variables aleatorias esto es las variables aleatorias discreta y continua.

2 Variable Aleatoria Discreta

Definición 1 (Variable Aleatoria Discreta)
Una v.a. X se dice que es **discreta** si el rango de valores de X asume un conjunto finito o infinito numerable de valores.

Ejemplo 2.1.
El número de hijos de un matrimonio, la pareja puede tener ningún hijo, 1 hijos, 2 hijos .... Así X puede asumir los valores, $X = 0, 1, 2, 3, \ldots, 50$.

Ejemplo 2.2.
Sea X el número de lanzamientos necesarios de una moneda hasta obtener una cara.

$$\Omega = \{C, SC, SSC, SSSC, SSSSC, SSSSSC, \ldots\}.$$

el rango de valores para X es $X = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ (infinito)

Ejemplo 2.3.
Tres estudiantes agendan entrevistas para un empleo de verano en el Brookwood Institute. En cada caso el resultado de la entrevista será una oferta de trabajo o ninguna oferta. Los resultados experimentales se definen en términos de los resultados de las tres entrevistas.

- Enumere los resultados experimentales.
- Defina una variable aleatoria que represente el número de ofertas de trabajo.
- Dé el valor de la variable aleatoria que corresponde a cada uno de los resultados experimentales

Ejemplo 2.4.
A partir de una hora fija, cada carro que entra a una intersección es observado para ver si da vuelta a la izquierda (L), la derecha (R) o si sigue de frente (A). El experimento termina en cuanto se observa que un carro da vuelta a la izquierda. Sea X: el número de carros observados. ¿Cuáles son los posibles valores de X? Dé cinco resultados y sus valores X asociados.

Definición 2 (Distribución de Probabilidad para una v.a Discreta)

La **función discreta de probabilidad** o **función de probabilidad** (fp) de X es definida para cada valor de $X = x$

$$p(x_i) = \mathbf{P}_X(X = x_i) = \mathbf{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i) \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Así, una función de probabilidad, $p(x_i)$, satisface

- $p(x_i) \geq 0$, para $i = 1, 2, 3, \ldots$
- La suma de todas las probabilidades para cada valor x_i es igual a uno

$$\sum_{i \geq 1} p(x_i) = 1$$

La función de probabilidad $p(x)$ es también denominada **función masa de probabilidad** (fmp) ó distribución de probabilidad.

Ejemplo 2.5.

Considerando el Ejemplo 1 en que la v.a. X es el número de caras observadas despues del lanzamiento de una moneda 3 veces.

X	0	1	2	3
ω	{SSS}	{SSC, SCS, CSS}	{SCC, CSC, CCS}	{CCC}

Si la probabilidad de salir 1 cara es $\mathbf{P}(C) = \boldsymbol{p}$, y de salir sello es $\mathbf{P}(S) = \mathbf{1} - \boldsymbol{p}$. Así, la probabilidad de obtener CSS es dada por

$$P(C \cap S \cap S) = P(CSS) = \mathbf{P}(C)\,\mathbf{P}(S)\,\mathbf{P}(S) = p(1-p)(1-p) = p(1-p)^2$$

Se puede calcular de manera similar as probabilidades para los otros resultados que están en el espacio muestral Ω

ω	$\mathbf{P}(\omega)$
SSS	$(1-p)^3$
SSC	$(1-p)^2 p$
SCS	$(1-p)^2 p$
CSS	$(1-p)^2 p$
SCC	$(1-p)p^2$
CSC	$(1-p)p^2$
CCS	$(1-p)p^2$
CCC	p^3
total	1.00

Considerando la tabla anterior se tiene

$$
\begin{aligned}
p(0) &= \mathbf{P}_X(X = 0) = P(SSS) = (1-p)^3 \\
p(1) &= \mathbf{P}_X(X = 1) = P(SSC \text{ o } SCS \text{ o } CSS) = 3(1-p)^2 p \\
p(2) &= \mathbf{P}_X(X = 2) = P(SCC \text{ o } CSC \text{ o } CCS) = 3(1-p)p^2 \\
p(3) &= \mathbf{P}_X(X = 3) = P(CCC) = p^3.
\end{aligned}
$$

Finalmente se tiene la **función de probabilidad de** X

$X = x$	$p(x)$
0	$(1-p)^3$
1	$3(1-p)^2 p$
2	$3(1-p)p^2$
3	p^3
total	1.00

Observación: Una moneda es denominada sesgada o no equilibrada si la probabilidad de salir cara es mayor o menor de la probabilidad de salir sello,

$$\mathbf{P}(C) < \mathbf{P}(S) \qquad \text{ó} \qquad \mathbf{P}(C) > \mathbf{P}(S).$$

Se $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(S)$, entonces se dice que la moneda es denominada equilibrada, honesta, no sesgada ...

