

Versuchsbericht

P401 Elektronische Übergänge

Gabriel Remiszewski und Christian Fischer

durchgeführt am 13/14.12.2023
betreut von Valentin Jonas

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Zeeman-Effekt	2
2.1 Versuchsaufbau	2
2.2 Untersuchung der Transversal- und Longitudinalkonfiguration	3
2.2.1 Transversalkonfiguration	3
2.2.2 Longitudinalkonfiguration	4
2.3 Bestimmung des Bohrschen Magnetons	5
2.4 weitere Überlegungen	8
3 Fazit	9
A Anhang	10

1. Einleitung

In diesem Versuch wird die Quantelung von Energie mit historisch durchgeführten Experimenten untersucht. Zunächst wird der normale Zeeman-Effekt zum Gebrauch gemacht, um atomare Übergänge durch ein homogenes Magnetfeld aufzuspalten, was durch eine partielle Aufhebung der Magnetquantenzahl Entartung hervorgerufen wird. Aus der Energiedifferenz der Übergänge kann das Bohrsche Magneton bestimmt werden.

Anschließend wird der Franck-Hertz-Versuch durchgeführt, mit dem durch Stoßanregung die Energie eines Übergangs bestimmt werden kann.

2. Zeeman-Effekt

Der Zeeman-Effekt beschreibt die Aufspaltung der Energieniveaus einzelner Zustände in einem Magnetfeld. Spin und Bahndrehimpuls bewirken ein magnetisches Moment, auf welches ein äußeres Magnetfeld wirken kann. Quantenmechanisch kann dies durch den Hamiltonoperator beschrieben werden, der die Interaktion mit einem äußeren Feld beschreibt [Sakurai]:

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\frac{q}{2m_e} (\hat{\vec{L}} + 2\hat{\vec{S}}) \cdot \vec{B}. \quad (1)$$

In diesem Versuch wird die Aufspaltung an Cadmium beobachtet. Das äußere Elektron sieht aufgrund der Wahrscheinlichkeitsverteilung in erster Näherung den Kern mit den inneren Schalen effektiv als nur ein Teilchen, womit die Berechnung der Energieniveaus äquivalent zum Wasserstoffatom betrachtet werden kann. Da dieses durch eine gerade Elektronenzahl keinen Gesamtspin besitzt und das Magnetfeld homogen ist, vereinfacht sich Gleichung (1) zu

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{eB}{2m_e} \hat{L}_z,$$

wobei die Elektronenladung eingesetzt wurde und das Magnetfeld per Konvention in die z-Achse zeigt. Da bei kugelsymmetrischem Potenzial die z-Komponente des Drehimpulsoperators mit dem restlichen Hamiltonoperator des Atoms kommutiert, ergibt sich eine Verschiebung des Energieniveaus von

$$\Delta E = \frac{e\hbar}{2m_e} m_j B \equiv \mu_B m_j B$$

mit dem Bohrschen Magneton [DemtrÄüder:829119]

$$\mu_B = 9,274\,015 \text{ JT}^{-1}. \quad (2)$$

Weil hier elektrische Dipolübergänge betrachtet werden, gilt die Auswahlregel $\Delta m = \{\pm 1, 0\}$ [DemtrÄüder:829119], wobei einer Differenz von null linear polarisiertes Licht (im folgenden als π bezeichnet) und einer Differenz von ± 1 zirkular polarisiertes Licht (σ^+ für links zirkular und σ^- für rechts zirkular) zugeordnet werden kann. Für π -Polarisation kann daher keine Energieverschiebung beobachtet werden, für σ^\pm -Polarisation eine Verschiebung von

$$\delta E = \pm \mu_B B. \quad (3)$$

Unabhängig von der Drehimpulsquantenzahl kann somit beim hier beschriebenen normalen Zeeman-Effekt immer nur eine Aufspaltung in drei Linien beobachtet werden, weshalb die Entartung nur teilweise aufgehoben werden kann.

In Abb. 1 ist das Übergangsschema für die Übergänge ${}^1D_2 \rightarrow {}^1P_1$ des Cadmiumatoms dargestellt. Die Wellenlänge des Übergangs ist $\lambda_0 = 644 \text{ nm}$ und entspricht rotem Licht. Dieser Übergang wird in diesem Versuch untersucht.

2.1. Versuchsaufbau

Der Aufbau zur Untersuchung des Zeeman-Effekts ist in Abb. 3 skizziert. Eine Cadmiumlampe wird zwischen ein Magnetfeld festgehalten, welches durch zwei in Reihe geschalteten stromdurchflossenen Spulen erzeugt wird. Die Spulen können um die vertikale Achse gedreht werden, um die Richtung des Magnetfeldes in Bezug zur Beobachtungsrichtung verändern zu können. Das Licht der Lampe wird mit einer Kondensorlinse $f = 150 \text{ mm}$ kollimiert mit leichter Konvergenz, um nachher am Etalon verschiedenen Einfallswinkel zu erzeugen.

