

Taller de Enseñanza de la Física - 2009

En su XXVI aniversario

# Apunte de Cinemática

## 1. Posición de un objeto de estudio

### 1.1. ¿Cómo modelizamos el espacio?

Lo primero que tenemos que hacer para estudiar las posibles posiciones de un objeto es modelizar al espacio. Para decirlo en pocas palabras, pero vagamente, el espacio es la colección de “lugares” donde un objeto puede estar. Claro que esta definición es insuficiente para hacer física: necesitamos ser capaces de modelar nuestro objeto de estudio, y de relacionar ese modelo con mediciones que podamos concretar.

En rigor, la pregunta “¿Qué es el espacio?” no es una pregunta que pueda responderse desde la ciencia si lo que nosotros esperamos es una explicación definitiva. Honestamente, un físico del siglo XXI no está en mejores condiciones de responder esa pregunta que un filósofo de la Grecia clásica. Lo que sí puede ofrecer la ciencia es un modelo lo bastante sólido como para resolver ciertos problemas vinculados a movimiento. Lo que veremos a continuación es el modelo de espacio que ofrece la física newtoniana, que nos acompañará a lo largo de todo este curso.

El modelo que aceptaremos para el espacio de la física clásica es que los “lugares” donde las cosas pueden estar son puntos como los de la geometría clásica, la misma que todos vimos en la escuela. Al espacio “físico” (donde los objetos “reales” se mueven) lo modelamos entonces como un “espacio euclídeo”, y por eso aplicaremos a nuestros problemas todo lo que sepamos de rectas, distancia, trigonometría, círculos, triángulos y demás. Por eso mismo, y aunque en la práctica se utilicen diversos instrumentos para medir posiciones, a los fines de nuestras discusiones conceptuales podemos suponer que los instrumentales usados son exclusivamente regla y compás.

Lo que necesitaremos para poder usar ese modelo es una serie de definiciones operativas, que nos permita de algún modo “medir” posiciones.

## 1.2. Marco de referencia

¿Dónde está un determinado objeto de estudio? ¿Dónde, por ejemplo, estás vos ahora? Claramente no puede responderse ese tipo de preguntas sin usar referencias: es decir, otros objetos materiales que usamos para darle sentido a la respuesta. Por ejemplo: “yo estoy acá” no hace referencia a nada, y por eso es completamente inútil. En cambio: “yo estoy en la calle 62, a tres cuadras de 7 para el lado de 1” te permite ubicarme gracias a las referencias. El objeto o la colección de objetos usada como referencia para especificar las posiciones de los objetos que estemos estudiando es lo que se denomina **marco de referencia**.

Para poder describir una posición sin ambigüedades no basta con un punto. Por ejemplo “estoy a seis cuadras de plaza Rocha” es informativo, pero insuficiente; hacen falta también direcciones en el espacio. La plaza Rocha puede ser un marco de referencia si no la pensamos como un punto sino que usamos también direcciones (como la que apunta desde el monumento hacia siete para el lado del centro). Para el ejemplo de arriba, donde yo soy el objeto de estudio, la propia Ciudad de La Plata puede pensarse como marco de referencia. Por supuesto, para eso debemos ser capaces de distinguir un cierto punto dentro del marco (que bien podríamos llamar “punto de referencia”, como por ejemplo Plaza Rocha) y orientaciones en el espacio (como la dirección que va desde el monumento a Dardo Rocha hacia la calle 1).

## 1.3. Sistema de coordenadas y escala de longitudes

Una vez elegido el marco de referencia, con un buen punto de referencia y buenas orientaciones de referencia, todavía necesitamos una manera de “nombrar” los lugares del espacio de un modo que podamos usar matemáticamente. La forma en que haremos eso es asociando al marco de referencia un sistema (imaginario) de ejes, de modo que cada punto del espacio puede representarse de manera única con un conjunto de números, uno asociado a cada eje. El **número de dimensiones** del espacio modelado es la cantidad de ejes independientes que deben usarse para dar cada punto de manera única.

Los ejes son rectas, perpendiculares entre sí, que se cortan en un punto al que se llama **origen**. El origen es un punto imaginario en el que no necesita pasar nada especial (en particular, no es necesario que coincida con

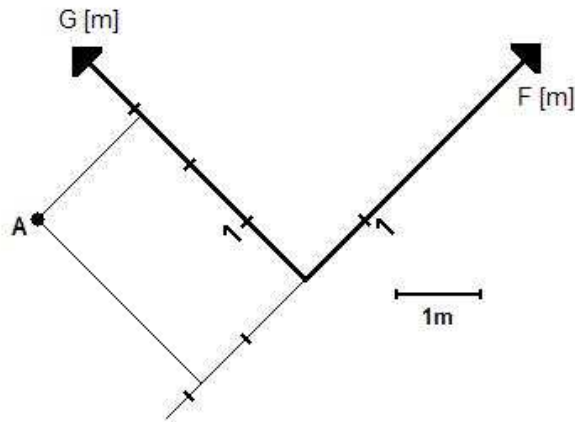


Figura 1: Punto A y sus coordenadas.

ningún punto de referencia del marco), pero sí debe ser posible ubicarlo en términos del marco de referencia. Lo mismo puede decirse de las orientaciones de los ejes. Cada eje tiene un sentido “positivo” (elegido libremente por el observador). La forma en que se asocia a cada punto un conjunto de valores es la siguiente: En primer lugar se debe elegir una **escala**, un objeto material cuyo largo se toma como unidad para la medición de cualquier otro largo. Por ejemplo, lo que conocemos como “un metro”<sup>1</sup>. Dado un punto, se traza su proyección sobre cada eje (perpendicularmente al resto de ellos). Luego se mide la cantidad de veces que la escala cabe entre el origen y esa proyección (¡incluyendo decimales!). Si la proyección está del lado definido como “positivo”, a esa cantidad se le asigna signo positivo; de lo contrario, negativo.

Los números en cada eje asociados a un punto se llaman las **coordenadas** del punto. En la figura 1 se muestra la representación de un plano, un punto (que llamamos A) y un sistema de ejes con una escala en metros. Las coordenadas del punto A, obtenidas como se explicó más arriba, son:  $F = -1,84m$  y  $G = 2,94m$  (con precisión de dos dígitos).

---

<sup>1</sup>Hasta hace no tantos años había en París una barra de metal conocida como “el metro patrón”. Esa era la definición de metro. Quien quería calibrar sus equipos con la más alta precisión disponible debía ir a París y usar esa barra como referencia.

## 1.4. El modelo de partícula

Hasta aquí hemos estado estableciendo un modelo para el espacio. Si queremos describir el movimiento de objetos en él, todavía necesitamos modelos para los objetos cuyo movimiento decidamos estudiar. El más simple, y el único que se usará en este apunte, es el “modelo de partícula”.

Diremos que un objeto está modelado como partícula siempre que consideremos que su posición es simplemente un punto en el espacio. Por supuesto, ningún objeto real es una partícula, y la validez o no del modelo para el objeto dependerá fuertemente del problema que se quiera resolver. Por ejemplo, si queremos estudiar el movimiento de la Tierra alrededor del sol con el fin, por ejemplo, describir la duración del año, podremos sin problema modelar todo el planeta como una partícula. En cambio, si lo que nos interesa es predecir en qué continente un cierto eclipse de sol será total, claramente necesitaremos describir a la Tierra como un cuerpo con volumen.

Pese a que el modelo de partícula es el más simple, no deja de ser sumamente importante. Principalmente porque los modelos más complejos para objetos en física newtoniana suelen usar al de partícula como un ingrediente fundamental.

## 1.5. Posición, desplazamiento y trayectoria

Si un dado objeto de estudio es modelado como una partícula, puede definirse para un movimiento dado una gran cantidad de nociones que son útiles para aprehender su naturaleza. Algunas de esas nociones requerirán aún de la introducción de otro parámetro: el tiempo. Otras pueden darse sin entrar en detalles sobre él.

La **posición** de un objeto modelado por la partícula en un dado instante es el valor de las coordenadas del punto en que el objeto se encuentra. Si un objeto se mueve en tres dimensiones, esa posición está dada por los valores de cada una de las tres coordenadas que se usen para describir ese movimiento.

Dada una posición para un objeto modelado como una partícula, resulta útil definir al **vector posición**  $\vec{r}$  como al vector que va del origen del sistema de coordenadas a la posición de la partícula. Las componentes del vector posición son las coordenadas de la posición. Esta definición es sumamente útil para operar con posiciones, como veremos más adelante.