Ejemplo 2.6.
Considerando el ejemplo anterior, si la moneda es equilibrada entonces $p = 1/2$ y así la distribución de probabilidad de X es dada por

X	$p(x)$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
1	$3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$
2	$3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
total	1

Ejemplo 2.7.
Una v.a X asume valores en el conjunto $(-1, 0, 1)$ en que las probabilidades para cada valor es dada por ¿Qué valor debe asumir k para que $p(x)$ sea una distribución de probabilidad?

X	$p(x)$
-1	$k/4$
0	k
1	$k/2$

Solución:
Por definición se sabe que $\sum_i p(x_i) = 1$, luego

$$p(-1) + p(0) + p(1) = 1$$
$$\frac{k}{4} + k + \frac{k}{2} = k\left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2}\right) = 1$$

así no es difícil calcular que $k = 4/7$.

Definición 3 (Función de Distribución)
La función de distribución (fd) $\mathbf{F}_X(x)$ de una v.a. discreta X con función de probabilidad $p(x)$ es definida por

$$\mathbf{F}_X(x) = \mathbf{P}_X(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i),$$

para cualquier número real x.

Notas:

- Si se conoce la fmp $p(x)$ de la v.a discreta X es posible contruir $\mathbf{F}_X$ y viceversa.
- $\mathbf{F}_X(x)$, es llamada tambien como función de probabilidad acumulada (fpa), en algunos textos lo conocen como **función de distribución acumulativa (fda).**
- Se utiliza la notación simplificada $\mathbf{F}(x)$ para indicar la función de distribución $\mathbf{F}_X(x)$.

Ejemplo 2.8.
Sea X una v.a. discreta con función de probabilidad dada por

X	$p(x)$
1	2/10
2	3/10
3	2/10
4	3/10

Nótese que X asume los valores de $X = 1, 2, 3, 4$. El procedimiento para determinar la función de distribución acumulada es de la siguiente forma

$$\begin{aligned} F(1) &= P(X \le 1) = P(X = 1) = 2/10 \\ F(2) &= P(X \le 2) = P(X = 1 \text{ o } X = 2) \\ &= P(X = 1) + P(X = 2) = 5/10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(3) &= P(X \le 3) = P(X = 1 \text{ o } X = 2 \text{ o } X = 3) \\ &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 7/10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(4) &= P(X \le 4) = P(X = 1 \text{ o } X = 2 \text{ o } X = 3 \text{ o } X = 4) \\ &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{10}{10} = 1 \end{aligned}$$

Así la función de distribución acumulada de X es dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1; \\ 2/10 & \text{si } 1 \le x < 2; \\ 5/10 & \text{si } 2 \le x < 3; \\ 7/10 & \text{si } 3 \le x < 4; \\ 1 & \text{si } x \ge 4. \end{cases}$$

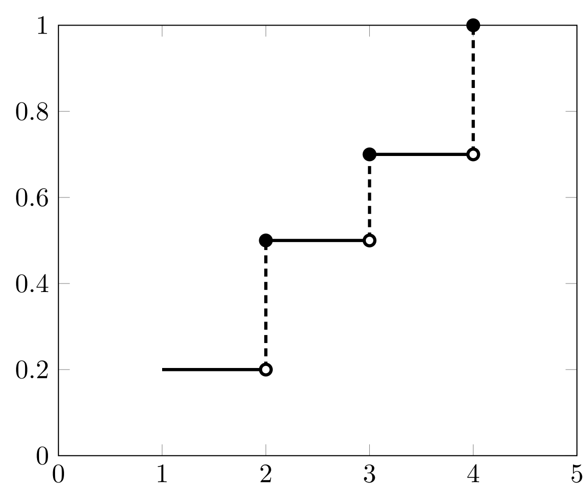


Figura 2.1: Distribución acumulada.