Das eingebaute Fabry-Pérot-Etalon ist eine planparallele Glasschicht, welche beidseitig mit teildurchlässigen Spiegeln beschichtet ist. Durch ständige Reflexion innerhalb der Glasschicht wird ein Strahlenbündel erzeugt, welches durch Gangunterschiede untereinander interferiert. Das hier benutzte Etalon hat einen Brechungsindex von $n = 1.457$ und einem Reflexionsgrad $R = 0.85$. Mit einer weiteren Sammellinse $f = 150 \text{ mm}$ wird das Licht am Okular scharf abgebildet, an dem durch die entstandene Interferenz konzentrische Ringe beobachtet sein können. Davor wird mit einem Interferenzfilter das rote Licht bei 644 nm gefiltert.

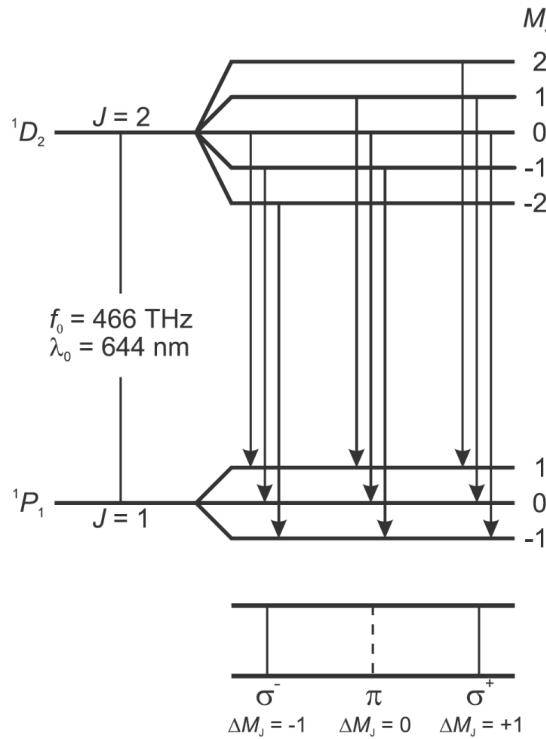


Abbildung 1: Übergangsschema von Cadmium für die Singulett-Zustände ${}^1D_2 \rightarrow {}^1P_1$. Zusehen sind jeweils drei Übergangsgruppen mit je drei Übergängen, die untereinander entartet sind, die Entartung zwischen einander jedoch durch den Zeeman-Effekt aufgehoben wird. Darunter ist die durch die Auswahlregeln bestimmte Polarisation des abgestrahlten Lichts aufgetragen. [zeeman_handblatt]

2.2. Untersuchung der Transversal- und Longitudinalkonfiguration

Durch das Drehen der Spulen lässt sich die Polarisation der emittierten Strahlung untersuchen. Hierbei werden zwei Konfigurationsmöglichkeiten gesondert betrachtet. Klassisch lässt sich die Polarisations- und Strahlrichtung der Übergangsstrahlung mit dem Lorentz-Modell beschreiben, wo eine Schwingungsgleichung mit der Lorentzkraft als treibende Kraft angesehen wird. Dabei sind π - und σ^\pm -Strahlung die Eigenmodi der Lösung. Diese sind in Abb. 5 skizziert. Zu sehen ist hierbei, dass sich jede Lösung als schwingender Dipol interpretieren lässt, wobei für σ^\pm zwei senkrecht zueinander stehenden Dipole mit einer 90° -Phasenbeziehung betrachtet werden.

Da Dipole nicht in Bewegungsrichtung abstrahlen, kann in longitudinaler Beobachtungsrichtung (parallel zum Magnetfeld) nur die zirkular polarisierte σ^\pm -Strahlung beobachtet werden. Bei transversaler Konfiguration sind alle drei Modi sichtbar mit dem Unterschied, dass σ^\pm hier linear polarisiert ist und räumlich um 90° zur π -Polarisation gedreht.

2.2.1. Transversalkonfiguration

In Transversalrichtung können σ^\pm - sowie π -Strahlung beobachtet werden, wobei diese Modi linear polarisiert sind und senkrecht zueinander stehen. Mit einem Polarisationsfilter lässt sich somit π und σ voneinander trennen, σ^+ und σ^- sind jedoch nicht unterscheidbar voneinander. Vor das Etalon wird der Polarisationsfilter befestigt und beim Einschalten des Magnetfeldes das Bild beobachtet. Die optische Achse des Filters steht auf 0° , wenn diese senkrecht zur optischen Bank steht. Erwartet wird das Verschwinden der inneren Ringe bei einer Filterausrichtung von 0° , da in diesem Falle die optische Achse des Filters senkrecht zum B-Feld und damit zur Polarisationsachse des π -Lichts steht. Damit ist das Verschwinden der äußeren Ringe bei 90° zu erwarten.

