1) Sean P_1 y P_2 dos medidas de probabilidad

$P = a_1 P_1 + a_2 P_2 \qquad a_1 + a_2 = 1 \qquad a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$

P medida proba? Axiomas Kolmogorov:

I) -> no negatividad $\forall A \quad P(A) \geq 0$

II) -> normalización $P(\Omega) = 1$

III -> Aditividad finita $\forall \{A_i\} \qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

I) $\forall A \quad P_1(A) \geq 0 \wedge P_2(A) \geq 0$, como $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$

$a_1, a_2 \geq 0 \quad P_1(A), P_2(A) \geq 0 \Rightarrow P(A) = a_1 P_1(A) + a_2 P_2(A) \geq 0 \Rightarrow P(A) \geq 0$

II) $P_1(\Omega) = 1$, $P_2(\Omega) = 1 \Rightarrow P(\Omega) = a_1 P_1(\Omega) + a_2 P_2(\Omega)$

$P(\Omega) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 = a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow P(\Omega) = 1$

III) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = a_1 P_1\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + a_2 P_2\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$

$P_1\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P_1(A_i) \qquad P_2\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P_2(A_i)$

$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = a_1 \sum_{i=1}^{n} P_1(A_i) + a_2 \sum_{i=1}^{n} P_2(A_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_1 P_1(A_i) + a_2 P_2(A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

P es medida de probabilidad.

2) Sea $\Omega = \{1,2\}$ $\mathcal{F} = \mathcal{G}(\Omega)$ P aplicación sobre $\mathcal{F}$

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \{\emptyset\} \\ 1/3 & \text{si } A = \{1\} \\ 2/3 & \text{si } A = \{2\} \\ 1 & \text{si } A = \{1,2\} \end{cases}$$

I) $A = \{\emptyset\}$, $P(\{\emptyset\}) = 0$
$A = \{1\}$, $P(\{1\}) = 1/3$
$A = \{2\}$, $P(\{2\}) = 2/3$
$A = \{1,2\}$ $P(\{1,2\}) = 1$

$\forall A$, $P(A) \geq 0$

II) $\Omega = \{1,2\}$ $P(\Omega) = (\{1,2\}) = 1$

III) $P(A)$, $P(B)$ $A = \{1\}$, $B = \{2\}$

$P(A \cup B) = P(\{1\} \cup \{2\}) = P(\{1,2\}) = 1$

$P(A) + P(B) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = 1/3 + 2/3 = 1$

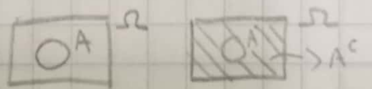
P es una medida de probabilidad.

3) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio probabilidad.

a) $P(\emptyset) = 0$

Por aditividad

$P(\Omega) = P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega)$ $P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

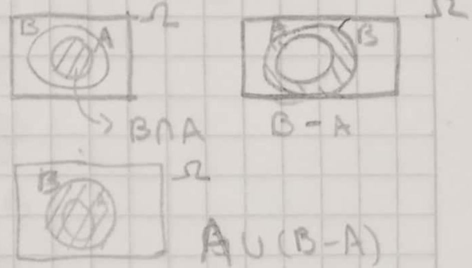
b) $P(A^c) = 1 - P(A)$ 

$P(A) = P(\Omega) - P(A^c)$

$A \cup A^c = \Omega$ $\wedge$ $A \cap A^c = \emptyset$ (Por aditividad) $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$

$P(\Omega) = 1 \Rightarrow 1 = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$

c) Si $A \subseteq B \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B - A)$



$B = A \cup (B - A)$ $A \cap (B - A) = \emptyset$

$P(B) = P(A) + P(B - A)$

d) $\forall A$, $P(A) \leq 1$

$P(A) = 1 - P(A^c)$ $P(A^c) \geq 0$ (no negatividad)

