

# Computerphysik SS 2023

## Hausaufgabe 5

Gabriel Remiszewski und Christian Fischer

08. Juli 2023

### H.1: Frequenzabhängige Fehlerdämpfung mit Multigrid

In dieser Aufgabe wird das Randwertproblem

$$u''(x) = 0, \quad u(0) = 0 = u(\pi),$$

betrachtet. Werden die Randbedingungen für die allgemeine Lösung  $u(x) = Ax + B$  ( $A, B = \text{const.}$ ) ausgewertet, so ergibt sich  $u(x) = 0$  als spezielle (exakte) Lösung des betrachteten Randwertproblems. Nun soll das in der Vorlesung vorgestellte Multigrid-Verfahren an diesem Problem getestet werden und numerisch die erwartete analytische Lösung liefern.

1. Zunächst wird das Multigrid-Verfahren für den V-Zyklus ( $\gamma = 1$ ) mit variabler Anzahl von Levels implementiert. Dabei geht der Multigrid-Zyklus von einer Näherungslösung  $v_h$  für das Gleichungssystem  $A_h u_h = f_h$  auf dem feinsten Gitter  $G_h$  mit Schrittweite  $h$  aus. Hier wird der Algorithmus beispielhaft für zwei Levels vorgestellt. In einem ersten Schritt (Glättung) werden mit dem Gauß-Seidel-Verfahren  $\nu_{\text{pre}}$  Dämpfungsschritte durchgeführt, es wird also  $w_h = \mathcal{G}(R)^{\nu_{\text{pre}}} v_h$  (hierbei ist  $R$  der Relaxationsparameter) berechnet. In einem zweiten Schritt (Restriktion und Rekursion) wird der Residuenvektor  $r_h = f_h - A_h w_h$  berechnet. Es müssen nun zwei Fälle unterschieden werden. Falls  $h < h_{\text{max}}$  (das größte Gitter ist noch nicht erreicht), wird aus dem Residuenvektor die neue rechte Seite für das gröbere Gitter  $f_{2h} = \mathcal{I}_h^{2h} r_h$  berechnet. Der Projektionsoperator  $\mathcal{I}_h^{2h}$  bildet ein Feld  $w_h$  von einem feineren auf das gröbere Gitter gemäß folgender Abbildungsvorschrift ab:

$$\mathcal{I}_h^{2h} : G_h \rightarrow G_{2h}, \quad w_h \mapsto \mathcal{I}_h^{2h} w_h = w_{2h}.$$

Die Iterationsvorschrift lautet:

$$w_{2h}(j \cdot 2h) = \frac{1}{4}(w_h((2j-1) \cdot h) + 2w_h(2j \cdot h) + w_h((2j+1) \cdot h)).$$

Dann wird der Multigrid-Zyklus wieder bei dem ersten Schritt gestartet, indem mit  $A_{2h}$  und  $f_{2h}$  auf  $G_{2h}$   $w_{2h}$  berechnet wird. Nun fährt der Algorithmus bei dem dritten Schritt (Prolongation und Korrektur) fort, indem die Lösung aus dem gröberen Gitter  $G_{2h}$  durch Prolongation nach  $G_h$  abgebildet wird und die Lösung gemäß  $w_h \leftarrow \mathcal{I}_{2h}^h w_{2h}$  aktualisiert wird. Die Iterationsvorschrift der Prolongation ( $\mathcal{I}_{2h}^h : G_{2h} \rightarrow G_h$ ) ist gegeben durch:

$$w_h(j \cdot h) = \begin{cases} w_{2h}(\frac{j}{2} \cdot (2h)) & j \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}w_{2h}(\frac{j-1}{2} \cdot (2h)) + \frac{1}{2}w_{2h}(\frac{j+1}{2} \cdot (2h)) & j \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Im vierten und letzten Schritt (Glättung) wird  $\nu_{\text{post}}$ -mal die Dämpfungsoperation (Gauß-Seidel-Verfahren) angewendet:

$$w_h \leftarrow \mathcal{G}(R)^{\nu_{\text{post}}} w_h.$$

Falls im zweiten Schritt bereits  $h = h_{\text{max}}$  gilt, so wird  $A_{h_{\text{max}}} e_{h_{\text{max}}} = r_{h_{\text{max}}}$  (hier ist  $e_h$  der Fehler zwischen der Näherungslösung und der exakten Lösung) gelöst und gemäß  $w_h \leftarrow w_h + e_h$  aktualisiert. Dann erfolgt sofort der vierte Schritt (Glättung). Im allgemeinen Fall für eine variable Anzahl von Levels wird in dem zweiten Schritt auf jedem Level  $m$  mit Gitter  $G_{2^{m-1}h}$  ( $m \geq 1$ ) der Residuenvektor projiziert und es wird in das nächste Level  $m+1$  mit Gitter  $G_{2^m h}$  gegangen. Beim Wiederaufstieg werden automatisch alle Lösungen auf den einzelnen Levels aktualisiert.

2. Nun wird das Programm getestet. Der Lösungsalgorithmus wird auf dem feinsten Gitter mit den folgenden anfänglichen Näherungslösungen gestartet:

$$z_k(x_j) = \sin(k \cdot jh), \quad j = 1, \dots, 2^N - 1, \quad N = 7, \quad h = \frac{\pi}{2^N},$$

mit Wellenzahl  $k = 1, \dots, 2^N - 1$ . Als Abbruchkriterium wird die absolute Genauigkeit  $\epsilon_{\text{abs}} = 0.1h^2$  verwendet. In diesem Aufgabenteil wird zunächst das Multigrid-Verfahren mit nur einem Level (also Gauß-Seidel-Verfahren) durchgeführt. Auf diesem Level wird  $\nu_{\text{pre}} = \nu_{\text{post}} = 1$  als Glättungsschritt verwendet. Hierbei wird die Dämpfungswirkung des Gauß-Seidel-Verfahrens für verschiedene nieder- und hochfrequente Wellenzahlen ( $k = 1, 21, 41, 61, 81, 101, 121$ ) auf dem feinsten Gitter verglichen, indem die Norm der Näherungslösung in Abhängigkeit von der Iterationszahl dargestellt wird. In Ab-

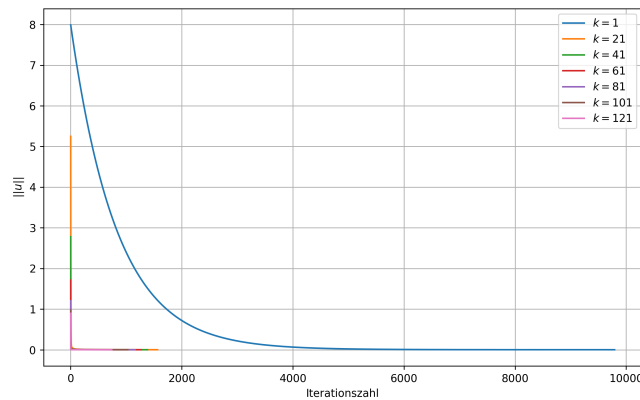


Abbildung 1: Vergleich der Dämpfungswirkung des Gauß-Seidel-Verfahrens für verschiedene Wellenzahlen.