In Abb. 4a sind die Interferenzringe abgebildet. Durch das Anlegen eines Magnetfeldes wurde die

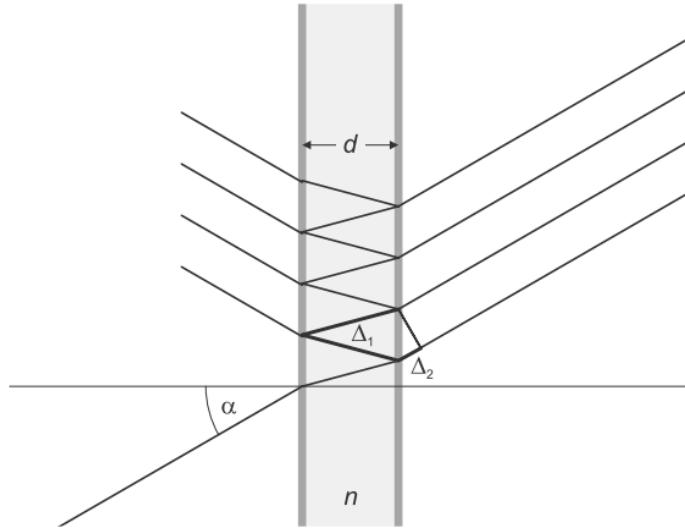


Abbildung 2: Funktionsweise eines Fabry-Pérot-Etalons. α bezeichnet den Einfallswinkel eines Lichtstrahls in den Etalon mit Dicke d bei Brechungsindex n . Δ_1 und Δ_2 bezeichnen die Gangunterschiede, die zur Interferenz zweier transmittierter Strahlen führen. [zeeman_handblatt]

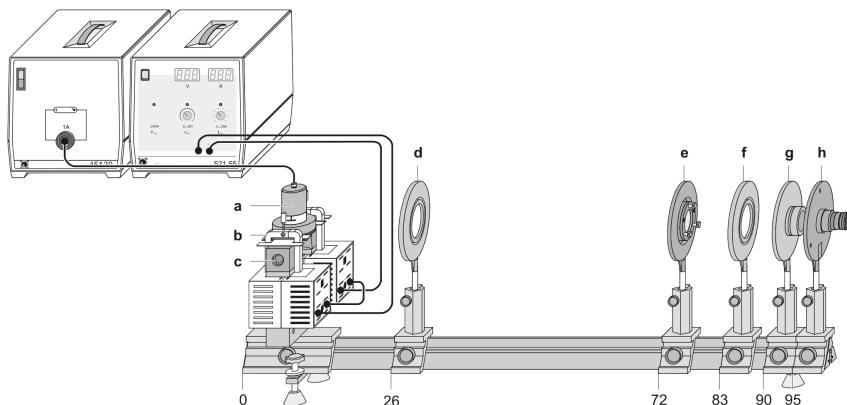
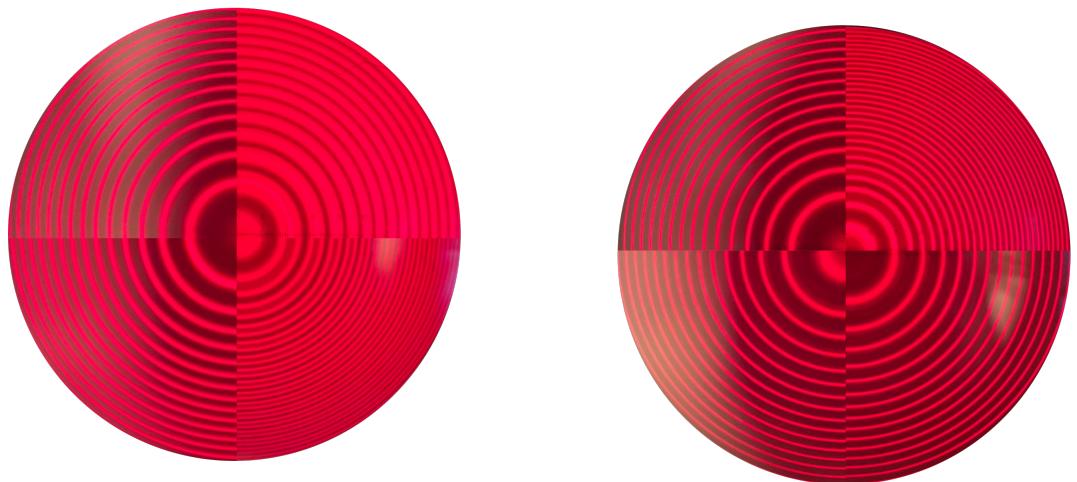


Abbildung 3: Aufbau zur Messung des Zeeman-Effekts. (a) zeigt die Cadmiumlampe mit Klammern (b) und Polschuhe (c). (d) zeigt die Kondensorlinse, (e) das Etalon, (f) die Abbildungslinse, (g) das Interferenzfilter und (h) das Okular mit Strichskala. [zeeman_handblatt]

Aufspaltung der Ringe in einen hellen mittleren Ring und zwei leicht dunklere daneben deutlich. Aufgrund des Auflösungsvermögens und möglicherweise einer Überbelichtung konnten die Details des Bildes auf der Aufnahme nicht kenntlich gemacht werden. Bei einer Polarisationsfiltereinstellung von 0° verschwinden die inneren Ringe, bei 90° die Äußeren. Dies entspricht dem erwarteten Verhalten, weshalb daraus geschlossen werden kann, dass das Licht der äußeren Ringe senkrecht zum B-Feld polarisiert ist und das Licht der inneren Ringe parallel dazu.