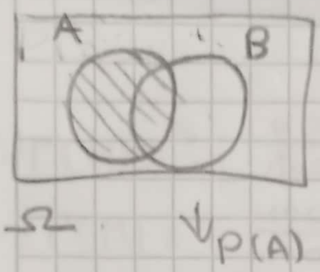
$1 - P(A^c) \leq 1$ $P(A) \leq 1$

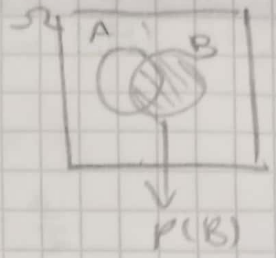
e) Si $A \subseteq B$ ent $P(A) \leq P(B)$

de c) $P(B) = P(A) + P(B - A)$ $P(B - A) \geq 0$

$P(B) \geq P(A) \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$





$P(A \cup B) = P(B) + P(A - B)$

$P(A) = P(A-B) + P(A \cap B)$

$P(B) = P(B-A) + P(A \cap B)$

$-\ P(B-A) = P(B) + P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(B) + P(A-B)$

$P(A \cup B) = P(B-A) + P(A \cap B) + P(A-B)$

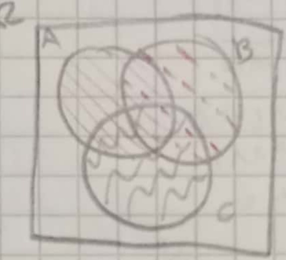
$P(A \cup B) = P(B-A) + PA)$

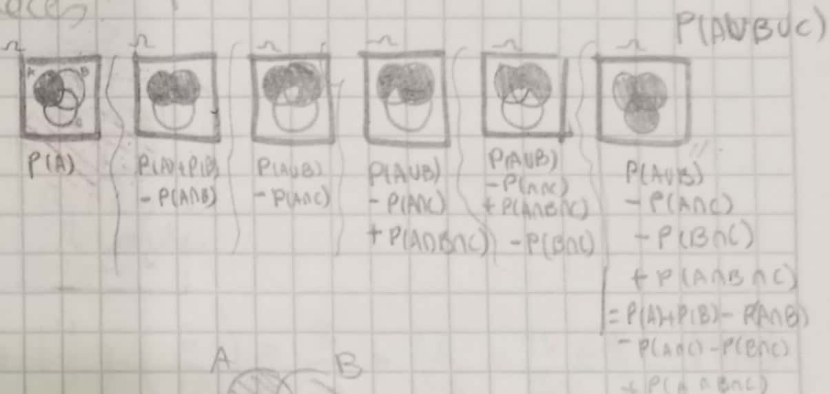
$P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap B) + P(A)$

g) $P(A \cup B \cup C) = \underline{P(A)} + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$
$+ P(A \cap B \cap C)$

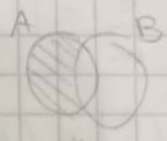
$P(A \cap B)$ - (2 veces)
$P(A \cap C)$ - (2 veces)
$P(B \cap C)$ (2 veces)
$P(A \cap B \cap C)$ (3 veces)

en $P(A) + P(B) + P(C)$





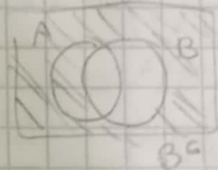
h) $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$



$= A - B$
$= A \cap B^c$

$A - B = A \cap B^c \qquad P(A-B) = P(A \cap B^c)$

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$



i) $P((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

$(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

$P((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = P(A \cap B^c) + P(B \cap A^c)$

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$

$P((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = (P(A) - P(A \cap B)) + (P(B) - P(A \cap B))$
$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

1) 1000 participantes   185 hombres con gafas
415 hombres sin gafas
115 mujeres con gafas

	H	M	T
Gafas	185	115	300
- Gafas	415	285	700
T	600	400	1000

$(3/5)\ P(H) = ?\quad \frac{600}{1000} = \frac{3}{5}$

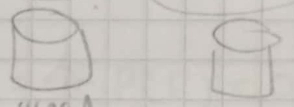
$(2/5)\ P(M) = \frac{400}{1000} = \frac{2}{5}$

$(3/10)\ P(G) = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10}$

$\left(\frac{23}{80}\right) P(G/M) = \frac{P(G\cap M)}{P(M)} \qquad P(G\cap M) = \frac{115}{1000} = \frac{23}{200}$