El **desplazamiento**  $\vec{D}$  sufrido por una partícula entre dos instantes (“inicial” y “final”) es el vector que va de la posición “inicial” a la “final”. Las

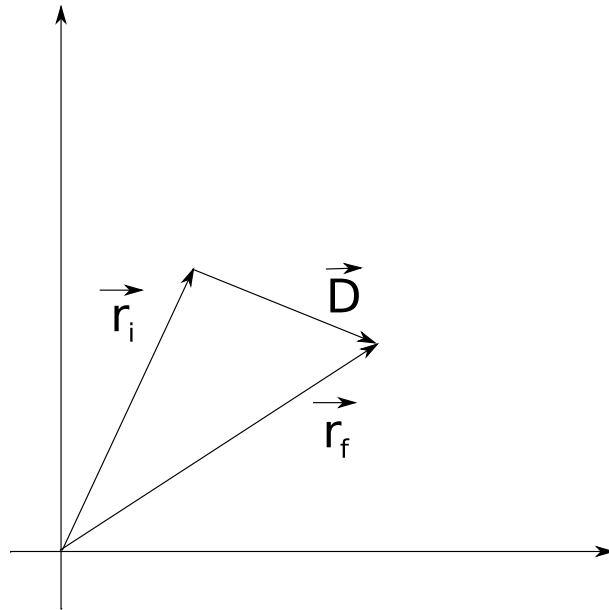


Figura 2: Relación entre posiciones inicial y final y el desplazamiento entre ellas.

componentes del desplazamiento son las diferencias entre las coordenadas de ambas posiciones. Acá es donde se ve la ventaja de haber definido un “vector posición”: el vector “posición final” puede expresarse como el vector “posición inicial” más (como suma vectorial) el desplazamiento (ver figura 2):

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{D} \quad (1)$$

Así, un desplazamiento puede pensarse como la posición final “menos” (en el sentido vectorial) la posición inicial:

$$\vec{D} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \quad (2)$$

La **trayectoria** descrita por la partícula entre dos instantes (“inicial” y “final”) es la colección de todas las posiciones por las que pasó la partícula entre esos instantes. La trayectoria, en general, tiene la forma de una línea que podrá ser simple o compleja, pero siempre unidimensional (lo que los matemáticos llaman “una curva”). En la figura 3 se muestra una posible

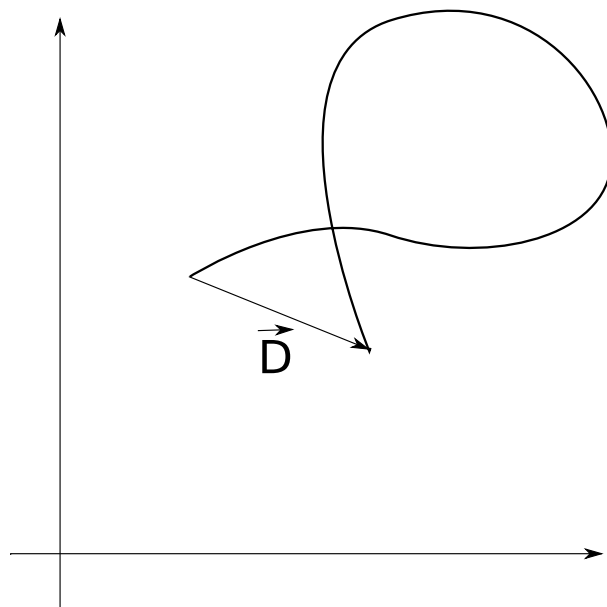


Figura 3: Ejemplo de posible trayectoria para un movimiento cuyo desplazamiento es como el mostrado en la figura 2

trayectoria para una partícula que se desplaza en  $\vec{D}$  entre los instantes inicial y final.

Todos estos conceptos no son muy útiles por sí mismos, pero es que aún nos falta describir una parte fundamental del modelo: el Tiempo.

## 2. Tiempo

### 2.1. ¿Cómo modelizamos el tiempo?

La esencia del Tiempo es probablemente la primer gran pregunta filosófica a la que se enfrenta cualquier niño. Lamentablemente, al igual que lo que ocurre con el espacio, la ciencia es impotente para dar una respuesta. Sin embargo ha sido capaz de producir modelos sumamente sólidos a la hora de tratar problemas concretos que lo involucran. En este apunte exponemos el modelo de tiempo de la física newtoniana, que es el único que usaremos en el curso y que es perfectamente adecuado para los problemas vinculados a sistemas propios de la experiencia cotidiana.

Por empezar, definamos un concepto que estaba implícito en lo que se expone más arriba: el concepto de “instante”. Un “instante” es un momento en el tiempo. Supondremos que tiene sentido hablar de lo que está pasando “ahora mismo” acá, en China o en alguna galaxia remota<sup>2</sup>. Luego, así como los marcos de referencia sirven para medir posiciones, supondremos la existencia de procesos lo bastante regulares para servir como referencias temporales (en criollo: fenómenos periódicos que sirvan como relojes, como los péndulos o ampollas con arena). También aquí hará falta una unidad de medición, una escala de tiempo dada por la duración del proceso periódico que nos quede más cómodo (por ejemplo: un día es el lapso de tiempo entre un mediodía y el siguiente). A partir de ahora, eligiendo libremente un instante como el tiempo cero, podemos asociar a cada instante un valor de la variable  $t$  que es un número: la cantidad de procesos de referencia que ocurrieron desde el instante cero y el instante cuyo  $t$  queremos dar (positivo si el instante está en el futuro del tiempo cero, negativo si está en su pasado). Suponemos que  $t$  puede ser cualquier número real (con los decimales que hagan falta), así que puede analizarse un intervalo de tiempo tan breve como se desee.

## 2.2. Movimiento: La posición como función del tiempo

Una vez que tenemos la variable  $t$ , cuyos valores especifican instantes de tiempo, podemos determinar la posición (es decir, el valor de las coordenadas) de nuestro objeto de estudio “como función del tiempo”, lo cual significa lo siguiente: dado un valor de  $t$  determinamos el instante de tiempo que representa; en ese instante el objeto estaba en cierta posición, dada por el valor de las coordenadas del objeto en ese instante. La forma en que lo escribimos es indicando la variable  $t$  entre paréntesis: supongamos que describimos el movimiento de nuestro objeto de estudio en tres dimensiones mediante los ejes coordenados  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . La coordenada  $x$  para nuestro objeto de estudio (OE) como función del tiempo la representamos como  $x_{OE}(t)$ . Si queremos obtener el valor de la coordenada  $x$  en el instante, digamos,  $t = -4,71s$  (eso es, 4,71 segundos antes del instante que hayamos elegido como “tiempo cero”), debemos “evaluar la función”  $x_{OE}(t)$  para ese valor, lo que se escribe  $x_{OE}(-4,71s)$ . Supongamos que 4,71 segundos antes del tiempo cero nuestro

---

<sup>2</sup>Esto, que parece una obviedad, es sólo un modelo que no funciona siempre. Debido a la existencia de problemas en los que este modelo de tiempo es inadecuado se ha creado la Teoría de la Relatividad, en la que no existe tal cosa como un “instante” para todo el espacio.

objeto de estudio estaba (o está, o estará... ¡El tiempo cero no tiene por qué ser el presente!) en  $x = 97,6m$ . Entonces diremos que “ $x_{OE}(t)$  evaluado en  $t = -4,71s$  es igual a  $97,6$  metros”, lo que en símbolos notaremos como

$$x_{OE}(-4,71s) = 97,6m \quad (3)$$

Del mismo modo tendremos funciones  $y_{OE}(t)$  y  $z_{OE}(t)$ . El vector posición de nuestro objeto de estudio en ese sistema de ejes será

$$\vec{r}_{OE}(t) = (x_{OE}(t), y_{OE}(t), z_{OE}(t))$$

Cualquier función en la variable  $t$  es una posible representación del movimiento de un objeto en el espacio, con tal que no pegue “saltos” (o sea, la función debe ser continua). Recordemos que para que una relación entre dos variables (digamos,  $x_{OE}$  y  $t$ ) sea una función debe ocurrir que a cada valor de la variable independiente ( $t$  en este caso) le corresponda un único valor de la variable dependiente ( $x_{OE}$  en nuestro ejemplo). Si la coordenada de nuestro objeto de estudio no fuera una función del tiempo, entonces habría instantes de tiempo en los que el objeto está en varios lugares a la vez (ver figura 4-A). Por otra parte, si la función  $x_{OE}(t)$  fuera discontinua en determinado valor de  $t$ , eso significaría que en ese instante el objeto desaparece de un sitio y aparece en otro (fig 4-B).