2.2.2. Longitudinalkonfiguration

In longitudinaler Ausrichtung kann nur das σ^\pm -Licht beobachtet werden. Um zu zeigen, dass beide Wellen zirkular und entgegengesetzt polarisiert sind, wird vor dem Polarisationsfilter eine $\lambda/4$ -Wellenplatte befestigt, welche die Phase des elektrischen Feldes parallel zur optischen Achse um eine viertel Wellenlänge verschiebt und somit zirkuläres Licht linear polarisieren kann. Per Definition entsprechen σ^\pm die komplexen Vektoren des elektrischen Feldes $\mathbf{E}_{\sigma^\mp} \propto \mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird die optische Achse der Wellenplatte auf die y-Achse gesetzt. Bei einer Verzögerung wird die y-Komponente um den Faktor $e^{\pm i\pi/2} = \pm i$ verschoben, womit sich eine Polarisation von $\mathbf{E}_{\sigma^\mp} \propto \mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y$ ergibt. Somit ist σ^- bei einer Ausrichtung des Filters bei 45° sichtbar, während σ^+ Licht bei -45° sichtbar wird.



(a) Transversal Konfiguration: links oben ohne B-Feld, rechts oben mit B-Feld, rechts unten mit Filter auf 0° , links unten mit Filter auf 90° .

(b) Longitudinal Konfiguration: links oben ohne B-Feld, rechts oben mit B-Feld, rechts unten mit Filter auf 45° , links unten mit Filter auf -45° .

Abbildung 4: Aufnahmen der Etalon Interferenzringe bei unterschiedlichen Aufbauten.

In Abb. 4b ist die Longitudinalkonfiguration gezeigt. Es ist zu erkennen, dass sich diesmal beim Anlegen eines Magnetfeldes die Linie in nur zwei symmetrisch verteilte Linien aufspaltet. Nach Durchgang einer Verzögerungsplatte und einer Filtereinstellung von $\pm 45^\circ$ verschwindet wie erwartet jeweils einer der zwei Ringe. Aufgrund der oberen Überlegung lässt sich damit der innere Ring σ^- -Licht zuweisen und σ^+ -Licht dem äußeren Ring. Auf die Relation, dass σ^- kleinere Winkel und σ^+ größere Winkel zuzuordnen sind, wird bei der Bestimmung des Bohr Magneton weiter eingegangen.

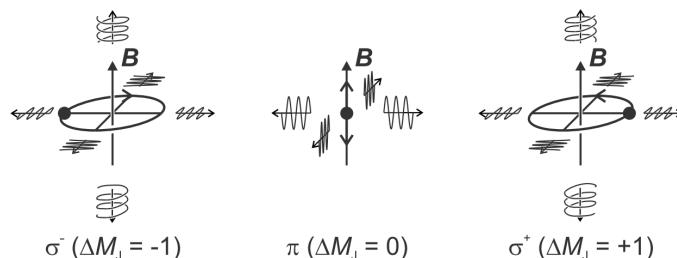


Abbildung 5: Polarisation der verschiedenen Übergänge. π -Strahlung ist nur in transversaler Richtung beobachtbar, σ^\pm -Strahlung in transversaler und in longitudinaler Richtung. [zeeman_handblatt]

2.3. Bestimmung des Bohrschen Magnetons

Zur Bestimmung des Bohrschen Magnetons wird die Aufspaltung der Linien in Transversalkonfiguration mit einer CCD-Kamera gemessen. Diese Messung wird bei unterschiedlichen Spulenströmen 40-mal durchgeführt und der Mittelwert gespeichert für genauere Ergebnisse. Mit einer Hall-Sonde wird zur Kalibration das Magnetfeld in Abhängigkeit des Stroms vor und nach der Durchführung einer Messung vorgenommen. Durch das Erhitzen der Spulen wird erwartet, dass sich die Kalibrationskurve mit der Zeit ändert. Durch zwei Messungen kann damit der Fehler des Magnetfeldes bestimmt werden.

Untersucht wird hierbei ein einzelnes Interferenzmaximum nahe des Ringzentrums. Dieses wird beim Anlegen eines Magnetfeldes in drei Maxima aufgespalten. An die gemessenen Kurven werden drei Gauss-

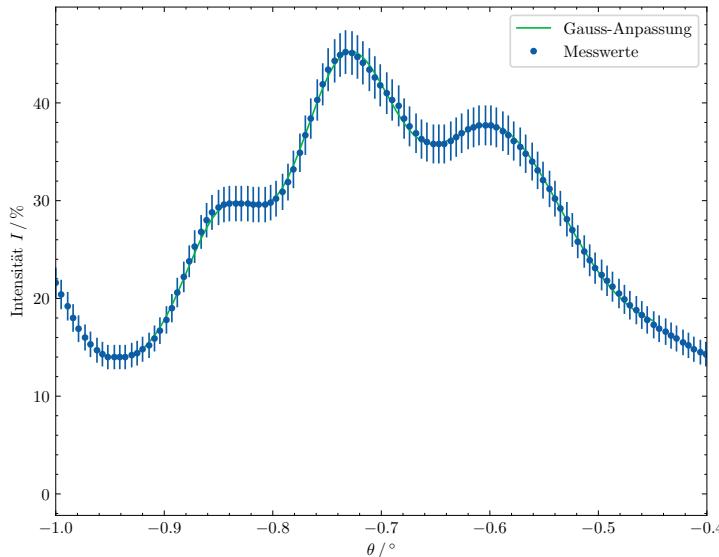


Abbildung 6: Aufspaltung der Maxima bei einem Strom von 7,9 A.

