

Versuchsbericht

P401 Elektronische Übergänge

Gabriel Remiszewski und Christian Fischer

durchgeführt am 13/14.12.2023
betreut von Valentin Jonas

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Zeeman-Effekt	2
2.1 Versuchsaufbau	2
2.2 Untersuchung der Transversal- und Longitudinalkonfiguration	3
2.2.1 Transversalkonfiguration	3
2.2.2 Longitudinalkonfiguration	4
2.3 Bestimmung des Bohrschen Magnetons	5
2.4 Weitere Überlegungen	8
2.4.1 Finesse und Auflösungsvermögen	8
2.4.2 Dopplerverbreiterung	9
3 Franck-Hertz-Versuch	11
3.1 Aufbau und Durchführung	11
3.2 Auswertung	11
3.2.1 Abhängigkeit der Gegenspannung	12
3.2.2 Abhängigkeit der Temperatur	12
4 Fazit	15
A Anhang	16
Literaturverzeichnis	18

1. Einleitung

In diesem Versuch wird die Quantelung von Energie mit historisch durchgeführten Experimenten untersucht. Zunächst wird der normale Zeeman-Effekt zum Gebrauch gemacht, um atomare Übergänge durch ein homogenes Magnetfeld aufzuspalten, was durch eine partielle Aufhebung der Magnetquantenzahl-Entartung hervorgerufen wird. Aus der Energiedifferenz der Übergänge kann das Bohrsche Magneton bestimmt werden.

Anschließend wird der Franck-Hertz-Versuch durchgeführt, mit dem durch Stoßanregung die Energie eines Übergangs bestimmt werden kann.

2. Zeeman-Effekt

Der Zeeman-Effekt beschreibt die Aufspaltung der Energieniveaus einzelner Zustände in einem Magnetfeld. Spin und Bahndrehimpuls bewirken ein magnetisches Moment, auf welches ein äußeres Magnetfeld wirken kann. Quantenmechanisch kann dies durch den Hamiltonoperator beschrieben werden, der die Interaktion mit einem äußeren Feld beschreibt [1]:

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\frac{q}{2m_e} (\hat{\vec{L}} + 2\hat{\vec{S}}) \cdot \vec{B}. \quad (1)$$

In diesem Versuch wird die Aufspaltung an Cadmium beobachtet. Das äußere Elektron sieht aufgrund der Wahrscheinlichkeitsverteilung in erster Näherung den Kern mit den inneren Schalen effektiv als nur ein Teilchen, womit die Berechnung der Energieniveaus äquivalent zum Wasserstoffatom betrachtet werden kann. Da dieses durch eine gerade Elektronenzahl keinen Gesamtspin besitzt und das Magnetfeld homogen ist, vereinfacht sich Gleichung (1) zu

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{eB}{2m_e} \hat{L}_z,$$

wobei die Elektronenladung eingesetzt wurde und das Magnetfeld per Konvention in die z-Achse zeigt. Da bei kugelsymmetrischem Potenzial die z-Komponente des Drehimpulsoperators mit dem restlichen Hamiltonoperator des Atoms kommutiert, ergibt sich eine Verschiebung des Energieniveaus von

$$\Delta E = \frac{e\hbar}{2m_e} m_j B \equiv \mu_B m_j B,$$

mit dem Bohrschen Magneton [2]

$$\mu_B = 9,274\,015 \text{ JT}^{-1}. \quad (2)$$

Weil hier elektrische Dipolübergänge betrachtet werden, gilt die Auswahlregel $\Delta m = \{\pm 1, 0\}$ [2], wobei einer Differenz von null linear polarisiertes Licht (im folgenden als π bezeichnet) und einer Differenz von ± 1 zirkular polarisiertes Licht (σ^+ für links zirkular und σ^- für rechts zirkular) zugeordnet werden kann. Für π -Polarisation kann daher keine Energieverschiebung beobachtet werden, für σ^\pm -Polarisation eine Verschiebung von

$$\delta E = \pm \mu_B B. \quad (3)$$

Unabhängig von der Drehimpulsquantenzahl kann somit beim hier beschriebenen normalen Zeeman-Effekt immer nur eine Aufspaltung in drei Linien beobachtet werden, weshalb die Entartung nur teilweise aufgehoben werden kann.

In Abb. 1 ist das Übergangsschema für die Übergänge ${}^1D_2 \rightarrow {}^1P_1$ des Cadmiumatoms dargestellt. Die Wellenlänge des Übergangs ist $\lambda_0 = 644 \text{ nm}$ und entspricht rotem Licht. Dieser Übergang wird in diesem Versuch untersucht.

2.1. Versuchsaufbau

Der Aufbau zur Untersuchung des Zeeman-Effekts ist in Abb. 3 skizziert. Eine Cadmiumlampe wird zwischen ein Magnetfeld festgehalten, welches durch zwei in Reihe geschaltete stromdurchflossene Spulen erzeugt wird. Die Spulen können um die vertikale Achse gedreht werden, um die Richtung des Magnetfeldes in Bezug zur Beobachtungsrichtung verändern zu können. Das Licht der Lampe wird mit einer Kondensorlinse $f = 150 \text{ mm}$ kollimiert mit leichter Konvergenz, um nachher am Etalon verschiedene Einfallswinkel zu erzeugen.

Das eingebaute Fabry-Pérot-Etalon ist eine planparallele Glasschicht, welche beidseitig mit teildurchlässigen Spiegeln beschichtet ist. Durch ständige Reflexion innerhalb der Glasschicht wird ein Strahlenbündel erzeugt, welches durch Gangunterschiede untereinander interferiert. Das hier benutzte Etalon hat einen Brechungsindex von $n = 1.457$ und einen Reflexionsgrad von $R = 0.85$. Mit einer weiteren Sammellinse $f = 150 \text{ mm}$ wird das Licht am Okular scharf abgebildet, an dem durch die entstandene Interferenz konzentrische Ringe Beobachter sein können. Davor wird mit einem Interferenzfilter das rote Licht bei 644 nm gefiltert.

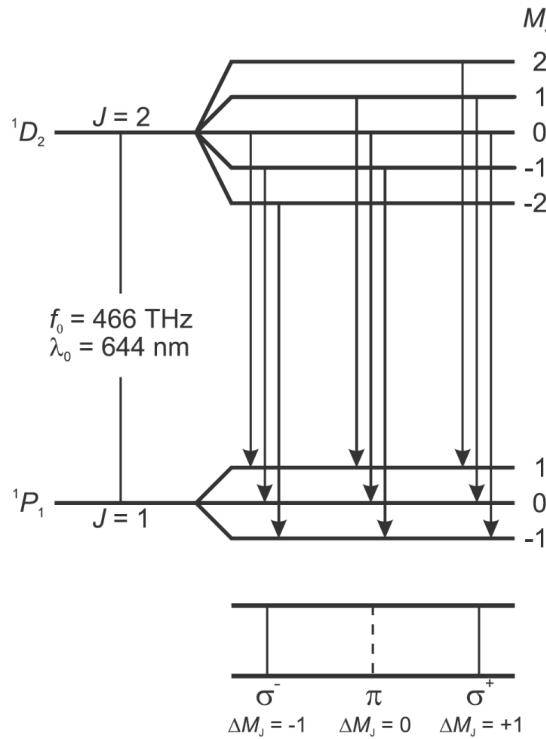


Abbildung 1: Übergangsschema von Cadmium für die Singulett-Zustände $^1D_2 \rightarrow ^1P_1$. Zusehen sind jeweils drei Übergangsgruppen mit je drei Übergängen, die untereinander entartet sind, die Entartung zwischen einander jedoch durch den Zeeman-Effekt aufgehoben wird. Darunter ist die durch die Auswahlregeln bestimmte Polarisation des abgestrahlten Lichts aufgetragen. [3]

2.2. Untersuchung der Transversal- und Longitudinalkonfiguration

Durch das Drehen der Spulen lässt sich die Polarisation der emittierten Strahlung untersuchen. Hierbei werden zwei Konfigurationsmöglichkeiten gesondert betrachtet. Klassisch lässt sich die Polarisations- und Strahlrichtung der Übergangsstrahlung mit dem Lorentz-Modell beschreiben, wo eine Schwingungsgleichung mit der Lorentzkraft als treibende Kraft angesehen wird. Dabei sind π - und σ^\pm -Strahlung die Eigenmodi der Lösung. Diese sind in Abb. 5 skizziert. Zu sehen ist hierbei, dass sich jede Lösung als schwingender Dipol interpretieren lässt, wobei für σ^\pm zwei senkrecht zueinander stehenden Dipole mit einer 90° -Phasenbeziehung betrachtet werden.