$P(G/M) = \frac{23}{200} \cdot \frac{5}{2} = \frac{23\cdot 5}{400} = \frac{23}{80}$

2) Dado 6 caras U_1 (1 - 2) U_2 (3, 4, 5, 6)



urna 1: 3 rojas, 1 negra, 6 verdes

urna 2: 6 rojas, 2 negras, 2 verdes

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

· sea roja $\left(\frac{1}{2}\right) P(R) = \left(\frac{2}{6}\right)\cdot\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{4}{6}\right)\cdot\left(\frac{6}{10}\right) = \frac{3}{30} + \frac{12}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = P(R)$

· sea negra $\frac{1}{6}$ $P(N)$

$P(N) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{1}{30} + \frac{4}{30} = \frac{5}{30} = 1/6$

· urna 1, ya se obtuvo bola negra $\left(\frac{1}{5}\right) P\left(\frac{1}{N}\right)$

· urna 2, ya se obtuvo una bola negra $P\left(\frac{2}{N}\right)$ $P\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{P(N\cap U_1)}{P(N)}$ $P(U_1) = 1/3 \quad P(U_2) = 2/3$

$P(N\cap U_1) = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{30} \qquad P\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{30}\cdot 6 = \frac{1}{5} = P(1/N)$

$P\left(\frac{2}{N}\right) \qquad P(U_2/N) = \frac{P(N\cap U_2)}{P(N)} \qquad P(N\cap U_2) = \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{30}$

$P\left(\frac{2}{N}\right) = \frac{4}{30}\cdot 6 = \frac{4}{5}$

3) Una bolsa con 2 dulces limón 1 dulce y otro
3 fresa

probabilidad ambos fresa $P(F \cap F) = 3/16$

primer dulce $P(F_1) = \frac{3}{5}$ segundo dulce $P\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(F \cap F) = P(F_1) \cdot P(F_2/F_1)$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

Teo. Bayes 1) 40% pacientes fuma

↳ 75% sean hombres.

(23/50) de No fuman → 60% Mujeres

a) $P(M) = ?$ (23/50)

$P(F) = 0.4$ $P(F^c) = 1 - P(F) = 0.6$

$P(M|F) = 1 - 0.75 = 0.25$ $P(M|F^c) = 0.6$

↓

$P(H|F)$

$P(M) = (0.25 \times 0.4) + (0.6 \times 0.6)$

$= (0.1) + (0.36)$

$= 0.46$

$= \frac{23}{50}$

b) $P(F \cap H)$

$P(F) = 0.4$

$P(H|F) = 0.75$

$P(H \cap F) = P(H|F) \cdot P(F)$

$0.75 \cdot 0.4 = 0.3 = 3/10$

c) $P(F|M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)}$ $P(M) = 23/50$

$P(F \cap M) = P(M|F) \cdot P(F)$

$= 0.25 \cdot 0.4$

$= 0.1$

$P(F|M) = \frac{0.1 \cdot 50}{23} = \frac{5}{23}$

$\pi(\lambda) = [0.4, 0.3, 0.2, 0.1]$ # medio 1, 2, 3 y 4

$x = 4$

a) $\hat{\lambda}$

b) $P\left(\frac{x}{\lambda_i}\right) = L\left(\frac{x}{\lambda_i}\right) \quad i = 1,2,3,4$

c) $P(\lambda_i / x) = \dfrac{L(x/\lambda_i)\,\pi(\lambda_i)}{\sum_{\forall j} L(x/\lambda_j)\,\pi(\lambda_i)} \quad i, j = 1,2,3,4$

d) normalizada.

e) modelo más probable $\lambda = 3$

f) mejor parámetro $\lambda = 2.77$

a) $\hat{\lambda} = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \pi(\lambda_i) \qquad \hat{\lambda} = (1)(0.4) + (2)(0.3) + (3)(0.2) + (4)(0.1)$

