

# **Versuchsbericht**

## **P402 Quantelung von Energie**

Gabriel Remiszewski und Christian Fischer

durchgeführt am 18/19.10.2023

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums</b>	<b>2</b>
2.1	Versuchsaufbau . . . . .	2
2.2	Messung . . . . .	2
2.3	Auswertung . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Balmer-Serie</b>	<b>8</b>
3.1	Versuchsaufbau und -durchführung . . . . .	8
3.2	Messung . . . . .	9
3.3	Auswertung . . . . .	11
3.3.1	Bestimmung der Gitterkonstanten . . . . .	11
3.3.2	Bestimmung der Balmerlinien . . . . .	13
3.3.3	Bestimmung der Rydberg-Konstanten . . . . .	15
3.3.4	Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums . . . . .	16
3.3.5	Weitere Überlegungen . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Fazit</b>	<b>19</b>
<b>A</b>	<b>Messwerte: Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums</b>	<b>21</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>24</b>

# 1. Einleitung

In diesem Versuch wird das Plancksche Wirkungsquantum mithilfe des Photoeffekts sowie mit der Balmer-Serie atomarer Übergänge des Wasserstoff bestimmt.

Im ersten Versuchsteil wird eine Photozelle mit Licht unterschiedlicher Frequenzen bestrahlt, wo durch den Photoeffekt Elektronen aus einer Kathode befreit werden und dies durch einen elektrischen Strom nachweisbar gemacht wird. Aus der Beziehung  $E = h\nu$  für Photonen kann das Wirkungsquantum bestimmt werden.

Im zweiten Versuchsteil wird das Lichtspektrum einer Wasserstofflampe mit einem Reflexionsgitter spektroskopisch untersucht, welches durch an den Atomkern gebundene und angeregte Elektronen entsteht, die ihre Energie in Form von Photonen abgeben und in einen Zustand der Hauptquantenzahl 2 zerfallen. Da in dem Gas zusätzlich Deuterium vorzufinden ist, kann die Isotopieaufspaltung, die zur Hyperfeinstruktur zählt, der Balmer-Serie untersucht werden.

## 2. Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums

### 2.1. Versuchsaufbau

Um mithilfe des Photoeffekts[2, S.78-80] das Plancksche Wirkungsquantum  $h$  zu bestimmen, wird der in Abb. 1 skizzierte Aufbau auf einer Optikbank befestigt. Als Lichtquelle dient eine Quecksilberdampf Lampe, deren Licht nach Durchgang durch eine Blende, mit der die Intensität des Lichts eingestellt werden kann, mit einer Linse der Brennweite  $f = 100\text{ mm}$  auf die Kalium-Kathode der Photozelle scharf abgebildet wird. Die einzelnen Wellenlängen des Hg-Spektrums werden mithilfe eines Filtrerrads unmittelbar vor der Photozelle selektiert, wobei zwischen beiden Elementen ein Rohr angebracht wird, welches Streulicht begrenzen soll. Dabei wird das Lichtbündel mit der Blende vor der Lampe sowie der Blende vor dem Filtrerrad so eingestellt, dass das Licht die Kathode beleuchtet, jedoch nicht den Anodenring oder die schwarze Fläche an der Öffnung der Schutzkappe der Photozelle.

Zur Spannungserzeugung steht ein 12 V Netzteil zur Verfügung. Beide schwarzen Kabel der Anode werden an den negativen Pol des Netzteils angeschlossen und das BNC-Kabel der Kathode mit dem zur Verfügung stehenden Messverstärker verbunden. Der andere Anschluss des Netzteils wird an die Masse des Verstärkers angeschlossen. Der Photostrom wird mit einem Digitalmultimeter gemessen, welches in Reihe hinter den Verstärker geschaltet wird. Die angeschlossene Grenzspannung wird mit einem parallel zur Spannungsquelle geschalteten Multimeter gemessen.

Es ist möglich, dass ohne Photostrom der Verstärker trotzdem einen Strom ausgibt. Mithilfe eines Tasters lässt sich die Schaltung kurzschließen, wodurch kein Strom am Verstärker ankommt und damit an einem Regler der Ausgangsstrom in die Nulllage kalibriert werden kann.

Da die vom Netzteil zu Verfügung stehenden 12 V nicht vollständig in der Durchführung ausgeschöpft werden, wird mit zwei geeigneten Widerständen ein Spannungsteiler vorgeschaltet. Wird über dem Widerstand  $R_2$  die Spannung abgegriffen, so gilt für diese die Spannungsteilergleichung

$$U = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (1)$$

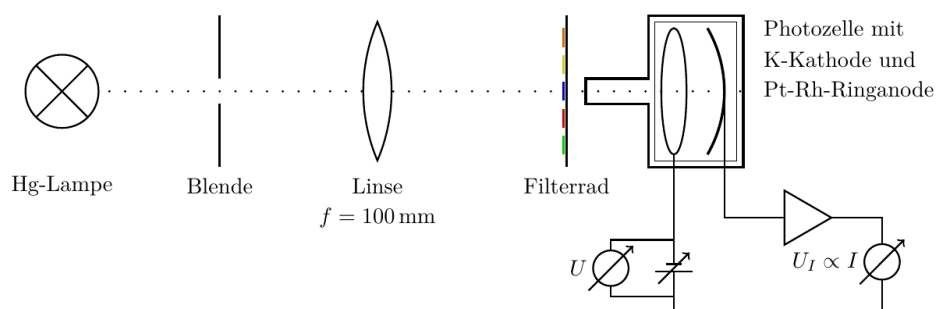


Abbildung 1: Versuchsaufbau: Photoelektrische Bestimmung des planckschen Wirkungsquantum. [5, S.19]

### 2.2. Messung

Im Folgenden wird mit  $U$  die am Spannungsteiler abgegriffene Spannung bezeichnet und der Photostrom mit  $I$ . Der Messverstärker wandelt Ströme von 1 nA in 1 V um, weshalb zwar mit dem Multimeter eine Spannung gemessen wird, diese trotzdem mit einem  $I$  bezeichnet wird. Der Strom entsteht, wenn energiereiche Photonen auf die Kathode treffen und Elektronen befreien, die von der Anode wieder abgefangen werden.

Beide Elektroden besitzen verschiedene Austrittsarbeiten, weshalb sich die Fermi-Niveaus dieser unterscheiden. Bei leitender Verbindung gleichen sich die Niveaus an, wodurch ein elektrisches Feld zwischen

den Elektroden aufgebaut wird [8]. Die Energiebilanz der eintreffenden Elektronen ist

$$E_{\text{kin}} = h\nu - (W_A - W_K) - W_K = h\nu - W_A$$

wobei das Subskript K für die Kathode, A für die Anode und  $\nu$  für die Lichtfrequenz steht. Mit dem Netzteil wird eine Gegenspannung eingestellt und so lange erhöht, bis der Anodenstrom verschwindet. In diesem Falle verschwindet die kinetische Energie der Elektronen und es ergibt sich bei der Grenzspannung  $U_0$  die Gleichung

$$eU_0 = h\nu - W_A \quad (2)$$

mit dem Planckschen Wirkungsquantum[2, S.75]

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

auf drei Nachkommastellen gerundet sowie der Elementarladung[2, S.29]

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

ebenfalls auf drei Nachkommastellen genau.

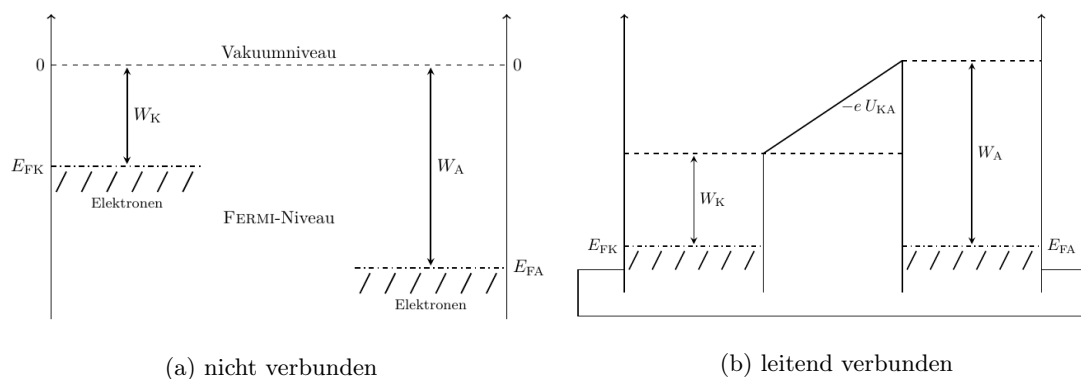


Abbildung 2: Kontaktpotential zwischen zwei Elektroden[5]

Bei dem energiereichsten Licht der Wellenlänge 365 nm wird eine Grenzspannung von unter 2,0 V benötigt, weshalb mit den vorhandenen Widerständen von  $100 \Omega$  und  $333 \Omega$  nach Gleichung (1) eine maximale Spannung von

$$U_{\text{max}} = 2,77 \text{ V}$$

eingestellt wird.

