Probabilidad Condicional

Jhon F. Bernedo Gonzales • 2020-I

Última revisión: 6 de noviembre de 2020

Índice

1 PROBABILIDAD CONDICIONAL

Es la probabilidad de que el evento A ocurra, dado que el evento B haya ocurrido.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$

$P(B|A)$ se lee la probabilidad de B dado el evento A. Nótese que, dependiendo del contexto

1. $P(A \cap B)$ es denominada probabilidad conjunta de A y B
2. $P(A)$ es la probabilidad de A o probabilidad marginal de A
3. $P(B)$ es la probabilidad de B o probabilidad marginal de B

$P(B|A)$ cumple los axiomas de probabilidad así se tiene

a) $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$

b) $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(B \cap C|A)$

Ejemplo 1.1

Dell Publishing tiene 75 títulos distintos de libros, clasificados por tipo y costo de la siguiente manera: Halle la

	costo		
tipo	\$10	\$15	\$20
Ficción	10	8	3
Biografías	12	10	9
Histórico	4	17	2

probabilidad de que un libro seleccionado aleatoriamente sea:

- Ficción o cueste \$10.
- Histórico y cueste \$20.
- Histórico y cueste o\$10 o \$15.
- Ficción y cueste menos de \$20.

Ejemplo 1.2

Durante la temporada inaugural de la liga mayor de fútbol soccer en Estados Unidos, los equipos médicos documentaron 256 lesiones que causaron la pérdida de tiempo de participación a jugadores. Los resultados de esta investigación, publicados en *The American Journal of Sports Medicine*, se muestran en la tabla siguiente.

	practica (P)	juego (J)	total
Menor (A)	66	88	154
Moderada (B)	23	44	67
Grave (G)	12	23	35
total	101	155	256

marginal

marginal

Si un individuo es sacado al azar de entre este grupo de 256 jugadores de fútbol soccer, encuentre las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$, $P(P)$, $P(J)$, $P(\bar{B})$ y $P(A \cap P)$

b) $P(G|P)$, $P(G|J)$, $P(A|P)$ y $P(A|J)$

Solución:

a) Se tiene las probabilidades

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{154}{256} \\
P(P) &= \frac{101}{256} \\
P(J) &= \frac{155}{256} \\
P(\bar{B}) &= 1 - P(B) = 1 - \frac{67}{256} = \frac{189}{256} \\
P(A \cap P) &= \frac{66}{256}
\end{aligned}
$$

b) para las probabilidades condicionales

$$
\begin{aligned}
P(G|P) &= \frac{\mathbf{P}(G \cap P)}{\mathbf{P}(P)} = \frac{\frac{12}{256}}{\frac{101}{256}} = \frac{12}{101} \\
P(G|J) &= \frac{\mathbf{P}(G \cap J)}{\mathbf{P}(J)} = \frac{\frac{23}{256}}{\frac{155}{256}} = \frac{23}{155} \\
P(A|P) &= \frac{\mathbf{P}(A \cap P)}{\mathbf{P}(P)} = \frac{\frac{66}{256}}{\frac{101}{256}} = \frac{66}{101} \\
P(A|J) &= \frac{\mathbf{P}(A \cap J)}{\mathbf{P}(J)} = \frac{\frac{88}{256}}{\frac{155}{256}} = \frac{88}{155}
\end{aligned}
$$

2 Regla de la multiplicación: eventos dependientes

El objetivo de la regla de la multiplicación es determinar la probabilidad del evento conjunto $P(A \bigcap B)$, esto es, encontrar la probabilidad de A y B.
Este calculo depende si los eventos son **dependientes** o **independientes**.

Definición 2.1 (Regla de multiplicación: eventos dependientes)
Si los eventos son dependientes, entonces, se debe considerar el primer evento al determinar la probabilidad del segundo, esto es, la probabilidad del evento B dada la condición que A haya ocurrido.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

Ejemplo 2.1
Una urna contiene 5 bolas rojas y 4 azules. Se seleccionan 2 bolas una de cada vez y sin reemplazo. Calcular la probabilidad de que las bolas seleccionadas sean rojas.