$\hat{\lambda} = 0.4 + 0.6 + 0.6 + 0.4 = 2$

b) $L\left(\frac{x}{\lambda_i}\right) = \dfrac{\lambda_i^x e^{-\lambda_i}}{x!}$

$\lambda = 1 \quad L(4|1) = \dfrac{1^4 e^{-1}}{4!} = \dfrac{1 \cdot e^{-1}}{24} \approx 0.0077$

$\lambda = 2 \quad L(4|2) = \dfrac{2^4 e^{-2}}{4!} = \dfrac{16 \cdot e^{-2}}{24} \approx 0.0902$

$\lambda = 3 \quad L(4|3) = \dfrac{3^4 e^{-3}}{4!} = \dfrac{81 \cdot e^{-3}}{24} \approx 0.168$

$\lambda = 4 \quad L(4|4) = \dfrac{4^4 e^{-4}}{4!} = \dfrac{256\, e^{-4}}{24} \approx 0.1563$

c) $P(\lambda_i / x) = \dfrac{L(x|\lambda_i)\,\pi(\lambda_i)}{\sum_{j=1}^{4} L(x|\lambda_i)\,\pi(\lambda_j)} \qquad \sum_{j=1}^{4} L(x|\lambda_j)\,\pi(\lambda_j)$ =

$(0.1563)(0.1) + (0.168)(0.2) + (0.0077)(0.4) + (0.0902)(0.3)$

$= 0.00308 + 0.02706 + 0.0336 + 0.01563 = 0.07937$

$\lambda_1 = P(\lambda_1 / x) = \dfrac{(0.0077)(0.4)}{0.07937} \approx 0.0388$

$\lambda_2 = P(\lambda_2 | x) = \dfrac{(0.0902)(0.3)}{0.07937} \approx 0.341$

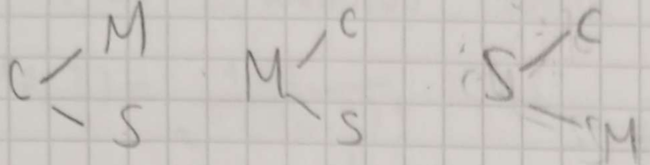
$\lambda_3 = P(\lambda_3 | x) = \dfrac{(0.168)(0.2)}{0.07937} \approx 0.4233$

$\lambda_4 = P(\lambda_4 | x) = \dfrac{(0.1563)(0.1)}{0.07937} \approx 0.1969$

Conteo

1) Carlos, Manuel, Sandra 100 mt planos

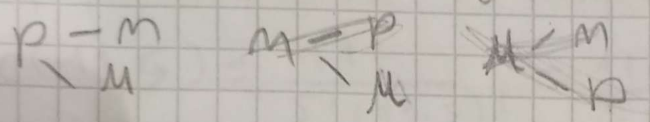
¿Formas podio primer y segundo lugar?



$$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 3 \times 2 = 6$$

carlos - Manuel	Manuel - carlos	Sandra - carlos
carlos - sandra	Manuel - sandra	Sandra - manuel
primero | segundo	primero | segundo	primero | segundo

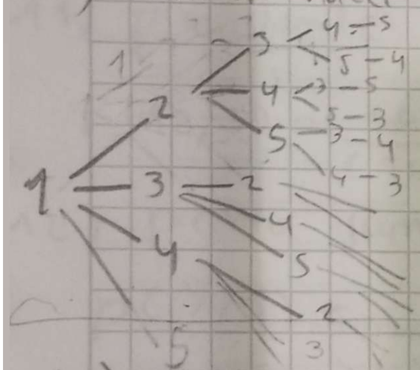
2) Ensalada fruta 2 ingredientes, plátano, manzana y uva



plátano - manzana
plátano - uva
manzana - uva

$$C(3,2) = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} = 3$$

3) Forma hacer cola 5 amigos a cine



$$P(5,5) = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

4) premio 1° 2° 3° concurso 8 participantes

$$P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

5) 2 numeros de 10 (los pares en 10 elementos)

$$C(10,2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

6) acomodar 5 de 7 libros.