Aufgrund dessen, dass ein minimaler Anodenstrom  $I_0$  auch vorhanden ist, wo Elektronen aus der Anode in die Kathode eintreffen, wird die Messung verfälscht. Um die Grenzspannung bestimmen zu können, wird für jede Wellenlänge eine Kennlinie im gesamten Gegenspannungsbereich gemessen, angefangen bei 0 V. Da zusätzliche Intensitätsfluktuationen auftreten können, wird jede Kennlinie zweimal gemessen.

Für die Wellenlänge 365 nm wird die Messung bei einer erhöhten Intensität erneut gemessen, um den Einfluss der Lichtintensität auf die Kennlinie zu untersuchen.

## 2.3. Auswertung

Aus den Kennlinien der Photozelle lässt sich die Grenzspannung bestimmen. In Tabelle 1 sind die Messreihen bei einem Filter bei 365 nm dargestellt (die restlichen Messdaten sind im Anhang A zu finden). Die Spannungsmessung besitzt lediglich einen Ablesefehler der letzten angezeigten Ziffer, weshalb der Fehler jedes Messwertes bei  $\Delta U = 1 \text{ mV}$  liegt. Die Strommessung war teilweise starken Fluktuationen ausgesetzt, weshalb der Fehler  $\Delta I$  individuell an diese Schwankung angepasst wird. Für die meisten Messwerte bestimmt somit der Fehler des Photostroms die größte Unsicherheit, da der zur Messgröße relative Fehler deutlich größer ausfällt.

Im Anlaufgebiet der Photozelle wächst der Strom quadratisch mit der Gegenspannung an [5, S.21], weshalb für die Wurzel dessen ein linearer Zusammenhang der Form

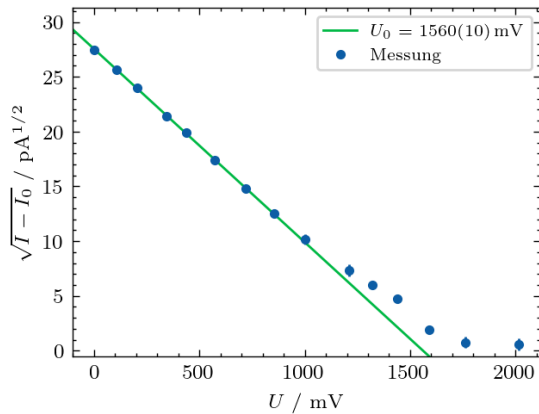
$$\sqrt{I - I_0} = m \cdot U + b$$

erwartet wird, wobei  $I_0$  bei maximal eingestellter Gegenspannung abgelesen wird. Nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung[7] gilt für den dazugehörigen Fehler

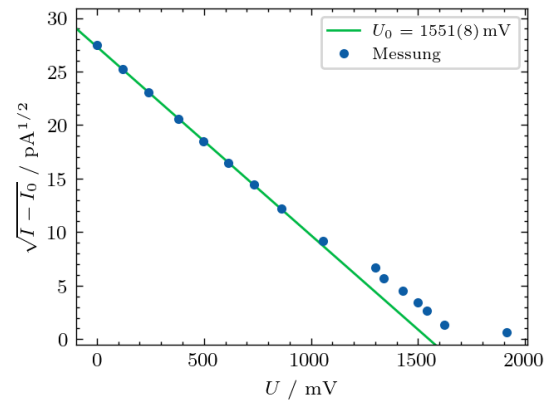
$$\Delta\sqrt{I - I_0} = \sqrt{\left(\frac{\Delta I}{2\sqrt{I - I_0}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I_0}{2\sqrt{I - I_0}}\right)^2}.$$

Tabelle 1: Kennlinie 365 nm

erste Messung		zweite Messung	
$U/\text{mV}$	$I/\text{pA}$	$U/\text{mV}$	$I/\text{pA}$
0	732(3)	0	732(4)
107	638(4)	120	613(4)
203	556(2)	242	510(3)
343	436(5)	381	402(2)
439	375(5)	497	321(1)
572	282(2)	615	250(1)
721	198(2)	733	186(1)
853	135(5)	861	127(1)
1003	82(5)	1057	62,5(5)
1210	33(4)	1299	22,5(5)
1322	15(2)	1340	10,5(5)
1440	1,1(5)	1430	-1,2(4)
1589	-17,4(3)	1498	-10,2(5)
1761	-20,6(4)	1624	-20,0(5)
2016	-20,9(3)	1542	-14,9(3)
2782	-21,2(4)	1914	-21,5(2)
		2783	-21,9(2)



(a) erste Messung



(b) zweite Messung

Abbildung 3: Bestimmung der Grenzspannung 365 nm

Für die erste Wellenlänge sind die Kennlinien in Abb. 3 mit einer Ausgleichsgeraden dargestellt, wobei zur Bestimmung der Geraden nur Werte in dem linearen Bereich in Betracht gezogen wurden (weitere Kennlinien befinden sich im Anhang A Abb. 11 bis 14). Aus der Nullstelle der Geraden wird die Grenzspannung bestimmt mit

$$U_0 = -\frac{b}{m}, \quad \Delta U_0 = \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{m}\right)^2 + \left(\frac{b\Delta m}{m^2}\right)^2}.$$

Tabelle 2: Bestimmung der Grenzspannungen

$\lambda/\text{nm}$	$\chi^2_1/\text{dof}$	$\chi^2_2/\text{dof}$	$U_{1,0}/\text{mV}$	$U_{2,0}/\text{mV}$	$U_0/\text{mV}$
365	0,32	0,36	1560(10)	1551(8)	1556(15)
405	0,07	14,71	1190(6)	1179(18)	1185(17)
436	0,60	0,06	978(14)	990(7)	984(17)
546	0,22	0,09	408(4)	410(10)	408(8)
578	0,28	0,16	372(8)	370(9)	370(10)

Die Ausgleichsgeraden wurden mit dem Modul `odr` des Python-Pakets SciPy[4] ausgewertet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 festgehalten und beinhalten für jede Wellenlänge die Güte beider Ausgleichsgeraden und die daraus berechneten Grenzspannungen sowie den Mittelwert beider Spannungen.

Die Güte der Anpassungsgeraden wird üblicherweise mit der reduzierten Chi-Quadrat-Verteilung[9] überprüft, also mit  $\chi^2/\text{dof}$ , wobei  $\text{dof}$  für die Freiheitsgrade steht. Ein Wert von 1 ist ideal, ein Wert deutlich kleiner als 1 deutet auf Überanpassung oder auf zu groß geschätzte Unsicherheiten hin, wobei hier Überanpassung kein mögliches Problem darstellt. In Tabelle 2 ist zu beobachten, dass die Werte bei 365 nm sowie die erste Anpassung bei 436 nm bis 578 nm einen Wert von ca. 0,3 aufzeigen. Der Rest liegt im Bereich von 0,1 mit Ausnahme der zweiten Messung beim 405 nm Filter, wo  $\chi^2/\text{dof} = 14,71$  ist. Bis auf diese Ausnahme wurden die Unsicherheiten größer als nötig eingeschätzt. Da jedoch visuell alle Messpunkte auf der Ausgleichsgeraden liegen und die Fehler so klein ausfielen, dass bei den meisten Messpunkten diese nicht in den Abbildungen sichtbar sind, werden die Ausgleichsgeraden als zufriedenstellend bewertet.