Kurven mit einem linearen Offset angepasst. Die Anpassfunktion kann somit beschrieben werden mit

$$f(x, \vec{x}, \vec{\sigma}, \vec{A}, m, n) = \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x - x_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) + mx + n.$$

Das Programm zur Messung der Einstrahlintensitäten gibt keine dazugehörigen Unsicherheiten an. Aus diesem Grund müssen diese rekonstruiert werden. Die CCD-Kamera misst Photonen, wodurch die Messung pro Pixel als Poisson-verteilt angesehen werden kann mit dazugehörigem Poisson-Fehler $\Delta N = \sqrt{N}$. Die Umrechnung der Zählereignisse in eine Intensität (in Prozent) ist unbekannt, weshalb der Fehler mit einem unbekannten Faktor skaliert wird. Für die Anpassungskurve ist dieser jedoch irrelevant, da nur der relative Fehler der einzelnen Messpunkte von Bedeutung ist. Der Skalierungsfaktor ist daher nicht nötig. Da jedoch nur die relativen Fehler bekannt sind, verliert die Berechnung einer Anpassungsgröße, wie dem reduzierten Chi-Quadrat [[wiki:reduced_chi_square](#)], seine Bedeutung, weshalb eine quantitative Bewertung der Anpassungen nicht durchgeführt werden kann.

Eine Anpassungskurve ist beispielhaft in Abb. 6 gezeigt. Visuell kann die Anpassung als äußerst erfolgreich angesehen werden. Weitere Diagramme sind im Anhang A zu finden.

Die Mittelwerte und Standardabweichungen der Gauß-Kurven sind tabellarisch in Tabelle 1 dargestellt. Es fällt auch, dass das mittlere Maximum nicht immer am gleichen Winkel vorzufinden ist. Daraus lässt sich schließen, dass während der Messung der Mittelpunkt der Ringe stets in einem kleinen Bereich geschwankt ist. Der daraus resultierende Fehler wird für kleine Winkel jedoch nur linear mit der Verschiebung ansteigen und im Vergleich zu anderen Fehlern gering sein. Mit Abb. 2 lässt sich für die Maxima die Bedingung

$$\lambda = \frac{2d}{m} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}, \quad \Delta \lambda \approx \frac{2d}{m} \frac{\alpha \Delta \alpha}{\sqrt{n^2 - \alpha^2}} \quad (4)$$

mit der Beugungsordnung m herleiten. Für die Unsicherheit wurde die Kleinwinkelnäherung benutzt, was hier keinen Unterschied machen sollte, da diese sowieso auf die erste oder zweite signifikante Stelle aufgerundet werden. Mit Gleichung (4) und dem mittleren Maximum bei bekannter Wellenlänge von 644 nm lässt sich die Beugungsordnung bestimmen. Diese lag beim untersuchten Maximum bei $m = 18\,104$.

Im Folgenden wird die Wellenlängendifferenz eines äußeren und dem mittleren Maximum als $\delta\lambda = \lambda_{\sigma^\pm} - \lambda_\pi$ definiert. Damit ist die Energieverschiebung gegeben mit

$$\delta E = hc \left(\frac{1}{\lambda_{\sigma^\pm}} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \equiv -E_0 \frac{\delta\lambda}{\lambda_0 + \delta\lambda}, \quad \Delta(\delta E) = \delta E \frac{\Delta(\delta\lambda)}{\delta\lambda},$$

wobei für den Fehler $\lambda_0 \gg \delta\lambda$ angenommen wurde. Aufgrund von Gleichung (4) lässt sich sagen, dass im betrachteten Bereich die Wellenlänge steigen muss bei kleineren Winkeln. Da eine höhere Wellenlänge zu kleineren Energien führt, führen kleinere Winkel zu kleineren Energien. Damit also $\delta E_{\sigma^\pm} = \pm \mu_B B$

Tabelle 1: Maxima und Standardabweichungen der Gauss-Anpassungen

I/A	$x_{\text{links}}/^\circ$	$x_{\text{mitte}}/^\circ$	$x_{\text{rechts}}/^\circ$	$\sigma_{\text{links}}/^\circ$	$\sigma_{\text{mitte}}/^\circ$	$\sigma_{\text{rechts}}/^\circ$
4,7	-0,8253(13)	-0,7481(11)	-0,6590(18)	0,0292(9)	0,0337(12)	0,076(3)
5,2	-0,8288(15)	-0,7438(9)	-0,6394(17)	0,0306(12)	0,0384(14)	0,065(3)
5,7	-0,8392(9)	-0,7518(7)	-0,6443(9)	0,033(1)	0,0375(8)	0,0689(14)
6,0	-0,839(3)	-0,750(2)	-0,643(3)	0,036(4)	0,036(2)	0,071(5)
6,3	-0,8455(9)	-0,7491(6)	-0,631(1)	0,0339(12)	0,0411(8)	0,0642(15)
6,7	-0,8417(9)	-0,7398(7)	-0,617(1)	0,0338(11)	0,0428(9)	0,0605(18)
7,0	-0,846(3)	-0,742(3)	-0,621(4)	0,038(6)	0,042(3)	0,059(6)
7,3	-0,850(1)	-0,7421(8)	-0,6150(12)	0,0358(17)	0,0443(11)	0,059(2)
7,8	-0,8489(13)	-0,738(1)	-0,6050(15)	0,036(3)	0,0452(13)	0,061(3)
7,9	-0,8451(12)	-0,735(1)	-0,5992(14)	0,0355(17)	0,0444(12)	0,0646(19)

ist, muss $|\alpha_{\sigma+}| > |\alpha_0|$ und $|\alpha_{\sigma-}| < |\alpha_0|$ sein. Aus diesem Grund lässt sich das rechte Maximum (innerer Ring) σ^- und das linke Minimum (äußerer Ring) σ^+ zuweisen, da negative Winkel betrachtet wurden. Dies stimmt mit den Überlegungen in Abschnitt 2.2 überein.