Nótese que la función de probabilidad es definida para cualquier número real. Por ejemplo

- $F(2.5) = P(X \le 2.5) = 5/10 = 1/2$

- $F(3.1) = P(X \leq 3.1) = 7/10$
- $F(1.955) = P(X \leq 1.955) = 2/10$

Ejemplo 2.9.
El departamento de planeación de un municipio requiere que un contratista presente uno, dos, tres, cuatro o cinco formas (según la naturaleza del proyecto) para solicitar un permiso de construcción. Sea Y el número de formas requeridas del siguiente solicitante. Se sabe que la probabilidad de que se requieran y formas es proporcional a y, es decir, $p(y) = ky$, con $y = 1, \ldots, 5$

a) Cuál es el valor de k?

b) Cuál es la probabilidad de que cuando mucho se requieran tres formas?

c) Podría ser $p(y) = y^2/50$ con $y = 1, ..., 5$ la función masa de probabilidad de Y?

Solución:

a) Cuál es el valor de k?

Y	$p(y)$
1	k
2	$2k$
3	$3k$
4	$4k$
5	$5k$
total	1.00

b) Calcule la probabilidad de que cuando mucho se requieran tres formas

$$\mathbf{P}(Y \leq 3) =$$

c) Podría ser $p(y) = y^2/50$ con $y = 1, ..., 5$ la función masa de probabilidad de Y?

Ejemplo 2.10.
Una compañía de seguros ofrece a sus asegurados varias opciones diferentes de pago de primas. Para un asegurado seleccionado al azar, sea X = el número de meses entre pagos sucesivos. La función de distribución acumulativa es la siguiente:

$$\mathbf{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1; \\ 0.30 & \text{si } 1 \leq x < 3; \\ 0.40 & \text{si } 3 \leq x < 4; \\ 0.45 & \text{si } 4 \leq x < 6; \\ 0.60 & \text{si } 6 \leq x < 12; \\ 1.00 & \text{si } x \geq 12 \end{cases}$$

a) Cuál es la función de masa de probabilidad de X?

X	$p(x)$
1	
3	
4	
6	
12	
total	1.00

b) Calcule

- $\mathbf{P}(3 \leq X \leq 6) =$
- $\mathbf{P}(4 \leq X) =$

Ejemplo 2.11.
Sea X una v.a discreta con fmp

$$p(x) = \mathbf{P}(X = x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Muestre que $p(x)$ es efectivamente una fmp.

3 Variable Aleatoria Continua

Definición 1 (Variable Aleatoria Continua)

Una v.a. X se dice que es **continua** si el conjunto de posibles valores de X consiste en un **intervalo** de recta de los números reales $\mathbb{R}$, esto es, un conjunto infinito (no numerable) de números reales. Esto es equivalente a decir que X es una v.a **contínua** si $\mathbf{P}(X = x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. También, X es una v.a continua si y solo si $\mathbf{F}_X$ es continua en $\mathbb{R}$.

Frecuentemente se estudia un tipo de variable continua que se presenta en muchos casos y aplicaciones. Esta tipo de v.a continua es denominada v.a **absolutamente continua**.

Definición 2 (Variable Absolutamente Continua)

Sea X una v.a continua, X es una v.a **absolutamente continua** si existe una función, $f_X = f$, no negativa definida en $\mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{F}_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du,$$

en que f_X es llamada **función de densidad** de X.

Notas:

a) $f_X(x)$ es denominada **función de densidad de probabilidad (fdp)**.

b) Siempre que no haya confusión la fdp $f_X(x)$ de X será denota por $f(x)$.

c) Una X una v.a que no es discreta ni continua es denominada v.a mixta.

Ejemplo 3.1.

Un compuesto químico es seleccionado aleatoriamente y se desea determinar su pH. Sea X que indica o pH del compuesto químico, entonces, X es una v.a. continua porque cualquier valor de pH puede estar entre 0 e 14. Por ejemplo, el pH de una cerveza esta alrededor de $4 \leq X \leq 5$.

Ejemplo 3.2.

Sea X la v.a definida como el tiempo que pasa (en horas), para que un radar detecte entre conductores sucesivos a los que exceden los límites de velocidad. La variable aleatoria X asume valores x tal que $x \geq 0$, de esta X es una v.a continua.

Observación: Generalmente todo lo que esta relacionado con mediciones y proporción son variables aleatorias continuas. Por ejemplo: la longitud de una hoja, el peso de una persona, tiempo de vida útil de aparato electrónico, la proporción de personas que consumen una cierta bebida ...

Definición 3 (Función de densidad de probabilidad)

Sea X una v.a. continua. La distribución de probabilidad o **función de densidad de probabilidad (fdp)** de X es una función $f(x)$ tal que, para cualquier dos números a e b ($a \leq b$) se tiene que

$$\mathbf{P}(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Así, para que a función $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad, $f(x)$ debe satisfacer dos condiciones a seguir

I) $f(x) \geq 0$ para todo número real x

II) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

El gráfico de la función densidad $f(x)$ es denominada curva de densidad y esta encima del eje de las abscisas. Nótese que el área abajo de la curva de $f(x)$ por definición es igual a 1.

