

# Computerphysik SS 2023

## Hausaufgabe 5

Gabriel Remiszewski und Christian Fischer

08. Juli 2023

### H.1: Frequenzabhängige Fehlerdämpfung mit Multigrid

In dieser Aufgabe wird das Randwertproblem

$$u''(x) = 0, \quad u(0) = 0 = u(\pi),$$

betrachtet. Werden die Randbedingungen für die allgemeine Lösung  $u(x) = Ax + B$  ( $A, B = \text{const.}$ ) ausgewertet, so ergibt sich  $u(x) = 0$  als spezielle (exakte) Lösung des betrachteten Randwertproblems. Nun soll das in der Vorlesung vorgestellte Multigrid-Verfahren an diesem Problem getestet werden und numerisch die erwartete analytische Lösung liefern.

1. Zunächst wird das Multigrid-Verfahren für den V-Zyklus ( $\gamma = 1$ ) mit variabler Anzahl von Levels implementiert. Dabei geht der Multigrid-Zyklus von einer Näherungslösung  $v_h$  für das Gleichungssystem  $A_h u_h = f_h$  auf dem feinsten Gitter  $G_h$  mit Schrittweite  $h$  aus. Es wird das Gauss-Seidel Verfahren als Glättoperator verwendet und für beide Aufgaben eine lineare Differentialgleichung angenommen, weshalb die Matrix unter diesen Bedingungen folgende Form bekommt:

$$(A_h)_{ij} = \frac{1}{h^2} \begin{cases} 2 - h^2 g_i & i = j \\ -1 & i = j \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad i, j \in [1, N-1]$$

Hier wird der Algorithmus beispielhaft für zwei Levels vorgestellt. In einem ersten Schritt (Glättung) werden mit dem Gauß-Seidel-Verfahren  $\nu_{\text{pre}}$  Dämpfungsschritte durchgeführt, es wird also  $w_h = \mathcal{G}(R)^{\nu_{\text{pre}}} v_h$  (hierbei ist  $R$  der Relaxationsparameter) berechnet. In einem zweiten Schritt (Restriktion und Rekursion) wird der Residuenvektor  $r_h = f_h - A_h w_h$  berechnet. Es müssen nun zwei Fälle unterschieden werden. Falls  $h < h_{\text{max}}$  (das größte Gitter ist noch nicht erreicht), wird aus dem Residuenvektor die neue rechte Seite für das gröbere Gitter  $f_{2h} = \mathcal{I}_h^{2h} r_h$  berechnet. Der Projektionsoperator  $\mathcal{I}_h^{2h}$  bildet ein Feld  $w_h$  von einem feineren auf das gröbere Gitter gemäß folgender Abbildungsvorschrift ab:

$$\mathcal{I}_h^{2h} : G_h \rightarrow G_{2h}, \quad w_h \mapsto \mathcal{I}_h^{2h} w_h = w_{2h}.$$

Die Iterationsvorschrift lautet:

$$w_{2h}(j \cdot 2h) = \frac{1}{4}(w_h((2j-1) \cdot h) + 2w_h(2j \cdot h) + w_h((2j+1) \cdot h)).$$

Dann wird der Multigrid-Zyklus wieder bei dem ersten Schritt gestartet, indem mit  $A_{2h}$  und  $f_{2h}$  auf  $G_{2h}$   $w_{2h}$  berechnet wird. Nun fährt der Algorithmus bei dem dritten Schritt (Prolongation und Korrektur) fort, indem die Lösung aus dem gröberen Gitter  $G_{2h}$  durch Prolongation nach  $G_h$  abgebildet wird und die Lösung gemäß  $w_h \leftarrow \mathcal{I}_{2h}^h w_{2h}$  aktualisiert wird. Die Iterationsvorschrift der Prolongation ( $\mathcal{I}_{2h}^h : G_{2h} \rightarrow G_h$ ) ist gegeben durch:

$$w_h(j \cdot h) = \begin{cases} w_{2h}(\frac{j}{2} \cdot (2h)) & j \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}w_{2h}(\frac{j-1}{2} \cdot (2h)) + \frac{1}{2}w_{2h}(\frac{j+1}{2} \cdot (2h)) & j \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Im vierten und letzten Schritt (Glättung) wird  $\nu_{\text{post}}$ -mal die Dämpfungsoperation (Gauß-Seidel-Verfahren) angewendet:

$$w_h \leftarrow \mathcal{G}(R)^{\nu_{\text{post}}} w_h.$$

Falls im zweiten Schritt bereits  $h = h_{\text{max}}$  gilt, so wird  $A_{h_{\text{max}}} e_{h_{\text{max}}} = r_{h_{\text{max}}}$  (hier ist  $e_h$  der Fehler zwischen der Näherungslösung und der exakten Lösung) gelöst und gemäß  $w_h \leftarrow w_h + e_h$  aktualisiert. Dann erfolgt sofort der vierte Schritt (Glättung). Im allgemeinen Fall für eine variable Anzahl von Levels wird in dem zweiten Schritt auf jedem Level  $m$  mit Gitter  $G_{2^{m-1}h}$  ( $m \geq 1$ ) der Residuenvektor projiziert und es wird in das nächste Level  $m + 1$  mit Gitter  $G_{2^m h}$  gegangen. Beim Wiederaufstieg werden automatisch alle Lösungen auf den einzelnen Levels aktualisiert.

Das Multigrid-Verfahren ist somit ein rekursives Zweigitter-Verfahren, womit der Fehler  $e_{2h}$  auf dem groben Gitter besser approximiert werden und die Konvergenz schneller erreicht werden sollte.

Im Code wird zum Lösen einer Differentialgleichung ein Objekt der Klasse `ODESolver` erstellt, dessen Konstruktor als Parameter die Randpunkte, Gitterfeinheit sowie die DGL-spezifizierenden Funktionen  $g(x)$  und  $s(x)$  annimmt. Der Relaxationsparameter kann über die Variable `ODESolver.relaxation` eingestellt werden, die Anzahl der level mit `ODESolver.max_level`. Optional kann auf dem größten Gitter der Tridiagonalmatrix-Algorithmus zur Berechnung des Fehlers eingeschaltet werden mit dem boolean `ODESolver.thomas = true`. Sobald die gewünschten Bedingungen gesetzt wurden, kann die Differentialgleichung gelöst werden mit der Funktion

```
ODESolver.solve(double eps, vector<double> *u_norms, vector<double> *res_norms,
    unsigned int pre_smooth, unsigned int post_smooth)
```

wobei `eps` die gewünschte Zielgenauigkeit und die Integer Parameter die Vor- und Nachglättungszahlen  $\nu_{\text{pre}}$  und  $\nu_{\text{post}}$  sind. Mit den Beiden Vektoren können optional die Normen vom Residuum und der Lösung pro Iterationsschritt abgefangen werden.

2. Nun wird das Programm getestet. Der Lösungsalgorithmus wird auf dem feinsten Gitter mit den folgenden anfänglichen Näherungslösungen gestartet:

$$z_k(x_j) = \sin(k \cdot jh), \quad j = 1, \dots, 2^N - 1, \quad N = 7, \quad h = \frac{\pi}{2^N},$$

mit Wellenzahl  $k = 1, \dots, 2^N - 1$ . Als Abbruchkriterium wird die absolute Genauigkeit  $\epsilon_{\text{abs}} = 0.1h^2$  verwendet. In diesem Aufgabenteil wird zunächst das Multigrid-Verfahren mit nur einem Level (also Gauß-Seidel-Verfahren mit Relaxationsparameter  $R = 1$ ) durchgeführt. Auf diesem Level wird  $\nu_{\text{pre}} = \nu_{\text{post}} = 1$  als Glättungsschritt verwendet. Hierbei wird die Dämpfungswirkung des Gauß-Seidel-Verfahrens für verschiedene nieder- und hochfrequente Wellenzahlen ( $k = 1, 21, 41, 61, 81, 101, 121$ ) auf dem feinsten Gitter verglichen, indem die Norm der Näherungslösung in Abhängigkeit von der Iterationszahl dargestellt wird. In Abbildung 1 ist zu erkennen, dass die Dämpfungswirkung des Gauß-