Solución:
En la urna se tiene $|\Omega| = 9$ bolas. Se tiene los eventos
$R_1 \equiv$ La primera elección es una bola roja
$R_2 \equiv$ La segunda elección es una bola roja
$R_1 \cap R_2 \equiv$ la primera y segunda elección son bolas rojas

$$\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2|R_1)$$
$$\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8}$$

Definición 2.2 (Regla de la multiplicación extendida)
Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos tal que

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) > 0$$

entonces

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Esta regla tambien es conocida como la **regla de la cadena** para probabilidades condicionales

Ejemplo 2.2
De una baraja de 52 cartas se seleccionan 3 cartas al azar una de cada vez. Calcule la probabilidad de que ninguna de las tres cartas sea del grupo de corazón.

Solución:
Se sabe que se tiene 4 grupos que son: corazones (♥), espadas (♠), diamantes (♦) y tréboles (♣) en una baraja de 52 cartas y en cada grupo 13 cartas en que estas están numeradas del 1 al número 13.
Nótese que el número de cartas que no son del grupo de corazones es igual a 52-13 = 39 cartas. Así, se define los eventos siguientes
$A_1 \equiv$ la primera elección es una carta que no es del grupo de corazón
$A_2 \equiv$ la segunda elección es una carta que no es del grupo de corazón
$A_3 \equiv$ la tercera elección es una carta que no es del grupo de corazón

$$\underbrace{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{\text{conjuntamente}} = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2)$$
$$= \frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50}$$

3 Probabilidad Total y Teorema de Bayes

Definición 3.1 (Partición)
Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos tal que

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j \quad \text{y}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega,$$

entonces la colección de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se dice que es una partición de Ω

La idea de partición será utilizada para definir la probabilidad total en que este caso se tiene una colección de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ disjuntos dos a dos.

Definición 3.2 (Probabilidad Total)
Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una colección de eventos que forman una partición de Ω tal que

$$B \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

en que

$$B = B \cap A_1 \cup B \cap A_2 \cup \cdots B \cap A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i$$

entonces

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n) \quad \text{probabilidad total}$$

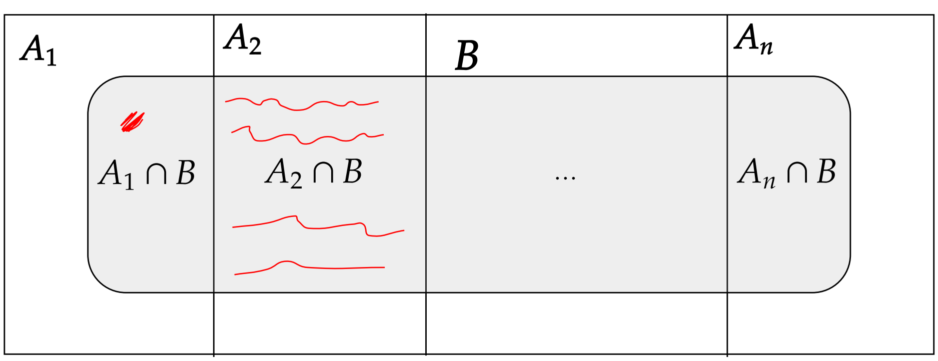


Figura 3.1: Partición del espacio muestral

Ejemplo 3.1

Un costoso articulo electrónico hecho por la Acme Inc. tiene una probabilidad de ser defectuoso de 10^{-3}. Este artículo es tan popular que se copia (falsifican) y se venden de forma ilegal pero a bajo precio. Las versiones piratas capturan el 10 % del mercado, y cualquier copia pirateada es defectuosa con una probabilidad de 0.5. Si compra un artículo, ¿cuál es la posibilidad de que sea defectuoso?.

Solución:

Se define los siguientes eventos

B ≡ el artículo es defectuoso

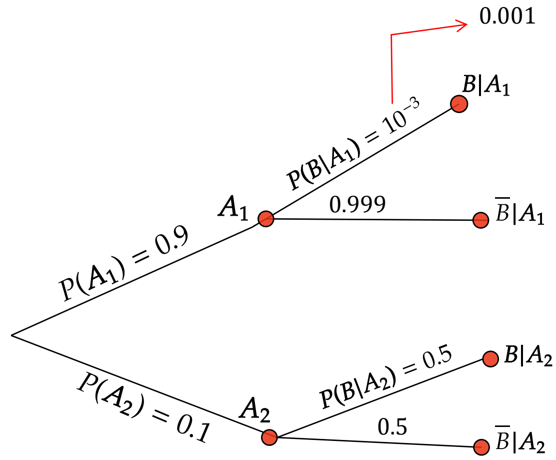
A_1 ≡ el artículo es original

A_2 ≡ el artículo es pirata

$B|A_1$ ≡ el artículo es defectuoso dado que es original

$B|A_2$ ≡ el artículo es defectuoso dado que es pirata

Se pide la probabilidad $\mathbf{P}(B)$



probabilidad total

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) \\ &= 0.9 \times 0.001 + 0.1 \times 0.5 \\ &= 0.0509 \end{aligned}$$