Da Dipole nicht in Bewegungsrichtung abstrahlen, kann in longitudinaler Beobachtungsrichtung (parallel zum Magnetfeld) nur die zirkular polarisierte σ^\pm -Strahlung beobachtet werden. Bei transversaler Konfiguration sind alle drei Modi sichtbar mit dem Unterschied, dass σ^\pm hier linear polarisiert ist und räumlich um 90° zur π -Polarisation gedreht.

2.2.1. Transversalkonfiguration

In Transversalrichtung können σ^\pm - sowie π -Strahlung beobachtet werden, wobei diese Modi linear polarisiert sind und senkrecht zueinander stehen. Mit einem Polarisationsfilter lässt sich somit π und σ voneinander trennen, σ^+ und σ^- sind jedoch nicht unterscheidbar voneinander. Vor das Etalon wird der Polarisationsfilter befestigt und beim Einschalten des Magnetfeldes das Bild beobachtet. Die optische Achse des Filters steht auf 0° , wenn diese senkrecht zur optischen Bank steht. Erwartet wird das Verschwinden der inneren Ringe bei einer Filterausrichtung von 0° , da in diesem Falle die optische Achse des Filters senkrecht zum B-Feld und damit zur Polarisationsachse des π -Lichts steht. Damit ist das Verschwinden der äußeren Ringe bei 90° zu erwarten.

In Abb. 4a sind die Interferenzringe abgebildet. Durch das Anlegen eines Magnetfeldes wurde die

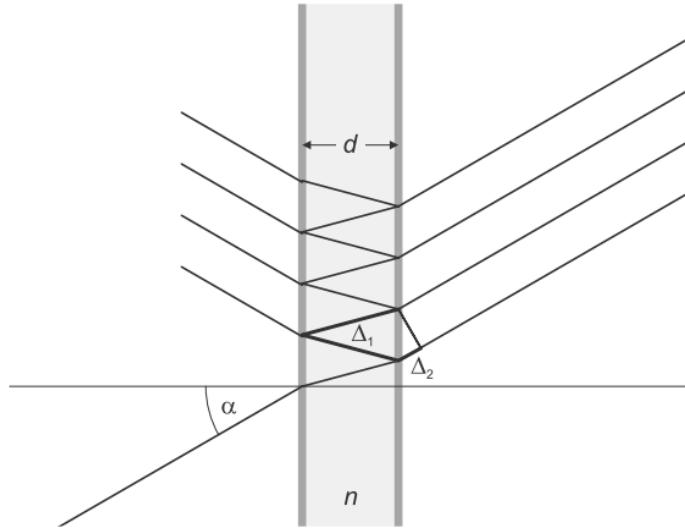


Abbildung 2: Funktionsweise eines Fabry-Pérot-Etalons. α bezeichnet den Einfallswinkel eines Lichtstrahls in den Etalon mit Dicke d bei Brechungsindex n . Δ_1 und Δ_2 bezeichnen die Gangunterschiede, die zur Interferenz zweier transmittierter Strahlen führen. [3]

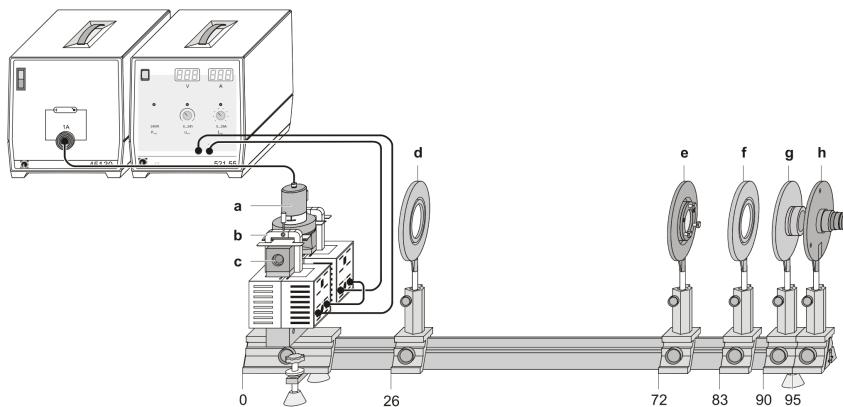
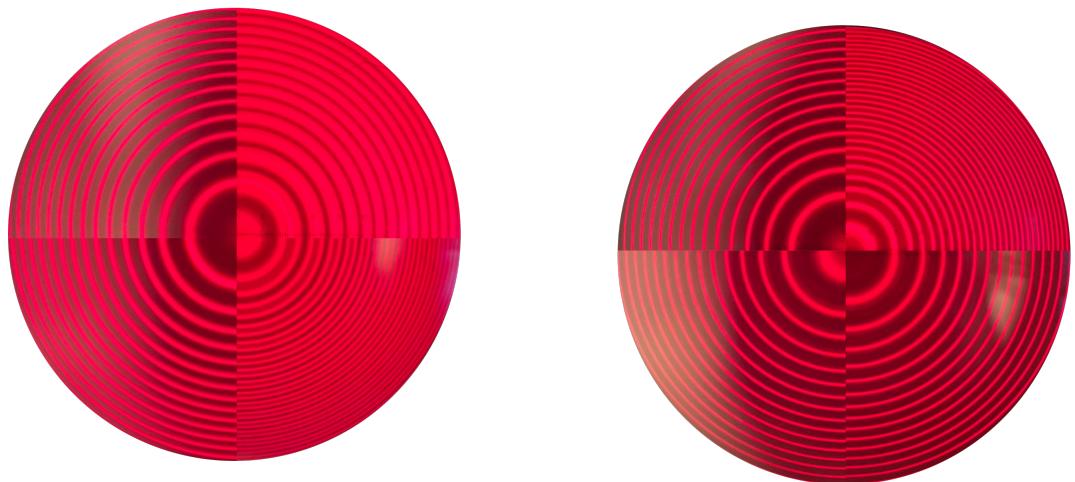


Abbildung 3: Aufbau zur Messung des Zeeman-Effekts. (a) zeigt die Cadmiumlampe mit Klammern (b) und Polschuhe (c). (d) zeigt die Kondensorlinse, (e) das Etalon, (f) die Abbildungslinse, (g) das Interferenzfilter und (h) das Okular mit Strichskala. [3]

Aufspaltung der Ringe in einen hellen mittleren Ring und zwei leicht dunklere daneben deutlich. Aufgrund des Auflösungsvermögens und möglicherweise einer Überbelichtung konnten die Details des Bildes auf der Aufnahme nicht kenntlich gemacht werden. Bei einer Polarisationsfiltereinstellung von 0° verschwinden die inneren Ringen, bei 90° die Äußeren. Dies entspricht dem erwarteten Verhalten, weshalb daraus geschlossen werden kann, dass das Licht der äußeren Ringe senkrecht zum B-Feld polarisiert ist und das Licht der inneren Ringe parallel dazu.

2.2.2. Longitudinalkonfiguration

In longitudinaler Ausrichtung kann nur das σ^\pm -Licht beobachtet werden. Um zu zeigen, dass beide Wellen zirkular und entgegengesetzt polarisiert sind, wird vor dem Polarisationsfilter eine $\lambda/4$ -Wellenplatte befestigt, welche die Phase des elektrischen Feldes parallel zur optischen Achse um eine viertel Wellenlänge verschiebt und somit zirkuläres Licht linear polarisieren kann. Per Definition entsprechen σ^\pm die komplexen Vektoren des elektrischen Feldes $\mathbf{E}_{\sigma^\mp} \propto \mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird die optische Achse der Wellenplatte auf die y -Achse gesetzt. Bei einer Verzögerung wird die y -Komponente um den Faktor $e^{\pm i\pi/2} = \pm i$ verschoben, womit sich eine Polarisation von $\mathbf{E}_{\sigma^\mp} \propto \mathbf{e}_x \pm \mathbf{e}_y$ ergibt. Somit ist σ^- bei einer Ausrichtung des Filters bei 45° sichtbar, während σ^+ Licht bei -45° sichtbar wird.



(a) Transversal Konfiguration: links oben ohne B-Feld, rechts oben mit B-Feld, rechts unten mit Filter auf 0° , links unten mit Filter auf 90° .