Abbildung 1 ist zu erkennen, dass die Dämpfungswirkung des Gauß-Seidel-Verfahrens für größer werdende Wellenzahlen extrem schnell zunimmt, da dann die Norm der Näherungslösung bereits nach wenigen Iterationen sich wie die Norm der exakten Lösung verhält. In diesem Plot ist aber nicht gut zu erkennen, wie sich dieses Verhalten für Wellenzahlen ab  $k \sim 20$  fortführt, da die Graphen auf dieser großen Skala an Iterationsschritten übereinander liegen. Um dies besser erkennen zu können, wird in den Abbildungen 2 und 3 in den Bereich geringer Iterationszahlen hinein gezoomt. Hier ist nun auch

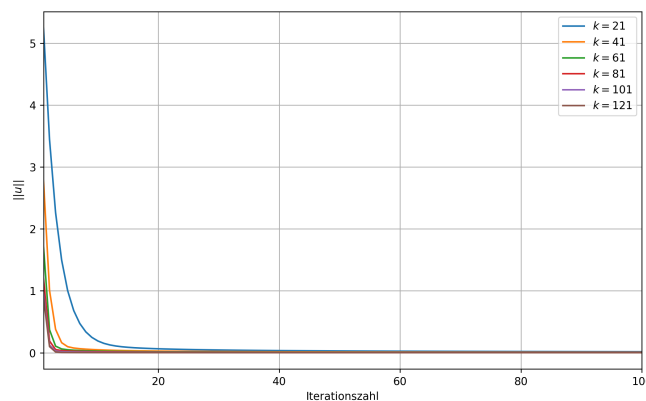


Abbildung 2: Vergleich der Dämpfungswirkung des Gauß-Seidel-Verfahrens für verschiedene Wellenzahlen (Zoom-In).

deutlich zu erkennen, dass für höherfrequente Wellenzahlen die Dämpfungswirkung erheblich zunimmt, es werden nur noch wenige Iterationen benötigt, sodass die Norm der Näherungslösung gegen die Norm

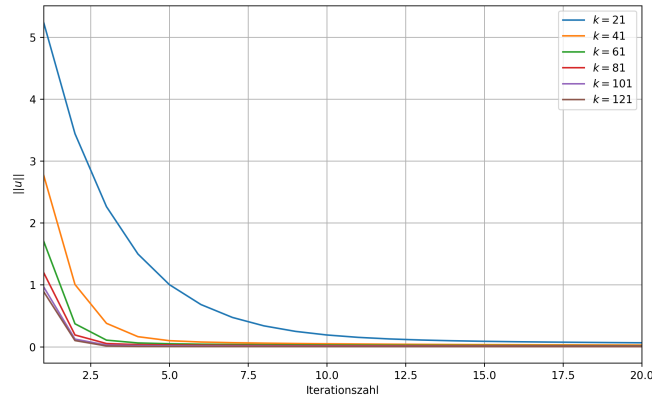


Abbildung 3: Vergleich der Dämpfungswirkung des Gauß-Seidel-Verfahrens für verschiedene Wellenzahlen (starker Zoom-In).

der exakten Lösung konvergiert.

3. In diesem Aufgabenteil wird das Ziel verfolgt, die Dämpfungswirkung durch das Multigrid-Verfahren zu verifizieren. Dafür werden die Level 1, 2, 3, 4 und 5 verwendet. Als Abbruchkriterium wird wieder die absolute Genauigkeit  $\epsilon_{\text{abs}} = 0.1h^2$  verwendet. Außerdem wird auf jedem Level  $\nu_{\text{pre}} = \nu_{\text{post}} = 1$  als Glättungsschritt benutzt. Um die Dämpfungswirkung der verschiedenen Level zu vergleichen, wird für jedes Level die Norm der Näherungslösung gegen die Iterationszahl für die Wellenzahlen  $k = 1, 41, 81, 121$  dargestellt (siehe Abbildungen 4, 5, 6, 7 und 8). Tatsächlich ist eine Steigerung der Dämpfungswir-