5.09%

Ejemplo 3.2
En una población de individuos, una proporción p $(0 < p < 1)$ está sujeta a una enfermedad. Se diseña una prueba para indicar si un individuo tiene la enfermedad, así, se dice que dio positivo si la prueba indica como positivo (test positivo). Ninguna prueba es perfecta, y en este caso la probabilidad de que la prueba sea positiva para un individuo con la enfermedad es del 95 %, y la probabilidad de un resultado positivo para una persona que no tiene la enfermedad es del 10 %.
Si se aplica la prueba a un individuo que fue seleccionado al azar, ¿cuál es la probabilidad que la prueba indique un resultado positivo?

Ejemplo 3.3

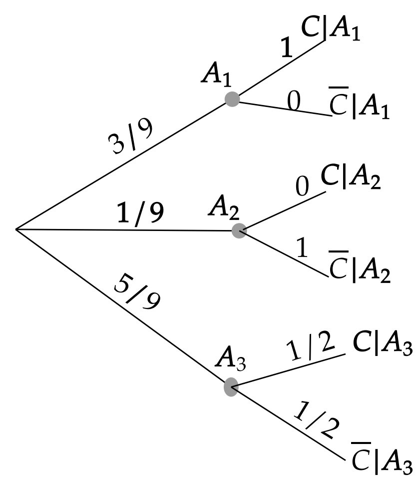
En una caja se tiene 3 monedas con dos caras, 1 moneda con dos sellos y 5 monedas honestas. Selecciona una moneda al azar y se lanza. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara?

Solución:

En total se tienen 9 monedas, y se definen los eventos

- $A_1 \equiv$ moneda con dos caras
- $A_2 \equiv$ moneda con dos sellos
- $A_3 \equiv$ moneda honesta
- $C \equiv$ salir cara
- $\overline{C} \equiv$ salir sello

$$\begin{aligned}
P(C) &= P(A_1)P(C|A_1) + P(A_2)P(C|A_2) + P(A_3)P(C|A_3) \\
&= \frac{3}{9} \times 1 + \frac{1}{9} \times 0 + \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{11}{18}
\end{aligned}$$



Definición 3.3 (Regla de Bayes)
probabilidad inversa
Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una colección de eventos que forman una partición de Ω, y siendo que $P(A_i) > 0$ para todo i. Entonces para cualquier evento B con

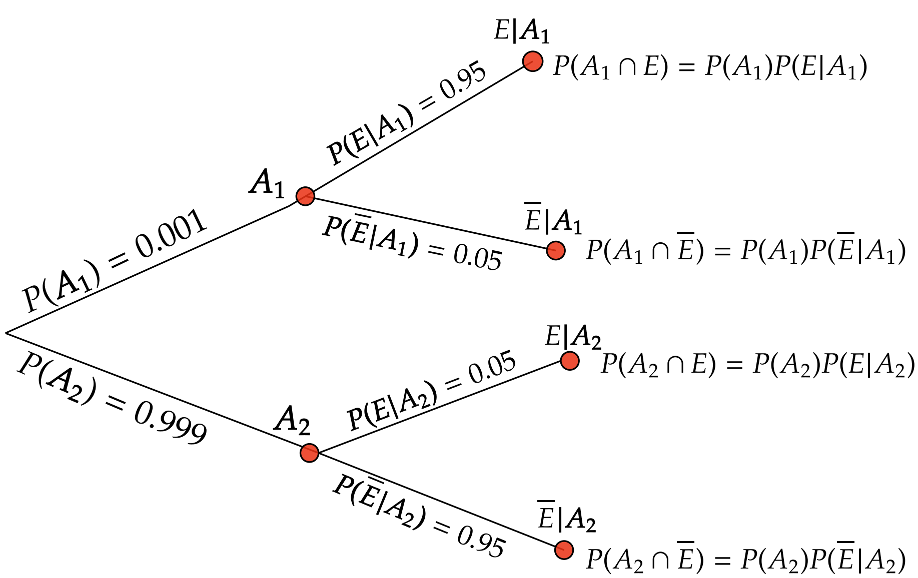
$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