Observación: Se X es una v.a. contínua entonces la probabilidad de X para cualquier valor en los números reales es igual a cero,

$$\mathbf{P}(X = x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La probabilidad de una v.a. continua X asuma un determinado valor en algún intervalo, por ejemplo, $[a, b]$ es dada por la área sobre la curva comprendida entre $x = a$ e $x = b$ como se puede observar en la figura de abajo

Si X es una v.a. continua entonces

$$\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \mathbf{P}(a \leq X < b) = \mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(a < X < b)$$

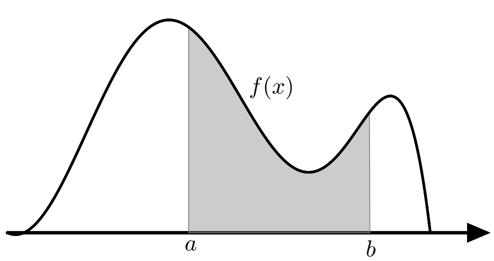


Figura 3.1: $P(a \leq x \leq b)$ = área abajo da curva

Ejemplo 3.3.
El tiempo de vida útil (**en años**) de un equipo electrónico de un determinado tipo puede ser expresado por una v.a. continua X, cuya función de densidad es

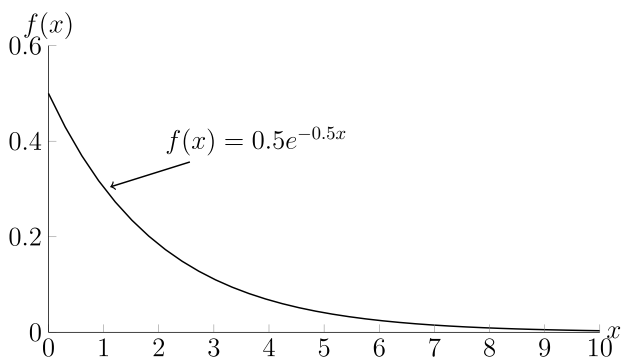
$$f(x) = \begin{cases} 0.5e^{-0.5x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Determine la probabilidad de que el equipamiento dure:

a) más de 3 años

b) entre 6 y 18 meses

Solución:
A fin de calcular las probabilidades que fueron pedidos en los items **(a)** y **(b)** se debe considerar el hecho que X es una v.a. contínua y así X asume valores en un **intervalo** de la reta de los números reales. La Figura de abajo muestra el gráfico de la función densidad de probabilidad (curva de densidad).



a) mas de tres años significa todos los valores mayores que 3 o sea el conjunto de valores $(X > 3)$ y nótese que ese conjunto es el intervalo $]3, \infty[$, luego

$$\begin{aligned} P(X > 3) = P(3 < x < +\infty) &= \int_3^{+\infty} f(x)dx \\ &= \int_3^{+\infty} 0.5e^{-0.5x}dx \\ &= -e^{-0,5x}\Big|_3^{+\infty} \\ &= -e^{-\infty} + e^{-1,5} \\ &= 0 + e^{-1,5} = 0.2231 \end{aligned}$$

Esto quiere decir que aproximadamente el 22,3 % de los equipamientos de este tipo duran mas de tres años.

b) entre seis y 18 meses significa que X esta en el intervalo $0.5 < x < 1.5$ (fue convertido en años), luego

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(0.5 < x < 1.5\right) &= \int_{0.5}^{1.5} f(x)dx \\
&= \int_{0.5}^{1.5} 0.5e^{-0.5x}dx \\
&= -e^{-0.5x}\Big|_{0.5}^{1.5} \\
&= -e^{-0.5(1.5)} + e^{-0.5^2} = 0.3064
\end{aligned}$$

Aproximadamente el 30,6 % de los casos, el tiempo de vida del equipamiento varia entre seis y 18 meses.

La Figura de abajo muestra las áreas debajo de la curva para os items anteriores.