(b) Longitudinal Konfiguration: links oben ohne B-Feld, rechts oben mit B-Feld, rechts unten mit Filter auf 45° , links unten mit Filter auf -45° .

Abbildung 4: Aufnahmen der Etalon Interferenzringe bei unterschiedlichen Aufbauten.

In Abb. 4b ist die Longitudinalkonfiguration gezeigt. Es ist zu erkennen, dass sich diesmal beim Anlegen eines Magnetfeldes die Linie in nur zwei symmetrisch verteilte Linien aufspaltet. Nach Durchgang einer Verzögerungsplatte und einer Filtereinstellung von $\pm 45^\circ$ verschwindet wie erwartet jeweils einer der zwei Ringe. Aufgrund der oberen Überlegung lässt sich damit der innere Ring σ^- -Licht zuweisen und σ^+ -Licht dem äußeren Ring. Auf die Relation, dass σ^- kleinere Winkel und σ^+ größere Winkel zuzuordnen sind, wird bei der Bestimmung des Bohr Magneton weiter eingegangen.

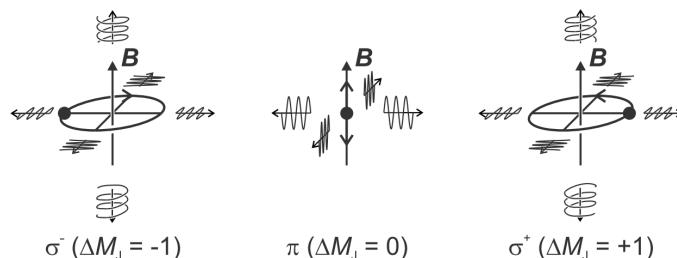


Abbildung 5: Polarisation der verschiedenen Übergänge. π -Strahlung ist nur in transversaler Richtung beobachtbar, σ^\pm -Strahlung in transversaler und in longitudinaler Richtung. [3]

2.3. Bestimmung des Bohrschen Magnetons

Zur Bestimmung des Bohrschen Magnetons wird die Aufspaltung der Linien in Transversalkonfiguration mit einer CCD-Kamera gemessen. Diese Messung wird bei unterschiedlichen Spulenströmen 40-mal durchgeführt und der Mittelwert gespeichert für genauere Ergebnisse. Mit einer Hall-Sonde wird zur Kalibration das Magnetfeld in Abhängigkeit des Stroms vor und nach der Durchführung einer Messung vorgenommen. Durch das Erhitzen der Spulen wird erwartet, dass sich die Kalibrationskurve mit der Zeit ändert. Durch zwei Messungen kann damit der Fehler des Magnetfeldes bestimmt werden.

Untersucht wird hierbei ein einzelnes Interferenzmaximum nahe des Ringzentrums. Dieses wird beim Anlegen eines Magnetfeldes in drei Maxima aufgespalten. An die gemessenen Kurven werden drei Gauss-

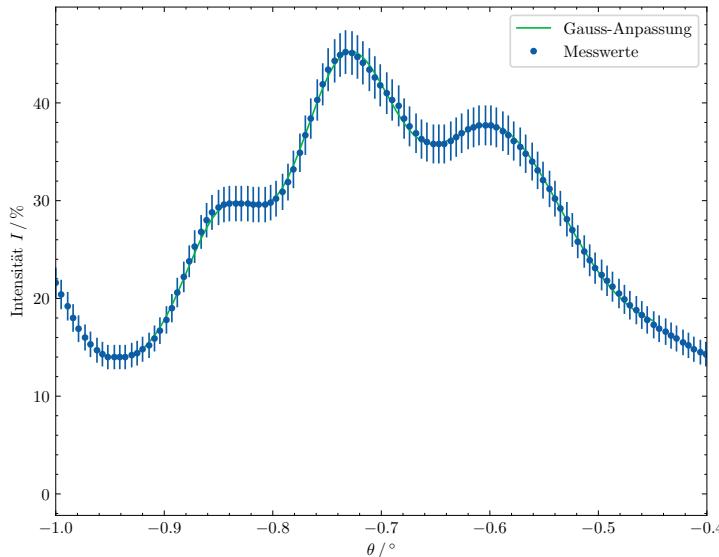


Abbildung 6: Aufspaltung der Maxima bei einem Strom von 7,9 A.

Kurven mit einem linearen Offset angepasst. Die Anpassfunktion kann somit beschrieben werden mit

$$f(x, \vec{x}, \vec{\sigma}, \vec{A}, m, n) = \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x - x_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) + mx + n.$$

Das Programm zur Messung der Einstrahlintensitäten gibt keine dazugehörigen Unsicherheiten an. Aus diesem Grund müssen diese rekonstruiert werden. Die CCD-Kamera misst Photonen, wodurch die Messung pro Pixel als Poisson-verteilt angesehen werden kann mit dazugehörigem Poisson-Fehler $\Delta N = \sqrt{N}$. Die Umrechnung der Zählereignisse in eine Intensität (in Prozent) ist unbekannt, weshalb der Fehler mit einem unbekannten Faktor skaliert wird. Für die Anpassungskurve ist dieser jedoch irrelevant, da nur der relative Fehler der einzelnen Messpunkte von Bedeutung ist. Der Skalierungsfaktor ist daher nicht nötig. Da jedoch nur die relativen Fehler bekannt sind, verliert die Berechnung einer Anpassungsgröße, wie dem reduzierten Chi-Quadrat [4], seine Bedeutung, weshalb eine quantitative Bewertung der Anpassungen nicht durchgeführt werden kann.

Eine Anpassungskurve ist beispielhaft in Abb. 6 gezeigt. Visuell kann die Anpassung als äußerst erfolgreich angesehen werden. Weitere Diagramme sind im Anhang A zu finden.

Die Mittelwerte und Standardabweichungen der Gauß-Kurven sind tabellarisch in Tabelle 1 dargestellt. Es fällt auch, dass das mittlere Maximum nicht immer am gleichen Winkel vorzufinden ist. Daraus lässt sich schließen, dass während der Messung der Mittelpunkt der Ringe stets in einem kleinen Bereich geschwankt ist. Der daraus resultierende Fehler wird für kleine Winkel jedoch nur linear mit der Verschiebung ansteigen und im Vergleich zu anderen Fehlern gering sein. Mit Abb. 2 lässt sich für die Maxima die Bedingung

$$\lambda = \frac{2d}{m} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}, \quad \Delta \lambda \approx \frac{2d}{m} \frac{\alpha \Delta \alpha}{\sqrt{n^2 - \alpha^2}} \quad (4)$$

mit der Beugungsordnung m herleiten. Für die Unsicherheit wurde die Kleinwinkelnäherung benutzt, was hier keinen Unterschied machen sollte, da diese sowieso auf die erste oder zweite signifikante Stelle aufgerundet werden. Mit Gleichung (4) und dem mittleren Maximum bei bekannter Wellenlänge von 644 nm lässt sich die Beugungsordnung bestimmen. Diese lag beim untersuchten Maximum bei $m = 18\,104$.

Im Folgenden wird die Wellenlängendifferenz eines äußeren und dem mittleren Maximum als $\delta\lambda = \lambda_{\sigma^\pm} - \lambda_\pi$ definiert. Damit ist die Energieverschiebung gegeben mit

$$\delta E = hc \left(\frac{1}{\lambda_{\sigma^\pm}} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \equiv -E_0 \frac{\delta\lambda}{\lambda_0 + \delta\lambda}, \quad \Delta(\delta E) = \delta E \frac{\Delta(\delta\lambda)}{\delta\lambda}, \quad (5)$$

wobei für den Fehler $\lambda_0 \gg \delta\lambda$ angenommen wurde. Aufgrund von Gleichung (4) lässt sich sagen, dass im betrachteten Bereich die Wellenlänge steigen muss bei kleineren Winkeln. Da eine höhere Wellenlänge zu kleineren Energien führt, führen kleinere Winkel zu kleineren Energien. Damit also $\delta E_{\sigma^\pm} = \pm \mu_B B$