probabilidad total

$$= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n)}$$

Ejemplo 3.4
Se supone que una prueba para una enfermedad rara es correcta el 95 % de la veces. Si una persona tiene la enfermedad, los resultados de la prueba son positivos (+) con una probabilidad de 0.95. Si la persona no tiene la enfermedad, los resultados de la prueba son negativos con probabilidad 0.95.
Una persona es elegida aleatoriamente de una cierta población en que la probabilidad de tener tal enfermedad rara es 0.001. Dado que la enfermedad dio un resultado positivo en la prueba, **cual es la probabilidad de tener la enfermedad rara?**

Solución:
Se definen los eventos
$A_1 \equiv$ la persona tiene la enfermedad
$A_2 \equiv$ la persona no tiene la enfermedad
$E \equiv$ el resultado de la prueba es positivo (+)
$\overline{E} \equiv$ el resultado de la prueba es negativo (−)



La probabilidad de dar positivo es igual

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(E|A_1) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(E|A_2)\\ &= 0.001 \times 0.95 + 0.999 \times 0.05\\ &= 0.0509\end{aligned}$$

La probabilidad de tener la enfermedad rara dado que la prueba dio un resultado positivo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1|E) &= \frac{\mathbf{P}(A_1 \cap E)}{\mathbf{P}(E)}\\ &= \frac{\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(E|A_1)}{\mathbf{P}(E)}\\ &= \frac{0.001 \times 0.95}{0.0509}\\ &= 0.01866\end{aligned}$$

Ejemplo 3.5

La urna A tiene 5 bolas blancas y 7 bolas negras. La urna B tiene 3 bolas brancas e 12 bolas negras. Se lanza una moneda honesta; si sale cara, se retira una bola de la urna A. Si sale sello se retira una bola de la urna B. Suponga que una bola blanca fue seleccionada.

Cual es la probabilidad de que haya salido un sello?

4 Independencia Estadística

Definición 4.1 (Independencia de Eventos)
Dos eventos A y B se dicen independientes si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

La definición anterior implica que

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{y} \quad P(B|A) = P(B)$$

La definición anterior esta también conocida como la **regla de la multiplicación para eventos independientes**

Ejemplo 4.1
Se lanzan dos dados. Calcular la probabilidad de obtener un número par en el primer dado y un número mayor que 4 en el segundo dado.

Solución:
Se definen los eventos

- $A_1 \equiv$ el 1^o dado muestra un número par
- $A_2 \equiv$ el 2^o dado muestra un número mayor que 4
- $A_1 \cap A_2 \equiv$ el 1^o y 2^o dado muestran un número par y un número mayor que 4.

Nótese que **el resultado de cada dado es independiente uno del otro, así se tiene independencia de eventos**
, así se tiene

$$A_1 = \{2, 4, 6\} \rightarrow \mathbf{P}(A_1) = \frac{3}{6}$$
$$A_2 = \{5, 6\} \rightarrow \mathbf{P}(A_2) = \frac{2}{6}$$

luego

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Ejemplo 4.2
Se ha determinado que las probabilidades de que un televidente vea los programas A o B son: 0.5 y 0.4, respectivamente. Si se asume que cada persona ve los programas independientemente uno del otro, ¿cuál es la probabilidad de que un televidente vea por lo menos uno de los programas?

Solución:
Se definen los eventos

- $A \equiv$ el televidente ve el programa $A \to \mathbf{P}(A) = 0.5$
- $B \equiv$ el televidente ve el programa $B \to \mathbf{P}(B) = 0.4$
- $A \cup B \equiv$ el televidente ve por lo menos uno de los programas

Se indica que los eventos A y B son independientes entonces quiere decir que $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cap \mathbf{P}(B)$, así

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \cup B) &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) \\ &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B) \\ &= 0.5 + 0.4 - 0.5 \times 0.4 = 0.7 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3
Una estudiante universitaria frecuenta una de las dos cafeterías de su plantel, escogiendo Starbucks 70 % de las veces y Peet's 30 % del tiempo. En cualquiera de estos lugares, ella compra un café de moka en 60 % de sus visitas.

- La siguiente vez que vaya a una cafetería en el plantel, ¿cuál es la probabilidad de que ella vaya a Starbucks y pida un café de moka?
- Los dos eventos del primer item son independientes?
- Si ella entra en una cafetería y pide un café de moka, ¿cuál es la probabilidad de que sea en Peet's?

