Lista 5 – Introdução a Probabilidade e Estatística

Capítulo 6 do Livro do Morettin

Seções 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6

1. Considere uma urna contendo três bolas vermelhas e cinco bolas pretas. Retire três bolas e defina a variável aleatória X como sendo igual ao número de bolas pretas. Obtenha a distribuição de X, a média de X e a variância de X nos seguintes casos:
a) com reposição das bolas sorteadas.
b) sem reposição das bolas sorteadas.

2. Suponha que uma moeda viciada é lançada até que cara apareça pela primeira vez. A probabilidade de que numa jogada apareça cara é de 2/3. Seja X o número de lançamentos necessários até que isto aconteça. Obtenha a distribuição de X (observem que o número de valores possíveis que X pode assumir é infinito). Escreva uma fórmula para a probabilidade de $X = n$.

3. Uma moeda viciada, com probabilidade $1/4$ de sair cara, é lançada seis vezes. Seja Y o número de caras obtidas.
a) Calcule a distribuição de Y.
b) Calcule a média e a variância de Y.

4. Uma moeda honesta é lançada 5 vezes, em sequência. Seja K= cara e C=coroa. Se ocorre o evento CCCCC, dizemos que temos uma sequência, ao passo que se ocorre CKCCC, dizemos que temos 3 sequências (toda vez que muda o resultado, inicia-se uma nova sequência). Defina as variáveis aleatórias X= no. de caras obtidas e Y= no. de sequência obtidas. Assim, X(KCCCC) = 1 e Y(KCCCC) = 2.
a) Obtenha as distribuições de X e Y.
b) Calcule $E(X)$ e $E(Y)$.
c) Calcule $Var(X)$ e $Var(Y)$.

5. Um vendedor de um certo equipamento pode visitar, num dia, um ou dois clientes, com probabilidade 3/4 e 1/4 respectivamente. De cada contato pode resultar a venda de um equipamento por R$ 10.000,00 (com probabilidade 1/4) ou de nenhum equipamento (com probabilidade 3/4). Indicando por Y o valor das vendas totais do vendedor durante um dia, calcule:
a) a distribuição de probabilidade de Y.
b) o valor esperado do valor de vendas totais em um dia.
c) a $Var(Y)$.

6. Calcule a função de distribuição acumulada das variáveis X e Y do problema 4 e faça os seus respectivos gráficos.

7. O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar uma peça é uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidade:

t	2	3	4	5	6	7
p(t)	0,1	0,15	0,2	0,3	0,2	0,05

a) Calcule o tempo médio de processamento.

Para cada peça processada, o operário ganha um fixo de R$ 2,00. Mas se ele processa a peça em menos de 5 minutos, ganha R$ 1,50 por minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em 3 minutos, ele ganha um adicional de R$ 3,00 pela peça processada. Seja G a quantia ganha por peça processada.
b) Calcule a distribuição, média e variância de G.

8. Obtenha as funções de distribuição acumulada de T e G do exercício anterior e faça os seus respectivos gráficos.

9. Das variáveis descritas abaixo, assinale quais são binomiais, e para cada uma destas descreva os respectivos valores de definição e as respectivas funções de distribuição de probabilidade. Quando julgar que a variável não é do tipo binomial, aponte as razões da sua conclusão:
a) De uma urna com 10 bolas brancas e 20 bolas pretas, vamos extrair, sem reposição, 5 bolas. X é o número de bolas brancas extraídas nas 5 extrações.
b) O mesmo problema anterior, mas desta vez as extrações são com reposição.
c) Temos cinco urnas, cada uma com exatamente metade de bolas brancas e metade de bolas pretas. Extraímos uma bola de cada urna. Seja X o número de bolas brancas extraídas.
d) Vamos realizar uma pesquisa em 10 cidades brasileiras, escolhendo ao acaso um habitante de cada uma delas e classificando-o em pró ou contra um certo projeto federal. Admitimos que cada indivíduo tenha probabilidade p fixa de ser contra este projeto. Seja X o número de indivíduos contra o projeto no final da pesquisa.

10. Se $X \sim bin(n,p)$, sabendo-se que $E(X) = 9$ e $\sigma^2 = 6$, determinar:
a) n e p
b) $P(X < 22)$
c) $P(X \geq 24)$
d) $E(Z)$ onde $Z = \frac{X-9}{\sqrt{6}}$

11. Numa central telefônica, o número de chamadas recebidas segue uma distribuição de Poisson com a média de 3 chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que num minuto se tenha:
a) cinco ou mais chamadas.
b) menos que duas chamadas.
c) entre quatro (inclusive) e sete (exclusive) chamadas.

12. Na fabricação de um certo tipo de fita magnética, ocorre em média um corte a cada 1500 m. Qual a probabilidade de quem em um rolo de 5000 m de fita magnética ocorra:
a) nenhum corte.
b) no máximo dois cortes?
c) pelo menos três cortes?