La única precaución que debemos tener para usar las funciones que conocemos de la matemática (polinomios, senos y cosenos, exponenciales y logaritmos, etc.) es que para un valor de  $t$  medido en cierta unidad de tiempo obtengamos un valor de la coordenada en unidades de longitud. Esto es: debemos prestar atención a las unidades. Pongamos un ejemplo:

$$y_{OE}(t) = 3,2 \text{ Km } h^{-1} t + 6,0 \text{ Km } h^{-4} t^4 \quad (4)$$

En la expresión de arriba,  $y_{OE}$  está dada en kilómetros, y puede evaluarse para valores de  $t$  en horas. Vean que en el segundo término, por ejemplo,  $t$  aparece a la cuarta potencia, por lo que al multiplicarlo por  $60 \text{ Km } h^{-4}$  las “horas a la cuarta” se cancelan, y el término queda en kilómetros.

Si se usan expresiones que no son sólo sumas, productos y potencias enteras de  $t$ , como por ejemplo la función seno o logaritmo (los matemáticos las llaman “funciones trascendentes”), los valores en que evaluamos esas funciones (o sea, sus “argumentos”) deben ser “adimensionales”, es decir, no



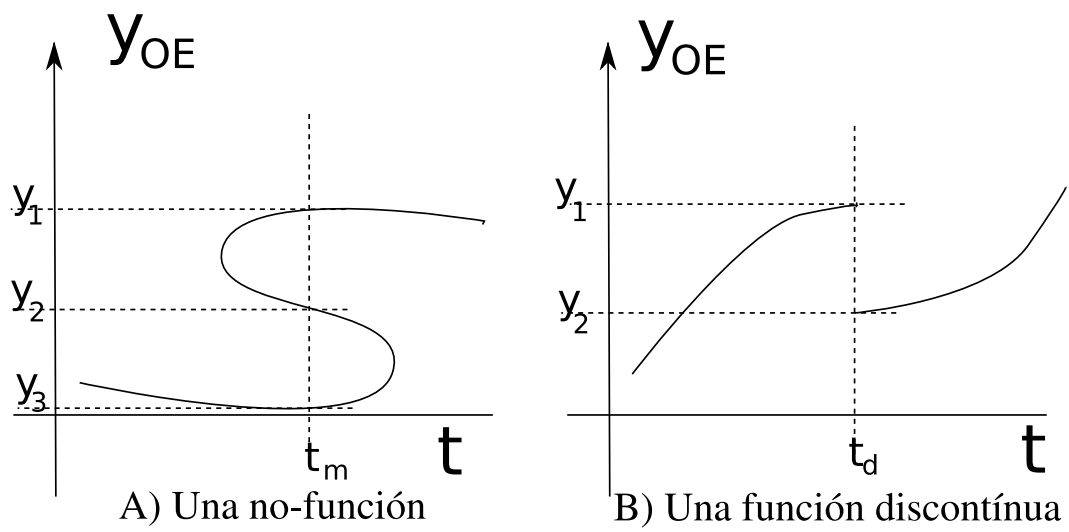


Figura 4: Ninguna de las gráficas puede corresponder al movimiento de un objeto modelado como partícula. La figura A no es una función: en el instante  $t_m$ , por ejemplo, está simultáneamente en las posiciones  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ . La figura B muestra una función discontinua en el instante  $t_d$ : en ese momento el objeto “desaparece” de  $y_1$  y “aparece” en  $y_2$ .

tienen que tener ninguna unidad de medición física. Por ejemplo, veamos un movimiento en que el objeto de estudio oscila alrededor de un punto:

$$y_{OE} = 1,7 \text{ cm} \cos(47,21^\circ s^{-1} t + 48^\circ) \quad (5)$$

Observen esa función: el argumento del coseno está en grados, como corresponde a esa función; la forma de hacer que al evaluar el argumento en valores de tiempo (en segundos, en este caso) dé en grados es multiplicarlo por una cantidad en “grados dividido segundos”. Los valores que va tomando el coseno son adimensionales y van de -1 a 1; al multiplicarlos por una constante en centímetros resulta la coordenada, que oscilará entre  $-1,7 \text{ cm}$  y  $1,7 \text{ cm}$ .

Así vemos que, con unas pocas precauciones, podemos expresar matemáticamente muchísimos movimientos, sencillos y no tanto. Puede ser que en este punto surjan dos preguntas: ¿Pueden “realmente” ocurrir estos movimientos en objetos reales? y ¿Qué hace que se muevan así? Para responder a la primera basta con mirar ahí afuera: los objetos corrientes se mueven de maneras más bien complicadas. La segunda es una pregunta muy importante e interesante, pero no es aún el momento de abordarla. Esto es cinemática, o sea, descripción del movimiento. Sus causas son el tema de la dinámica (las leyes de Newton), o sea el próximo apunte.

### 3. Velocidad

Antes de seguir, una aclaración: las “funciones de movimiento”  $x_{OE}(t)$ ,  $y_{OE}(t)$ ,  $z_{OE}(t)$  que representan las coordenadas de nuestro objeto de estudio (modelado como partícula) como función del tiempo contienen toda la información sobre el movimiento del objeto (por supuesto, todo lo que puede decirse del movimiento si modelamos al objeto como una partícula). Todo lo que sigue (velocidad, aceleración...) son herramientas conceptuales para aprender a “leer” esa información de las funciones que representan el movimiento.

La primera con la que nos topamos es la llamada “velocidad”. Como todo en física, el uso de la palabra “velocidad” tiene correlato con la idea intuitiva que tenemos de ella, pero tiene una definición precisa a la que deberemos atenernos.

La velocidad es una magnitud que indica cuán rápido es el cambio de la posición con el tiempo. Su definición es

$$\vec{v}_{OE}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}_{OE}(t) \quad (6)$$

O, lo que es lo mismo, las componentes de la velocidad a lo largo de cada eje coordenado es la derivada de esa coordenada respecto del tiempo:

$$v_{OE,x}(t) = \frac{d}{dt}x_{OE}(t) \quad (7)$$

$$v_{OE,y}(t) = \frac{d}{dt}y_{OE}(t) \quad (8)$$

$$v_{OE,z}(t) = \frac{d}{dt}z_{OE}(t) \quad (9)$$

### 3.1. La velocidad es instantánea

Puede parecer contradictorio, pero la velocidad tal como la definimos es la tasa de cambio de la posición con el tiempo **en determinado instante**. Es decir, la velocidad es instantánea.

Para entender lo que esto significa, apelemos a un concepto auxiliar: el de “velocidad media”. Consideremos las posiciones de nuestro objeto de estudio entre dos instantes, digamos  $t_0$  y  $t_1$ . Por ahora pensemos en una cierta coordenada, digamos  $z$  (ver figura 5 A). Supongamos que queremos estudiar la componente  $z$  de la velocidad de nuestro objeto de estudio (OE) en el instante  $t_1$ . Un primer intento por definir velocidad es fijarse dónde estaba en el instante  $t_0$  ( $z_{OE}(t_0)$ ) y dónde en el instante  $t_1$  ( $z_{OE}(t_1)$ ). El cambio de la coordenada  $z$  será entonces  $\Delta z_{OE} = z_{OE}(t_1) - z_{OE}(t_0)$ . El intervalo de tiempo transcurrido será  $\Delta t = t_1 - t_0$ . Entonces, la (componente  $z$  de la) velocidad media entre esos dos instantes se define como:

$v_{Media\ OE,z} = \frac{\Delta z_{OE}}{\Delta t}$  **Esta NO ES la componente  $z$  de la velocidad**

Esta definición es tentadora: se entiende mucho mejor que una que usa temibles derivadas, recuerda al viejo “espacio sobre tiempo” de la secundaria, es facil de manipular en cálculos... pero **no es una definición lo bastante buena**. De hecho, el propio concepto de derivada fue creado para darle sentido a la velocidad, porque esta definición no es lo bastante buena si la velocidad cambia entre  $t_0$  y  $t_1$ . Para ver por qué, veamos en detalle la figura 5 A.