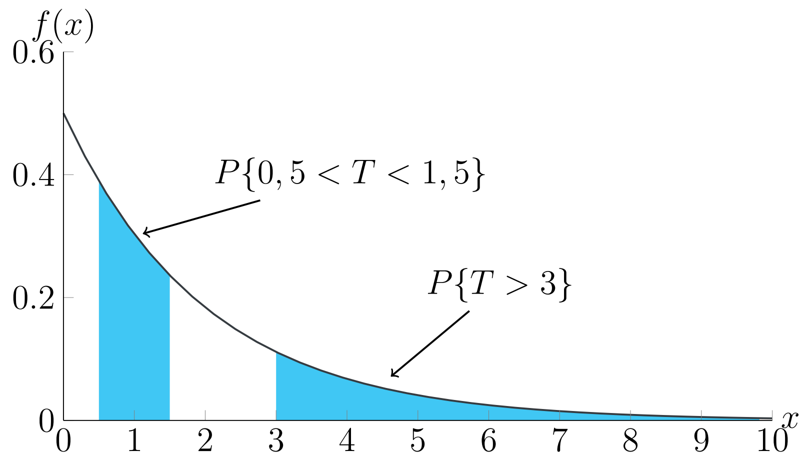


Figura 3.2: Probabilidades (área abajo de la curva) para los itens **a** e **b** .

Definición 4 (Función de distribución acumulativa)

Sea X una v.a. contínua, con función densidad $f(x)$, la función de distribución acumulativa (fda) $\mathrm{F}(x)$ de X es definida por

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}(\mathrm{X} \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du, \quad \text{para todo número } x \in \mathbb{R}$$

Nótese que, para cada x, $\mathrm{F}(x)$ es el área abajo de la curva de densidad a la izquierda de x.

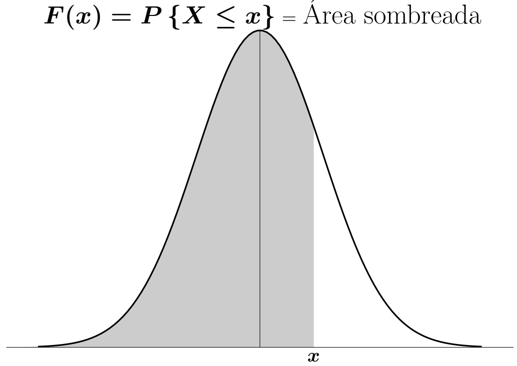


Figura 3.3: Función de distribución acumulada $\mathrm{F}(x)$.

La función de distribución acumulativa $\mathrm{F}(x)$ tiene las siguientes propiedades

a) Se X es una v.a. contínua con fdp $f(x)$ y fda $\mathrm{F}(x)$ entonces, para cualquier valor de x en que la derivada $\mathrm{F}'(x)$ existe, se tiene que

$$f(x) = \frac{d\mathbf{F}(x)}{dx} = \mathbf{F}'(x)$$

b) F es una función no decreciente, osea, $x < y$ implica $\mathrm{F}(x) \leq \mathrm{F}(y)$

c) $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{F}(x) = 0$

d) $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{F}(x) = 1$

e) Para cualquier número real a,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathrm{X} > a) &= 1 - \mathbf{P}(\mathrm{X} \leq a) \\ &= 1 - \mathrm{F}(a) \end{aligned}$$

f) Sean a y b dos números reales, con $a < b$,

$$\mathbf{P}(a \leq \mathrm{X} \leq b) = \mathbf{P}(a \leq \mathrm{X} < b) = \mathbf{P}(a < \mathrm{X} \leq b) = \mathbf{P}(a < \mathrm{X} < b) = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$$

Ejemplo 3.4.
Sea la v.a. contínua X presentado en el Ejemplo 3.3. El calculo de la fda de X, $F(x)$, es dada por
Si $x < 0$ a fdp de X es cero, esto es, $f(x) = 0$. Así

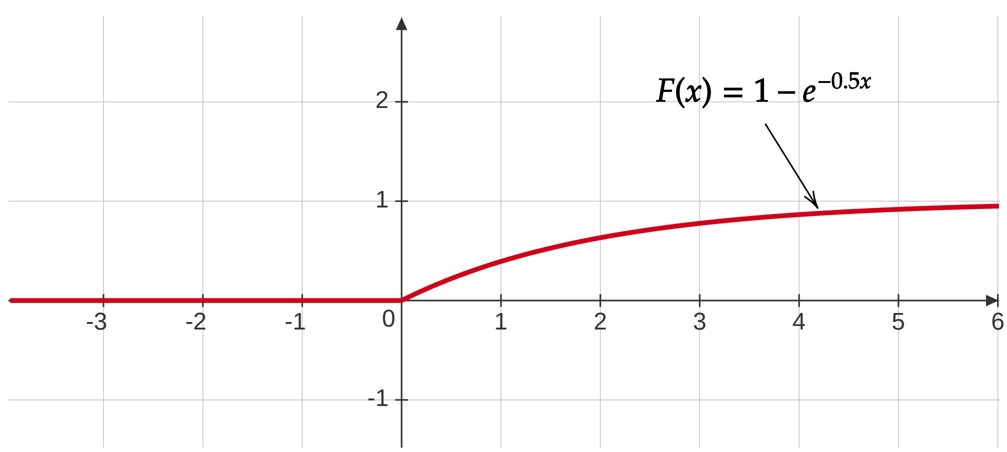
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{x} 0du = 0$$