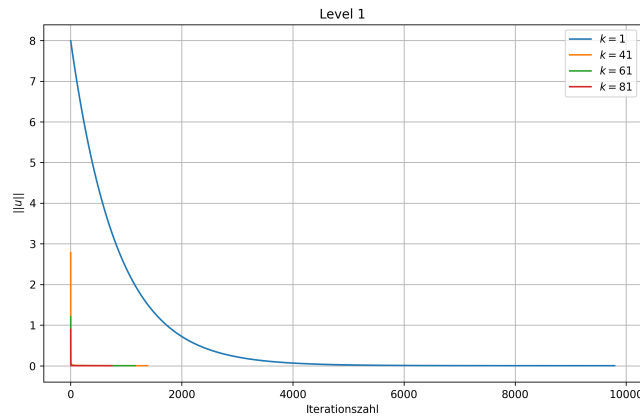


Abbildung 4: Dämpfungswirkung des Multigrid-Verfahrens bei Level 1.

kung durch das Multigrid-Verfahren zu erkennen, da bei steigendem Level des Multigrid-Verfahrens für verschiedene Wellenzahlen immer weniger Iterationsschritte benötigt werden, sodass die Norm der Näherungslösung gegen die Norm der exakten Lösung konvergiert. Um diese Verbesserung eindeutig zu erkennen, werden nochmal die verschiedenen Level in einem gemeinsamen Plot dargestellt (siehe Abbildung 9), indem für jedes Level die Norm der Näherungslösung gegen die Iterationszahl für  $k = 1$  aufgetragen wird. Somit lässt sich als Ergebnis festhalten, dass sich mit dem Multigrid-Verfahren die Dämpfungswirkung verbessern lässt, womit numerische Lösungen von Differentialgleichungen letztlich durch wenige Iterationen schnell und effizient bestimmt werden können.

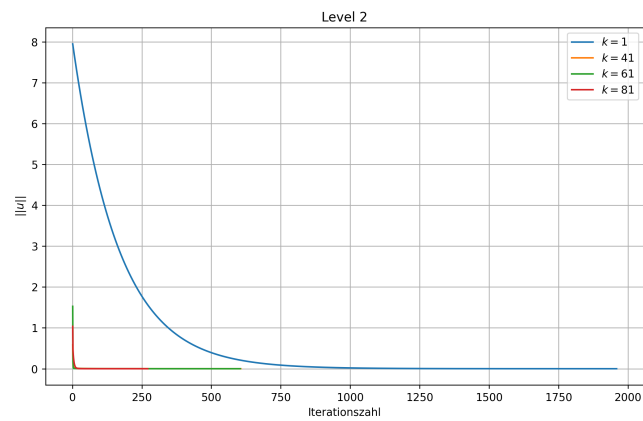


Abbildung 5: Dämpfungswirkung des Multigrid-Verfahrens bei Level 2.

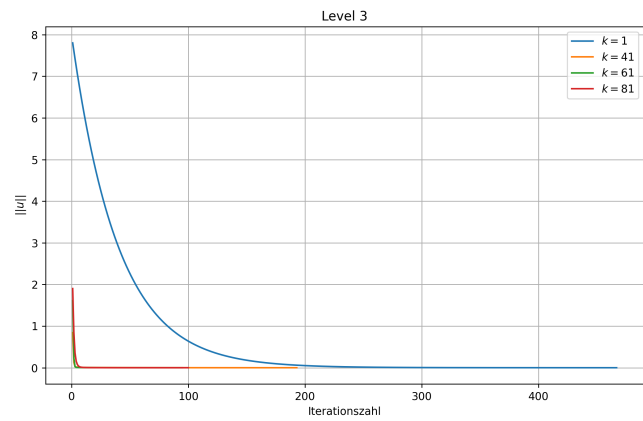


Abbildung 6: Dämpfungswirkung des Multigrid-Verfahrens bei Level 3.