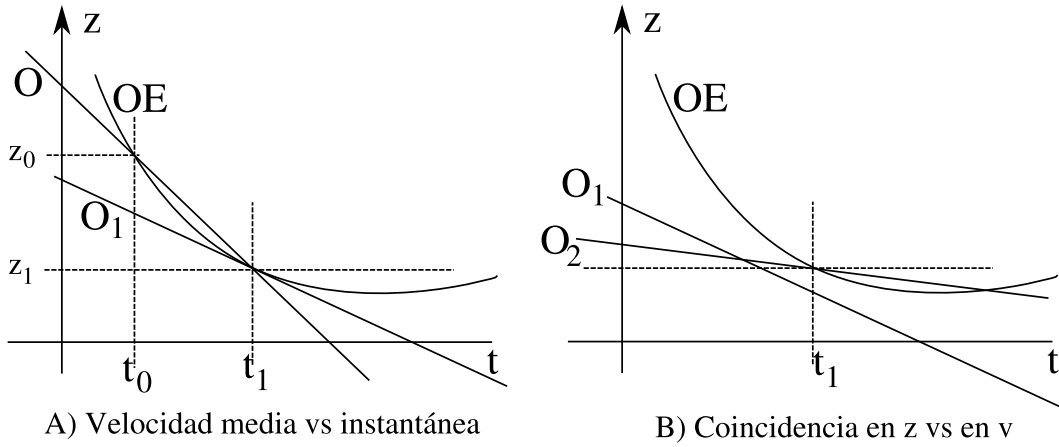


Figura 5: Velocidad media e instantánea

Fíjense en las posiciones correspondientes a los instantes  $t_0$  y  $t_1$ ; aparte del movimiento del  $OE$  hemos representado otros dos movimientos: el del objeto  $O$  y el del objeto  $O_1$ . Veamos en primer lugar el movimiento del objeto  $O$ : vean que es una función lineal, o sea que el objeto  $O$  se mueve a (componente  $z$  de la) velocidad Constante. Además, en los instantes  $t_0$  y  $t_1$  la (componente  $z$  de la) posición del  $O$  coincide con la del  $OE$ . Veamos la función de movimiento para  $O$ ,  $z_O(t)$ . Como es una función lineal, con dos puntos podemos conocer la función:

$$z_O(t) = z_O(t_0) + \frac{\Delta z_0}{\Delta t}(t - t_0)$$

Calculemos la (componente  $z$  de la) velocidad de  $O$  como función del tiempo; para eso, derivemos la expresión anterior respecto del tiempo:

$$v_{O,z}(t) = \frac{d}{dt} \left( z_O(t_0) + \frac{\Delta z_0}{\Delta t}(t - t_0) \right) = \frac{\Delta z_0}{\Delta t}$$

**Ojo: Este es un caso especial, sólo válido para funciones de movimiento lineales**

Acá vemos que cuando la función de movimiento es lineal en el tiempo, la (correspondiente componente de la) velocidad es constante. **Este es el único caso en que la velocidad media  $\Delta z / \Delta t$  coincide con la velocidad instantánea en todo instante.** Comparemos ahora el movimiento de  $O$  con el del  $OE$  (miren atentamente la figura 5 A): en el instante  $t_0$  tanto el

$OE$  como  $O$  están retrocediendo en  $z$ , pero el  $OE$  está retrocediendo más rápido que  $O$ . Es decir, la (componente  $z$  de la) velocidad del  $OE$  en  $t_0$  es menor (negativa y de mayor valor absoluto) que la de  $O$ , aunque en ese instante están en la misma posición. El  $OE$  se aleja de  $O$ , y luego comienza a acercarse; cuando finalmente se vuelven a encontrar en el instante  $t_1$  es  $O$  el que tiene la menor (componente  $z$  de la) velocidad. En síntesis: entre  $t_1$  y  $t_2$  casi **no hay instantes en que la (componente  $z$  de la) velocidad instantánea sea igual a la velocidad media** entre esos instantes. Esta es la principal razón por la que “espacio sobre tiempo” no es una definición satisfactoria de velocidad.

Pero aunque la velocidad media no es la velocidad en cierto instante, puede usarse el concepto de velocidad media para definir una buena velocidad. Supongamos que queremos dar una buena definición de la (componente  $z$  de la) velocidad del  $OE$  en el instante  $t_1$  (seguimos con la figura 5 A). El objeto  $O_1$  se mueve a (componente  $z$  de la) velocidad constante (es una función lineal), de modo que en  $t_1$  tiene la misma (componente  $z$  de la) posición y (componente  $z$  de la) velocidad que el  $OE$ . ¿Cómo relacionamos las (componentes  $z$  de las) velocidades de  $O$  y de  $O_1$ ? Por empezar, veamos que el  $t_0$  lo podemos elegir como nos parezca (estamos estudiando lo que pasa en  $t_1$ ). En la figura,  $t_0$  está lejos de  $t_1$  con fines ilustrativos, pero si hubiéramos tomado un  $t_0$  muy parecido a  $t_1$ , las funciones de movimiento de  $O$  y de  $O_1$  hubieran sido muy parecidas (véanlo en el dibujo, si es necesario hagan sus propios dibujos). Y acá está el truco: si consideramos el “límite” en que  $t_0$  se vuelve  $t_1$ , la (componente  $z$  de la) velocidad media del  $OE$  entre  $t_0$  y  $t_1$  (es decir, la [componente  $z$  de la] velocidad de  $O$ ) termina coincidiendo con la (componente  $z$  de la) velocidad del  $OE$  en el instante  $t_1$  (o sea, la [componente  $z$  de la] velocidad de  $O_1$ ). Pero ese límite es precisamente la definición de derivada:

$$\frac{d}{dt}z_{OE}(t_1) = \lim_{t_0 \rightarrow t_1} \frac{z_{OE}(t_1) - z_{OE}(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Por eso definimos la velocidad como la derivada de la posición respecto del tiempo. La velocidad es una función del tiempo: para un dado instante de tiempo es la magnitud en que está cambiando la posición al transcurrir intervalos de tiempo arbitrariamente pequeños. El concepto es sutil pero muy importante: **toda la física newtoniana lo usa extensamente**, tanto que los creadores del análisis matemático (Newton y Leibniz) lo hicieron para poder formular sus teorías de la mecánica.

Es importante darse cuenta de que el concepto de velocidad en física se corresponde sólo parcialmente con el uso coloquial de la palabra “velocidad”. Acostumbrarse al uso físico requiere mucho más que recordar la definición, tienen que estar atentos y dispuestos a revisar sus ideas intuitivas. Muchas veces uno está tan convencido de una idea que la usa sin fijarse si es realmente compatible con el uso científico, y la experiencia demuestra que en ese caso raramente lo son. Presten atención a sus procesos mentales: si están seguros de que algo es de cierta manera pero no saben explicarlo con las herramientas del curso, lo más probable es que estén usando una idea intuitiva en lugar de física, y por lo tanto, que estén cometiendo un error. Esta es la razón por la que insistimos permanentemente con las **herramientas metodológicas**.

A continuación vamos a discutir una de las ideas fuertemente arraigadas que dificultan el planteo de problemas de cinemática, y de hecho, el propio concepto de velocidad. El hecho de que dos objetos tengan la misma posición en cierto instante **no implica** que tengan la misma velocidad en ese instante, y vice-versa. En la figura 5 B volvemos a graficar la función  $z_{OE}(t)$  junto con los movimientos de los objetos  $O_1$  y  $O_2$ . En el instante  $t_1$ , el objeto  $O_2$  tiene la misma (componente  $z$  de la) posición que el  $OE$  pero las (componentes  $z$  de las) velocidades son diferentes: el  $OE$  se acerca al origen con mayor rapidez que  $O_2$ . En cambio,  $O_1$  en ese instante tiene otra (componente  $z$  de la) posición (está más cerca del origen), pero la misma (componente  $z$  de la) velocidad que el  $OE$ .

### 3.2. La velocidad es un vector

La sección anterior está plagada de unos molestos “(componente  $z$  de la)”. No fue un capricho: como estábamos hablando de la coordenada  $z$ , y de las demás no sabíamos nada, no conocíamos la velocidad, sino solo una “componente”.

Una cantidad es “vectorial” cuando no alcanza con un número que nos informe de cuán “grande” es la cantidad sino que necesitamos aparte saber “para dónde apunta”. La velocidad es una de esas cantidades, y acá tenemos un ejemplo donde el uso cotidiano de la palabra difiere del científico: al referirnos a la velocidad de un auto solemos decir “va a 120 kilómetros por hora”, pero esto no es la velocidad como fue definida en este apunte. Esto no nos da datos de hacia dónde está yendo el auto, sólo nos da el módulo de la velocidad (que suele llamarse “rapidez”).