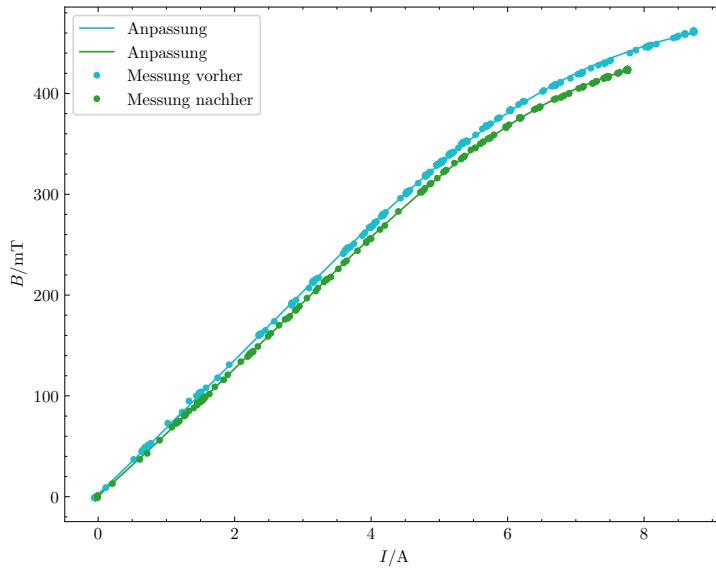


Abbildung 7: Magnetfeldkalibration

Um das Magneton zu bestimmen, muss zusätzlich die Magnetfeldkalibration durchgeführt werden, da bei der Messung nur die Spulenströme gemessen wurden. Auch hier sind die Fehler nicht bekannt. Da aber die Messung automatisch von dem Programm vorgenommen wurde und manuell der Spulenstrom langsam hochgedreht wurde, befinden sich in den Messdaten Bereiche, wo das Magnetfeld mehrmals beim gleichen Strom gemessen wurde. Die Standardabweichung dieses Bereiches wird als Unsicherheit für die Messung genutzt.

Für die Anpassung wird an die Messdaten der Hall Sonde vor und nach der Messung der Interferenzringe die Funktion

$$B(I) = \alpha + \frac{\beta}{(\gamma + e^{-\delta I})^\varepsilon}$$

angepasst. In Tabelle 2 sind die angepassten Parameter tabelliert und in Abb. 7 die Anpassungsfunktionen mit den Messwerten grafisch dargestellt. Da für beide Kalibrationskurven das resultierende χ^2 klein ist und diese visuell betrachtet nicht von den Messdaten unterscheidbar sind, kann die Kalibration für die weitere Auswertung genutzt werden. Es kann angenommen werden, dass während der Messung sich das tatsächliche Magnetfeld zwischen den beiden Kalibrationskurven befand. Aus diesem Grund wird für kommende Rechnungen der Mittelwert beider Kurven verwendet mit

$$B(I) = \frac{B_{\text{vor}}(I) + B_{\text{nach}}(I)}{2}, \quad \Delta B(I) = \left| \frac{B_{\text{vor}}(I) - B_{\text{nach}}(I)}{2} \right|.$$

Tabelle 2: Anpassparameter der Magnetfeldkalibration

Magnetfeldmessung	α/mT	β/mT	γ	δ	ϵ	χ^2
vorher	-1140(120)	1150(120)	0,022(3)	0,621(14)	0,092(11)	7,15
nachher	-1100(70)	1100(70)	0,0097(12)	0,748(15)	0,074(6)	1,89