13. Examinaram-se 4000 ninhadas com seis porcos cada uma, e verificou-se o número de machos em cada uma. Os dados estão representados na tabela abaixo:

No. de Machos	No. de ninhadas
0	55
1	440
2	970
3	1090
4	980
5	400
6	65
Total	4000

a) Calcule a proporção média de machos.
b) Seja X= no. de machos em cada ninhada. Se $X \sim bin\ (6, p)$, onde p é a proporção média de machos calculado no ítem anterior, calcule o número de ninhadas que se deveria esperar para cada valor de X.

14. Uma florista faz estoque de uma flor de curta duração que lhe custa R$ 1,00 e que ela vende a R$ 3,00 no primeiro dia em que a flor está na loja. Toda flor que não é vendida no primeiro dia não serve mais e é jogada fora. Seja X a variável aleatória que denota o número de flores que os fregueses compram em um dia escolhido casualmente. A florista descobriu que a função de probabilidade de X é dada pela tabela abaixo:

X	0	1	2	3	4
$p(X)$	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

Quantas flores a florista deveria ter em seu estoque diário para maximizar a média do seu lucro?

15. As cinco primeiras repetições de um experimento custam R$ 6,00 cada uma. Todas as repetições subsequentes custam R$ 4,00 cada. Suponha que os experimentos sejam repetidos até que o primeiro sucesso ocorra. Se a probabilidade de sucesso de uma repetição é 0,8, e se as repetições são independentes, qual é o custo esperado da operação?

16. Na manufatura de um certo artigo, é sabido que um entre 30 é defeituoso. Qual a probabilidade de que uma amostra casual de tamanho oito contenha:
a) nenhum defeituoso?
b) exatamente um defeituoso?
c) exatamente dois defeituosos?
d) não mais do que dois defeituosos?

17. Um fabricante de peças de automóveis garante quem uma caixa de suas peças conterá, no máximo, uma defeituosa. Se a caixa contém 15 peças, e a experiência tem demonstrado que este processo de fabricação produz 3% das peças defeituosas, qual a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia?

18. Uma amostra de 5 itens é selecionada aleatoriamente de uma caixa contendo 18 itens dos quais 3 são defeituosos. Qual a probabilidade de ter itens defeituosos na amostra selecionada?

19. Um curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 70% dos casos. Se doze funcionários quaisquer participam deste curso, encontre a probabilidade de:
a) exatamente sete funcionários aumentarem a produtividade.
b) não mais do que oito funcionários aumentarem a produtividade.
c) pelo menos cinco funcionários não aumentarem a produtividade.

20. O número de petroleiros que chegam a uma refinaria em cada dia ocorre segundo uma distribuição de Poisson, com $\lambda = 4$. As atuais instalações podem atender, no máximo, a cinco petroleiros. Se mais de cinco aportarem no mesmo dia, o excesso é enviado a outro porto.
a) Em um dia, qual a probabilidade de se enviar petroleiros para outro porto?
b) De quanto deverão ser aumentadas as instalações para permitir atender a todos os navios que chegam em pelo menos 90% dos dias?
c) Com as atuais instalações, qual o número médio de navios que são atendidos por dia?

21. Determinado tipo de parafuso é vendido em caixas com 1000 parafusos. É uma característica da fabricação produzir 4% com defeito. Normalmente, cada caixa é vendida por R$ 12,50. Um comprador faz a seguinte proposta: de cada caixa, ele escolhe uma amostra de 10 peças.

Se esta amostra não tiver parafusos defeituosos, ele paga R$ 15,00 pela caixa; um ou dois defeituosos ele paga R$ 11,00 e três ou mais defeituosos ele paga R$ 8,00. Qual alternativa é a mais vantajosa para o fabricante. Justifique.

22. Uma fábrica produz um circuito elétrico, das quais 4% são defeituosos. Os circuitos são vendidos em caixas com 10. Se uma caixa não tiver nenhum defeituoso, seu preço de venda é 14 reais; tendo um, o preço é 10 reais; dois ou três, o preço é 8 reais; mais do que três, o preço é três reais. Qual o preço médio de uma caixa?

23. Suponha que X seja uma variável aleatória discreta com função de distribuição dada por $P(x) = A\,3^{-x},\ \ x = 1, 2, 3, \ldots$

a) Calcule o valor de A para que $P(x)$ seja uma função de distribuição de probabilidade.

b) Calcule $P(X = \text{par})$.

c) $P(X \leq 2)$.

d) $P(X > 4)$

24. a) Num teste tipo certo/errado, com 40 questões, qual a probabilidade de que um aluno acerte pelo menos 70% das questões, supondo que ele as responda ao acaso?

b) E se as questões tiverem 5 alternativas onde somente uma é correta?

25. Um projeto realiza um experimento várias vezes consecutivas até que ele tenha sucesso. O custo de um experimento quando dá certo é R$ 800,00. Se o experimento falha, este custo é de R$ 1300,00. Se a probabilidade de sucesso do experimento é de 0,4, e se os experimentos são independentes e continuados até a ocorrência do primeiro sucesso, qual o custo esperado do projeto?

26. Suponha que uma caixa de 100 peças contenha 10 peças que são defeituosas e 90 não defeituosas. Se X é o número de peças defeituosas numa amostra aleatória de 15 peças retiradas da caixa, encontre:

a) $P(X = 0)$

b) $P(X \leq 3)$

c) $P(X > 8)$