Tabelle 1: Maxima und Standardabweichungen der Gauss-Anpassungen

I/A	$x_{\text{links}}/^\circ$	$x_{\text{mitte}}/^\circ$	$x_{\text{rechts}}/^\circ$	$\sigma_{\text{links}}/^\circ$	$\sigma_{\text{mitte}}/^\circ$	$\sigma_{\text{rechts}}/^\circ$
4,7	-0,8253(13)	-0,7481(11)	-0,6590(18)	0,0292(9)	0,0337(12)	0,076(3)
5,2	-0,8288(15)	-0,7438(9)	-0,6394(17)	0,0306(12)	0,0384(14)	0,065(3)
5,7	-0,8392(9)	-0,7518(7)	-0,6443(9)	0,033(1)	0,0375(8)	0,0689(14)
6,0	-0,839(3)	-0,750(2)	-0,643(3)	0,036(4)	0,036(2)	0,071(5)
6,3	-0,8455(9)	-0,7491(6)	-0,631(1)	0,0339(12)	0,0411(8)	0,0642(15)
6,7	-0,8417(9)	-0,7398(7)	-0,617(1)	0,0338(11)	0,0428(9)	0,0605(18)
7,0	-0,846(3)	-0,742(3)	-0,621(4)	0,038(6)	0,042(3)	0,059(6)
7,3	-0,850(1)	-0,7421(8)	-0,6150(12)	0,0358(17)	0,0443(11)	0,059(2)
7,8	-0,8489(13)	-0,738(1)	-0,6050(15)	0,036(3)	0,0452(13)	0,061(3)
7,9	-0,8451(12)	-0,735(1)	-0,5992(14)	0,0355(17)	0,0444(12)	0,0646(19)

ist, muss $|\alpha_{\sigma+}| > |\alpha_0|$ und $|\alpha_{\sigma-}| < |\alpha_0|$ sein. Aus diesem Grund lässt sich das rechte Maximum (innerer Ring) σ^- und das linke Minimum (äußerer Ring) σ^+ zuweisen, da negative Winkel betrachtet wurden. Dies stimmt mit den Überlegungen in Abschnitt 2.2 überein.

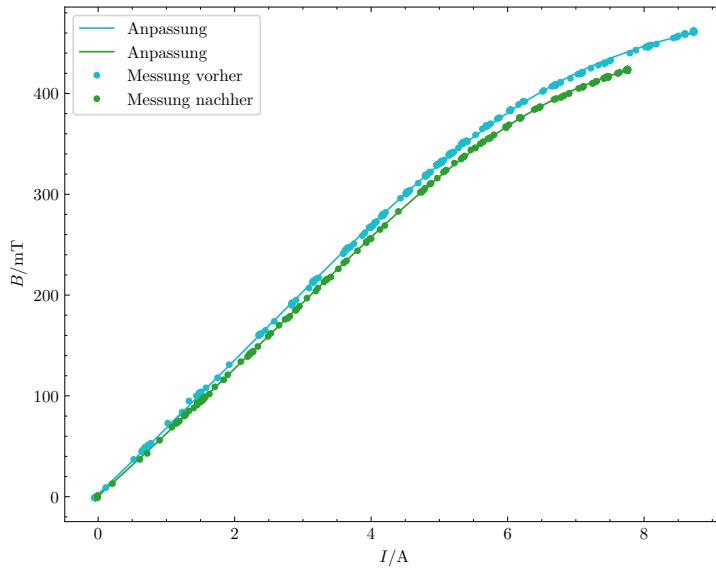


Abbildung 7: Magnetfeldkalibration

Um das Magneton zu bestimmen, muss zusätzlich die Magnetfeldkalibration durchgeführt werden, da bei der Messung nur die Spulenströme gemessen wurden. Auch hier sind die Fehler nicht bekannt. Da aber die Messung automatisch von dem Programm vorgenommen wurde und manuell der Spulenstrom langsam hochgedreht wurde, befinden sich in den Messdaten Bereiche, wo das Magnetfeld mehrmals beim gleichen Strom gemessen wurde. Die Standardabweichung dieses Bereiches wird als Unsicherheit für die Messung genutzt.

Für die Anpassung wird an die Messdaten der Hall Sonde vor und nach der Messung der Interferenzringe die Funktion

$$B(I) = \alpha + \frac{\beta}{(\gamma + e^{-\delta I})^\varepsilon}$$

angepasst. In Tabelle 2 sind die angepassten Parameter tabelliert und in Abb. 7 die Anpassungsfunktionen mit den Messwerten grafisch dargestellt. Da für beide Kalibrationskurven das resultierende χ^2 klein ist und diese visuell betrachtet nicht von den Messdaten unterscheidbar sind, kann die Kalibration für die weitere Auswertung genutzt werden. Es kann angenommen werden, dass während der Messung sich das tatsächliche Magnetfeld zwischen den beiden Kalibrationskurven befand. Aus diesem Grund wird für kommende Rechnungen der Mittelwert beider Kurven verwendet mit

$$B(I) = \frac{B_{\text{vor}}(I) + B_{\text{nach}}(I)}{2}, \quad \Delta B(I) = \left| \frac{B_{\text{vor}}(I) - B_{\text{nach}}(I)}{2} \right|.$$

Tabelle 2: Anpassparameter der Magnetfeldkalibration

Magnetfeldmessung	α/mT	β/mT	γ	δ	ϵ	χ^2
vorher	-1140(120)	1150(120)	0,022(3)	0,621(14)	0,092(11)	7,15
nachher	-1100(70)	1100(70)	0,0097(12)	0,748(15)	0,074(6)	1,89

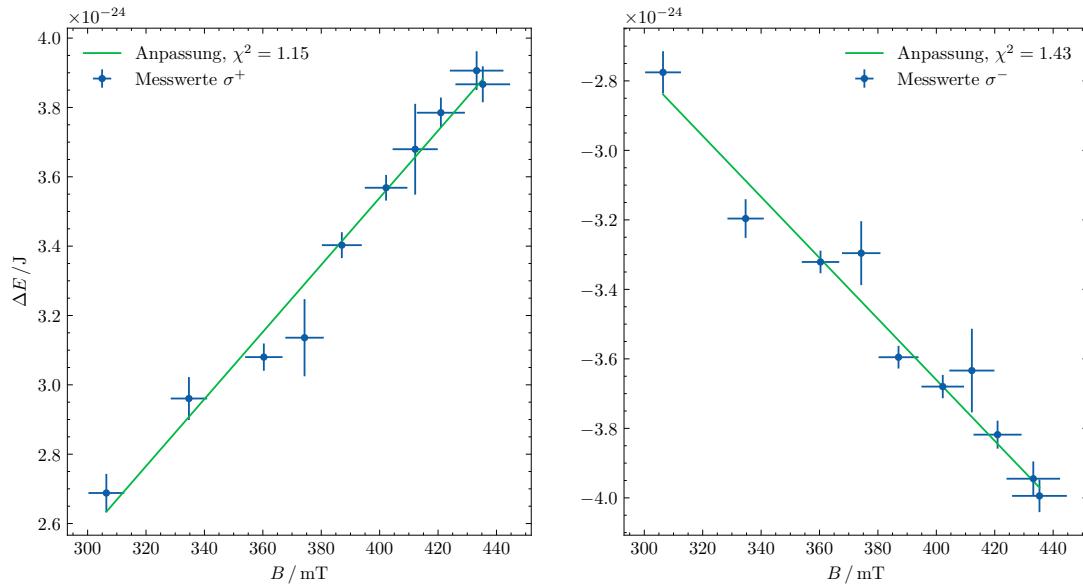


Abbildung 8: Bestimmung des Bohrschen Magnets

In Abb. 8 sind die Geradenanpassungen an die Magnetfeld-abhängige Energieverschiebung dargestellt. Da beide Geraden ein χ^2 nahe 1 besitzen, können diese als sehr gut betrachtet werden. Damit ergeben sich die Steigungen

$$\mu_B^+ = 9,7(5) \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1}, \quad \mu_B^- = 8,8(6) \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1}. \quad (6)$$

Verglichen mit dem Literaturwert $\mu_B^{\text{Lit}} = 9,274 \text{ J T}^{-1}$ liegt dieser in beiden Fällen im 1σ -Bereich der Messung, wobei der relative Fehler bei etwa 5% bis 8% liegt. Im Rahmen dieses Versuchs ist dies ein akzeptabler Wert.

Weiterhin fällt auf, dass für σ^\pm -Strahlung der Wert jeweils über- oder unterschätzt wird. Wird aus beiden Messergebnissen der Mittelwert gebildet, so ergibt sich der Wert

$$\mu_B = 9,3(8) \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1},$$

was zwar eine höhere Unsicherheit besitzt, der Wert jedoch auf zwei signifikante Stellen genau dem Literaturwert entspricht. Es lässt sich somit vermuten, dass aufgrund von möglicher falscher Justierung das aufgenommene Bild verzerrt wurde und deshalb eine Abweichung nach oben und unten entsteht.