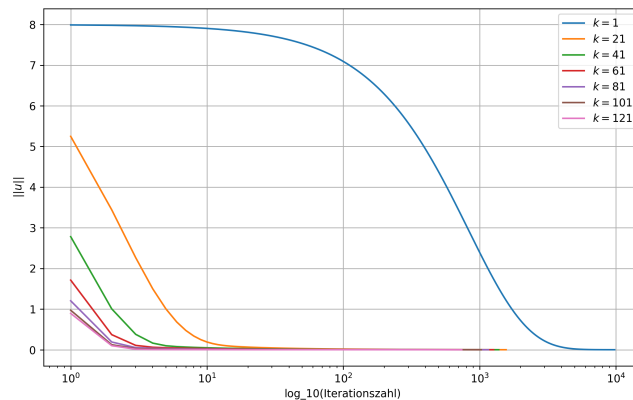


Abbildung 1: Vergleich der Dämpfungswirkung des Gauß-Seidel-Verfahrens für verschiedene Wellenzahlen.

Seidel-Verfahrens für größer werdende Wellenzahlen extrem schnell zunimmt, da dann die Norm der Näherungslösung bereits nach wenigen Iterationen sich wie die Norm der exakten Lösung verhält.

3. In diesem Aufgabenteil wird das Ziel verfolgt, die Dämpfungswirkung durch das Multigrid-Verfahren zu verifizieren. Dafür werden die Level 1, 2, 3, 4 und 5 verwendet. Als Abbruchkriterium wird wieder die absolute Genauigkeit  $\epsilon_{\text{abs}} = 0.1h^2$  verwendet. Außerdem wird auf jedem Level  $\nu_{\text{pre}} = \nu_{\text{post}} = 1$  als Glättungsschritt benutzt. Um die Dämpfungswirkung der verschiedenen Level zu vergleichen, wird für jedes Level die Norm der Näherungslösung gegen die Iterationszahl für die Wellenzahlen  $k = 1, 41, 81, 121$  dargestellt (siehe Abbildungen 2, 3, 4, 5 und 6). Tatsächlich ist eine Steigerung der Dämpfungswirkung durch das Multigrid-Verfahren zu erkennen, da bei steigendem Level des Multigrid-Verfahrens für verschiedene Wellenzahlen immer weniger Iterationsschritte benötigt werden, sodass die Norm der Näherungslösung gegen die Norm der exakten Lösung konvergiert. Um diese Verbesserung eindeutig zu erkennen, werden nochmal die verschiedenen Level in einem gemeinsamen Plot dargestellt (siehe Abbildung 7), indem für jedes Level die Norm der Näherungslösung gegen die Iterationszahl für  $k = 1$  aufgetragen wird. Somit lässt sich als Ergebnis festhalten, dass sich mit dem Multigrid-Verfahren die Dämpfungswirkung verbessern lässt, womit numerische Lösungen von Differentialgleichungen letztlich durch wenige Iterationen schnell und effizient bestimmt werden können.