Fíjense que la definición de velocidad (expresión 9) incorpora esa infor-

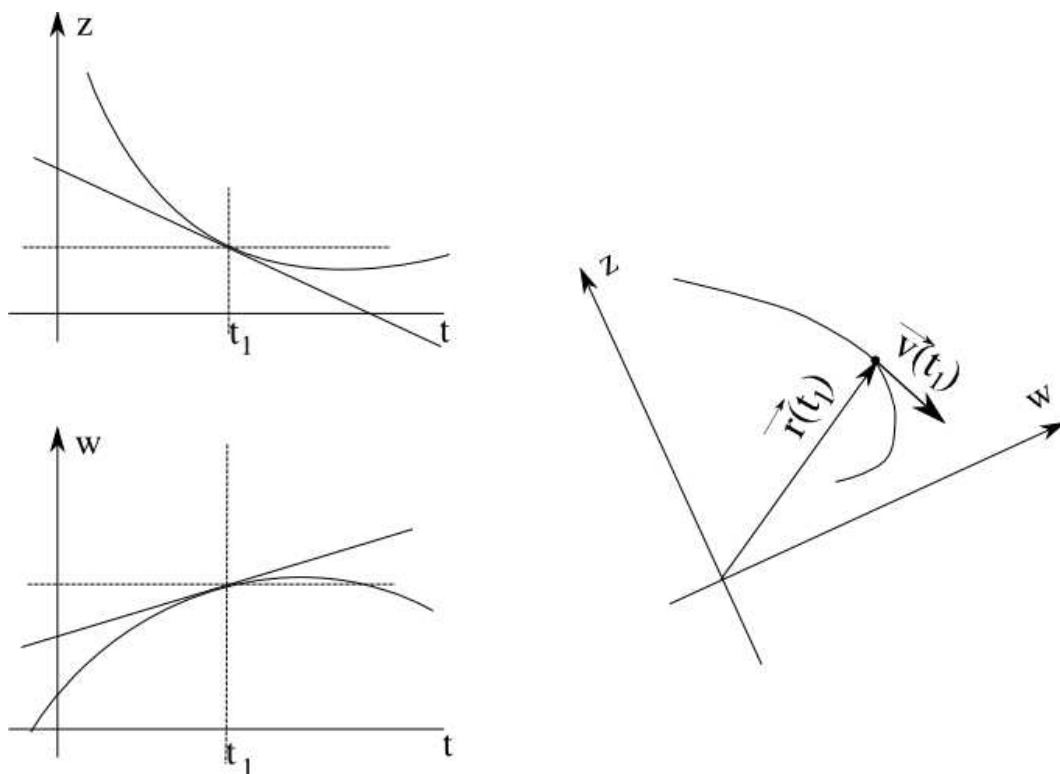


Figura 6: A la izquierda se representa cada coordenada como función del tiempo. A la derecha se representa la trayectoria. Se indica los vectores posición y velocidad en el instante  $t_1$

mación adicional: la velocidad no es un único número, sino que son tantos números como ejes coordenados, cada uno representando la variación instantánea de esa coordenada. Cada uno de estos números es la “componente” de la velocidad sobre ese eje, y el conjunto de todos esos números es el “vector”.

Veamos cómo funciona esto con un ejemplo. En la figura 6 se representa un movimiento en dos dimensiones, sobre ejes que llamamos  $z$  y  $w$ .

A la derecha puede verse la representación del espacio donde se mueve nuestro  $OE$  (modelado como partícula, como puede verse del hecho de que se representa una posición puntual en cada instante), incluídos los ejes. Allí se ve una trayectoria, y se muestra la posición en el instante  $t_1$ . A la izquierda se grafican las funciones  $z(t)$  y  $w(t)$  correspondientes a ese movimiento. A

diferencia de lo expuesto en la sección anterior, ahora tenemos dos en vez de una función de movimiento.

En primer lugar debemos enfatizar la enormísima diferencia entre los gráficos de la izquierda y de la derecha. Pese a que las representaciones son similares, **su significado es abismalmente diferente**, y aprender a ver esa diferencia es una tarea impostergable para quien aprende cinemática. En el gráfico de la derecha cada punto representa un punto del espacio, y cada recta una dirección. Por eso es este el lugar donde pueden representarse vectores (en la figura se muestran los vectores posición y velocidad en el instante  $t_1$ ). La curva mostrada no es una función ni de  $w$  respecto de  $z$  ni de  $z$  respecto de  $w$ ; no lo sería ni aunque la correspondencia fuera 1-1, porque físicamente no tiene ningún significado decir que una coordenada depende de la otra: las dos están en absoluto pie de igualdad. La curva es, en cambio, una “trayectoria”, es decir la colección de posiciones que el  $OE$  ha ocupado en el espacio. Fíjense que **la trayectoria da sólo una pequeña parte de la información del movimiento** del  $OE$ : nada más nos dice por dónde pasó, sin aclarar si le llevó mucho o poco tiempo, si la rapidez variaba o no, etc. Las gráficas de la izquierda, en cambio, representan los valores de las coordenadas como función del tiempo. Un punto en ese gráfico **no representa un punto en dos dimensiones**, sino cierto valor de la coordenada correspondiente en cierto instante de tiempo. Esto es, cada uno de los gráficos representan lo que ocurre en **cada una una de las coordenadas** a medida que transcurre el tiempo. Las curvas mostradas en esos gráficos **no son trayectorias** sino funciones del tiempo, en el sentido ya explicado antes en este apunte (ver subsección 2.2 y figura 4). Por esto mismo, dibujar un vector en estos gráficos no tiene ningún sentido: recuerden que la dirección en la que apunta la flecha representa la dirección en el espacio en que “apunta” la cantidad, y en los gráficos de funciones una recta no representa una dirección en el espacio, sino cierta función (recuerden de la discusión en la sección pasada que en este caso corresponde a la función de movimiento de un objeto cuya componente de la velocidad en esa coordenada es constante).

Ya lo hemos dicho, pero reiterémoslo: **las funciones de movimiento  $z(t)$  y  $w(t)$  dan toda la información del movimiento de una partícula**, a diferencia de la trayectoria. Veamos, por ejemplo, cómo obtener el vector velocidad del  $OE$  en el instante  $t_1$ . La coordenada  $z$  está decreciendo en  $t_1$ , por lo que la componente  $z$  de la velocidad es negativa; en cambio,  $w$  está incrementándose en  $t_1$ , así que la componente  $w$  de la velocidad es positiva. En ambas gráficas incluimos las rectas tangentes: estas son las funciones de



movimiento de un objeto hipotético moviéndose a velocidad constante, de modo que tanto la posición como la velocidad de ese objeto en  $t_1$  coinciden con las del  $OE$ . Observen que esas rectas **no son vectores, son funciones**. Representan un movimiento de un objeto imaginario. Las componentes del vector velocidad en  $t_1$  serán entonces:

$$v_z(t_1) = \frac{dz}{dt}(t_1)$$

$$v_w(t_1) = \frac{dw}{dt}(t_1)$$

El “vector velocidad” está dado por todas sus componentes, o sea que dar  $v_z$  y  $v_w$  es lo mismo que dar “la velocidad”. Otra manera de decir la misma cosa es:

$$\vec{v}(t_1) = \left( \frac{dz}{dt}(t_1), \frac{dw}{dt}(t_1) \right)$$

Veamos cómo volcamos esta información en el gráfico de la derecha. El vector posición en  $t_1$ ,  $\vec{r}(t_1)$  es, por definición, la “flecha” que va del origen del sistema de coordenadas a la posición del  $OE$  en ese instante. Por otra parte, el vector velocidad es representado con una flecha que arranca en la posición de la partícula y apunta en la dirección del movimiento, y cuyo largo es proporcional a la rapidez. Las componentes son las proyecciones de la flecha sobre cada eje (observen el gráfico y asegúrense de ver claramente que los signos de las componentes se corresponden con lo discutido más arriba). Es necesario indicar varias sutilezas. En primer lugar, el gráfico está hecho en cierta escala para longitudes (los valores de las coordenadas se miden en cosas como metros o kilómetros), mientras que la velocidad está en unidades de longitud dividido tiempo (metros por segundo, kilómetros por hora, etc). Por lo tanto, para poder dibujar  $\vec{v}(t_1)$  ahí hay que definir otra escala, elegida tan libremente como la de longitudes. Por ejemplo, podríamos poner que cada centímetro de papel representa diez metros del espacio en que se mueve el  $OE$ , y que cada cinco centímetros representan cien kilómetros por hora. Por supuesto, cada escala deberá usarse para vectores de la magnitud que le corresponda (la primera para posiciones o desplazamientos, la segunda para velocidades). La segunda sutileza es que para posiciones y desplazamientos ambos extremos de la flecha representan posiciones en el espacio, mientras que para la velocidad sólo la base de la flecha representa un lugar (la posición

del *OE*). Esto es fácil de ver reconociendo que, como somos libres de cambiar la escala de velocidades sin cambiar la de longitudes, podríamos hacer terminar la flecha en otra parte.