Visuell ist die Ausnahme bei 405 nm nicht von den Anderen zu unterscheiden, weshalb die Abweichung damit zu erklären ist, dass die Fehler deutlich zu klein gewählt wurden. Dies lässt sich auch mit einem Blick auf Tabelle 15 bestätigen. Der Fehler des Mittelwerts beider Grenzspannungen pro Wellenlänge beinhaltet nicht nur den Mittelwert der einzelnen Fehler, sondern ebenfalls die statistische Unsicherheit der Spannungen, weshalb die Unsicherheit teilweise größer ausfällt.

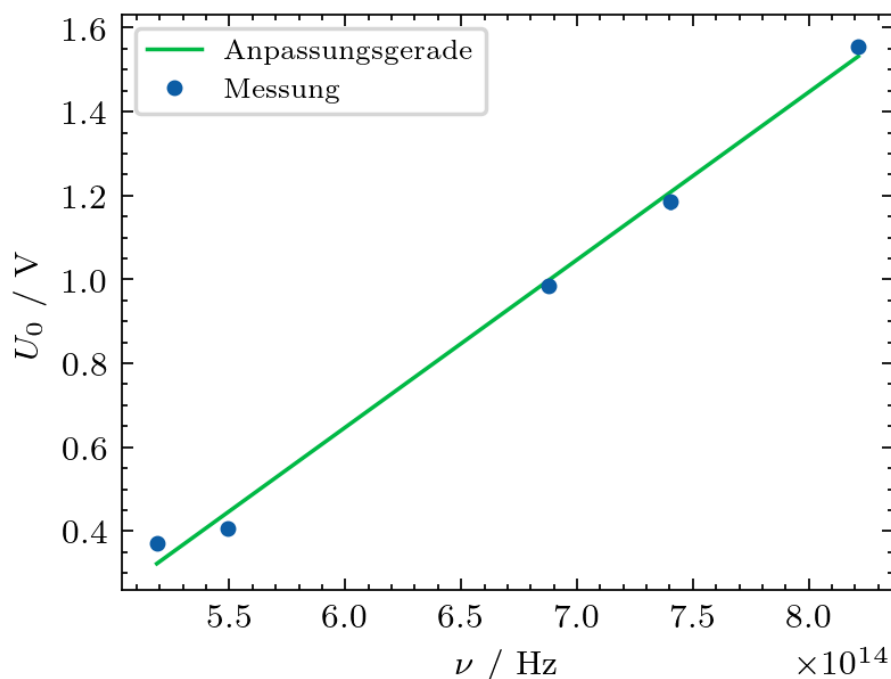


Abbildung 4: Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums

Die Grenzspannungen lassen sich jetzt gegen die Lichtfrequenz auftragen, die mit der Relation  $\nu = c/\lambda$  berechnet wird. Aus Gleichung (2) lässt sich ablesen, dass aus der Steigung  $m$  das Plancksche Wirkungs-

quantum bestimmt werden kann mit

$$h = e \cdot m, \quad \Delta h = e \cdot \Delta m$$

und die Austrittsarbeit der Anode aus dem Achsenabschnitt  $b$  mit

$$W_A = -e \cdot b, \quad -e \cdot \Delta b.$$

Die Anpassungsgerade hat eine Güte  $\chi^2/\text{dof} = 20,05$  und ist damit deutlich größer als 1. Dies ist zu kleinen Fehlern geschuldet, da visuell bewertet die Messpunkte nicht auf einer einheitlichen Linie liegen und insbesondere die Spannungen der kleinsten zwei Frequenzen eine im Vergleich hohe Abweichung zur Anpassungsgeraden aufweisen, was zu erwarten war, da die Intensität dieser Messung gering war mit starken Fluktuationen. Aus diesem Grund waren diese Messungen am anfälligsten für Fehler, was sich hier widerspiegelt.

Die bestimmten Parameter sind

$$m = 4,00(17) \cdot 10^{-15} \text{ V s}, \quad b = -1,75(11) \text{ eV}$$

und die sich daraus ergebenden Konstanten

$$h = 6,4(3) \cdot 10^{-34} \text{ J s}, \quad W_A = 1,75(11) \text{ eV}.$$

Der Literaturwert des Planckschen Wirkungsquantums  $h = 6,626 \text{ J s}$  liegt im  $1\sigma$ -Bereich der Messung, welche einen unter 5%-igen Fehler aufweist. Dieses Ergebnis ist damit im Rahmen dieses Versuchs zufriedenstellend. Im Vergleich zu den Messfehlern der Kennlinie ist jedoch die Unsicherheit des Wirkungsquantums groß ausgefallen. Wie schon erwähnt ist der Grund hierfür die Abweichungen der Grenzspannungen für kleinere Frequenzen. Dies ist mit hoher Wahrscheinlichkeit der Versuchsdurchführung geschuldet, da für diese Frequenzen eine vergleichbar geringe Intensität gemessen wurde. Für  $578 \text{ nm}$  lag die maximale Messung bei  $85(5) \text{ pA}$  und die Grenzspannung wurde schon bei etwa  $370(10) \text{ mV}$  erreicht, obwohl am Spannungsteiler ein Maximum von  $2,77 \text{ V}$  eingestellt war. Um die Messung empfindlicher einzustellen, hätte es sich angeboten, mit einer Reihenschaltung von Widerständen die maximale Spannung weiter zu minimieren.

Zur Anodenaustrittsarbeit einer Platin-Rhodium-Elektrode konnte kein Literaturwert zum Vergleich herbeigezogen werden, im Vergleich zu anderen Werten oft genutzter Elemente[6] ist dieser Wert in der gleichen Größenordnung. Dennoch verwunderlich ist, dass die genutzte Kalium Kathode eine Austrittsarbeit von  $2,25 \text{ eV}$ [6] besitzt und da die Kathode von Prinzip eine geringere Bindungsenergie haben sollte, stellt die Messung einen Widerspruch dazu auf. Eine mögliche Fehlerquelle sei hierbei die Raumtemperatur bei der Durchführung. Die zu messende Energie ist die Austrittsarbeit bei der Annahme, dass sich die Elektronen in der Elektrode im Grundzustand befinden. Dies ist bei Temperaturen  $T > 0 \text{ K}$  nicht der Fall, wodurch bei hohen Temperaturen die Bindungsenergie verringert und das Messergebnis verfälscht wird. Für eine genauere Messung der Austrittsarbeit ist eine Abkühlung der Photozelle unumgänglich, was im Rahmen dieses Versuchs nicht möglich war.



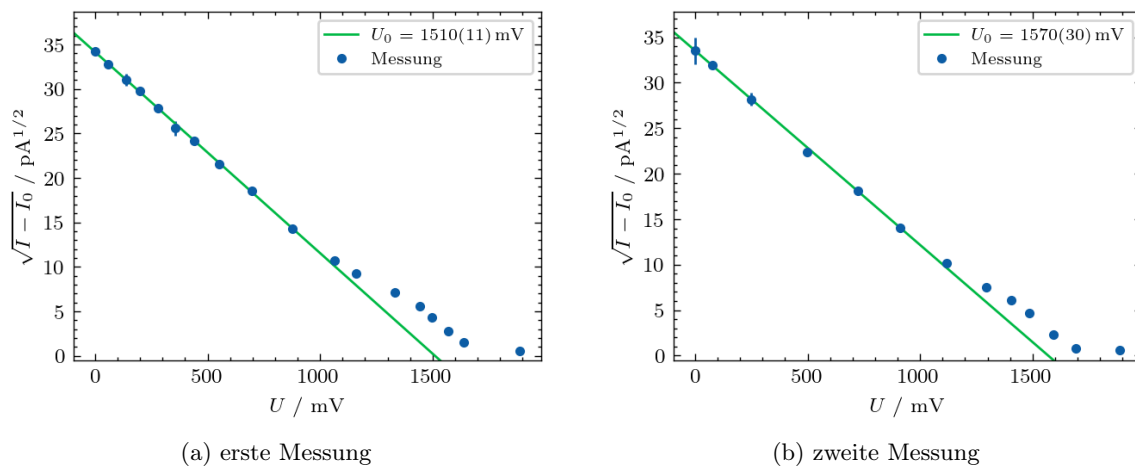


Abbildung 5: Bestimmung der Grenzspannung 365 nm bei hoher Intensität

Tabelle 3: Kennlinie 365 nm hohe Intensität

erste Messung		zweite Messung	
$U/\text{mV}$	$I/\text{pA}$	$U/\text{mV}$	$I/\text{pA}$
0	1150(10)	0	1100(50)
57	1050(10)	76	1000(10)
136	940(20)	249	770(20)
199	860(10)	497	480(10)
280	750(10)	724	305(2)
357	630(20)	911	174(4)
440	560(10)	1118	81(2)
550	440(10)	1293	34(2)
697	320(5)	1406	15(1)
878	180(5)	1487	-1,0(5)
1066	92(1)	1592	-17,4(2)
1159	62(4)	1692	-21,9(1)
1331	27(3)	1888	-22,2(1)
1444	7,5(5)	2783	-22,6(2)
1497	-4,5(5)		
1568	-15,5(1)		
1640	-20,8(2)		
1888	-22,9(1)		
2783	-23,2(1)		