2.4. Weitere Überlegungen

2.4.1. Finesse und Auflösungsvermögen

Die Finesse ist ein Maß für die Güte eines Resonators. Sie ist definiert als Quotient des freien Spektralbereiches und der Halbwertsbreite eines Maximums:

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}. \quad (7)$$

Mit dem bekannten Reflexionskoeffizienten $r = 0.85$ des Etalons ergibt sich eine theoretische Finesse von

$$\mathcal{F}_{\text{theo}} = 19,3.$$

Der freie Spektralbereich ist definiert als Frequenzunterschied zweier Beugungsordnungen. Mit Gleichung (4) ergibt sich somit

$$\Delta\nu = \frac{c}{2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \approx \frac{c}{2nd}$$

für kleine Winkel. In Ortsdarstellung lässt sich damit die Gleichung

$$\Delta\lambda = c \left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} \right) \approx \lambda^2 \frac{\Delta\nu}{c} = \frac{\lambda^2}{2nd} \quad (8)$$

nähern. Das Auflösungsvermögen lässt sich mit Gleichungen (7) und (8) für das Etalon daher mit

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{2nd}{\lambda} \mathcal{F} \quad (9)$$

bestimmen. Für den genutzten Aufbau entspricht dies dem Auflösungsvermögen.

$$A_{\text{theo}} = 3,5 \cdot 10^5$$

Das Auflösungsvermögen kann bestimmt werden, indem der Spulenstrom so lange verringert wird, bis die einzelnen Ringe durch den Zeeman-Effekt nicht mehr aufgelöst werden können. Mit Gleichung (5) kann das Auflösungsvermögen als

$$A = \frac{hc}{\lambda\mu B(I)}$$

geschrieben werden. Es wurden in transversaler und longitudinaler Richtung die Ströme

$$I_{\text{transv}} = 3,6(1) \text{ A}, \quad I_{\text{longi}} = 1,3(2) \text{ A}$$

gemessen. Da nach Abb. 7 die Ströme sich im linearen Bereich der Kalibrationskurve befinden, kann die Unsicherheit mit $\Delta A = A \cdot \Delta I / I$ approximiert werden. Da in longitudinaler Richtung die mittlere Linie nicht sichtbar ist, muss in diesem Fall das Auflösungsvermögen zusätzlich um den Faktor 2 verringert werden. Es ergeben sich die Werte

$$A_{\text{transv}} = 1,37(4) \cdot 10^5, \quad A_{\text{longi}} = 1,9(3) \cdot 10^5,$$

womit der Referenzwert deutlich größer als die Messwerte sind. Dies könnte am wahrscheinlichsten an einer mangelnden Justierung liegen, in der die Sammellinse nicht vollständig fokussiert wurde. Dies würde auch die schlechte Auflösung der Zeeman-Aufspaltung in Abschnitt 2.3 erklären. Außerdem ist anzumerken, dass das Auflösungsvermögen in transversaler und longitudinaler Ausrichtung voneinander abweichen. Möglich ist ein einfacher Ablesefehler als Grund für die Abweichung, falls die Maxima als nicht unterscheidbar angesehen wurden, obwohl sie es eigentlich noch waren. Die Finessen sind nach Gleichung (9)

$$\mathcal{F}_{\text{trans}} = 7,5(3), \quad \mathcal{F}_{\text{longi}} = 10,4(17).$$

Da diese linear mit dem Auflösungsvermögen zusammenhängen, sind diese auch nach unten verschoben.

2.4.2. Dopplerverbreiterung

Aufgrund der thermischen Bewegung der Atome in der Cadmiumlampe verschiebt sich nach dem Dopplereffekt die am Detektor gemessene Lichtwellenlänge. Bei Raumtemperatur überwiegt dieser Effekt der natürlichen Linienbreite. Die Dopplerverbreiterung ist mit der Gleichung

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{8k_B T \ln 2}{m}}$$

berechenbar. Bei einer Temperatur von 1000 K ergibt sich eine Verbreiterung von 1,38 pm. Diese Breite wird mit der Linienbreite eines Maximums ohne Magnetfeld verglichen. Eine Gauß-Anpassung an das gleiche Maximum wie in Abschnitt 2.3 wurde in Abb. 9 min einem linearen Offset vorgenommen. Es konnte aufgrund der Asymmetrie des Peaks keine Gauß-Funktion angepasst werden, die den gesamten Bereich des Maximums gut beschreibt. Die Breite und der Mittelwert müssten trotzdem innerhalb der Unsicherheit gut abgeschätzt werden können. Diese sind $\alpha_0 = -0,748(1)^\circ$ mit einer Standardabweichung $\sigma = 0,041(1)^\circ$.

Um daraus die Breite der Kurve in Ortsdarstellung zu bestimmten, wird zunächst Gleichung (4) für kleine Winkel genähert mit

$$\lambda \approx \frac{2d}{m} \left(n - \frac{\alpha^2}{2n} \right).$$

Mit der Definition $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ lässt sich mit der Linienbreite folgendermaßen bestimmen:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 &= \frac{d}{mn} (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) = \frac{d}{mn} (\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 + \alpha_1) = -\frac{d}{mn} \Delta\alpha(\alpha_1 - \alpha_0 + 2\alpha_0) \\ &= -\frac{d}{mn} \Delta\alpha(\Delta\alpha + 2\alpha_0).\end{aligned}$$

Die Dopplerverbreiterung bezieht sich jedoch auf die Halbwertsbreite, weshalb die Standardabweichung noch umgerechnet werden muss mit $\Delta\alpha = \sigma\sqrt{2\ln 2}$. Mit den Messwerten ergibt sich eine Verbreiterung von

$$\Delta\lambda_{\text{exp}} = 3,3(1) \text{ pm}. \quad (10)$$

Verglichen mit der Dopplerverbreiterung von etwa 1,4 pm liegt dieser Wert in derselben Größenordnung, jedoch um über den Faktor 2 größer. Wird mit Gleichung (9) das Auflösungsvermögen berechnet, so ergibt sich mit dem experimentellen Wert $A = 1,97(5) \cdot 10^5$, was vergleichbar mit der Messung der longitudinalen Konfiguration ist. Es ist naheliegend, dass der Aufbau nicht richtig justiert wurde und deshalb ein leicht unscharfes Bild bei der Messung entstanden ist, welche die Linienbreite erhöht.

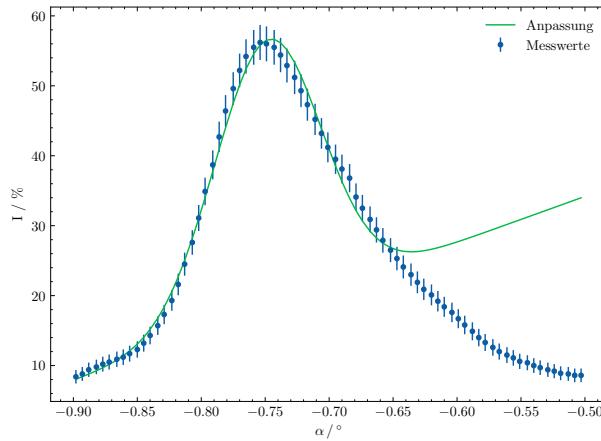


Abbildung 9: Anpassung an ein Maximum bei Messung mit CCD-Kamera ohne angelegten Magnetfeld.

3. Franck-Hertz-Versuch

Der Franck-Hertz-Versuch hat historisch maßgeblich zur Entwicklung der Quantenmechanik beigetragen und das damals von Niels Bohr vorgestellte Atommodell gestützt. Hierbei werden in einer Röhre Elektronen zu einer Anode hin beschleunigt und erzeugen einen messbaren Strom. Besitzen diese genügend kinetische Energie, so können diese inelastisch mit den Quecksilberatomen in dem Röhrengas stoßen, wobei der Energieübertrag zur Anregung atomarer Übergänge genutzt wird. Aufgrund der verringerten kinetischen Energie der beschleunigten Elektronen kommt es zu einem Stromeinbruch. Die dabei entstehende Spannungskurve wird wie in Abb. 11 erwartet. Die Stöße der Elektronen mit den Atomen ist ein statistischer Prozess. Ebenso unterliegt die Elektronengeschwindigkeit einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung, weshalb keine scharfen Maxima bei den entsprechenden Beschleunigungsspannungen erwartet werden, sondern normalverteilte Kurven.