### 3.3. La velocidad es relativa

Tocaremos ahora una de las cuestiones más delicadas sobre el movimiento, tanto que estuvo a punto de llevar a Galileo a la hoguera. Es un punto difícil de tragar porque se da de narices contra toda nuestra experiencia cotidiana desde nuestra más tierna infancia, pero entenderlo es fundamental para poder encarar el estudio de las **causas** del movimiento.

Yo escribo esto en mi casa, frente a mi compu, y todas las fibras de mi cuerpo me dicen que estoy “quieto”. Si vos estás leyendo esto en un escritorio o en la cama todas tus fibras seguramente te dirán que estás “quieto”, y si lo lees en el bondi o en el tren debés estar convencido de que te estás “moviendo”. Supongamos que estás en el tren, y que al lado tuyo camina lentamente un vendedor. ¿A qué velocidad camina el vendedor? Y si afuera, en la calle, alguien camina lentamente ¿A qué velocidad lo hace?

Te invitamos a hacer un pequeño esfuerzo de imaginación. Imaginate que estás flotando en el medio de la nada; no ves paredes, ni estrellas, ni vías de tren. Nada de nada. ¿Cómo sabés si te estás moviendo? Si al vendedor o al peatón le sacamos tren, vías y calle ¿Cómo sabemos si se mueven o no? La respuesta terrible es que no tiene el más mínimo sentido hablar del movimiento de alguien sin una referencia: recuerden que lo primero que hicimos, para poder hacer cada una de las cosas que figuran acá en este apunte, fue definir “marco de referencia”. Nuestros objetos se mueven “respecto del marco de referencia”, lo cual significa que lo que definimos como “quieto” es al marco de referencia. Cuando opinamos sin dudar que nos movemos al viajar en tren, lo que estamos usando como marco de referencia son las casas y el asfalto que vemos por la ventanilla, que todas nuestras tripas nos dicen que están quietos. Pero cuando vemos que un vendedor “camina lentamente”, lo que estamos tomando como marco de referencia es al tren. Vos me dirás “Yo lo veo caminar lentamente porque me muevo con él, pero *en realidad* el vendedor se mueve junto con el tren”. Nosotros respondemos: El tren o la ciudad son marcos de referencia igual de buenos, no hay ningún “en realidad”.

Por supuesto, seguramente cada fibra de tu cuerpo se está rebelando a esta sección del apunte. Puede que estés pensando “Si quieren yo les digo en el parcial todo este bolazo, pero yo sé perfectamente si me muevo o no. No

necesito mirar referencias para saber que me muevo porque el movimiento se siente”. Acá estamos llegando al punto que condenó a Galileo al ostracismo y casi lo condena a la hoguera. La próxima vez que estés en un vehículo en supuesto movimiento cerrá un rato los ojos y sentí. ¿Qué sentís, un movimiento hacia adelante o traqueteos, frenadas y aceleradas? Y cuando estés supuestamente quieto, cerrá los ojos y preguntate si sentís el movimiento a ¡cien mil kilómetros por hora! que la Tierra hace alrededor del Sol, si tomamos al Sol como marco de referencia.

Efectivamente, si nos encontramos “sobre” nuestro marco de referencia, “moviendonos” con él, hay ciertos movimientos de éste que podremos sentir o percibir de alguna manera. Pero no es la velocidad del marco de referencia lo que sentimos o percibimos, sino los cambios en su velocidad. Y también es cierto que los marcos de referencia que sentimos moverse tienen algo de diferente de los que no. Pero esa diferencia sólo concierne a las causas del movimiento (lo veremos como la “primera ley de Newton”). Pero desde el punto de vista de la descripción del movimiento, que es lo que nos concierne en Cinemática, cualquier marco de referencia es tan bueno como cualquier otro. Y además, pese a nuestras creencias, la velocidad no es absoluta sino que está siempre referida a algún otro objeto. Lo que suele ocurrir es que ese otro objeto suele ser el planeta Tierra. Para las cuestiones cotidianas solemos tomar como marco de referencia a la Tierra, sin tomar conciencia de ellos y sin explicitarlo. Pero en las descripciones que hagamos en Física deberemos explicitar el marco de referencia, sea la Tierra o algún otro objeto que puede estar fijo a la Tierra o no.

## 4. Aceleración

Reiteremos una vez más: toda la información sobre el movimiento de una partícula está en las funciones de movimiento, es decir en los valores de las coordenadas como función del tiempo. En la sección anterior se definió, a partir de estas funciones, una nueva función que llamamos “velocidad”. En esta sección definiremos una nueva función, también a partir de las funciones de movimiento, que llamaremos “aceleración”. Una pregunta que puede surgir es: si la información ya está en las funciones de movimiento, para qué queremos definir estas otras cosas? Una excelente razón es que estas herramientas conceptuales nos ayudan a leer e interpretar esa información, a ver sus diferentes aspectos. Otra razón, de índole más práctica, es que con frecuencia

contaremos con datos de velocidad o aceleración, y unos pocos detalles sobre las funciones de movimiento; conociendo las propiedades de aquellas pueden inferirse estas (más adelante veremos cómo).

La idea de aceleración es, en principio, muy sencilla, aunque incorporarla lleva tiempo de reflexión y ejercicio. Así como las coordenadas de la partícula pueden estar cambiando en determinado instante, o sea, tener una velocidad no nula, esta velocidad puede estar cambiando en ese instante. Recuerden que esa es la razón por la que hubo que abandonar el famoso “espacio sobre tiempo” y definir la velocidad como una derivada. Pero si la velocidad cambia la función velocidad tiene derivadas no nulas respecto del tiempo: esas derivadas reciben el nombre de “vector aceleración”. Supongamos que hemos llamado a nuestras coordenadas  $x$ ,  $z$  y  $w$ ; las componentes de la velocidad serán:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}(t)$$

$$v_z(t) = \frac{dz}{dt}(t)$$

$$v_w(t) = \frac{dw}{dt}(t)$$

La aceleración tendrá entonces, por definición, las componentes:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$$

$$a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}(t) = \frac{d^2z}{dt^2}(t)$$

$$a_w(t) = \frac{dv_w}{dt}(t) = \frac{d^2w}{dt^2}(t)$$

La razón por la que no se define la aceleración simplemente como  $\frac{\Delta v}{\Delta t}$  es que durante el intervalo  $\Delta t$  la aceleración puede estar cambiando; razonando en forma análoga a lo que hicimos con la velocidad llegamos a la derivada simplemente considerando el límite cuando  $\Delta t$  se va a cero.

Llegados a este punto, es fácil alarmarse: si la aceleración puede cambiar con el tiempo, entonces podremos definir otra cantidad como la derivada de la

aceleración respecto del tiempo, que a su vez será una función y podrá cambiar en el tiempo, con lo cual podremos definir otra cantidad como su derivada, y así hasta el infinito. ¿Cómo se llaman todas esas cantidades? ¿Lo toman en el parcial? Bueno, algunos libros estadounidenses, sobre todo de ingeniería, proponen unos nombres espantosos (por ejemplo, llaman “jerk” a la derivada de la aceleración, “jounce” a la derivada del “jerk”...). Esas cantidades en efecto pueden definirse (y se han definido) del mismo modo que se hizo con la velocidad y la aceleración; pero hay montones de razones, tanto teóricas como prácticas, para decir que son cantidades mucho menos interesantes y que por ende no las trabajaremos en este curso. El motivo por el cual llegamos hasta la segunda derivada de la posición, es decir la aceleración, es tema del próximo apunte, y acá lo adelantaremos: **la aceleración es la cantidad que resulta afectada por las acciones del entorno sobre el OE**. Es decir: al estudiar las causas del movimiento la cantidad que averiguaremos es la aceleración (como función del tiempo); con ella y algunos datos sobre la velocidad y la posición en cierto instante deberemos deducir las funciones de movimiento.

#### 4.1. La aceleración es instantánea

Todo lo que hemos discutido sobre la instantaneidad de la velocidad puede repetirse acá. Entender cabalmente lo que significa que una partícula tiene una determinada aceleración en un determinado instante es fundamental para comprender no sólo cinemática, sino fundamentalmente las leyes que explican las causas del movimiento (las leyes de Newton).