Ahora si $x \geq 0$, se tiene que la fdp es dada por $f(x) = 0.5e^{-0.5x}$

$$\begin{aligned} F(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{x} f(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{x} 0.5e^{-0.5u}du \\ &= 1 - e^{-0.5x} \end{aligned}$$

Por tanto a fda para X é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-0.5x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



El porcentaje de los equipos electrónicos que duran mas de 18 meses puede calcular por medio de $F(x)$

$$\begin{aligned} P(X > 1.5) &= 1 - P(X \leq 1.5) = 1 - F(1.5) \\ &= 1 - (1 - e^{-0.5\times1.5}) \\ &= e^{-0.5\times1.5} \approx 0.472 \end{aligned}$$

4 Valor Esperado

Definición 1 (Valor Esperado ó Esperanza)

i) Sea X una v.a discreta con fmp, $p(x)$, el valor esperado de X es definido como

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i\geq 1} x_i p(x_i)$$

ii) Si X una v.a continua con fdp, $f(x)$, el valor esperado de X es dado por

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

El valor esperado $\mathbf{E}[X]$ es conocido también como esperanza o média.
Por otro lado, si $\mathbf{E}[X] < \infty$ se dice que la $\mathbf{E}[X]$ existe y si $\mathbf{E}[X] = \infty$ se dice que $\mathbf{E}[X]$ no existe.
Notación: Frecuentemente se usa la notación

$$\mu = \mu_X = \mathbf{E}[X] \quad \text{media}$$

4.1 Algunas Propiedades

Sean X y Y v.a's con valor esperado finito y sean a, b y c constantes, se tiene las siguientes propiedades

(a) Si c es una constante entonces $\mathbf{E}[c] = c$

(b) Si c es una constante

$$\mathbf{E}[cX] = c\mathbf{E}[X]$$

(c) Si a y b son constantes entonces

$$\mathrm{E}[aX + b] = a\mathrm{E}[X] + b$$

(d) Si $X \leq Y$ entonces $\mathbf{E}[X] \leq \mathbf{E}[Y]$

(e) La esperanza de la suma de variables aleatorias es igual a la suma de la esperanzas

$$\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$$

(f) Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son v.a's entonces

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] + \ldots + \mathbf{E}[X_n]$$

Ejemplo 4.1.
Una moneda está cargada de manera que la probabilidad de ocurrencia de una cara es tres veces mayor que la de sello. Encuentre el número esperado de caras cuando se lanza dos veces esta moneda.

E[X]

Solución: X: numero de caras en dos veces el lanzamiento de una moneda

la probabilidad de ocurrencia de una cara es tres veces mayor que la de sello, $\mathbf{P}(C) = 3\mathbf{P}(S)$

$$\mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(S) = 1$$
$$3\mathbf{P}(S) + \mathbf{P}(S) = 1 \rightarrow \mathbf{P}(S) = 1/4 \Rightarrow \mathbf{P}(C) = 3/4$$

ω	$\mathbf{P}(\omega)$
SS	$\mathbf{P}(SS) = \mathbf{P}(S)\mathbf{P}(S) = (1/4)\times(1/4) = 1/16$
SC	$\mathbf{P}(\cancel{SS}) = \mathbf{P}(S)\mathbf{P}(C) = (1/4)\times(3/4) = 3/16$
CS	$\mathbf{P}(\cancel{SS}) = \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(S) = (3/4)\times(1/4) = 3/16$
CC	$\mathbf{P}(\cancel{SS}) = \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(C) = (3/4)\times(3/4) = 9/16$
total	1.00

	$X = x$	$p(x)$	$xp(x)$
{SS}	0	1/16	$0\times(1/16)$
{SC, CS}	1	6/16	$1\times(6/16)$
{CC}	2	9/16	$2\times(9/16)$
	total	1.00	24/16

