Independencia: Caso discreto:

Sean X y Y dos variables aleatorias discretas con función de probabilidad $f(x,y)$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } x,y \in \{0,1\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \rightsquigarrow p(0,0) = p(0,1) = p(1,0) = p(1,1) = 1/4$$

Es X y Y v.a's discretas independientes?

Solución:

$$X = 0, 1 \quad ; \quad Y = 0, 1$$

$$P_{X,Y}(x,y) = p(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

$$P_X(x) = \sum_y p(x,y) = \sum_{y=0}^{1} p(x,y) = p(x,0) + p(x,1)$$

$$P_X(x) = p(x,0) + p(x,1) \quad | \quad X = 0, 1$$

$$P_X(1) = p(1,0) + p(1,1) = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

$$P_X(0) = 1/2$$

$$P_X(x) = \begin{cases} 1/2 ; & x = 0, 1 \\ 0 , & c.c. \end{cases}$$

$$P_Y(y) = \begin{cases} 1/2 ; & y = 0, 1 \\ 0 ; & c.c. \end{cases}$$

$$p(x,y) = \frac{1}{4} = P_X(x) P_Y(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

X, Y son v.a's independientes!

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \; ; \quad P(A) \neq 0$$

Caso Continuo: Densidad Condicional

$$(X,Y) \sim f(x,y)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad ; \quad f_Y(y) \neq 0$$

fijo (y)

X|Y Es una variable aleatoria

└ X|Y → fdp

fijo

↳ $X|Y \to$ fdp
↳ fmp

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \; ; \; f_X(x) \neq 0$$

fijo

Caso discreto:

$$(X,Y) \to p(x,y)$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} \; ; \; p_Y(y) \neq 0$$

↳ fijo

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} \; ; \; p_X(x) \neq 0$$

↳ fijo

Nota: Si X y Y son independientes:

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \; ; \; f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

$$p_{X|Y}(x|y) = p_X(x) \; ; \; p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)$$

Ejemplo 1

Sea (X, Y) un vector aleatorio discreto con función de probabilidad dada por la siguiente tabla.

X\Y	0	1	2	3	total
0	1/10	1/10	2/10	1/10	5/10
1	1/10	2/10	1/10	1/10	5/10
total	2/10	3/10	3/10	2/10	1.00

$\to p_X(x)$ $\quad p_X(0) = 5/10 \; ; \; p_X(1) = 5/10$

$p_Y(0)$ $\quad p_Y(y)$

Calcular: $p_{X|Y}(x|y) = ?$ si $y = 0, 1, 2, 3$

fijo

Fijando: $Y = 1 \to p_{X|Y=1}(x|y=1) = \dfrac{p(x,1)}{p_Y(y=1)}$ distribución de probabilidad

$p_{X|Y}(x|1) \to p_{X|Y}(0|1)$

$p_{X|Y}(1|1)$

$$x = 0 \; ; \; p_{X|Y}(0|y=1) = \frac{p(0,1)}{p_Y(1)} = \frac{1/10}{3/10} = 1/3$$

$$p_{X|Y}(x|y=1) = \begin{cases} 1/3 \; ; & x = 0 \\ 2/3 \; ; & x = 1 \end{cases}$$

$$x = 1 ; \quad p_{X/Y}(1|y=1) = \frac{p(1,1)}{p_Y(1)} = \frac{2/10}{3/10} = 2/3$$

$$p_{X/Y}(x|y=1) = \begin{cases} \ldots \\ 2/3 ; x = 1 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ $P_{X/Y}(x|y=0)$; $P_{X/Y}(x|y=2)$; $P_{Y/X}(x|y=3)$

Ejempo 2: Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } 0 < x, y < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule: a) $f_{X/Y}(x|y)$; y es fijo en $Y \in (0,1)$

b) $f_{Y/X}(y|x)$; x es fijo en $x \in (0,1)$

Solución:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad ; \quad f(x,y) = \begin{cases} x+y & ; 0 < x, y < 1 \\ 0 & ; \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 (x+y)\,dx = \frac{x^2}{2} + xy \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + y = \frac{1+2y}{2}$$

Luego:

- $$f_{X|Y}(x|y) = \frac{(x+y)}{\frac{(1+2y)}{2}} = \frac{2(x+y)}{(1+2y)} \rightsquigarrow f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{2(x+y)}{(1+2y)} & ; x \in (0,1) \\ 0 & ; \text{c.c.} \end{cases}$$

  $\hookrightarrow$ y fijo ; $y \in (0,1)$

- $$f_{X|Y}(y|x) = \Big\{$$

Funcion de Distribucion condicional

La función de distribución condicional dado $Y=y$ es

$$F_{X|Y}(x|y) = \sum_{u \le x} p_{X|Y}(u|y) \quad \text{caso discreto}$$

$$F_{X|Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\,du \quad \text{caso continuo.}$$

$$F_{X|Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\,du$$ caso continuo.

Nota: Si X y Y son v.a's independientes:

$$F_{X|Y}(x|y) = F_X(x) \quad y \quad F_{Y|X}(y|x) = F_Y(y)$$

Ejemplo 3: Del ejemplo ① Encuentre $F_{X|Y}(x|y)$, si $y=1$ $(y=0,1,2,3)$

Solución:

$$p_{X|Y}(x|y=1) = \begin{cases} 1/3; & x=0 \\ 2/3; & x=1 \end{cases} \rightarrow \; x = 0,1$$

$$F_{X|Y}(x|y=1)=0; \text{ si } x<0 \quad \Big\{ \; F_{X|Y}(0|y=1) = p_{X|Y}(x\leq 0|y=1) = p_{X|Y}(0|y=1) = 1/3$$

$$F_{X|Y}(1|y=1) = p_{X|Y}(x\leq 1|y=1) = p_{X|Y}(0|y=1) + p_{X|Y}(1|y=1) = 1$$

$$F_{X|Y}(x|y=1) = \begin{cases} 0; & x<0 \\ 1/3; & 0\leq x<1 \\ 1; & x\geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 4: Del ejemplo ② Encuentre $F_{X|Y}(x|y)$

Solución:

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{U|Y}(u|y)\,du = \int_{0}^{x} \frac{2(u+y)}{(1+2y)}\,du$$

$$= \frac{1}{(1+2y)}\left[u^2 + uy\right|_0^x = \frac{x^2+xy}{(1+2y)}; \quad 0<x<1$$

$$F_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+xy}{(1+2y)}; & 0<x<1 \\ 1; & x\geq 1. \end{cases} \quad \Big\} \; y\in(0,1)$$

$\hookrightarrow$ fijo!

Esperanza Condicional:

i) (X,Y) un vector aleatorio con f.d.p conjunta $f_{X,Y}(x,y)$. La esperanza Condicional de X dado $Y=y$

$$E[X|Y=y] = \int^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx; \quad f(y)\neq 0$$

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx \; ; \; f(y) \neq 0$$

ii) (X,Y) un vector aleatorio discreto con función masa de prob. conjunta. La esperanza condicional de X dado $Y=y$

$$E[X|Y=y] = \sum_{x} x\, p_{X|Y}(x|y)$$

Resultado:

$$\boxed{E\left[E[X|Y]\right] = E[X]}$$

Si X y Y son v.a's independientes

$$E[X|Y=y] = E[X]$$

Esperanza, Varianza y Covarianza:

Sea (X,Y) un vector aleatorio

$$E[X,Y] = \left(E[X], E[Y]\right)$$

Si $E[X] < \infty$ y $E[Y] < \infty$, $E[X,Y]$ existe

Varianza:

$$Var[(X,Y)] = \begin{pmatrix} Var[X] & Cov[X,Y] \\ Cov[Y,X] & Var[Y] \end{pmatrix}$$

matriz de varianza-covarianza

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \; ; \; Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2$$

$$Cov[X,Y] = E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right]$$
$$= E[XY] - E[X]E[Y]$$

$\hookrightarrow$ $Cov[X,Y] = Cov[Y,X]$ $\rightsquigarrow$ es simétrica.

- Caso Continuo:

$$Cov[X,Y] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (X - E[X])(Y - E[Y])\, f(x,y)\, dy\, dx$$

- Caso Discreto:

$$\text{Cov}[X,Y] = \sum_x \sum_y (x - E[X])(y - E[Y])\, p(x,y)$$