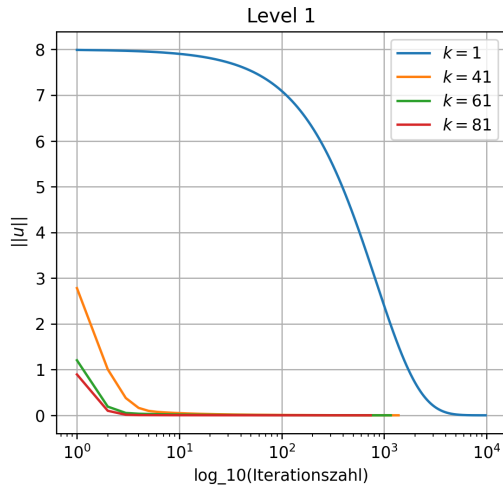


Abbildung 2: Dämpfungswirkung Level 1

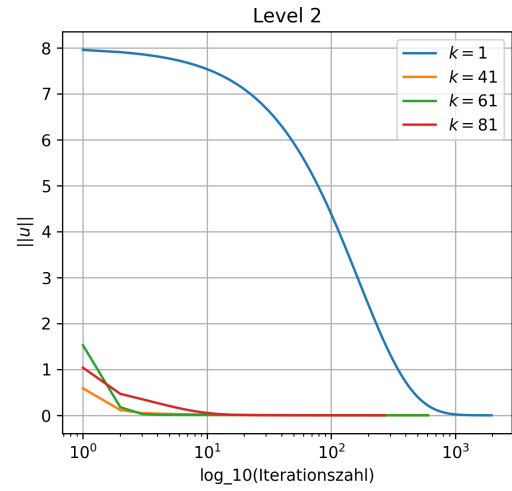


Abbildung 3: Dämpfungswirkung level 2

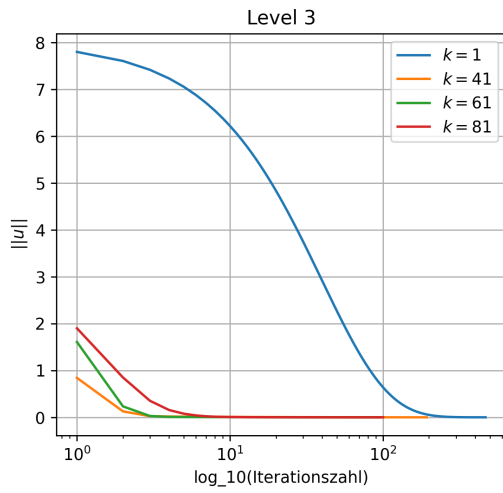


Abbildung 4: Dämpfungswirkung Level 3

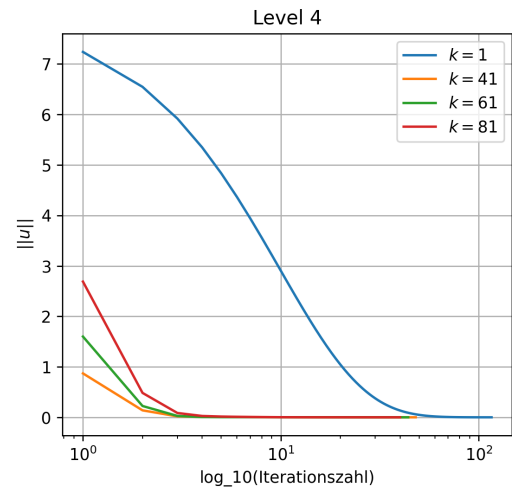


Abbildung 5: Dämpfungswirkung level 4

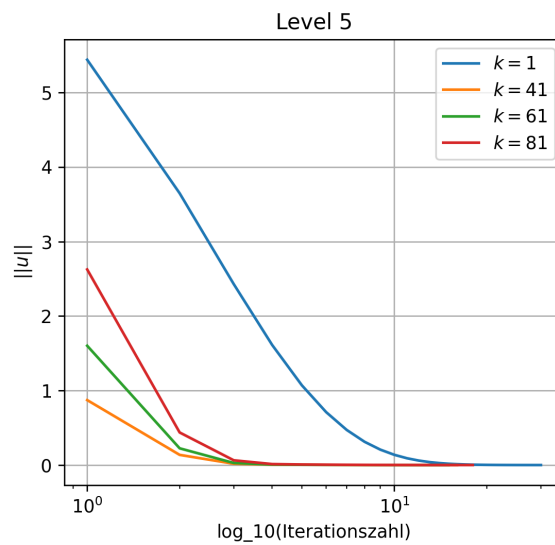


Abbildung 6: Dämpfungswirkung des Multigrid-Verfahrens bei Level 5.