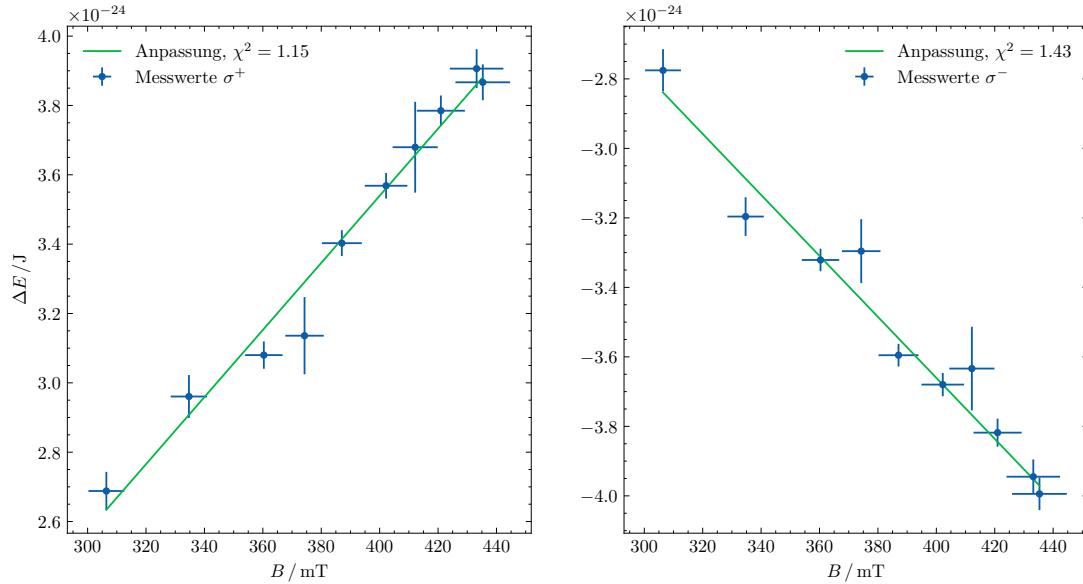


Abbildung 8: Bestimmung des Bohrschen Magneton

In Abb. 8 sind die Geradenanpassungen an die Magnetfeld-abhängige Energieverschiebung dargestellt. Da beide Geraden ein χ^2 nahe 1 besitzen, können diese als sehr gut betrachtet werden. Damit ergeben sich die Steigungen

$$\mu_B^+ = 9,7(5) \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1}, \quad \mu_B^- = 8,8(6) \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1}. \quad (5)$$

Verglichen mit dem Literaturwert $\mu_B^{\text{Lit}} = 9,274 \text{ J T}^{-1}$ liegt dieser in beiden Fällen im 1σ -Bereich der Messung, wobei der relative Fehler bei etwa 5% bis 8% liegt. Im Rahmen dieses Versuchs ist dies ein akzeptabler Wert.

Weiterhin fällt auf, dass für σ^\pm -Strahlung der Wert jeweils über- oder unterschätzt wird. Wird aus beiden Messergebnissen der Mittelwert gebildet, so ergibt sich der Wert

$$\mu_B = 9,3(8) \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1},$$

was zwar eine höhere Unsicherheit besitzt, der Wert jedoch auf zwei signifikante Stellen genau dem Literaturwert entspricht. Es lässt sich somit vermuten, dass aufgrund von möglicher falscher Justierung das aufgenommene Bild verzerrt wurde und deshalb eine Abweichung nach oben und unten entsteht.