Aus der Differenz den Abständen der Maxima kann somit die Energie des Übergangs bestimmt werden. Primär kann aufgrund des deutlich höheren Wirkungsquerschnittes der Übergang $6^1S_0 \rightarrow 6^3P_1$ betrachtet werden. Der Wirkungsquerschnitt ist hierbei antiproportional zur freien Weglänge des Gases korreliert.

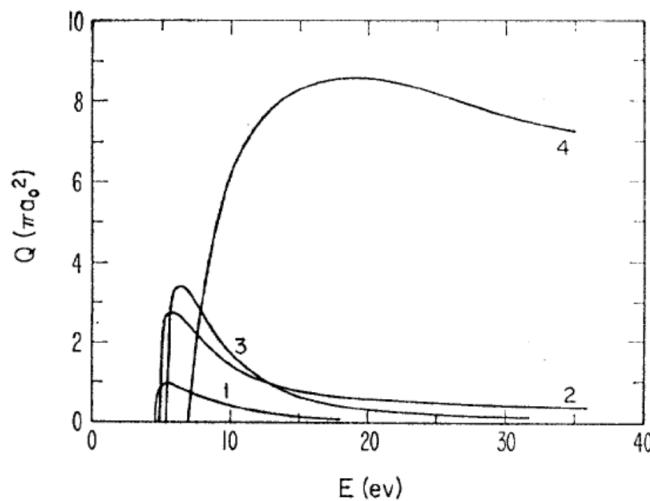


Abbildung 10: Totale Wirkungsquerschnitte von **1**: $6^1S_0 \rightarrow 6^3P_0$, **2**: $6^1S_0 \rightarrow 6^3P_1$, **3**: $6^1S_0 \rightarrow 6^3P_2$, **4**: $6^1S_0 \rightarrow 6^1P_1$ [5]

3.1. Aufbau und Durchführung

Um zunächst in einem Quecksilbergas freie Ladungsträger zu erzeugen, wird mit einer Heizspannung U_h ein Glühdraht erwärmt. In Abb. 12 entspricht dies der Kathode K. Die Elektronen werden mit einer angelegten Beschleunigungsspannung U_B zu einem Gitter G beschleunigt. Zwischen Gitter G und Anode A wird eine zusätzliche Gegenspannung U_G angelegt, die Elektronen abbremst. Diese beschränkt die kinetische Energie der durch das Gitter kommenden Elektronen nach unten und verringert so die an der Anode auftreffende Elektronenzahl. Die Spannungskurve wird viermal bei unterschiedlichen Gegenspannungen und konstanter Temperatur gemessen und anschließend viermal bei gleichbleibender Gegenspannung und variabler Temperatur.

3.2. Auswertung

Die Unsicherheiten werden nach Herstellerangaben auf $\pm 1\%$ inklusive $\pm 0.5\%$ des Messbereiches gelegt. Der Messbereich beim genutzten Sensor ist variabel und wurde automatisch gesteuert, weshalb nur vermutet werden kann, dass dieser bei steigender Spannung immer auf den nächsten höheren Bereich umgestiegen ist. Die Fehler wurden auf diese Weise für die Messung des Anodenstroms und Beschleunigungsspannung berechnet, wobei zu beachten ist, dass kein eigentlicher Strom, sondern die dazu proportionale Spannung gemessen wurde. Die Skalierung ist für die Auswertung jedoch nicht weiter wichtig.

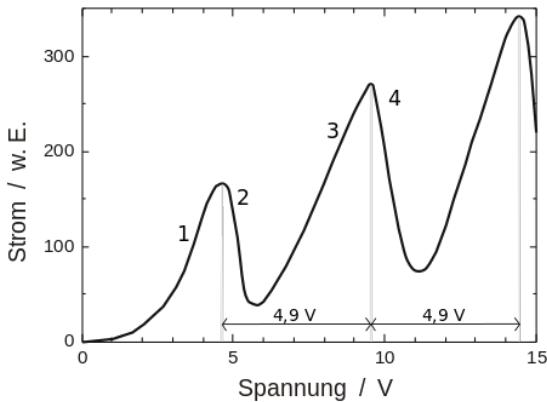


Abbildung 11: Franck-Hertz: Spannungskurve [6]

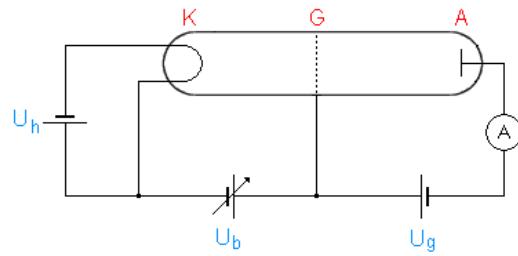


Abbildung 12: Schaltbild Franck Hertz Versuche [6]

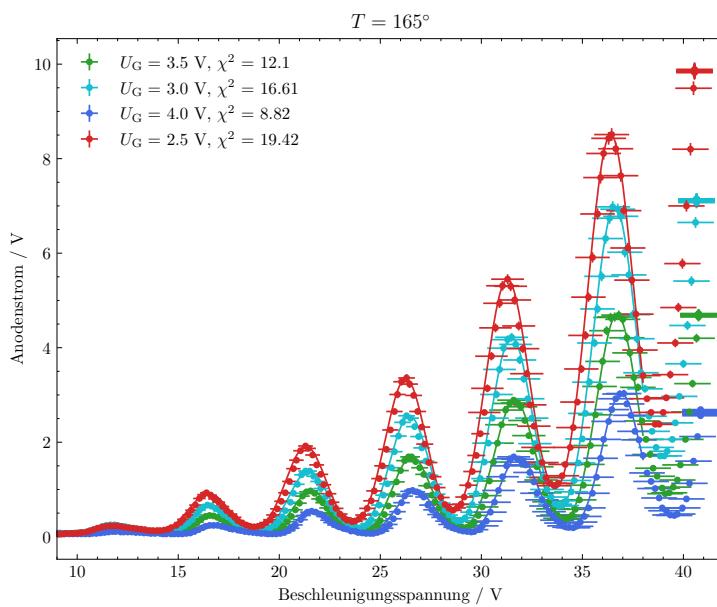


Abbildung 13: Spannungskurve in Abhängigkeit der Gegenspannung bei 165°C

3.2.1. Abhängigkeit der Gegenspannung

Die Messdaten der Spannungskurven bei variabler Gegenspannung sind in Abb. 13 grafisch dargestellt. An die Daten können Gauß-Kurven angepasst werden. Die Parameter der Anpassung sind in Tabelle 3 aufgezeigt. Das χ^2 für die Anpassungen ist dabei eine Größenordnung zu hoch, da aber diese Maß der Güte nur die Fehler der y-Achse betrachtet und hier die Fehler in x-Richtung deutlich überwiegen, kann die Güte nicht die Anpassung richtig einschätzen. Visuell kann behauptet werden, dass die Messdaten hier sehr gut beschrieben werden.

Zu Sehen ist, dass für größere Gegenspannungen die Maxima kleiner werden und leicht zu höheren Spannungen verschoben werden. Dies entspricht der Erwartung, dass bei höheren Gegenspannungen weniger Elektronen in den Bereich hinter das Gitter driften können.

Die Breite der Kurven nimmt dabei leicht ab, was jedoch im Fehlerbereich liegt.