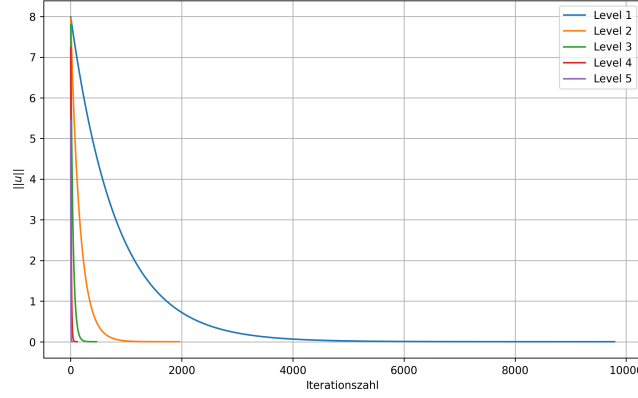


Abbildung 7: Verbesserung der Dämpfungswirkung durch das Multigrid-Verfahren.

## H.2: Diskretisierungsunabhängige Konvergenzgeschwindigkeit

In dieser Aufgabe wird das folgende Randwertproblem betrachtet:

$$u''(x) - \omega^2 u(x) = s(x) = -\frac{1}{2} x e^{-x}, \quad u(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Hierbei wird die Randbedingung bei großen  $x$  durch  $u(x) = 0$  für  $x \geq R_{\max} = 20$  approximiert. Außerdem wird  $\omega = 1$  gesetzt.

1. Zuerst soll eine Erwartung an den Effizienzgewinn durch Einsatz des Multigrid-Verfahrens für das gegebene Randwertproblem gegeben werden. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für das Multigrid-Verfahren eine gute Glättung erwartet wird, wenn die Amplitude der Fourier-Transformierten von  $s(t) = -\frac{1}{2} t e^{-t}$  für niedrige Frequenzen sehr groß ist. Berechne:

$$\begin{aligned} \tilde{s}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt s(|t|) e^{-i\omega t} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt |t| e^{-|t|} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 dt t e^{(1-i\omega)t} - \int_0^{\infty} dt t e^{-(1+i\omega)t} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left( \frac{1}{(i+\omega)^2} - \frac{1}{(1+i\omega)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega^2 - 1}{(1 + \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass die Lösungsfunktion  $u$  aufgrund der gegebenen Randbedingungen nur für  $x \geq 0$  (bzw.  $t \geq 0$  wegen einer Variablennamenbenennung) definiert ist und deshalb auch  $s(t)$  nur für  $t \geq 0$  betrachtet werden darf. Deshalb muss bei der Berechnung der Fourier-Transformation beachtet werden, dass das Argument der Funktion  $s(t)$  mit einem Betrag versehen wird, da sonst das betrachtete Integral divergiert. Hier ist nun deutlich zu erkennen, dass für Frequenzen nahe 0 die Amplitude der Fourier-Transformierten extrem groß wird, womit nach obiger Begründung ein hoher Effizienzgewinn durch Einsatz des Multigrid-Verfahrens für das betrachtete Randwertproblem erwartet werden kann.

2. Für diesen Aufgabenteil (und die weiteren Aufgabenteile) wird das Multigrid-Verfahren mit V-Zyklus für das gegebene Randwertproblem mit Diskretisierung  $x_j = j \cdot h$ ,  $j = 0, \dots, 2^N$  implementiert, wobei analog wie in der ersten Aufgabe vorgegangen wird. Hierbei soll  $2^N = 8$  immer das größte Gitter darstellen. Auf diesem Gitter wird dann das entstehende lineare Gleichungssystem mit dem in der

Vorlesung vorgestellten Tridiagonalmatrix-Algorithmus gelöst. In jedem Fall wird  $\nu_{\text{pre}} = \nu_{\text{post}} = 1$  und Relaxationsparameter  $R = 1$  für das Gauß-Seidel-Verfahren verwendet.