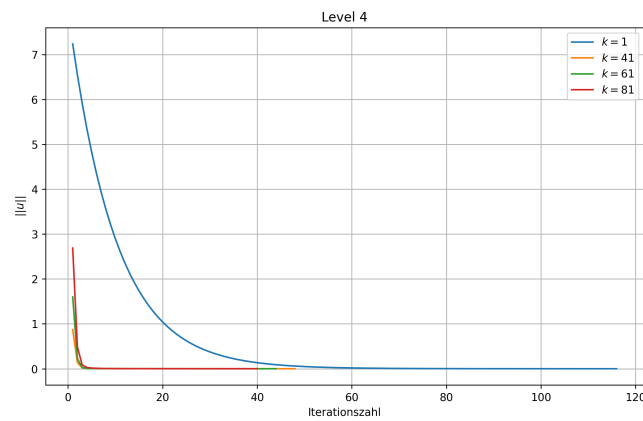


Abbildung 7: Dämpfungswirkung des Multigrid-Verfahrens bei Level 4.

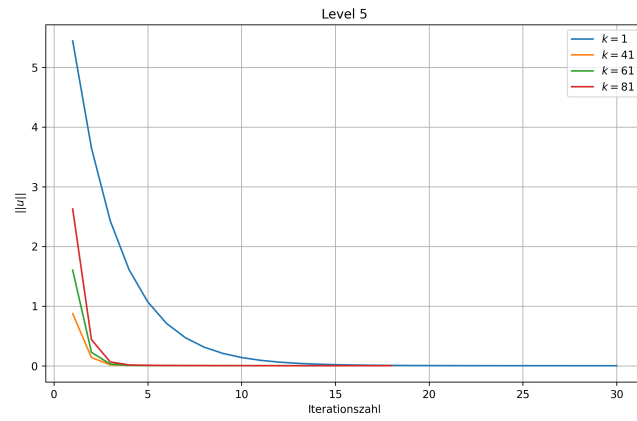


Abbildung 8: Dämpfungswirkung des Multigrid-Verfahrens bei Level 5.

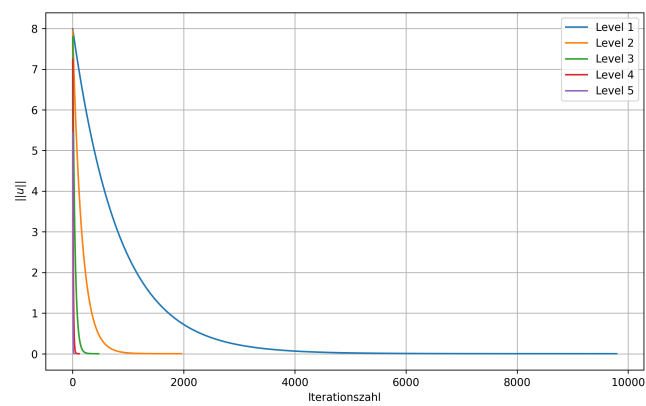


Abbildung 9: Verbesserung der Dämpfungswirkung durch das Multigrid-Verfahren.

## H.2: Diskretisierungsunabhängige Konvergenzgeschwindigkeit

Hallo

## Abbildungsverzeichnis

1	Vergleich der Dämpfungswirkung des Gauß-Seidel-Verfahrens für verschiedene Wellenzahlen. . . . .	2
2	Vergleich der Dämpfungswirkung des Gauß-Seidel-Verfahrens für verschiedene Wellenzahlen (Zoom-In). . . . .	2
3	Vergleich der Dämpfungswirkung des Gauß-Seidel-Verfahrens für verschiedene Wellenzahlen (starker Zoom-In). . . . .	3
4	Dämpfungswirkung des Multigrid-Verfahrens bei Level 1. . . . .	3
5	Dämpfungswirkung des Multigrid-Verfahrens bei Level 2. . . . .	4
6	Dämpfungswirkung des Multigrid-Verfahrens bei Level 3. . . . .	4
7	Dämpfungswirkung des Multigrid-Verfahrens bei Level 4. . . . .	4
8	Dämpfungswirkung des Multigrid-Verfahrens bei Level 5. . . . .	5
9	Verbesserung der Dämpfungswirkung durch das Multigrid-Verfahren. . . . .	5