En este punto cabe clarificar algunas diferencias entre la concepción cotidiana de aceleración y el concepto físico. Es habitual oír que se dice que un auto que va muy rápido, o una persona que está completamente ansiosa, están “acelerados”. Lo que parece haber detrás de esta expresión es la idea de que el auto, antes de ir a 120, estuvo estacionado (o la persona calmada), de modo que hubo que cambiar su velocidad para llevarlo(s) a su estado presente. Desde el punto de vista físico, sin embargo, esto es confundir velocidad con aceleración. La confusión viene de no pensar en términos instantáneos: un auto cuya velocidad ha cambiado en el pasado no necesariamente está “acelerado” **ahora**: para tener una aceleración no nula ahora, la velocidad tiene que estar cambiando ahora.

En la figura 7 se muestra la función de movimiento de una partícula sobre el eje  $y$  y sus dos primeras derivadas. O sea, la coordenada  $y$ , la componente

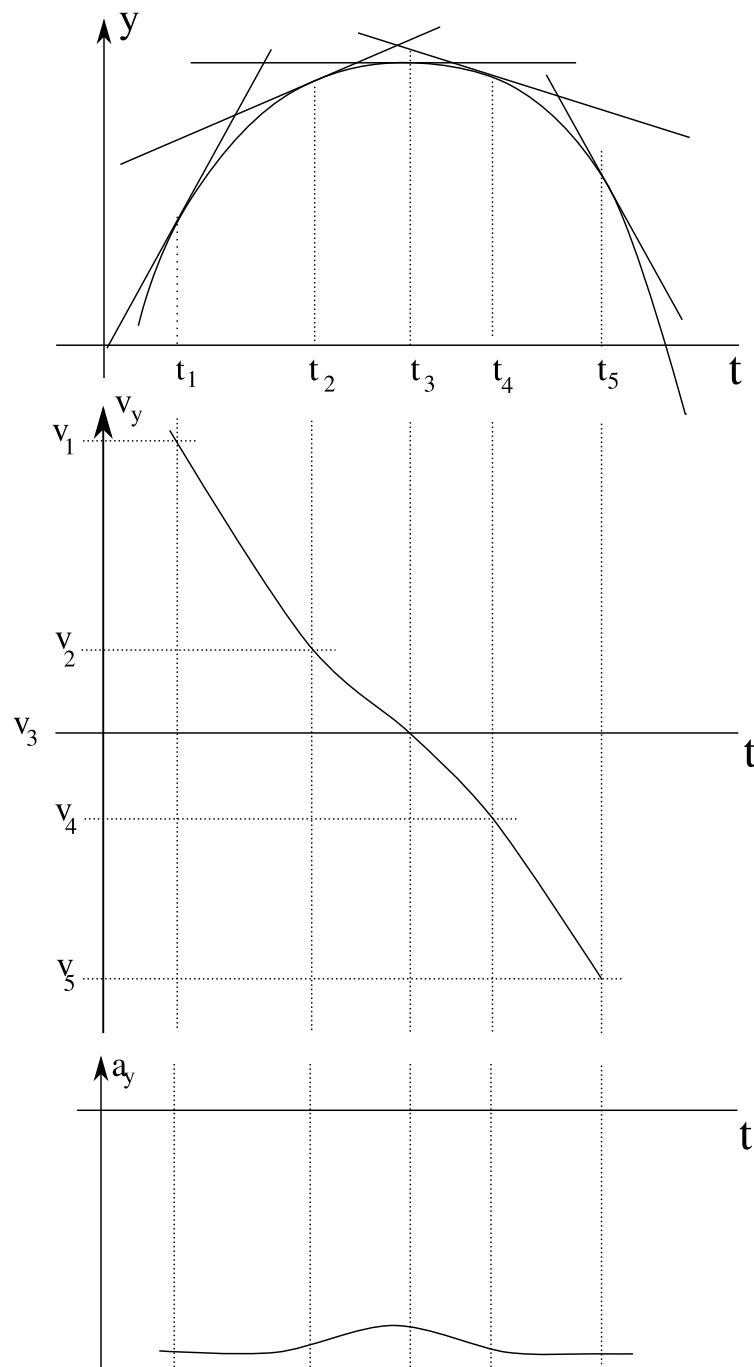


Figura 7: coordenada  $y$  y sus dos primeras derivadas respecto del tiempo

$y$  de la velocidad y la componente  $y$  de la aceleración como funciones del tiempo. Puede verse que la partícula avanza en el sentido positivo, pero cada vez con menos rapidez, hasta el instante  $t_3$  en que se detiene y pasa a avanzar en el sentido negativo del eje, cada vez con mayor rapidez. En el gráfico de  $v_y(t)$  eso se traduce en componente de velocidad positiva para  $t < t_3$ , nula para  $t = t_3$  y negativa para  $t > t_3$ . A su vez, es fácil ver en este gráfico que la variación de velocidad, si bien en este caso es siempre negativa, no es uniforme. La derivada es la curva de aceleración que se muestra abajo de todo: una aceleración negativa y no constante. Es importante ser capaz de vincular gráficos de posiciones, velocidades y aceleraciones, tanto desde el punto de vista matemático (a través del concepto de derivada) como de la interpretación física.

## 4.2. La aceleración es un vector

Así como al derivar el vector posición respecto del tiempo obtenemos el vector velocidad, al derivar el vector velocidad obtenemos el vector aceleración. La derivada segunda de la coordenada  $x$  será la componente  $x$  de la aceleración, y así sucesivamente. Por lo tanto, no tiene ningún sentido hablar de “aceleración negativa” o “positiva”, y los signos de las componentes dependen de la orientación de los ejes coordenados.

Veamos esto en el ejemplo de la figura 8. El movimiento es exactamente el mismo que el mostrado en la figura 6, así que para repasar cómo se llega al vector velocidad mostrado miren esa figura y la sección correspondiente. Agregamos ahora una escala de aceleraciones (tan libre como la de largos y velocidades) y veamos cómo hallamos la aceleración de nuestro objeto de estudio.

En la parte izquierda de la figura vemos las funciones  $z(t)$  y  $w(t)$ . En el instante  $t_1$  la derivada segunda de  $z$  es positiva (se ve por la concavidad hacia arriba: la pendiente de la tangente aumenta al avanzar  $t$ ). Eso significa que la componente  $z$  de la aceleración en ese instante,  $a_z(t_1)$ , es positiva. Similarmente, vemos que la derivada segunda de  $w$  es negativa en el mismo instante, o sea que  $a_w(t_1)$  es negativa. El vector

$$\vec{a}(t_1) = (a_z(t_1), a_w(t_1))$$

se muestra en la gráfica de la derecha (¡verifiquen los signos de las componentes!).

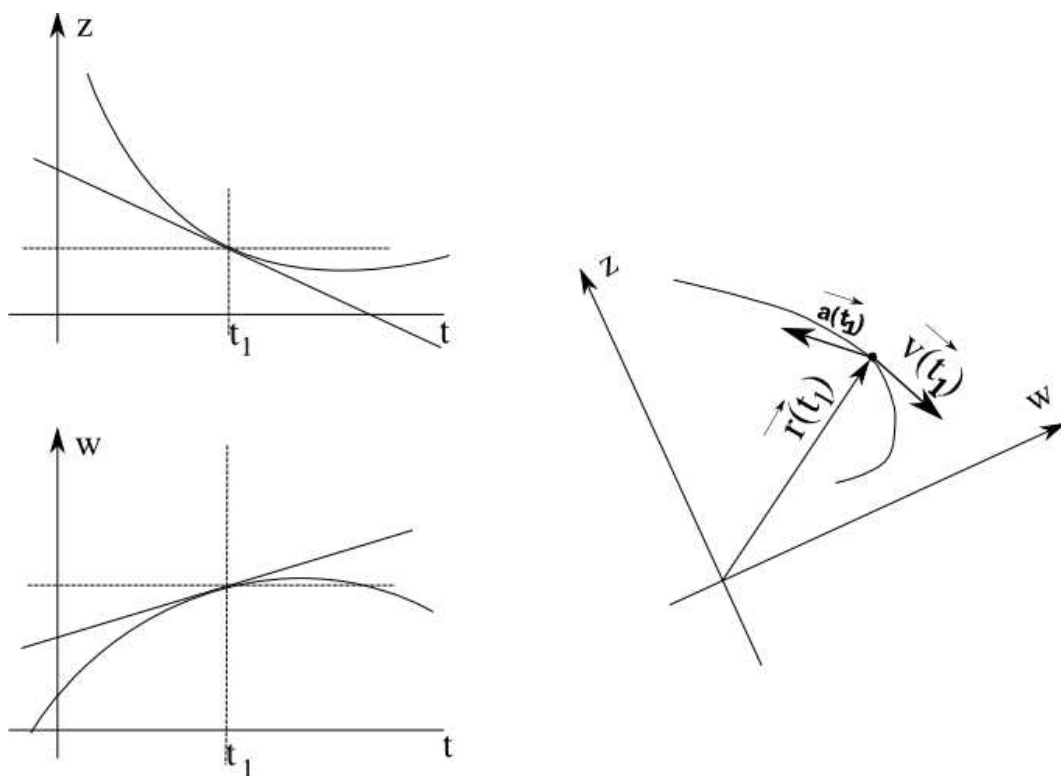


Figura 8: A la izquierda se representa cada coordenada como función del tiempo. A la derecha se representa la trayectoria. Se indica los vectores posición, velocidad y aceleración en el instante  $t_1$



### 4.3. ¡La aceleración no es la velocidad!

Uno de los mayores bloqueos a la hora de usar la idea de aceleración en problemas es, en los hechos, cruzarlos. Un ejemplo es el mencionado más arriba: pensar en algo que va muy rápido como en algo “acelerado”.

