Übungen zur Computerphysik
SS 2023

Hausaufgabe 5 $\boxed{\textbf{26. Juni - 10. Juli 2023}}$

Abgabe: Montag, den 10. Juli 2023 bis 23:59 Uhr über eCampus

Achtung: Diese Hausaufgabe kann wieder in 2er Teams bearbeitet und abgegeben werden.

Beachten Sie, dass **zwei zusätzliche Punkte** für die Kommentierung und den Stil des Codes vergeben werden.

H.1: Frequenzabhängige Fehlerdämpfung mit Multigrid

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$u''(x) = 0\,, \tag{1}$$
$$u(0) = 0 = u(\pi) \tag{2}$$

mit der exakten Lösung $u(x) \equiv 0$.

1. (5 P) Implementieren Sie das Multigrid-Verfahren für den V-Zyklus ($\gamma = 1$) mit variabler Anzahl von Levels.
   Benutzen Sie das Gauß-Seidel-Verfahren als Glättungsoperation (Relaxationsparameter $R = 1$), sowie die Änderung $h \to 2\,h$ vom feineren zum gröberen Gitter, und die in der Vorlesung eingeführten Restriktions- und Interpolations-Operationen.

2. (2 P) Testen Sie Ihr Programm. Starten Sie dazu Ihren Lösungsalgorithmus mit den anfänglichen Näherungsfunktionen auf dem feinsten Gitter

   $$z_k(x_j) = sin(k \cdot j\,h)\,, \quad j = 1, \ldots, 2^N - 1\,,\ N = 7\,,\ h = \pi/2^N \tag{3}$$

   mit Wellenzahl $k = 1, \ldots, 2^N - 1$.

   Vergleichen Sie die Dämpfungswirkung des Gauß-Seidel-Verfahrens (also Multigrid mit nur einem Level) für verschiedene nieder- und hochfrequente Wellenzahlen auf dem feinsten Gitter, in dem Sie die Norm der Näherungslösung in Abhängigkeit von der Iterationszahl darstellen.

   Verwenden Sie in dieser und in der folgenden Teilaufgabe die absolute Genauigkeit $\epsilon_{\text{abs}} = 0.1\,h^2$ als Abbruchkriterium.

3. (2 P) Verifizieren Sie die Verbesserung der Dämpfungswirkung durch das Multigrid-Verfahren. Verwenden Sie dazu die Anzahl der Level $1, \ldots, 5$. Benutzen Sie auf jedem Level $\nu_{\text{pre}} = \nu_{\text{post}} = 1$ Glättungsschritt.

H.2 Diskretisierungsunabhängige Konvergenzgeschwindigkeit

Wir nehmen nun das (aus der Präsenzübung) bekannte Randwertproblem

$$\begin{aligned} u''(x) - \omega^2\, u(x) = s(x) = -\frac{1}{2}\, x\, \mathrm{e}^{-x}\,, \\ u(0) = 0\,, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Approximieren Sie die Randbedingung bei großen x durch $u(x) = 0$ für $x \geq R_{\max} = 20$, und benutzen Sie $\omega = 1$.

1. (1 P) Was ist Ihre Erwartung an den Effizienzgewinn durch Einsatz des Multigrid-Verfahrens für das Problem (4) ?
   (Hinweis: s nov murtkepS-reiruoF)

2. (4 P) Implementieren Sie das Multigrid-Verfahren mit V-Zyklus für das Randwertproblem in Gl. (4) mit Diskretisierung $x_j = j \cdot h$, $j = 0, \ldots, 2^N$.
   Das Gitter mit $2^N = 8$ soll dabei immer das gröbste Gitter darstellen. Auf diesem Gitter lösen Sie das entstehende Lineare Gleichungssystem mit dem Tridiagonalmatrix-Algorithmus.

   Verwenden Sie im folgenden immer $\nu_{\mathrm{pre}} = \nu_{\mathrm{post}} = 1$ und Relaxationsparameter $R = 1$ für das Gauß-Seidel-Verfahren.

3. (1 P) Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit mit dem reinen Gauß-Seidel-Verfahren (Multigrid mit nur einem Level) für feinste Gitter mit $N = 4, \ldots, 12$. Stellen Sie dazu das Residuum in Abhängigkeit von der Iterationszahl dar. Benutzen Sie in dieser und in der folgenden Teilaufgabe als Abbruchkriterium relative Genauigkeit $\epsilon_{\mathrm{rel}} = 10^{-3} \cdot h^2$ (relativ zur Norm der rechten Seite s.).

4. (3 P) Zeigen Sie nun grafisch, dass die Konvergenzgeschwindigkeit mit dem Multigrid-Verfahren nicht von der Schrittweite h abhängt. Benutzen Sie $N = 4, \ldots, 14$, mit dem gröbsten Gitter gegeben durch $2^N = 8$, auf dem mit Tridiagonalmatrix-Algorithmus gelöst wird.