Als Letztes wird der Intensitätseinfluss auf die Kennlinie bei 365 nm untersucht. Die Linien bei erhöhter Lichtintensität sind in Abb. 5 abgebildet. Da bei höherer Lichteinstrahlung mehr Photonen auf die Kathode treffen, muss der Photostrom ansteigen, da aber die Energie der einzelnen Teilchen gleich bleibt, darf sich die Grenzspannung nicht verändern.

Dieses Verhalten ist auch hier zu beobachten. Bei Vergleich von Tabelle 1 mit Abb. 5 wird ersichtlich, dass bei geringerer Intensität ein maximaler Strom von etwa 730 pA gemessen wurde und bei erhöhter Lichteinstrahlung 1100 pA (siehe Tabelle 3).

Die Ausgleichsgeraden haben eine Güte von  $\chi^2_1/\text{dof} = 0,14$  und  $\chi^2_2/\text{dof} = 0,36$  und sind damit vergleichbar gut wie für die restlichen Kennlinien (siehe Tabelle 2). Beide besitzen eine gemittelte Grenzspannung von 1540(43) mV, was verglichen mit 1556(15) mV aus Tabelle 2 im  $1\sigma$ -Fehlerbereich liegt. Damit kann die Schlussfolgerung getroffen werden, dass die Grenzspannung bei fester Wellenlänge des einstrahlenden Lichts nicht von der Intensität abhängt.

### 3. Balmer-Serie

#### 3.1. Versuchsaufbau und -durchführung

In diesem Versuchsteil wird die Balmer-Serie des Wasserstoffs samt Isotopieaufspaltung mithilfe eines Reflexionsgitters ausgemessen. Dafür werden zunächst die Optikelemente nach Abb. 6 aufgebaut und auf eine Höhe ausgerichtet.

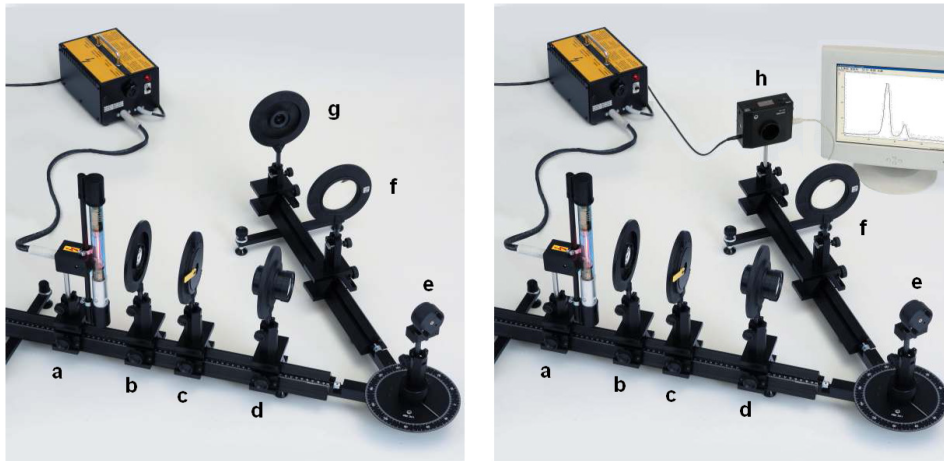


Abbildung 6: Versuchsaufbau zur Vermessung der Balmer-Serie mit Okular (links) und mit CCD-Kamera (rechts) [5]

Die verwendeten Optikelemente sind:

- a Balmer-Lampe, deuteriert
- b Linse,  $f = 50 \text{ mm}$
- c Verstellbarer Spalt, schräge Flanken zur Lichtquelle
- d Projektionsobjektiv,  $f = 150 \text{ mm}$
- e Holographisches Gitter
- f Linse,  $f = 300 \text{ mm}$
- g Okular mit Strichskala
- h CCD-Kamera

Für eine erfolgreiche Durchführung ist eine möglichst exakte Justierung des Versuchsaufbaus notwendig. Dafür wird zuerst die Hg-Spektrallampe eingesetzt, welche dann mithilfe der Linse mit der Brennweite  $f = 50 \text{ mm}$  auf den Spalt abgebildet wird. Anschließend wird das Projektionsobjektiv im Brennweitenabstand  $f = 150 \text{ mm}$  hinter dem Spalt positioniert, sodass hinter dem Projektionsobjektiv paralleles Licht für das Reflexionsgitter zur Verfügung steht.

Die Säule des Drehgelenks wird so gedreht, dass der Zeiger auf  $0^\circ$  der umliegenden Skala weist. Nachdem die Säule mit einer Rändelschraube fixiert ist, wird das Reflexionsgitter senkrecht eingesetzt, sodass Licht auf den Spalt reflektiert wird. Damit für das Reflexionsgitter auch tatsächlich paralleles Licht zur Verfügung steht, muss der Spalt ins Unendliche abgebildet werden, was durch die vorherige Positionierung des Projektionsobjektivs nicht unbedingt erreicht wird. Daher wird nun das Projektionsobjektiv etwas verschoben, bis ein scharfes Bild des Spaltes neben dem Spalt zu erkennen ist. Dann wird das Gitter so ausgerichtet, dass das Bild des Spaltes genau im Spalt selbst liegt.

Der Winkel der beiden optischen Bänke wird auf  $\omega_B = 140,0(5)^\circ$  eingestellt. Die Unsicherheit wird hier auf  $\delta\omega_B = 0,5^\circ$  abgeschätzt, da der Winkel mindestens bis auf diese Genauigkeit abgelesen werden kann. Diese Einstellung wird für die gesamte Versuchsdurchführung beibehalten. Auf der anderen optischen Bank wird das Okular am Ende der Schiene eingesetzt und so eingestellt, dass die Strichskala

gut ablesbar ist. Abschließend wird die Linse mit der Brennweite  $f = 300 \text{ mm}$  vor das Okular gestellt, sodass dies einem Fernrohr Aufbau entspricht. Bei diesem Versuchsaufbau wird das Reflexionsgitter verwendet, um die diskreten Spektrallinien, aus denen sich das Licht einer Spektrallampe (Hg-Spektrallampe und Balmer-Lampe) zusammensetzt, nebeneinander abzubilden. Das Reflexionsgitter wird mit parallelem Licht bestrahlt, sodass die Gittergleichung für die erste Beugungsordnung

$$\lambda = g(\sin(\alpha) + \sin(\beta)) \quad (3)$$

gilt. So gibt es nämlich für jede Wellenlänge  $\lambda$  bei einem fixierten Einfallswinkel  $\alpha$  einen anderen Ausfallswinkel  $\beta$ , sodass die Spektrallinien nebeneinander beobachtet werden können. Eine detaillierte Herleitung dieser Formel ist in [3] zu finden.

Da der vom Hersteller angegebene Wert für die Gitterkonstante nicht genau ist, wird die Gitterkonstante zunächst mithilfe der Hg-Spektrallampe bestimmt, deren wichtigsten Spektrallinien und zugehörigen Wellenlängen bekannt sind. Für jede dieser Spektrallinien wird das Gitter so gedreht, dass die Linie auf der Strichskala des Okulars zu beobachten ist. Es wird der Winkel des Gitters  $\omega_G$  abgelesen. Der Zusammenhang zwischen den gemessenen Winkeln  $\omega_B$  und  $\omega_G$  und dem Ein- bzw. Ausfallswinkel des Lichtes folgt aus Abb. 7.