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i\geq 1} x_i p(x_i) = 24/16 = 1.5$$

aprox a 2

se aproximar a 1

Ejemplo 4.2.
Un distribuidor de enseres para el hogar vende tres modelos de congeladores verticales de 13.5, 15.9 y 19.1 m^3 de espacio de almacenamiento, respectivamente. Sea $X \equiv$ la cantidad de espacio de almacenamiento adquirido por el siguiente cliente que compre un congelador. Suponga que X tiene la función masa de probabilidad

x	13.5	15.9	19.1
$p(x)$	0.2	0.5	0.3

a) Calcule $\mathbf{E}[X]$

b) Si el precio de un congelador de X m^3 de capacidad es $\overset{\text{precio}}{25X - 8.5}$, ¿cuál es el **precio esperado** pagado por el siguiente cliente que compre un congelador?

Solución:

a) Calcule $\mathbf{E}[X]$

x	$p(x)$	$xp(x)$
13.5	0.2	13.5×0.2
15.9	0.5	15.9×0.5
19.1	0.3	19.1×0.3
total	1.00	16.38

Luego $\mathbf{E}[X] = \sum_{i\geq 1} x_i p(x_i) = 16.38$

(c) Si a y b son constantes entonces

$$\mathrm{E}[aX + b] = a\mathrm{E}[X] + b$$

b) Un congelador de X m^3 de capacidad tiene un precio de $25X - 8.5$. Calcule el **precio esperado** a pagar por un cliente que compre un congelador

$$\mathbf{E}[25X - 8.5] = 25\mathbf{E}[X] - 8.5 = 25(16.38) - 8.5 = 401$$

Ejemplo 4.3.
El tiempo de vida útil (**en años**) de un equipo electrónico de un determinado tipo puede ser expresado por una v.a. continua X, cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 0.5e^{-0.5x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Calcule la esperanza de la v.a X

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x \cdot 0.5e^{-0.5x}dx \\
&= -x \cdot e^{-0.5x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-0.5x}dx \\
&= 0 + \frac{-1}{0.5}e^{-0.5x}\Big|_0^\infty = 2
\end{aligned}$$

Se espera que el tiempo de vida útil **en años** del equipo electrónico es de 2 años. Nótese que es necesario utilizar la regla de regla de L'Hôpital y el método de integración por partes para obtener **E**[X]. Recuerde que

$$\int udv = uv - \int vdu$$

5 Varianza

Definición 1 (Varianza de una variable aleatoria)
La varianza de la v.a X es definida por

$$\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2]$$

Una forma alternativa de la varianza que es frecuentemente usada es dada por

$$\boxed{\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2}$$

Notación:
La varianza de X puede ser denotado por $\sigma_X^2 = \mathbf{Var}[X]$.
Nótese que el valor esperado $\mathbf{E}[X]$ se denota por $\mu = \mathbf{E}[X]$.

i) Si X es una v.a discreta la varianza de X es definido por

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{i\geq 1} (x_i - \mu)^2 p(x_i) \\ &= \sum_{i\geq 1} x_i^2 p(x_i) - \mu^2\end{aligned}$$

$\mathbf{E}[X^2]$

ii) Si X es una v.a continua la varianza de X es dada por

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2\end{aligned}$$

- Si $\mathbf{Var}[X] < \infty$ se dice que varianza existe. En el caso que $\mathbf{Var}[X] = \infty$ se dice que la varianza no existe.
- La varianza es una medida de dispersión.
- La desviación estándar es definida como la raíz cuadrada de la varianza

$$\sigma = \sqrt{\mathbf{Var}[X]}$$

- En física, la varianza esta relacionada con el momento de inercia.

5.1 Propiedades

a) Si c es una constante entonces $\mathbf{Var}[c] = 0$

b) Sea X una v.a y c una constante
$$\mathbf{Var}[cX] = c^2\mathbf{Var}[X]$$

c) Si a y b son constantes
$$\mathbf{Var}[aX + b] = a^2\mathbf{Var}[X]$$

d) La varianza de la suma de variables aleatorias no necesariamente es igual a la suma de las varianzas de las va's
$$\mathbf{Var}[X_1 + X_2] \neq \mathbf{Var}[X_1] + \mathbf{Var}[X_2]$$

Observación: En finanzas la desviación estándar es una medida del riesgo. Por ejemplo, si la desviación estándar del precio de una acción (en la bolsa de valores) X es σ_X y de una acción Y es σ_Y entonces si $\sigma_X < \sigma_Y$ se dice que el precio de X tiene menor riesgo.