3. Zunächst wird die Konvergenzgeschwindigkeit mit dem Multigrid-Verfahren mit nur einem Level (Gauß-Seidel-Verfahren) für feinste Gitter mit  $N = 4, 6, 8, 10, 12$  verglichen, indem die Norm des Residuums in Abhängigkeit von der Iterationszahl dargestellt wird. Bei der Implementierung wird die relative Genauigkeit  $\epsilon_{\text{rel}} = 10^{-3} \cdot h^2$  (relativ zur Norm von  $s(x)$ ) verwendet. In der Abbildung 8 ist

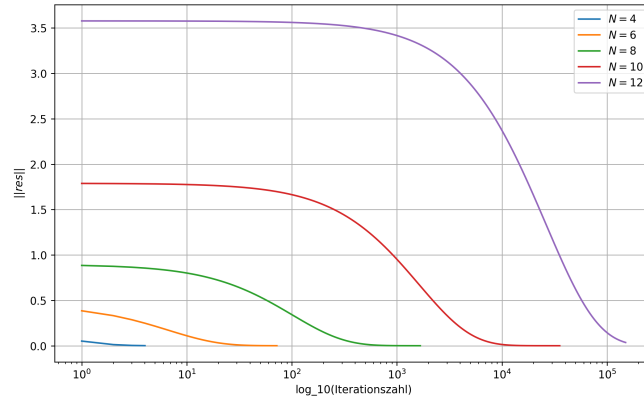


Abbildung 8: Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit des Gauß-Seidel-Verfahrens für  $N = 4, 6, 8, 10, 12$ .

der Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit für verschiedene  $N$  dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Konvergenzgeschwindigkeit für kleinere  $N$  stark zunimmt, da weniger Iterationen benötigt werden, sodass die Norm des Residuums gegen 0 konvergiert.

4. In diesem Aufgabenteil wird geprüft, wie die Konvergenzgeschwindigkeit mit dem Multigrid-Verfahren von der Schrittweite  $h$  abhängt. Dafür wird für jedes gewählte  $N$  die Anzahl der zur Konvergenz benötigten Iterationen verglichen. Auch hier wird wieder die relative Genauigkeit  $\epsilon_{\text{rel}} = 10^{-3} \cdot h^2$  als Abbruchkriterium verwendet. Die Ergebnisse sind in der Abbildung 9 dargestellt. Es ist zu erkennen,

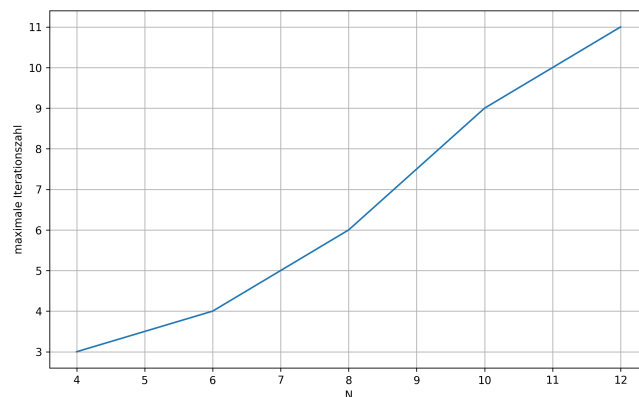


Abbildung 9: Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit.

dass bei verschiedenen Werten  $N$  die Konvergenzgeschwindigkeit für höhere Level des Multigrid-Verfahrens extrem stark zunimmt.

Somit kann als Ergebnis festgehalten werden, dass die Konvergenzgeschwindigkeit des Multigrid-Verfahrens für größer werdende Level zunimmt, was größer werdenden Gittern und einer größer werdenden Schrittweite entspricht.

Dies ist nicht das zu erwartende Ergebnis, da eine von der Schrittweite unabhängige Konvergenzgeschwindigkeit erwartet wurde.

## Abbildungsverzeichnis

1	Vergleich der Dämpfungswirkung des Gauß-Seidel-Verfahrens für verschiedene Wellenzahlen.	3
2	Level 1 . . . . .	4
3	Level 2 . . . . .	4
4	Level 3 . . . . .	4
5	Level 4 . . . . .	4
6	Dämpfungswirkung des Multigrid-Verfahrens bei Level 5. . . . .	4
7	Verbesserung der Dämpfungswirkung durch das Multigrid-Verfahren. . . . .	5
8	Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit des Gauß-Seidel-Verfahrens für $N = 4, 6, 8, 10, 12$ .	6
9	Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit. . . . .	6