2.4. weitere Überlegungen

3. Fazit

A. Anhang

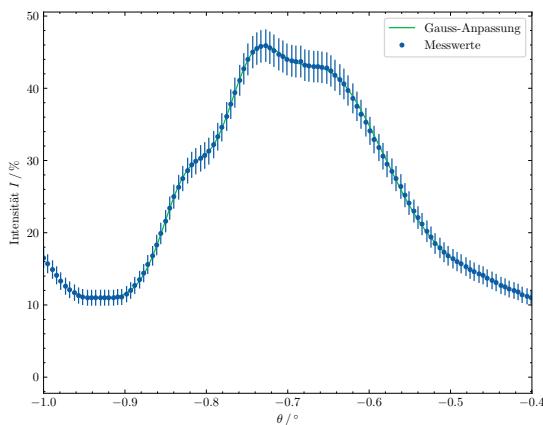


Abbildung 9: Aufspaltung der Maxima bei 4,7 Å

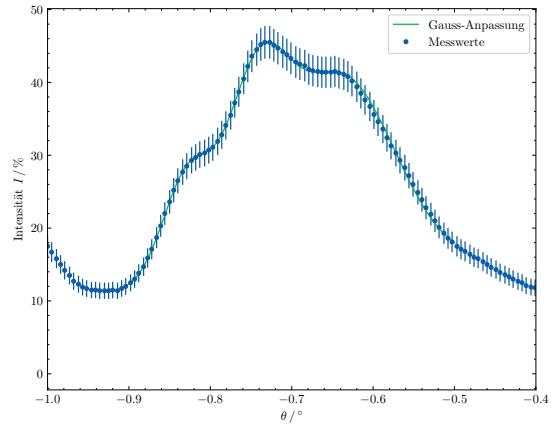


Abbildung 10: Aufspaltung der Maxima bei 5,2 Å

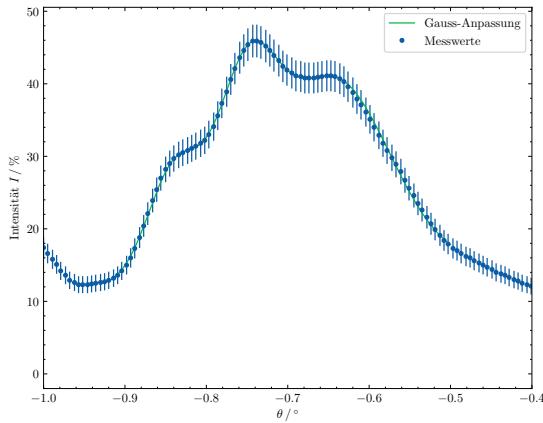


Abbildung 11: Aufspaltung der Maxima bei 5,7 Å

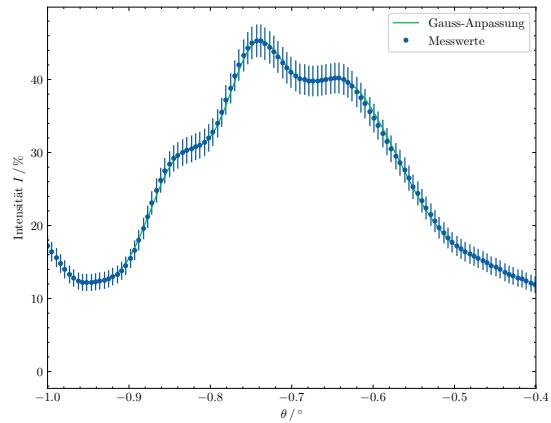


Abbildung 12: Aufspaltung der Maxima bei 6,0 Å

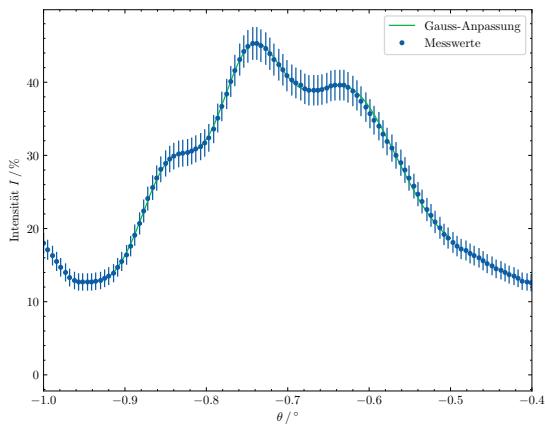


Abbildung 13: Aufspaltung der Maxima bei 6,3 Å

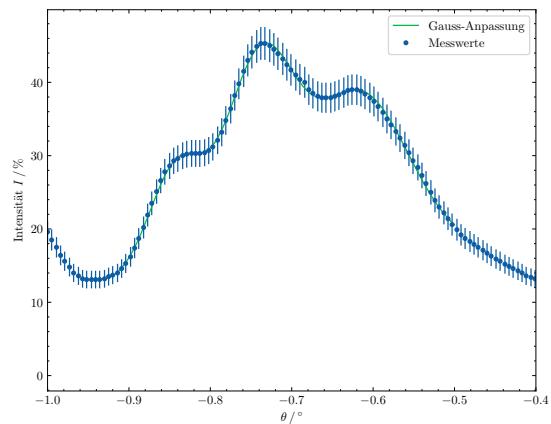


Abbildung 14: Aufspaltung der Maxima bei 6,7 Å

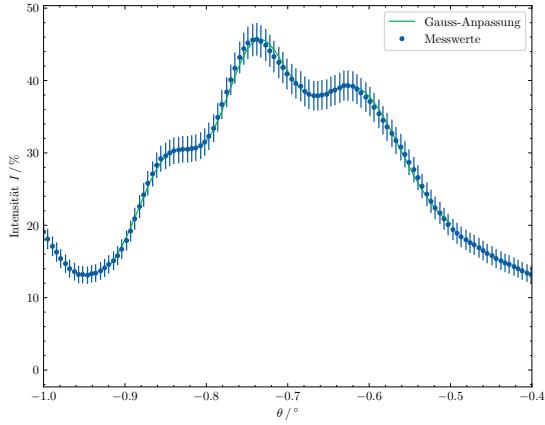


Abbildung 15: Aufspaltung der Maxima bei 7,0 Å

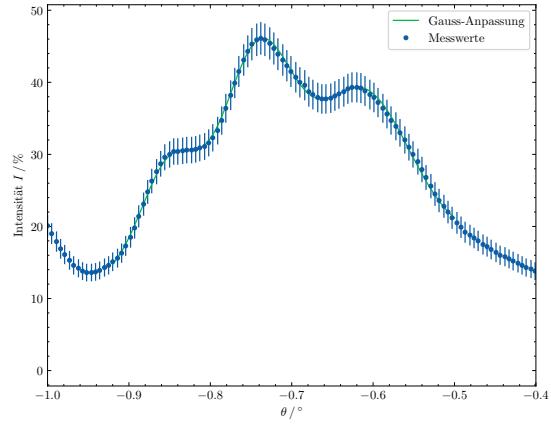


Abbildung 16: Aufspaltung der Maxima bei 7,3 Å

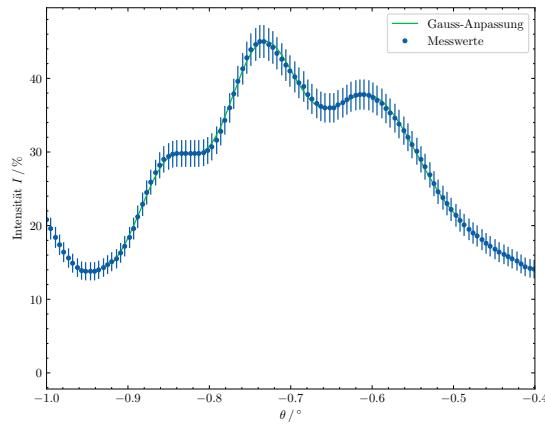


Abbildung 17: Aufspaltung der Maxima bei 7,8 Å