3.2.2. Abhängigkeit der Temperatur

Die Messdaten der Spannungskurven bei Variation der Temperatur sind in Abb. 15 grafisch dargestellt und die Anpassparameter tabellarisch in Tabelle 4. Die Güte der Anpassungskurven ist vergleichbar wie in Abschnitt 3.2.1. Auch hier ist erkennbar, dass bei steigender Temperatur die Maxima leicht zu höheren Spannungen hin verschoben werden mit gedämpften Amplituden und leicht erhöhten Breiten. Nach [5]

ist die Temperatur durch die Relation

$$\log p = 10,55 - \frac{3333}{T} - 0,85 \log T$$

mit dem Druck korreliert. Diese Korrelation ist in Abb. 14 dargestellt. Wie zu erkennen ist, variiert in dem Bereich über der Raumtemperatur der Druck stark. Mit höherem Druck nimm ebenso die Anzahl der Stöße zu, weshalb weniger Elektronen die Gegenspannung überwinden können und dadurch die Amplitude der Kurven sinkt. Die Driftgeschwindigkeit der Elektronen ist antiproportional zur freien Weglänge, weshalb bei erhöhter Temperatur eine höhere Beschleunigungsspannung zur Stoßanregung benötigt wird. Dies erklärt auch die leichte Verschiebung der Maxima. Zu Erkennen ist ebenfalls, dass für die ersten vier Maxima die Breite leicht zunimmt (bei dem ersten ist die Zunahme wieder sehr stark), für die letzten Beiden jedoch konstant bleibt. Eine offensichtliche Erklärung hierfür lässt sich nicht eindeutig finden. Es besteht die Möglichkeit, dass für zu kleine Spannungen die Energie der Elektronen sich in dem Bereich befindet, wo nach Abb. 10 die Wirkungsquerschnitte der zwei niedrigsten Übergänge ähnlich groß sind, weshalb sich hier die Kurven der Anregung überlagern.

Die Energien der Übergänge sind in Tabelle 4 aufgetragen mit dem Mittelwert in der letzten Spalte. Zu Erkennen ist dabei, dass bei der kleinsten Temperatur noch eine Energie von 4,8(3) eV gemessen wurde, bei höheren Temperaturen sinkt diese auf 4,6(3) eV ab. Dies lässt sich mit Abb. 10 erklären. Bei zu hohen Temperaturen wird die freie Weglänge der Elektronen so stark begrenzt, dass nur noch das niedrigste Energieniveau angeregt werden kann. Bei zu kleinen Temperaturen würde hingegen der Übergang $6^1S_0 \rightarrow 6^1P_1$ überwiegen. Der Bereich, in dem der Streuquerschnitt des hier untersuchten Übergangs überwiegt, ist klein, weshalb das Temperaturintervall ebenso klein gewählt werden musste.

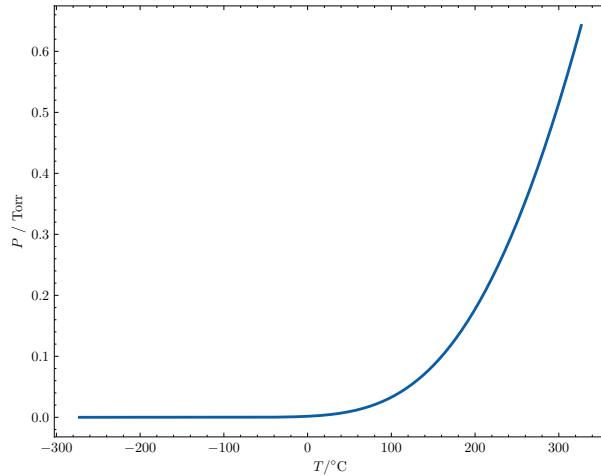


Abbildung 14: Temperaturabhängigkeit des Drucks

Tabelle 3: Anpassparameter der Spannungskurve für verschiedene Gegenspannungen

Maximum	2,5 V		3,0 V		3,5 V		4,0 V	
	x_0 / V	σ / V						
1	11,97(3)	1,35(3)	11,96(3)	1,28(3)	12,10(4)	1,49(5)	12,17(7)	1,84(11)
2	16,52(3)	1,031(16)	16,64(3)	1,00(2)	16,81(4)	0,98(3)	17,04(5)	1,01(4)
3	21,32(3)	1,023(16)	21,47(3)	0,999(18)	21,61(4)	0,96(3)	21,77(4)	0,96(3)
4	26,26(3)	1,031(19)	26,45(3)	0,995(19)	26,56(4)	0,97(3)	26,74(5)	0,97(3)
5	31,29(5)	1,10(3)	31,50(6)	1,04(4)	31,66(7)	1,02(4)	31,85(8)	0,97(5)
6	36,40(7)	1,15(6)	36,61(9)	1,09(6)	36,72(11)	1,03(7)	36,92(13)	0,97(9)

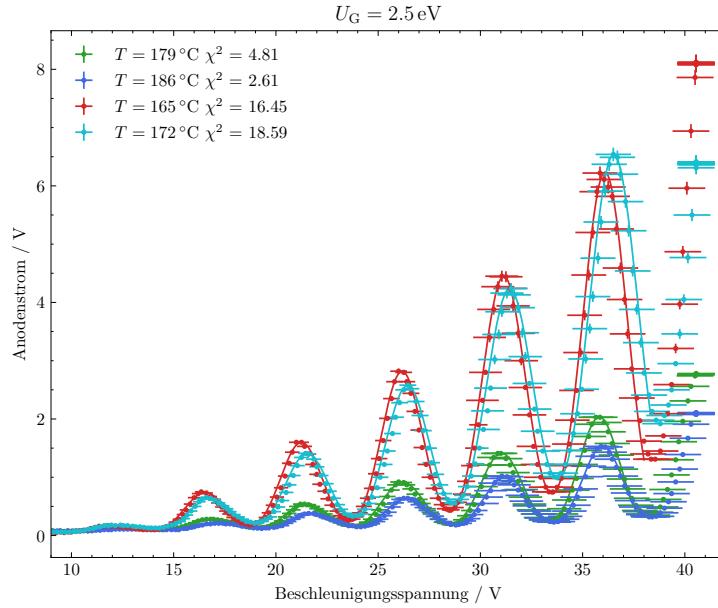


Abbildung 15: Spannungskurve in Abhängigkeit der Temperatur bei einer Gegenspannung von 2,5 V

Tabelle 4: Anpassparameter der Spannungskurve für verschiedene Temperaturen

	165 °C		172 °C		179 °C		186 °C	
Maximum	x_0 / V	σ / V						
1	12,00(3)	1,43(4)	12,33(4)	1,57(4)	12,42(6)	1,99(8)	12,79(12)	3,0(3)
2	16,55(3)	1,023(16)	16,82(3)	1,109(18)	17,05(3)	1,21(3)	17,48(4)	1,21(5)
3	21,24(3)	1,030(14)	21,53(3)	1,094(16)	21,51(3)	1,15(2)	21,80(3)	1,25(3)
4	26,17(3)	1,021(16)	26,43(3)	1,083(16)	26,21(3)	1,085(17)	26,45(3)	1,16(2)
5	31,15(5)	1,06(3)	31,43(5)	1,14(3)	31,04(5)	1,06(3)	31,24(4)	1,11(3)
6	36,09(6)	1,08(4)	36,52(7)	1,19(5)	35,82(6)	1,01(5)	35,98(7)	1,03(5)

Tabelle 5: Übergangsenergien bei verschiedenen Gegenspannungen in eV

Maximum	2,5 V	3,0 V	3,5 V	4,0 V
1	4,55(4)	4,68(4)	4,71(5)	4,88(9)
2	4,80(4)	4,83(4)	4,79(5)	4,73(6)
3	4,94(4)	4,98(5)	4,96(6)	4,97(6)
4	5,03(6)	5,05(7)	5,10(8)	5,11(9)
5	5,12(9)	5,12(11)	5,06(13)	5,07(15)
$\langle E \rangle$	4,9(3)	4,9(3)	4,9(3)	5,0(3)

Tabelle 6: Übergangsenergien bei verschiedenen Temperaturen in eV

Maximum	165 °C	172 °C	179 °C	186 °C
1	4,54(4)	4,50(4)	4,63(6)	4,69(13)
2	4,70(3)	4,70(4)	4,46(4)	4,32(4)
3	4,93(4)	4,91(4)	4,70(4)	4,65(4)
4	4,98(5)	5,00(5)	4,82(5)	4,79(5)
5	4,95(8)	5,09(8)	4,78(8)	4,73(8)
$\langle E \rangle$	4,8(3)	4,8(3)	4,7(2)	4,6(3)