$P(7,5) = \frac{7!}{(7-5)!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$

7) comite de 2 alumnos entre 10 alumnos (lw pares en 10 elemento)

$C(10,2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$

8) Palabras diferentes en REMEMBER

R x 2
E x 3
M x 2
B

permutaciones → $\frac{8!}{2!3!2!} = \frac{40320}{2 \times 6 \times 2} = 1680$

9) equipo de 6 en 12, siempre con Malin

$C(11,5) = \frac{11!}{5!(11-5)!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 462$

10) jugos con 4 frutas, un jugo minimo 2 frutas.

$C(4,2) + C(4,3) + C(4,4) = 6 + 4 + 1 = 11$

11) presidente en curso 10 estudiantes. presi, vice, secretario

$P(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

12) premio campeón y subcampeón en 8 equipos

$P(8,2) = \frac{8!}{(8-2)!} = 8 \times 7 = 56$

13) números 3 cifras distintas, 1-7

$P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$

14) números 3 cifras 1-7

$7 \times 7 \times 7 = 343$

15) comité de 3 estudiantes en un grupo de 10

$C(10,3) = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$

16) placas diferentes. 3 letras - 3 digitos

$26^3 \times 10^3 = 17576000$

17) n Personas, ¿maneras de sentarse?

$(n-1)!$ $P(n) = (n-1)!$

$(n-1)(n-2)(n-3) \cdots$

18) combinaciones helado 3 sabores, 7 opciones,

$$C(7,3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 84$$

19) 3 gaseosas de 6 sabores diferentes.
¿Cuantas formas diferentes?

$$C(6+3-1,3) = \frac{8!}{3!\,5!} = 56 \qquad C(n+r-1,r) = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad C(6,3) = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$$

20) $C^n_r = \binom{n+r-1}{r}$ - A ver $\quad n = k$

Sea $S = \{2\cdot a, 1\cdot b, 3\cdot c\}$ 3-combinaciones de S

Si S tiene k objetos de distintos tipos at hay $k-1$ combinaciones de S.

son $\{2\cdot a, 1\cdot b\}$ $\{2\cdot a, 1\cdot c\}$
$\{1\cdot a, 1\cdot b, 1\cdot c\}$ $\{1\cdot a, 2\cdot c\}$
$\{1\cdot b, 2\cdot c\}$ $\{3\cdot c\}$ → conjunto mutiral

Dem: Sea n-tipos de objetos de S
$a_1, a_2, \dots, a_k$ tq $S = \{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \dots, \infty\cdot a_k\}$

Cualquier r-combinación de S de la forma $\{x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2, \dots, x_k\cdot a_k\}$
: $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ $\quad x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$.

En sentido contrario
cada secuencia $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$ corresponde a una r-combinación de S.

=> El número de r-combinaciones de S es lo mismo que el número de soluciones para la ecuación.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = r \qquad x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{N}.$$

El número de soluciones es igual a las permutaciones del multiset

$$T = \{r\cdot 1, (k-1)\cdot *\} \text{ de } r+k-1 \text{ objetos de dos distintos tipos.}$$

Dado una permutación de T, $k-1$ *'s divide $r\cdot 1$'s in k grupos.
Sea x_1 1s a lo izquierda del primer *, x_2 1s esta entre el primero y el segundo *
, ..., x_k 1s esta a la derecha del último *. $x_1, x_2, \dots x_k \in \mathbb{N}$
$x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$. A la inversa, sean $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ con $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$
podemos invertir los pasos anteriores y construir una permutación de T.

Así, el número de r-combinaciones del multiset S es igual al número de permutaciones del multiconjunto T.

$$\frac{(r+k-1)!}{r!\,(n-1)!} = \binom{r+n-1}{r}$$

El número de r-combinaciones de n distintos objetos, no finitas

$$\binom{r+n-1}{r}$$

$S = \{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \dots, \infty\cdot k\}$ el número de secuencias contables en una r-combinación de S

Es cierto si la repetición de números de n objetos distintos de S son a lo sumo r

Generales de Probabilidad

1) Se lanza un dado equiprobable.