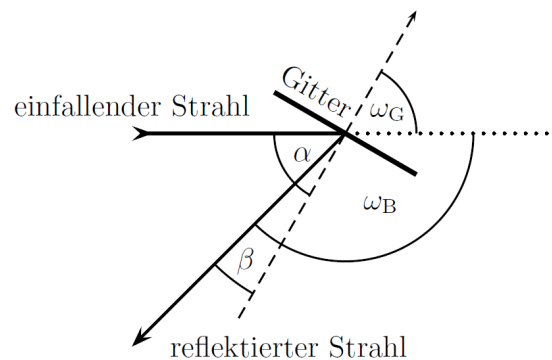


Abbildung 7: Winkel am Aufbau [5]

Aus geometrischen Überlegungen folgen die Relationen:

$$\alpha = \omega_G \quad (4)$$

$$\beta = \omega_G + \omega_B - 180^\circ. \quad (5)$$

Durch die Kenntnis der Wellenlänge einer Linie und die zugehörigen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  kann dann mithilfe der Gittergleichung 3 die Gitterkonstante des verwendeten Reflexionsgitters bestimmt werden. Um anschließend das Spektrum der Balmer-Lampe zu vermessen, wird diese anstelle der Hg-Spektrallampe eingesetzt. Erneut werden die Winkel des Reflexionsgitters für die einzelnen Spektrallinien gemessen. Mithilfe der bereits bestimmten Gitterkonstante können dann die Wellenlängen der einzelnen Spektrallinien der Balmer-Lampe ermittelt werden. Außerdem wird die Isotopieaufspaltung beobachtet, da die Balmer-Lampe mit Dampf aus deuteriertem und normalem Wasserstoff (Verhältnis ca. 1:2) gefüllt ist.

Abschließend wird das Okular durch eine CCD-Kamera ausgetauscht. Die CCD-Kamera wird mit einem Computer verbunden, sodass die Spektrallinien der Balmer-Lampe mit dem Programm „VideoCom-Intensitäten“ aufgezeichnet werden können. Dies eignet sich später zu einer genaueren Bestimmung der Isotopieaufspaltung. Das Programm berechnet aus der Pixelkoordinate  $p$ , die von 0 bis 2047 läuft, den Winkel  $\beta$  über

$$\beta = \arctan\left(\frac{(1024 - p) \cdot 0,014 \text{ mm}}{f}\right).$$

### 3.2. Messung

Zuerst wird der Winkel  $\omega_G$  (bei fixiertem Winkel  $\omega_B = 140,0(5)^\circ$ ) für die verschiedenen Spektrallinien der Hg-Spektrallampe gemessen. Dafür wird die Säule mit dem eingesetzten Reflexionsgitter gedreht, bis

die erste sichtbare Linie zu beobachten ist. Um die Linie aufzufinden, wird der Spalt erst etwas weiter geöffnet und anschließend wieder verkleinert. Das Projektionsobjektiv muss für jede Spektrallinie leicht verschoben werden, sodass diese scharf zu erkennen ist. Bei der Messung ergibt sich die Schwierigkeit, dass manche Spektrallinien so nah aneinander liegen, dass für diese der gleiche Winkel  $\omega_G$  abgelesen wird. Um dennoch eine Winkeldifferenz für diese Linien messen zu können, wird zusätzlich die Strichskala des Okulars benutzt. Diese Strichskala hat eine Länge von 10 mm mit einer Teilung von 0,1 mm. Es wird stets so vorgegangen, dass der Winkel  $\omega_{G,\text{gemessen}}$  für eine bestimmte Spektrallampe auf der Kreisskala exakt eingestellt wird. Um später aber den tatsächlichen Winkel für diese Spektrallinie zu erhalten, wird zusätzlich über das Okular die Abweichung  $d$  von der Mitte der Strichskala aus gemessen (später folgt die entsprechende Winkelabweichung über die Brennweite der Linse vor dem Okular).

In der Auswertung werden diese Messgrößen miteinander verrechnet, um möglichst genaue Werte für den Ein- und Ausfallswinkel zu erhalten. Auch wenn beide Messgrößen einen eigenen Ablesefehler ( $\delta\omega_{G,\text{gemessen}}$  und  $\delta d$ ) haben, wird später in der Auswertung die Unsicherheit des tatsächlichen Gitterwinkels zu  $\delta\omega_G = 0,5^\circ$  abgeschätzt, da die Unsicherheit der resultierenden Winkelabweichung, welche sich aus  $d$  berechnet, extrem klein ist und dann schon in der festgesetzten Unsicherheit  $\delta\omega_G = 0,5^\circ$  enthalten ist. Ohnehin gibt es hier eine systematische Unsicherheit bei der Messung von  $\omega_{G,\text{gemessen}}$ , da das Gitter nicht perfekt in die Halterung platziert werden kann. Allerdings gibt es hier keine Möglichkeit, diese systematische Unsicherheit abzuschätzen. Aber auch diese ist gegenüber  $0,5^\circ$  klein, weshalb die spätere Fehlerabschätzung  $\delta\omega_G = 0,5^\circ$  sinnvoll ist.

Tabelle 4: Gemessene Spektrallinien der Hg-Spektrallampe

Farbe	$\lambda_{\text{Hg}} / \text{nm}$	$\omega_{G,\text{gemessen}} / ^\circ$	$d / \text{mm}$
violett	404,656	52	+0,0
violett	407,783	52	+2,0
violett	410,805	52	+4,0
violett	433,922	55	-2,7
violett	434,749	55	-2,1
blau	435,833	55	-1,5
türkis	491,607	60	+0,0
grün	546,074	65	+1,8
gelb	576,960	69	-1,6
gelb	579,066	69	+0,0
rot	623,440	72	-1,0
rot	671,643	72	+3,0
rot	690,752	74	+0,0

Die aufgenommenen Messwerte sind in Tabelle 4 zu finden, wobei die Wellenlängen der Versuchsanleitung [5] entnommen sind. Später in der Auswertung werden  $\omega_{G,\text{gemessen}}$  und  $d$  zu  $\omega_G$  mit der abgeschätzten Unsicherheit  $\delta\omega_G = 0,5^\circ$  verrechnet. In Tabelle 4 ist die Messgröße  $d$  entweder mit einem positiven oder negativen Vorzeichen versehen, je nachdem ob die beobachtete Spektrallinie links oder rechts von der Mitte der Strichskala zu sehen war.

Nun wird die Hg-Spektrallampe durch die Balmer-Lampe ersetzt. Der Aufbau muss etwas nachjustiert werden und dann können die Messwerte analog aufgenommen werden. Da die einzelnen Spektrallinien der Balmer-Lampe im Vergleich zu der Hg-Spektrallampe wesentlich weiter auseinander liegen, wird hier lediglich der Winkel des Gitters an der Kreisskala mit einer Unsicherheit von  $\delta\omega_G = 0,5^\circ$  abgelesen. Hier ist nun auch die Isotopieaufspaltung zu beobachten, welche durch die Messgröße  $d$  (Unsicherheit abgeschätzt auf  $\delta d = 0,1 \text{ mm}$ ) auf der Strichskala gemessen wird. Insgesamt können drei Linien der Balmer-Serie (inklusive Isotopieaufspaltung) gut erkannt werden. Bei der violetten Linie konnte leider keine Isotopieaufspaltung aufgelöst werden. Die aufgenommenen Messwerte sind in Tabelle 5 zu erkennen.

Tabelle 5: Gemessene Spektrallinien der Balmer-Lampe

Farbe	$\omega_G / ^\circ$	$d / \text{mm}$
rot	78,0	0,2
türkis	59,0	0,1
violett	54,0	nicht erkennbar

Abschließend werden noch diese drei Spektrallinien bei jeweils gleichem Gitterwinkel mit der CCD-

Kamera und dem zugehörigen Computer-Programm aufgenommen (die Daten sind hier vorzufinden: <https://uni-bonn.sciebo.de/s/dkCZbAXN5Exv807>). Bei jeder Messung muss das Projektionsobjektiv leicht verschoben werden, um die jeweilige Spektrallinie inklusive Isotopieaufspaltung möglichst genau aufzeichnen zu können. Es wird darauf geachtet, dass die Säule mit dem Reflexionsgitter möglichst so gedreht wird, dass die jeweilige Spektrallinie bei  $0^\circ$  abgebildet wird. Dies war leider aufgrund der hohen Empfindlichkeit nicht immer möglich, was aber später in der Auswertung leicht korrigiert werden kann.