Propiedades relacionada con los eventos independientes, si A **y** B **son eventos independientes**

a) $\overline{A}$ y B son eventos independientes

b) A y $\overline{B}$ son eventos independientes

c) $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son eventos independientes

En el caso que se tenga 3 eventos A, B y C, ellos son independientes si o sólo si

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \quad \text{y} \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4

Se lanza 2 dados honestos. Sea A, B y C los eventos
$A \equiv$ obtener 2 en el 1^o dado
$B \equiv$ obtener 5 en el 2^o dado
$C \equiv$ que la suma de los 2 dados sea 7
Son A, B y C independientes?

Solución:

$$\begin{aligned} A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\} &\rightarrow |A| = 6 \rightarrow \mathbf{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\ B = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\} &\rightarrow |B| = 6 \rightarrow \mathbf{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\ C = \{(2,5),(5,2),(3,4),(4,3),(6,1),(1,6)\} &\rightarrow |C| = 6 \rightarrow \mathbf{P}(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap B = \{(2,5)\} \rightarrow |A \cap B| = 1 \rightarrow \mathbf{P}(A \cap B) &= \frac{1}{36} \\ A \cap C = \{(2,5)\} \rightarrow |A \cap C| = 1 \rightarrow \mathbf{P}(A \cap B) &= \frac{1}{36} \\ B \cap C = \{(2,5)\} \rightarrow |B \cap C| = 1 \rightarrow \mathbf{P}(A \cap B) &= \frac{1}{36} \\ A \cap B \cap C = \{(2,5)\} \rightarrow |A \cap B \cap C| = 1 \rightarrow \mathbf{P}(A \cap B \cap C) &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Si A, B y C son independientes entonces se debe de cumplir

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \quad y \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

así se tiene que verificar

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ \frac{1}{36} &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ \frac{1}{36} &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ \frac{1}{36} &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \\ \frac{1}{36} &\neq \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216} \end{aligned}$$

Nótese que que los eventos A, B y C son independientes dos a dos sin embargo no son independientes entre sí.

Es posible generalizar la idea de independencia para n eventos, sin embargo se debe de considerar que para cada subgrupo finito de los n eventos se debe de cumplir la independencia.

Definición 4.2 (Independencia de n eventos)
Una colección de n eventos es independiente si para cada subgrupo finito $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$, $k \leq n$ se debe cumplir que

$$P\left(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_k}\right) = P(A_{j_1}) \times P(A_{j_2}) \times \ldots P(A_{j_k})$$

Ejemplo 4.5
Una dado honesto es lanzado 6 veces.

a) Calcular la probabilidad de obtener sólo números pares en los seis lanzamientos

b) Calcular la probabilidad de obtener sólo números mayores que 4 en todos los lanzamientos.

Solución:
El resultado en cada lanzamiento del dado es independiente uno del otro. Así, se tiene independencia entre los eventos.

a) $A_i \equiv$ salir un número par en el i-ésimo lanzamiento, $i = 1, 2, \ldots, 6$

$$A_i = \{2, 4, 6\} \to |A_i| = 3 \to \mathbf{P}(A_i) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

luego

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_6) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

b) $B_i \equiv$ salir un número mayor que 4 en el i-ésimo lanzamiento, $i = 1, 2, \ldots, 6$

$$B_i = \{5, 6\} \to |B_i| = 2 \to \mathbf{P}(B_i) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

luego

$$\mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_6) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \ldots \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^6$$

4.1 Confiabilidad

Definición 4.3 (Sistema en Serie)
Dado un sistema en serie compuesto por n componentes, $A_1, A_2, \ldots A_n$, en que la probabilidad de que el componente i funciones es p_i.
Entonces la probabilidad que el sistema funcione es

$$\begin{aligned} P(E) &= P\left(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n\right) \\ &= p_1 \times p_2 \times \cdots p_n \\ &= \prod_{i=1}^{n} p_i \end{aligned}$$

Esto es, **si el sistema esta en serie entonces el sistema funciona si todos los componentes funcionan**