A) la suma result ≤ 3 $\quad P(A) = \quad P(A \cup B) = \quad \frac{1}{12} \quad 19/36$

b) primer lanzamiento impar $\quad P(B) = \quad P(A^c) = \quad 1/2 \quad 11/12$

$P(A)$ $(1,1)$ $(2,1)$ $(1,2)$ posibilidades $6 \times 6 = 36$

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$P(B)$
$(1,1)$ $(1,2)$ $(1,3)$ $(1,4)$ $(1,5)$ $(1,6)$
$(3,1)$ $(3,2)$ $(3,3)$ $(3,4)$ $(3,5)$ $(3,6)$
$(5,1)$ $(5,2)$ $(5,3)$ $(5,4)$ $(5,5)$ $(5,6)$

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$P(A \cup B)$ $\quad A \cap B = 2$

$$P(A \cup B) = \underset{\left(\frac{3}{36}\right)}{\frac{1}{12}} + \underset{\left(\frac{18}{36}\right)}{\frac{1}{2}} - \frac{2}{36} = \frac{21}{36} - \frac{2}{36} = \frac{19}{36}$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

2) 5 celulares de 50 equipos (2 defectuosos)

Al menos 1 celular sea defectuoso. $\quad P(A) = \frac{47}{245} \quad P(A^c) = \frac{48}{50}$

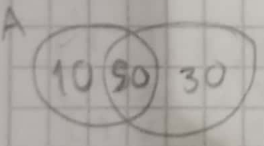
$$P(A^c) = \left(\frac{48}{50}\right) \cdot \left(\frac{47}{49}\right) \cdot \left(\frac{46}{48}\right) \cdot \left(\frac{45}{47}\right) \cdot \left(\frac{44}{46}\right) = \frac{198}{245}$$

$$P(A) = 1 - \frac{198}{245} = \frac{47}{245}$$

3) 60% diario $\quad$ 50% ambos.
80% cable

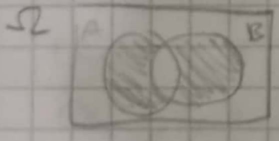
a) $P(A \cup B)$

b) $P((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$ (dif. simétrica)



$$P(A \cup B) = \frac{10}{100} + \frac{50}{100} + \frac{30}{100} = \frac{90}{100} = 0.9$$

$B^c = 20\%$ $\quad A^c = 40\%$



$$P((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = \frac{10}{100} + \frac{30}{100} = \frac{40}{100} = 0.4$$

5) 2 dados a) suma es 8 $P(A \cap B)$

b) segundo dado impar $P(A) \cdot P(B)$

$P(A) \rightarrow (2,6)\ (3,5)\ (4,4)$
$(5,3)\ (6,2)$

$P(A) = \frac{5}{36}$

$P(B)$			
	(1, 1)	(1, 3)	(1, 5)
	(2, 1)	(2, 3)	(2, 5)
	(3, 1)	(3, 3)	(3, 5)
	(4, 1)	(4, 3)	(4, 5)
	(5, 1)	(5, 3)	(5, 5)
	(6, 1)	(6, 3)	(6, 5)

$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{72}$

A y B son eventos independientes.

6) 3 dados ¿1 par?

(1, 1, 1) (2, 2, 2) (3, 3, 3) (4, 4, 4) (5, 5, 5)
(6, 6, 6)
(1, 1, x) (2, 2, x) (3, 3, x) (4, 4, x) (5, 5, x)
↳ 5 veces x 6 veces (6, 6, x)
(1, x, 1)
↳ 5 veces x 6 veces $3(5 \times 6) + 6$
$\parallel$
(x, 1, 1) → 5 veces x 6 veces. 96

$\frac{96}{216} = \frac{1}{6}$

si solo tienen un par $\frac{3 \times 5 \times 6}{216} = \frac{5}{12}$

7) 5 dados de 6 caras. 1 par $P(A) = \frac{25}{54}$ 4 misma cara

(1, 1, x, y, z) x 5!
(1, x, 1, y, z) x 5!
(1, x, y, 1, z) x 5! $10 \times 5!$
(1, x, y, z, 1) x 5!
(x, 1, 1, y, z) x 5! $\parallel$
(x, 1, y, 1, z) x 5! $\frac{25}{6^5}$
(x, 1, y, z, 1) x 5!
(x, y, 1, 1, z) x 5!
(x, y, 1, z, 1) x 5!
(x, y, z, 1, 1) x 5!

