Ejemplos

Sea $p(x,y)$ con

$x \backslash y$	0	1	
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
	1/2	1/2	

$X = 0, 1$; $Y = 0, 1$ $\Big\{$ $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$

Calcular $\rho(x,y) = ?$

Sol:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]\,Var[Y]}}$$

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$E[XY] = \sum_x \sum_y xy\, p(x,y) = \cancel{0(0)p(0,0)}^{0} + \cancel{0(1)}p(0,1) + \cancel{1(0)p(1,0)}^{0} + 1(1)p(1,1) = 1/4$$

$$E[X] = \sum_x p_X(x) = 0\,p_X(0) + 1\,p_X(1) = 1/2$$

$$E[Y] = \sum_y p_Y(y) = 0\,p_Y(0) + 1\,p_Y(1) = 1/2$$

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 1/4 - 1/2 \cdot 1/2 = 0$$

$Cov[X,Y] = 0 \rightarrow \rho(x,y) = 0$ ✓

Ejemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } 0 < y < x, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$x > 0$; $x \in (0, +\infty)$.
$0 < y < x$; $y \in (0, x)$

Calcular $\rho(X,Y)$

Sol:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^x e^{-x}\,dy = e^{-x} y \Big|_0^x = x e^{-x}$$

$$f_Y(y) = \int^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = \cancel{-e^{-\infty}}^{0} + e^{0} = 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = \cancel{-e^{-\infty}} + e^{0} = 1$$

$$f_Y(y) = 1$$

$$E[XY] = \int_0^{+\infty}\int_0^{x} xy\,f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{+\infty}\int_0^{x} xy\cdot e^{-x}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} xe^{-x}\cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^{x}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\frac{x^2}{2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{2}\cdot e^{-x}\,dx$$

$$= 3$$

$$E[X] = \int_0^{+\infty} x\cdot xe^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} x^2\cdot e^{-x}\,dx = 2$$

$$E[Y] = \int_0^{x} y\cdot f_Y(y)\,dy = \int_0^{x} y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^{x} = \frac{x^2}{2}$$

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = 3 - (2)\left(\frac{x^2}{2}\right) = 3 - x^2$$

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot xe^{-x} - 2^2 =$$

$$\mathrm{Var}[Y] = \ldots$$

Distribuciones Multivariadas:

Distribución uniforme bivariada. Se dice que las variables aleatorias continuas X y Y tienen una distribución conjunta uniforme en el rectángulo $(a,b)\times(c,d)$, si su función de densidad es

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & \text{si } x\in(a,b),\ y\in(c,d), \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$\Big\}\ (X,Y) \sim U((a,b)\times(c,d))$

Se escribe $(X,Y) \sim \text{unif}(a,b)\times(c,d)$. Se puede observar inmediatamente que las distribuciones marginales son nuevamente uniformes, además X y

Se escribe $(X, Y) \sim \text{unif}(a, b) \times (c, d)$. Se puede observar inmediatamente que las distribuciones marginales son nuevamente uniformes, además X y Y siempre son independientes. Es fácil también comprobar que $E(X, Y) = ((a+b)/2, (c+d)/2)$, y que

$$\text{Var}(X, Y) = \begin{pmatrix} (b-a)^2/12 & 0 \\ 0 & (d-c)^2/12 \end{pmatrix}.$$

h

$$E[X,Y] = (E[X], E[Y]) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right)$$

$$Cov[X,Y] = 0 \rightsquigarrow E[XY] = E[X]E[Y]$$

Como X y Y ($X \perp Y$) son v.a's independiente

Entonces $Cov[X,Y] = 0$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$f(x,y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} = \underbrace{\frac{1}{(b-a)}}_{f_X(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(d-c)}}_{f_Y(y)}$$

Luego X y Y son var. independientes $\Rightarrow Cov[X,Y] = 0$

$$Var[X,Y] = \begin{bmatrix} Var[X] & \cancel{Cov[X,Y]}^{0} \\ \cancel{Cov[X,Y]}^{0} & Var[Y] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Var[X] & 0 \\ 0 & Var[Y] \end{bmatrix}$$

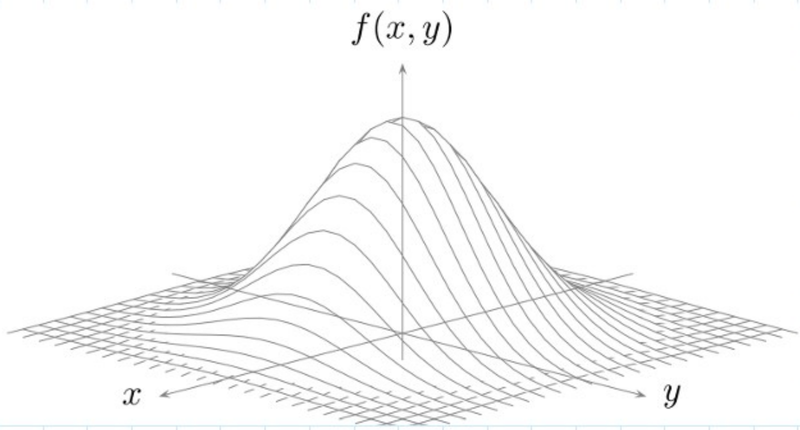
Distribución normal bivariada. Se dice que las variables aleatorias continuas X y Y tienen una distribución normal bivariada si su función de densidad conjunta es

$(\sigma_1, \sigma_2, \mu_1, \mu_2, \rho)$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$
$$\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_2})^2 - 2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2\right]\right),$$

para cualesquiera valores reales de x y y, y en donde $-1 < \rho < 1$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, y μ_1, μ_2 son dos constantes reales sin restricción. Se escribe entonces

$(X,Y) \sim \mathrm{N}_2(\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2, \rho)$. Cuando $\mu_1 = \mu_2 = 0$, y $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, la distribución se llama normal bivariada *estándar*, y su gráfica se muestra en la Figura 3.11 cuando $\rho = 0$. En el siguiente ejercicio se enuncian algunas propiedades de esta distribución.



a) X tiene distribución marginal $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$.

b) Y tiene distribución marginal $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

c) $\rho(X,Y) = \rho$.

d) X y Y son independientes si, y sólo si, $\rho = 0$.

e) $E(X,Y) = (\mu_1, \mu_2)$.

f) $\mathrm{Var}(X,Y) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$.