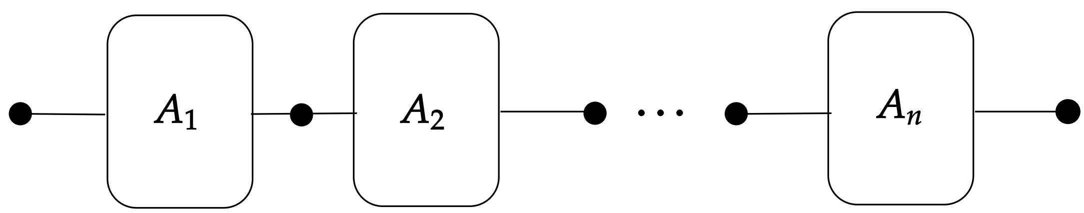


Figura 4.1: Sistema en serie

Definición 4.4 (Sistema en Paralelo)
Dado un sistema en paralelo compuesto por n componentes, $A_1, A_2, \ldots A_n$ y sea p_i la probabilidad de que el componente i funciones.
Entonces la probabilidad que el sistema funcione (E) es

$$\begin{aligned}
P(E) = P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) &= 1 - P\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n}\right) \\
&= 1 - P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right) \\
&= 1 - P\left(\overline{A_1}\right) P\left(\overline{A_2}\right) \cdots P\left(\overline{A_n}\right) \\
&= 1 - (1 - p_1) \times (1 - p_2) \times \cdots (1 - p_n) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)
\end{aligned}$$

Esto es, **si el sistema esta en paralelo entonces el sistema funciona si por lo menos uno de los componentes funciona.**

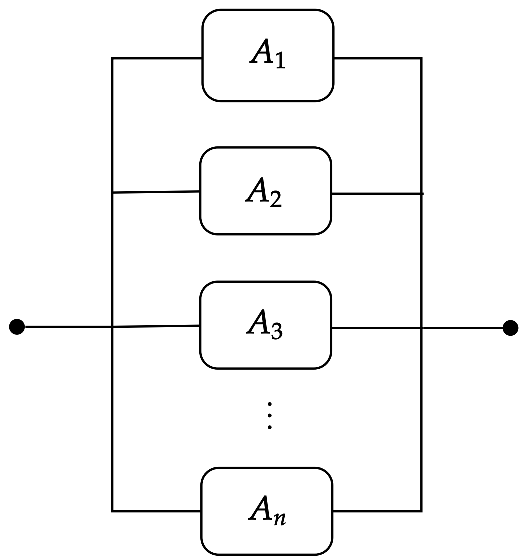


Figura 4.2: Sistema en paralelo

Ejemplo 4.6

Un sistema eléctrico consta de cuatro componentes. El sistema funciona si los componentes A y B funcionan, y si funciona cualquiera de los componentes C o D. La confiabilidad (probabilidad de que funcionen) de cada uno de los componentes también se muestra en la figura abajo. Calcule la probabilidad de que el sistema completo funcione. Suponga que los cuatro componentes funcionan de manera independiente.

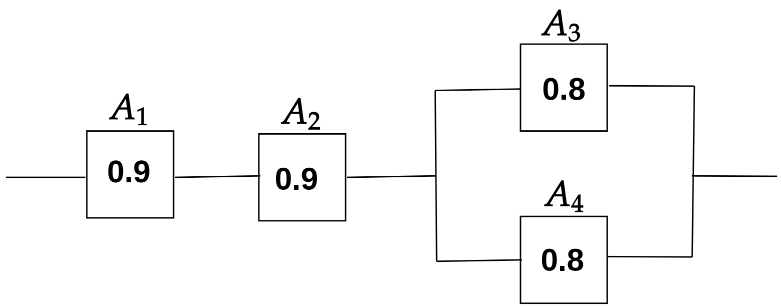


Figura 4.3: Sistema del Ejemplo 4.6

Solución:

En esta configuración del sistema, A, B y el subsistema C y D constituyen un sistema de circuitos en serie; mientras que el subsistema C y D es un sistema de circuitos en paralelo.

Para que el sistema funcione se debe de considerar

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap (A_3 \cup A_4)\right) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_3 \cup A_4) \\
&= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\left[1 - \mathbf{P}(\overline{A_3 \cup A_4})\right] \\
&= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\left[1 - \mathbf{P}(\overline{A_3} \cap \overline{A_4})\right] \\
&= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\left[1 - \mathbf{P}(\overline{A_3})\mathbf{P}(\overline{A_4})\right] \\
&= 0.9 \times 0.9 \times [1 - (1 - 0.8)(1 - 0.8)] \\
&= 0.7776
\end{aligned}$$