2 pares $P(B) = \frac{25}{108}$ $P(C) = \frac{25}{1296}$

12) Hay un sistema constituido por N partículas 2 niveles de energía distintos ε_0 y ε_1 $(\varepsilon_1 > \varepsilon_0)$

$n_0 = \# \varepsilon_0$, $n_1 = \# \varepsilon_1$. $E = n_0\varepsilon_0 + n_1\varepsilon_1$
$N = n_0 + n_1$.

a) $\Omega(N, n_0) = \dfrac{N!}{n_0!\,n_1!}$ b) $S(N, n_0) = K_B \ln(\Omega)$
$\ln(N!) \approx N\ln(N) - N$

$$\Omega(N, n_0) = \binom{N}{n_0} = \frac{N!}{n_0!(N-n_0)!} \quad n_1 = N - n_0$$

ent $\dbinom{N}{n_0} = \dfrac{N!}{n_0!\,n_1!}$ (el número de maneras de distribuir N partículas en dos niveles de energía $n_0 \to \varepsilon_0$ $n_1 \to \varepsilon_1$)
→ # combinaciones

b) $S(N, n_0, n_1) = K_B\left[N\ln N - \sum_{i=0}^{1} n_i \ln n_i\right]$

$S(N, n_0) = K_B \ln(\Omega)$ $\ln(N!) \simeq N\ln N - N$

$S(N, n_0, n_1) = K_B \ln\left(\dfrac{N!}{n_0!\,n_1!}\right) \approx K_B\left[\ln(N!) - \ln(n_0)! - \ln(n_1)!\right)$

$\approx K_B[(N\ln N - N) - (n_0\ln n_0 - n_0) - (n_1\ln n_1 - n_1)]$ $n_0 = N(1-x)$ $n_1 = Nx$.

$= K_B[N\ln N - n_0\ln n_0 - n_1\ln n_1]$ c) $S(N,x) = -K_B N(x\ln x + (1-x)\ln(1-x)]$ $x = \dfrac{n_1}{N}$

c) $= K_B[N\ln N - N(1-x)\ln(N(1-x)) - Nx\ln(Nx)]$

$= K_B[N\ln N - N(1-x)(\ln N + \ln(1-x)) - Nx(\ln N + \ln x)]$

$= K_B[N\ln N - N(1-x)\ln N - N(1-x)\ln(1-x) - Nx\ln N - Nx\ln x]$

$= K_B[N\ln N - N\ln N + Nx\ln N - N(1-x)\ln(1-x) - Nx\ln x]$

$= -K_B[x\ln x + (1-x)\ln(1-x)]$

e) De la primera ley de termodinámica

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_N = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_N \left(\frac{\partial x}{\partial E}\right)_N$$

$$x(T) = \frac{1}{1+e^{+\frac{\Delta E}{K_B T}}} \qquad \Delta E = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -K_B N[\ln x + 1 - \ln(1-x) - 1] = -K_B N\left[\ln \frac{x}{1-x}\right]$$

$$x = \frac{1}{N(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}(E - N_{\varepsilon_0}) \qquad \frac{\partial x}{\partial E} = \frac{1}{N(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}$$

$$\frac{1}{T} = -K_B N\left[\ln\frac{x}{1-x}\right] \cdot \frac{1}{N(\varepsilon_1-\varepsilon_0)} = \frac{-K_B}{\varepsilon_1-\varepsilon_0}\ln\frac{x}{1-x}$$

$$\ln\frac{x}{1-x} = -\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{K_B T} \qquad \frac{x}{1-x} = e^{-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{K_B T}} \qquad x = \frac{1}{1+e^{\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{K_B T}}}$$

f) Para bajas y altas temperaturas $T \to 0$, $T \to \infty$, encuentre $x(T)$ entropía

$$\lim_{T\to\infty} S(T) = K_B N \ln(2)$$

$T \to 0$, $e^{\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{K_B T}} \to 1 \Rightarrow x(T) \to \frac{1}{2}$ (las partículas están igualmente distribuidas)

a alta temperatura:

$\lim_{T\to\infty} S(T) = K_B N \ln(2)$ (a alta temperatura el sistema alcanza la máxima entropía con igual probabilidad en cada estado)

g) Un gas ideal conformado por N partículas, realiza una expansión isotérmica de un volumen $V_1 = V$ a un volumen $V_2 = 2V$. Calcule el cambio de entropía y compare con el anterior

$$\Delta S = nR\ln\frac{V_2}{V_1} = nr\ln 2$$

(comparado con la entropía a alta temperatura. Ambos tienen $\ln 2$. Por lo que crecen de manera similar debido a la expansión en igual distribución de partículas)

$$\frac{dQ}{T} = \frac{dW}{W} = \frac{P\,dV}{T}$$

$$= \frac{nR}{V}dV \qquad \int dS = \int nR\frac{dV}{V} \qquad \Delta S = \int \frac{dQ}{T}$$

$$\Delta S = nR\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} \qquad \Delta S = nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

11) Sea $X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$ $\quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$X = a^T \vec{X}$

$E(X) = E(a^T \vec{X}) = a^T E(\vec{X})$

$Var(X) = Var(a^T \vec{X}) = a^T cov(\vec{X}) a$ $\quad$ cov, matriz covarianza de X

$X_1 \sim \Gamma(2,3)$ $\quad X_2 \sim N(9,2)$ $\quad X_3 \sim U(0,10)$ $\quad N = 10^4$

$X = X_1 + 2X_2 - X_3$

$cov(X,X) = Var(X) = \sigma^2_X$

d) demuestre que

$$Var\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \frac{2}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N} cov(X_i, X_j)$$

$cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$

$X = (X_1, \dots, X_n)^t$ $\quad$ matriz covarianza

$\Sigma_{ij} = cov(X_i, X_j)$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} cov(X_1,X_1) & cov(X_1,X_2) & \cdots & cov(X_1,X_n) \\ cov(X_2,X_1) & cov(X_2,X_2) & & cov(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cov(X_n,X_1) & cov(X_n,X_2) & \cdots & cov(X_n,X_n) \end{pmatrix}$$

$\Sigma_{ii} = cov(X_i, X_i) = Var(X_i)$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma^2_{X_i} + 2\sum_{i,j,\, i<j} a_i a_j cov(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i,j} a_i a_j cov(X_i, X_j)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2)$$

$$= \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - 2\mu\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right) + \mu^2 = E[x_i^2] - \mu^2$$

$\mu = E[x_i] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad E[x_i^2] = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2 = \frac{1}{2N^2}\sum_{i,j=1}^{N}(x_i - x_j)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2 = \frac{1}{2N^2}\sum_{i,j=1}^{N}(x_i - x_j)^2.$$

$$\frac{1}{2N^2}\sum_{i,j=1}^{N}(x_i - x_j)^2 = \frac{1}{2N^2}\sum_{i,j=1}^{N}(x_i^2 - 2x_ix_j + x_j^2)$$

$$= \frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j\right) + \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma^2+\mu^2) - \mu^2 + \frac{1}{2}(\sigma^2+\mu^2) = \sigma^2$$

Suponga $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independentes variables

Sea $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

$$Var[S] = Cov[S,S] = Cov[X_1+X_2+\ldots+X_n, X_1+X_2+\ldots+X_n]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} Cov[X_i, X_j] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]$$ dado X_i's son independentes

$$* \quad cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} cov(X_i, X_j)$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{1\le i<j<n} cov(X_i, X_j)$$

$$\left(\begin{array}{l} Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2cov(X,Y) \\ Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2cov(X,Y)\end{array}\right.$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov(X_i, X_j)$$

$$\overset{i=j}{=} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j)$$

$$\frac{1}{N^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \frac{2}{N^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} cov(X_i, X_j)$$

$$Var\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \frac{2}{N^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} cov(X_i, X_j)$$