Las unidades de la aceleración son distintas de las de velocidad: la aceleración es la tasa de variación de velocidad por unidad de tiempo transcurrido, por lo que sus unidades son de velocidad sobre tiempo, es decir longitud sobre tiempo al cuadrado.

Si un objeto tiene aceleración no nula “ahora” significa que la velocidad está cambiando “ahora”. Un objeto puede tener velocidad nula “ahora” pero una enorme aceleración “ahora”. Dos objetos en un instante pueden tener la misma velocidad pero aceleraciones muy diferentes.

Cualquiera sea el vector velocidad en un instante dado, la aceleración puede ser cualquier otro vector. Puede apuntar hacia el mismo lugar, hacia el opuesto o hacia cualquier otro.

Pongamos por caso un cascotazo (es decir, el movimiento de un cascote arrojado al aire). La velocidad del cascote cambia, tanto de módulo como de dirección, todo el tiempo. Pero la aceleración del cascote es un vector constante: todo el tiempo apunta hacia abajo.

### 4.4. La aceleración describe el movimiento del objeto de estudio

Una confusión habitual es pensar en la aceleración como en una acción externa sobre el objeto de estudio. Eso viene, seguramente, del énfasis con que nos dijeron que “la fuerza es la masa por la aceleración”. Digámoslo con toda claridad, como para que lo lean desde el Himalaya: **la fuerza NO es la masa por la aceleración**. La aceleración es un concepto estrictamente cinemático, o sea parte de la descripción del movimiento. La posición es claramente una cantidad que describe (en parte) al estado del objeto de estudio. La velocidad, que se obtiene derivando la posición respecto del tiempo, es por lo tanto otra cantidad que describe el estado del objeto de estudio. Si derivamos de nuevo (vean: nada estamos diciendo sobre nada exterior al objeto; tomamos la posición del objeto y la derivamos dos veces) lo que obtenemos debe ser también una cantidad que describe el estado del objeto.

Por eso no es correcto decir cosas como que la aceleración “actúa”. “Actúan” los actores, o sea agentes activos, que hacen cosas. “Actúa” un remedio, sobre

nuestro cuerpo. Si una persona es bella nunca pensaríamos que una belleza “actúa” sobre la persona. Del mismo modo, si un objeto está acelerando debemos pensar eso como una descripción de lo que le está ocurriendo al objeto, no como una acción sobre él.

Y para concluir, digamos algo sobre la bendita “aceleración de la gravedad”. ¿Qué significa eso? ¿Significa que la gravedad va cada vez más rápido? Por supuesto que no; es una frase muy poco feliz. A la gravedad sí que la pensamos como algo que “actúa” (y por eso hablaremos de ella cuando hablemos de causas del movimiento), pero la aceleración, como hemos dicho, es algo que describe el movimiento de objetos, no algo que “actúe”. Ocurre que (y esto lo tomamos así, como un pequeño misterio, por ahora) que si libramos un objeto cualquiera, a cualquier velocidad inicial, acá en el Planeta Tierra, a la única acción del Planeta Tierra (o sea, ni el aire ni sogas ni pájaros afectan ese movimiento) ese objeto, sea una pluma, un boleto de bondi, una piedra o un Costera lleno de pasajeros, tendrá un movimiento con aceleración constante, apuntando hacia abajo, cuyo módulo es el famoso  $9,81 \text{ m/s}^2$ . O sea, la aceleración antedicha es la aceleración que tiene cualquier objeto si sobre él únicamente actúa la gravedad.

## 5. Reconstruyendo el movimiento

Ya vimos que si contamos con las funciones de movimiento de un objeto de estudio, por derivación pueden obtenerse la velocidad y la aceleración como función del tiempo. ¿Qué ocurre si tuviéramos las funciones velocidad o aceleración? ¿Podemos recuperar las funciones de movimiento?

### 5.1. La integral de la velocidad da el desplazamiento

Hemos dicho que la velocidad es la derivada de la posición respecto del tiempo. Los memoriosos recordarán que la operación inversa de la derivada es la integral de línea. La forma precisa de expresar esa relación es la llamada “Regla de Barrow”, que dice lo siguiente:

Sea  $f(t)$  una función de  $t$ , y sea  $F(t)$  tal que  $f(t) = \frac{df}{dt}(t)$  (o sea, una función que al derivarla me dé  $f(t)$ ). Entonces

$$\int_{t_i}^{t_f} f(t)dt = F(t_f) - F(t_i)$$

Del lado izquierdo tenemos la llamada “integral definida de  $f(t)$  entre  $t_i$  y  $t_f$ ” (alias “el área bajo la curva”). Del lado derecho, la “primitiva de  $f(t)$  evaluada entre los extremos”.

Apliquémolos. Sabemos que  $\vec{r}(t)$  es una “primitiva” de  $\vec{v}(t)$ , porque la segunda es la derivada de la primera. Supongamos que conocemos  $\vec{v}(t)$ ; aplicando la Regla de Barrow:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{v}(t) dt = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)$$

O sea, la integral definida de la velocidad entre los instantes inicial y final es el desplazamiento entre esos instantes.

¿Por qué el desplazamiento y no la posición? Recuerden que la derivada de una constante es siempre cero, o sea que si a una función de movimiento cualquiera se le suma una constante (lo que equivale a decir que el objeto se mueve del mismo modo, pero en otro lado) se obtiene la misma función velocidad. Por lo tanto, la función velocidad no tiene toda la información sobre el movimiento. Pero si se conoce la función velocidad en todo instante  $t$  y la posición en cierto instante  $t_0$ , despejando de la regla de Barrow llegamos a

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

## 5.2. La integral de la aceleración da el cambio de velocidad

Exactamente lo mismo ocurre para la velocidad y la aceleración:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{a}(t) dt = \vec{v}(t_f) - \vec{v}(t_i)$$

Por idénticas razones a las expuestas en la subsección anterior, si conocemos  $\vec{a}(t)$  y deseamos saber  $\vec{v}(t)$ , necesitamos saber la velocidad en cierto momento  $t_0$ :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt$$

Si conocemos  $\vec{a}(t)$  y deseamos recuperar las funciones de movimiento  $\vec{r}(t)$  deberemos, por lo tanto, conocer la velocidad en cierto instante (para obtener  $\vec{v}(t)$ ) y la posición en ese u otro instante.

### 5.3. Ejemplo

Supongamos que, para cierto eje que llamaremos  $x$ , conocemos la posición a tiempo cero  $x(0)$  y la componente  $x$  de la velocidad a tiempo cero  $v_x(0)$ . Supongamos también que la componente  $x$  de la aceleración es **constante**:  $a_x(t) = a_x$ . Apliquemos lo anterior:

$$v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x dt = v_x(0) + a_x t$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t (v_x(0) + a_x t) dt = x(0) + v_x(0)t + \frac{a_x}{2}t^2$$

que son las conocidas funciones de movimiento cuando la aceleración es constante. Obsérvese la ausencia de notación vectorial: este cálculo está hecho sólo para la componente  $x$ , y sólo se asume que la componente  $x$  de la aceleración es constante: en otros ejes, de haberlos, las cosas podrían ser muy distintas. (claro que si el vector  $\vec{a}$  es constante entonces todas las componentes lo son) Vean también que si se elige  $a_x = 0$  se obtiene, como era de esperarse, la función de movimiento a velocidad constante.