### 3.3. Auswertung

#### 3.3.1. Bestimmung der Gitterkonstanten

<sup>1</sup>Mithilfe der Gittergleichung 3 kann für jede Linie der Hg-Spektrallampe die Gitterkonstante ausgerechnet werden. Dafür werden Ein- und Ausfallswinkel benötigt, welche sich mit Gleichung (4) berechnen lassen. Hierfür wird zunächst Folgendes benötigt:

$$\omega_G = \omega_{G,\text{gemessen}} + \omega_d \approx \omega_{G,\text{gemessen}} + \frac{d}{f} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \omega_{G,\text{gemessen}} + \frac{d}{300 \text{ mm}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi},$$

wobei die Kleinwinkelnäherung  $\omega_d[\text{rad}] \approx \frac{d}{f}$  (hier ist  $f = 300 \text{ mm}$  die Brennweite der Linse vor dem Okular) verwendet wurde. Wie schon zuvor erwähnt, wird hier die Unsicherheit sinnvoll auf  $\delta\omega_G = 0,5^\circ$  abgeschätzt. Für die Unsicherheit von Ein- und Ausfallswinkel gilt:

$$\delta\alpha = \delta\omega_G, \quad \delta\beta = \sqrt{(\delta\omega_G)^2 + (\delta\omega_B)^2}.$$

Die Gitterkonstante wird durch  $g = \frac{\lambda}{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}$  berechnet, wobei die zugehörige Unsicherheit durch

$$\begin{aligned} \delta g &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial \alpha} \delta\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \beta} \delta\beta\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\lambda}{(\sin(\alpha) + \sin(\beta))^2} \cos(\alpha) \delta\alpha\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{(\sin(\alpha) + \sin(\beta))^2} \cos(\beta) \delta\beta\right)^2} \\ &= \frac{g}{\sin(\alpha) + \sin(\beta)} \sqrt{(\cos(\alpha) \delta\alpha)^2 + (\cos(\beta) \delta\beta)^2} \end{aligned}$$

gegeben ist. Die ermittelten Werte für die Gitterkonstante für jede gemessene Hg-Spektrallinie sind in Tabelle 6 dargestellt.

Tabelle 6: Bestimmung der Gitterkonstante für jede gemessene Hg-Spektrallinie

$\lambda_{\text{Hg}} / \text{nm}$	$(\alpha \pm 0,5) / ^\circ$	$(\beta \pm 0,8) / ^\circ$	$g / \text{nm}$	$\delta g / \text{nm}$
404,656	52,0	12,0	406	6
407,783	52,4	12,4	405	6
410,805	52,8	12,8	404	6
433,922	54,5	14,5	408	5
434,749	54,6	14,6	407	5
435,833	54,7	14,7	407	5
491,607	60,0	20,0	407	5
546,074	65,3	25,3	408	4
576,960	68,7	28,7	409	4
579,066	69,0	29,0	408	4
623,440	71,8	31,8	422	4
671,643	72,6	32,6	450	4
690,752	74,0	34,0	454	4

Besonders die drei letzten Werte für die Gitterkonstante unterscheiden sich stark von den restlichen Werten. Der Grund dafür liegt darin, dass diese Linien aufgrund der vergleichsweise geringen Intensität

<sup>1</sup>Bei diesem Versuchsteil werden Unsicherheiten stets mit einem  $\delta$  gekennzeichnet, da das  $\Delta$  bereits für viele andere verwendete Größen reserviert ist.

sehr schwierig zu beobachten und auf der Strichskala scharf zu stellen waren. Vermutlich wurden dann sehr ungenaue Messwerte aufgenommen. Daher werden diese drei letzten Spektrallinien für die weitere Auswertung zur Bestimmung der Gitterkonstanten nicht berücksichtigt.

Um einen Wert für die Gitterkonstante aus allen Messwerten zu gewinnen, wird eine Geraden-Anpassung durchgeführt. Die Geraden-Gleichung ist durch

$$y = \sin(\alpha) + \sin(\beta) = a\lambda = \frac{1}{g}\lambda$$

gegeben. Für die Unsicherheit der  $y$ -Werte gilt  $\delta y = \sqrt{(\cos(\beta)\delta\alpha)^2 + (\cos(\beta)\delta\beta)^2}$ . Die Werte für die Geraden-Anpassung sind in Tabelle 7 eingetragen und die zugehörige graphische Darstellung ist in Abb. 8 zu sehen.

Tabelle 7: Werte der Geraden-Anpassung zur Bestimmung der Gitterkonstanten

$\lambda_{\text{Hg}} / \text{nm}$	$y$	$\delta y$
404,656	0,996	0,013
407,783	1,007	0,013
410,805	1,017	0,013
433,922	1,064	0,013
434,749	1,067	0,013
435,833	1,070	0,013
491,607	1,208	0,013
546,074	1,337	0,012
576,960	1,412	0,012
579,066	1,418	0,012

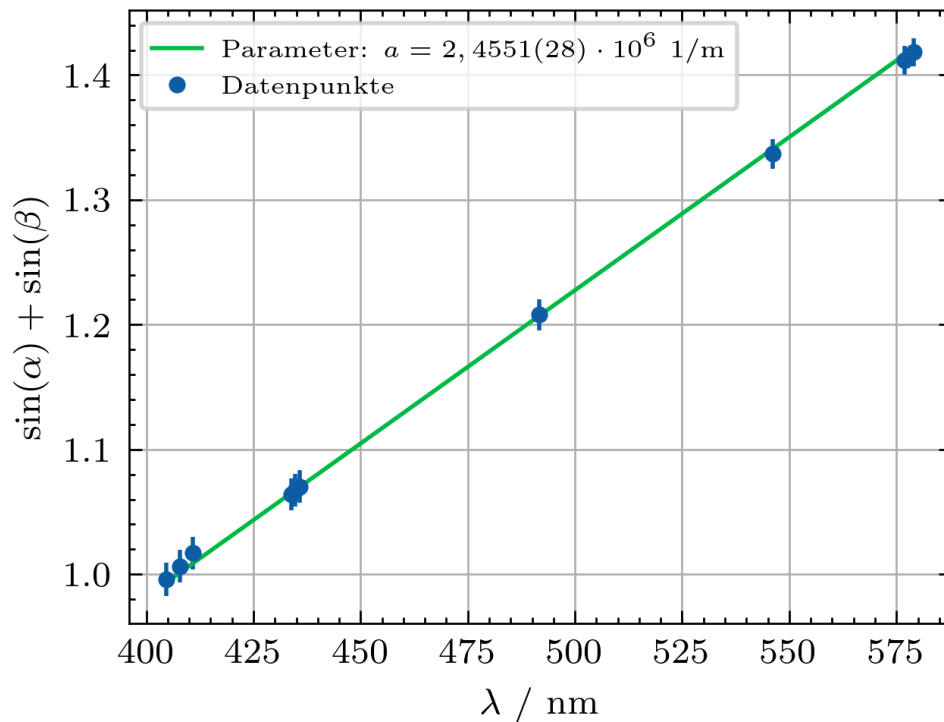


Abbildung 8: Geraden-Anpassung zur Bestimmung der Gitterkonstanten

Mit  $\chi^2 = 0.00016$  kann von einer gelungenen Anpassung der Gerade an die Datenpunkte gesprochen werden. Die Gitterkonstante ergibt sich nun aus dem Anpassungsparameter  $a = 2,4551(28) \cdot 10^6 \frac{1}{\text{m}}$  gemäß  $g = \frac{1}{a}$  mit der Unsicherheit  $\delta g = \frac{\delta a}{a^2}$ :

$$g = 407(5) \text{ nm}. \quad (6)$$

Da bei dem verwendeten Reflexionsgitter keine Herstellerangabe zu der Gitterkonstanten vorhanden war, kann an dieser Stelle kein Vergleich mit einem Literaturwert durchgeführt werden. Jedoch zeigt die Güte der Geraden-Anpassung, dass ein gutes Ergebnis erzielt wurde. Der in Gleichung (6) dargestellte Wert für die experimentell bestimmte Gitterkonstante wird nun für die gesamte weitere Auswertung verwendet.