4. Fazit

A. Anhang

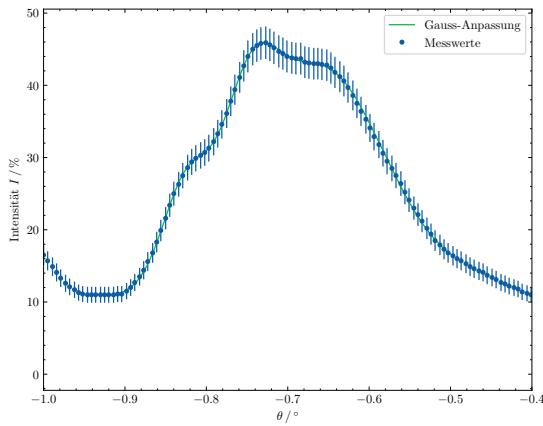


Abbildung 16: Aufspaltung der Maxima bei 4,7 Å

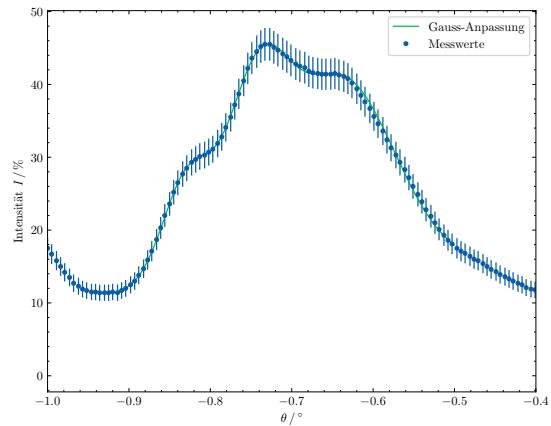


Abbildung 17: Aufspaltung der Maxima bei 5,2 Å

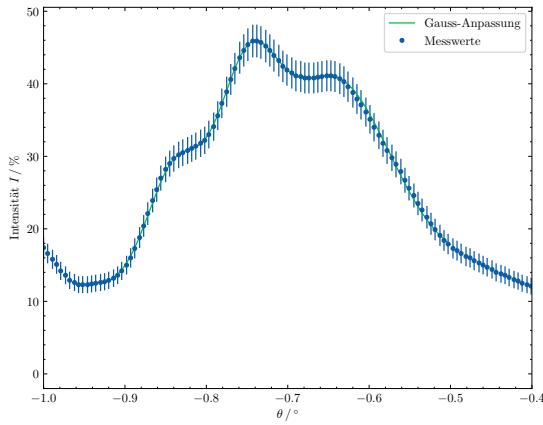


Abbildung 18: Aufspaltung der Maxima bei 5,7 Å

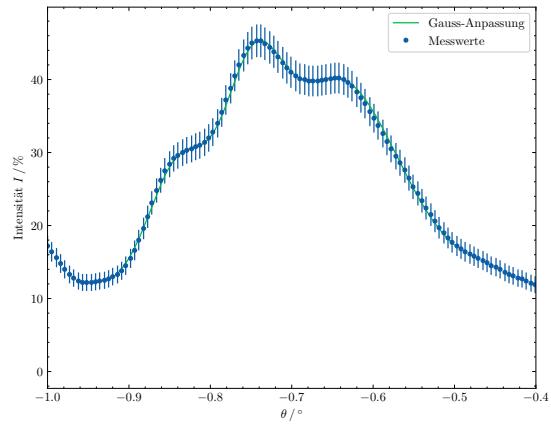


Abbildung 19: Aufspaltung der Maxima bei 6,0 Å

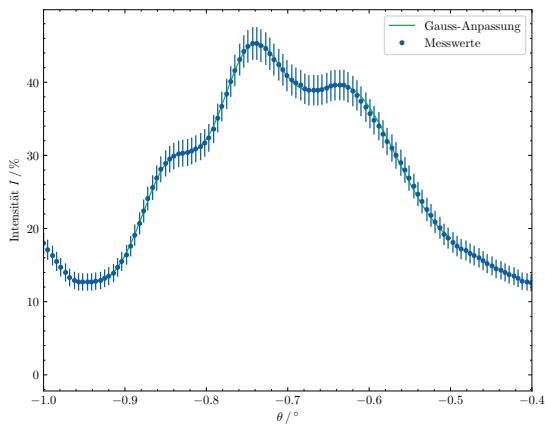


Abbildung 20: Aufspaltung der Maxima bei 6,3 Å

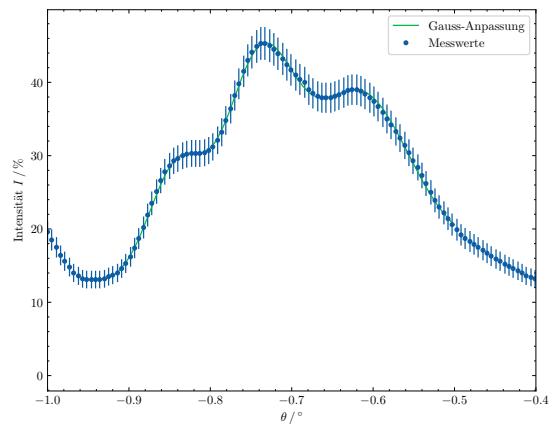


Abbildung 21: Aufspaltung der Maxima bei 6,7 Å

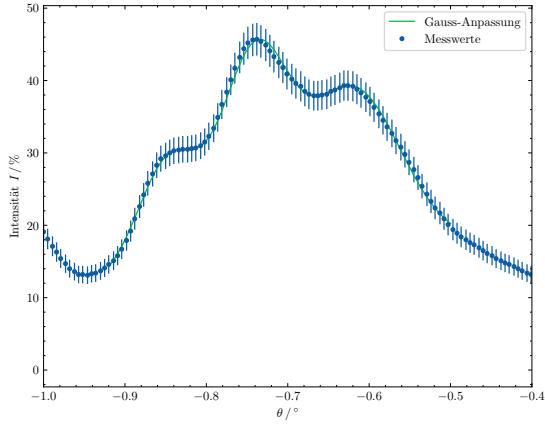


Abbildung 22: Aufspaltung der Maxima bei 7,0 Å

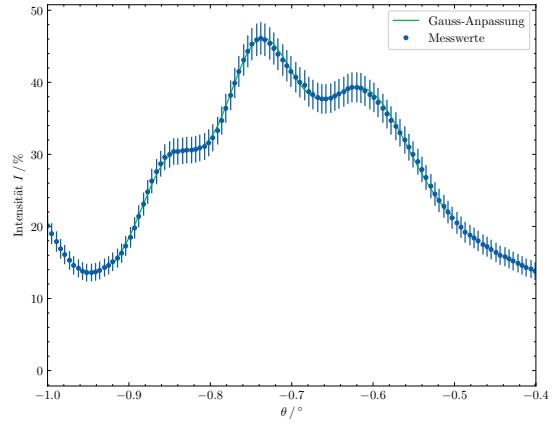


Abbildung 23: Aufspaltung der Maxima bei 7,3 Å

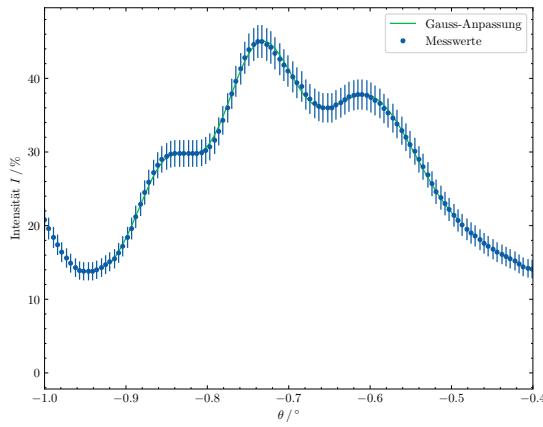


Abbildung 24: Aufspaltung der Maxima bei 7,8 Å

Literaturverzeichnis

- [1] Jun John Sakurai. *Modern quantum mechanics; rev. ed.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1994. URL: <https://cds.cern.ch/record/1167961>.
- [2] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper; 3rd ed.* Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer, 2005. URL: <https://cds.cern.ch/record/829119>.
- [3] LD Didactic. *LD Handblätter Physik P6.2.7*. https://web.archive.org/web/20160804010716/http://www.ld-didactic.de/literatur/hb/d/p6/p6273_d.pdf. Zugriff: 17.12.2023.
- [4] Wikipedia. *Reduced chi-squared statistic — Wikipedia, -Die freie Enzyklopädie*. [Online; Datum: 21.11.2023]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Reduced_chi-squared_statistic.
- [5] Physikalisches Institut der Universität Bonn. *Physikalisches Praktikum Teil IV: Atome, Moleküle, Festkörper. Versuchsbeschreibungen*. 2023.
- [6] Wikipedia. *Franck-Hertz-Versuch — Wikipedia, -Die freie Enzyklopädie*. [Online; Datum: 19.12.2023]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Franck-Hertz-Versuch>.