Ejemplo 5.1.
Sea X el número observado cuando se lanza un dado honesto, calcule $\mathbf{Var}[X]$

Solución:

X	$p(x)$	$xp(x)$	$x^2p(x)$
1	1/6	1/6	1/6
2	1/6	2/6	$2^2\times 1/6$
3	1/6	3/6	$3^2\times 1/6$
4	1/6	4/6	$4^2\times 1/6$
5	1/6	5/6	$5^2\times 1/6$
6	1/6	6/6	$6^2\times 1/6$
suma	1.00	21/6	91/6

El valor esperado (media) es dado por
$$\mu = \mathbf{E}[X] = \sum_{i\geq 1} x_i p(x_i) = 21/6$$

Luego la varianza
$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] &= \sum_{i\geq 1} x_i^2 p(x_i) - \mu^2 \\ &= \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{35}{12} \approx 2.9167\end{aligned}$$

Nótese que la desviación estándar es dado por $\sigma = \sqrt{35/12} \approx 0.7078$

Ejemplo 5.2.
Un distribuidor de enseres para el hogar vende tres modelos de congeladores verticales de 13.5, 15.9 y 19.1 m^3 de espacio de almacenamiento, respectivamente. Sea $X \equiv$ la cantidad de espacio de almacenamiento adquirido por el siguiente cliente que compre un congelador. Suponga que X tiene la función masa de probabilidad

x	13.5	15.9	19.1
$p(x)$	0.2	0.5	0.3

a) Calcular la $\mathbf{Var}[X]$

b) El precio de un congelador de Xm^3 de volumen es igual a $25X - 8.5$, calcule $\mathbf{Var}[25X - 8.5]$

Solución:

X	$p(x)$	$xp(x)$	$x^2p(x)$
13.5	0.2	2.7	$13.5^2 \times 0.2 = 36.45$
15.9	0.5	7.95	$15.9^2 \times 0.5 = 126.405$
19.1	0.3	5.73	$19.1^2 \times 0.3 = 109.443$
suma	1	16.38	272.298

a) De la tabla anterior se tiene $\mu = \mathbf{E}[x] = 16.38$, luego

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] &= \sum_{i\geq 1} x_i^2 p(x_i) - \mu^2 \\ &= 272.298 - 16.38^2 = 3.9936\end{aligned}$$

b) La varianza del precio $25X - 8.5$

$$\mathbf{Var}[aX + b] = a^2\mathbf{Var}[X]$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}[25X - 8.5] &= 25^2\mathbf{Var}[X] \\ &= 625(3.9936) = 2496\end{aligned}$$

La desviación estandar es dado por $\sigma = \sqrt{2496} \approx 49.96$

Ejemplo 5.3.
Una compañía de productos químicos en la actualidad tiene en existencia 100 lb de un producto químico, el cual se vende a sus clientes en lotes de 5 lb. Sea X: el número de lotes solicitados por un cliente seleccionado al azar y suponga que X tiene la función masa de probabilidad

x	1	2	3	4
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

a) Calcule $E[X]$ y $Var[X]$

b) Calcule el **número esperado** de libras que quedan una vez que se envía el pedido del siguiente cliente y la varianza del número de libras sobrantes.

   Sugerencia: El número de libras que restan del producto químico es $100 - 5X$

Ejemplo 5.4.
Para el Ejemplo (4.3), Calcule la varianza de la v.a X

Solución:
En el Ejemplo (4.3) se sabe que $\mathbf{E}[X] = 2$, así

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E[X])^2 \\
&= \int_{0}^{+\infty} x^2 \cdot 0.5e^{-0.5x} dx - (2)^2
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} x^2 \cdot 0.5e^{-0.5x} dx &= -x^2 \cdot e^{-0.5x}\Big|_0^{\infty} - \int_{0}^{+\infty} 2x \cdot \left[-e^{-0.5x}\right] dx \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} x \cdot e^{-0.5x} dx = 2\left(-x \cdot \frac{e^{-0.5x}}{0.5}\Big|_0^{\infty} - \int_{0}^{+\infty} \frac{-e^{-0.5x}}{0.5} dx\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{0.5^2} - e^{-0.5x}\Big|_0^{\infty}\right) = 2(4) = 8
\end{aligned}$$

Luego la varianza de X es dada por

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] = 8 - 2^2 = 4 \text{ años}^2,$$

y la desviación estándar es igual a $\sigma = \sqrt{4} =$ 2 años