### 3.3.2. Bestimmung der Balmerlinien

Mithilfe der soeben bestimmten Gitterkonstanten können nun die Wellenlängen zu den vermessenen Spektrallinien der Balmer-Lampe ermittelt werden. Erneut werden Ein- und Ausfallswinkel gemäß Gleichung (4) berechnet. Die Unsicherheiten sind durch  $\delta\alpha = \delta\omega_G = 0,5^\circ$  und  $\delta\beta = \sqrt{(\delta\omega_G)^2 + (\delta\omega_B)^2} = 0,8^\circ$  gegeben. Dann können die Wellenlängen zu den einzelnen Spektrallinien mit der Gittergleichung 3 und der zugehörigen Unsicherheit

$$\begin{aligned}\delta\lambda &= \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial g}\delta g\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\delta\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\delta\beta\right)^2} \\ &= \sqrt{((\sin(\alpha) + \sin(\beta))\delta g)^2 + (g\cos(\alpha)\delta\alpha)^2 + (g\cos(\beta)\delta\beta)^2}\end{aligned}$$

berechnet werden. Die berechneten Werte können dann mit Literaturwerten verglichen werden, welche [3] entnommen sind und dann der entsprechenden Spektrallinie zugeordnet werden. Dies ist in Tabelle 8 dargestellt.

Tabelle 8: Experimentell bestimmte Wellenlängen der Balmer-Spektrallinien

Spektrallinie	$(\alpha \pm 0,5^\circ) / ^\circ$	$(\beta \pm 0,8^\circ) / ^\circ$	$\lambda / \text{nm}$	$\delta\lambda / \text{nm}$	$\lambda_{\text{Lit}} / \text{nm}$
H $_{\alpha}$	78,0	38,0	649	5	656,28
H $_{\beta}$	59,0	19,0	482	6	486,13
H $_{\gamma}$	54,0	14,0	428	6	434,05

Die Literaturwerte der Wellenlängen liegen für die einzelnen Linien in der 1–2- $\sigma$ -Umgebung der experimentell bestimmten Wellenlängen, womit hier gute Ergebnisse erzielt wurden.

Nun wird die Isotopieaufspaltung (repräsentiert durch den Wellenlängenunterschied  $\Delta\lambda$  zwischen der jeweiligen Spektrallinie des reinen Wasserstoffs und der entsprechenden Spektrallinie des Deuteriums) bestimmt. Mithilfe von Gleichung (3) ergibt sich zunächst für  $\Delta\lambda$ :

$$\Delta\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\Delta\beta = g\cos(\beta)\Delta\beta. \quad (7)$$

Für die Unsicherheit gilt:

$$\begin{aligned}\delta(\Delta\lambda) &= \sqrt{\left(\frac{\partial(\Delta\lambda)}{\partial g}\delta g\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Delta\lambda)}{\partial\beta}\delta\beta\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Delta\lambda)}{\partial(\Delta\beta)}\delta(\Delta\beta)\right)^2} \\ &= \sqrt{(\cos(\beta)\Delta\beta\delta g)^2 + (g\sin(\beta)\Delta\beta\delta\beta)^2 + (g\cos(\beta)\delta(\Delta\beta))^2}.\end{aligned}$$

Außerdem berechnet sich die Winkelaufspaltung mit einer Kleinwinkelnäherung nach  $\Delta\beta \approx \frac{d}{f}$  (bei den weiteren Berechnungen wird eine Umrechnung in  $^\circ$  vorgenommen). Entsprechend berechnet sich die Unsicherheit gemäß  $\delta(\Delta\beta) = \frac{\delta d}{f}$ . Die Ergebnisse sind in Tabelle 9 dargestellt, wobei keine Isotopieaufspaltung zu der H $_{\gamma}$ -Spektrallinie bestimmt werden kann, da die entsprechende Winkelaufspaltung während der Versuchsdurchführung nicht auflösbar war. Eine noch präzisere Justierung des Versuchsaufbaus hätte möglicherweise zu einer Verbesserung geführt. Dies war jedoch schwierig umzusetzen, da einige der verwendeten Optikelemente leicht verbogen waren und nicht perfekt aufeinander abgestimmt werden konnten.

Tabelle 9: Mit dem Okular bestimmte Isotopieaufspaltung der Balmer-Spektrallinien

Spektrallinie	$(\Delta\beta \pm 0,019^\circ) / ^\circ$	$\Delta\lambda / \text{nm}$	$\delta(\Delta\lambda) / \text{nm}$	$\Delta\lambda_{\text{Lit}} / \text{nm}$
H $_{\alpha}$	0,038	0,21	0,11	0,19
H $_{\beta}$	0,019	0,13	0,11	0,14
H $_{\gamma}$	/	/	/	0,09

Die Literaturwerte für die Isotopieaufspaltung sind wieder [3] entnommen. Diese liegen wieder in der 1–2- $\sigma$ -Umgebung der experimentell bestimmten Werte, womit von einem guten Ergebnis gesprochen werden kann.

Nun wird die Isotopieaufspaltung anhand der mit der CCD-Kamera aufgenommenen Messwerte bestimmt. Dazu wird an diese Messwerte eine Überlagerung zweier Gauß-Kurven angepasst (eigentliche Spektrallinie inklusive Isotopieaufspaltung), da das Intensitäts-Profil einer Spektrallinie gaußförmig erwartet wird. Die Überlagerung zweier Gauß-Kurven (inklusive Offset  $O$ ) ist gegeben durch:

$$f(\beta) = A_1 \exp\left(-\frac{(\beta - \beta_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{(\beta - \beta_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) + O.$$

Bei der Aufnahme der Messwerte wurde das Ziel verfolgt, dass das Maximum der jeweiligen Balmer-Spektrallinie auf  $0^\circ$  abgebildet wird. Aufgrund der Empfindlichkeit der Säule mit dem Gitter war dies jedoch nicht möglich. Daher werden die Messwerte für die Winkel in der Auswertung nun so verschoben, dass das Maximum der jeweiligen Balmer-Spektrallinie trotzdem bei  $0^\circ$  zu sehen ist, da dies die weitere Auswertung dieses Versuchsteil erleichtert und auch genauere Ergebnisse liefert. Für die Anpassung wird aus dem Python-Modul „scipy“ die Funktion „Orthogonal distance regression“ verwendet. Für die mit der CCD-Kamera aufgenommenen Messwerte sind keine Unsicherheiten angegeben. Jedoch wird der Messfehler für die Intensität auf 0,1% angenommen, da diese bis auf diese Stelle angegeben war. Analog wird die Winkel-Unsicherheit auf  $0,001^\circ$  abgeschätzt. Die Datenpunkte mit der zugehörigen Gauß-Anpassung sind in Abb. 9 dargestellt. Die Parameter der Anpassung sind in Tabelle 10 zu finden.

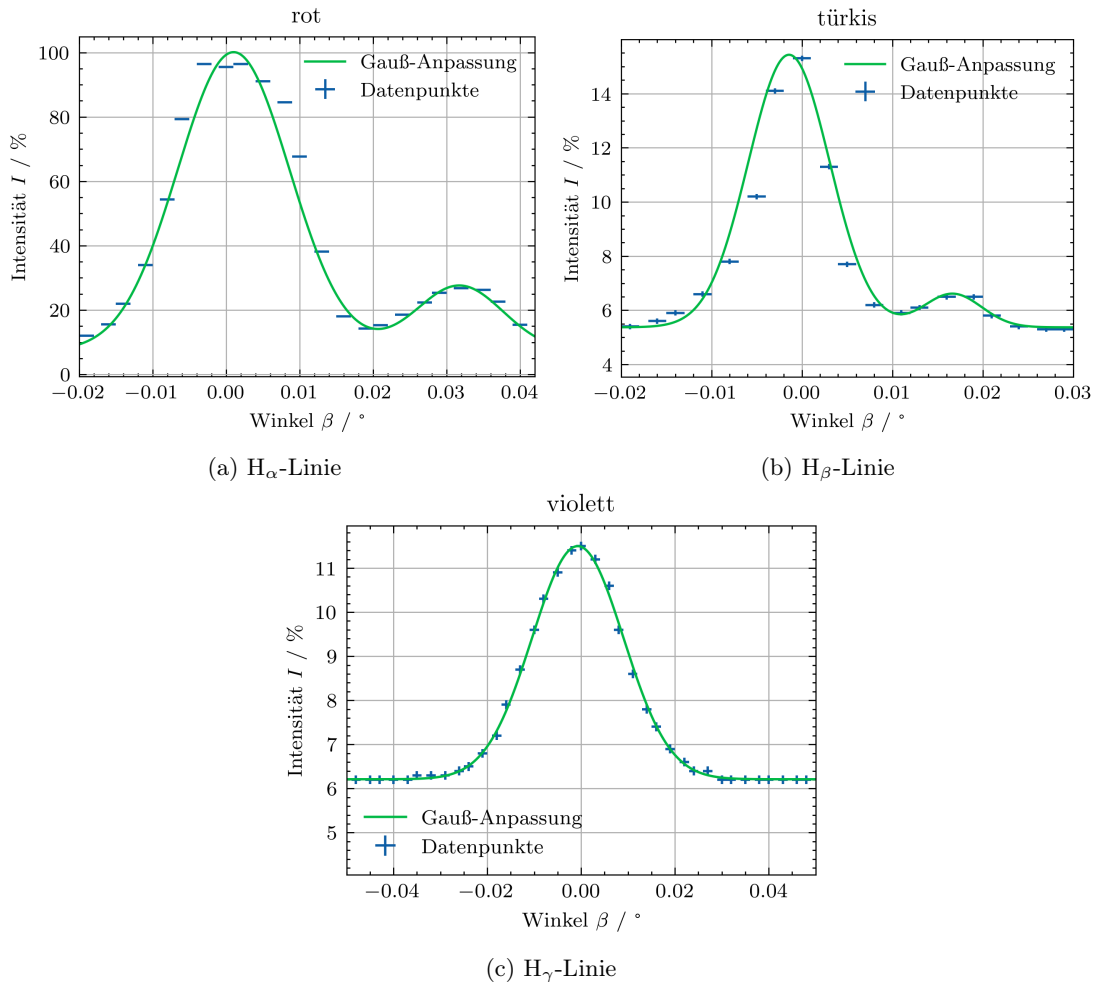


Abbildung 9: Mit der CCD-Kamera aufgenommene Intensitätsverteilungen der beobachteten Balmer-Spektrallinien inklusive Isotopieaufspaltung



Tabelle 10: Anpassungsparameter der Überlagerung zweier Gauß-Kurven

	$A_1 / \%$	$\beta_1 \cdot 10^{-3} / ^\circ$	$\sigma_1 \cdot 10^{-3} / ^\circ$	$A_2 / \%$	$\beta_2 \cdot 10^{-3} / ^\circ$	$\sigma_2 \cdot 10^{-3} / ^\circ$	$O / \%$
$H_\alpha$	$93 \pm 5$	$1,0 \pm 0,5$	$7,6 \pm 0,8$	$20 \pm 5$	$32 \pm 1$	$5,9 \pm 1,2$	$7 \pm 5$
$H_\beta$	$10 \pm 1$	$-1,4 \pm 0,4$	$4,5 \pm 0,3$	$1,2 \pm 0,2$	$17 \pm 1$	$3,2 \pm 0,6$	$5,4 \pm 0,1$
$H_\gamma$	$5,3 \pm 0,3$	$-0,72 \pm 0,11$	$9,7 \pm 0,1$	$1 \pm 0$	$-0,4 \pm 0,0$	$0,001 \pm 0,000$	$6,21 \pm 0,01$

Bei der violetten  $H_\gamma$ -Linie ist keine Isotopieaufspaltung zu erkennen, da (wie bereits auch schon zuvor) diese bei der Versuchsdurchführung nicht aufgelöst werden konnte. Ein Grund dafür ist, dass der Versuchsaufbau nicht ganz präzise justiert war. Außerdem ist es möglich, dass die Intensität der Linie bzw. Aufspaltung zu gering war, da der Spalt für eine schärfere Linie möglichst geschlossen werden musste. Weiterhin war eventuell das Projektionsobjektiv nicht ganz optimal auf die CCD-Kamera eingestellt. Bei der verwendeten Methode zur Anpassung der Überlagerung von zwei Gauß-Kurven ist die sogenannte „Residual variance“ ein Maß für die Güte der Anpassung (je näher an 0, desto besser). Für die Anpassung an die  $H_\alpha$ -Linie ist diese 2,56, für die Anpassung an die  $H_\beta$ -Linie 1,31 und für die Anpassung an die  $H_\gamma$ -Linie 0,15. Alle Anpassungen sind ausreichend gut gelungen. Es soll noch angemerkt werden, dass die Unsicherheiten für die Anpassungsparameter der zweiten Gauß-Kurve an die  $H_\gamma$ -Linie praktisch verschwinden, da das Programm hier aufgrund der fehlenden Auflösbarkeit der Isotopieaufspaltung effektiv nur die erste Gauß-Kurve anpassen muss.

Die Winkel-Aufspaltung berechnet sich nun nach  $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ , wobei die Unsicherheit durch  $\delta(\Delta\beta) = \sqrt{(\delta\beta_2)^2 + (\delta\beta_1)^2}$  gegeben ist. Für die Aufnahme der Messwerte mit der CCD-Kamera war  $\omega_G$  für die einzelnen Spektrallinien so eingestellt wie schon bei der Messung mit dem Okular, sodass auch die Ausfallwinkel  $\beta$  gleich sind. Die Isotopieaufspaltung wird nun erneut mit 7 und der zugehörigen Unsicherheit berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 11 dargestellt.

Tabelle 11: Mit der CCD-Kamera bestimmte Isotopieaufspaltung der Balmer-Spektrallinien

Spektrallinie	$(\Delta\beta \pm 0,001^\circ) / ^\circ$	$\Delta\lambda / \text{nm}$	$\delta(\Delta\lambda) / \text{nm}$	$\Delta\lambda_{\text{Lit}} / \text{nm}$
$H_\alpha$	0,031	0,174	0,007	0,19
$H_\beta$	0,018	0,121	0,007	0,14
$H_\gamma$	/	/	/	0,09

Auch hier wurden gute Ergebnisse erzielt, da die Literaturwerte in der  $3\text{-}\sigma$ -Umgebung der experimentell bestimmten Werte liegen. Die geringen Abweichungen kommen durch den nicht perfekt justierten Versuchsaufbau zustande. Leider konnte auch mit dem Computer-Programm die  $H_\gamma$ -Linie nicht scharf genug aufgelöst werden, um die Isotopieaufspaltung zu beobachten, weshalb hier keine Auswertung der Isotopieaufspaltung möglich ist.

### 3.3.3. Bestimmung der Rydberg-Konstanten

Die Rydberg-Konstante kann nun aus den experimentell bestimmten Wellenlängen der vermessenen Balmer-Spektrallinien mit der Formel (entnommen aus [3])

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

bestimmt werden. Diese Gleichung lässt sich als Geraden-Gleichung mit  $y = \frac{1}{\lambda}$  und  $x = \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$  auffassen. Für die Unsicherheit der  $y$ -Werte gilt  $\delta y = \frac{\delta\lambda}{\lambda^2}$ . Die Geraden-Anpassung ist in Abb. 10 dargestellt. Der Anpassungsparameter liefert die Rydberg-Konstante  $R_\infty = 1,110(2) \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}}$ . Der Literaturwert (entnommen aus [2])  $R_{\infty, \text{Lit}} = 1,096 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}}$  liegt außerhalb der  $3\text{-}\sigma$ -Umgebung des experimentell bestimmten Wertes. Dies liegt jedoch auch daran, dass die Unsicherheit vergleichsweise klein ist. Der Wert liegt trotzdem in dem richtigen Bereich. Vorhandene Abweichungen kommen dadurch zustande, dass die Wellenlängen der Balmer-Spektrallinien nicht exakt bestimmt wurden.

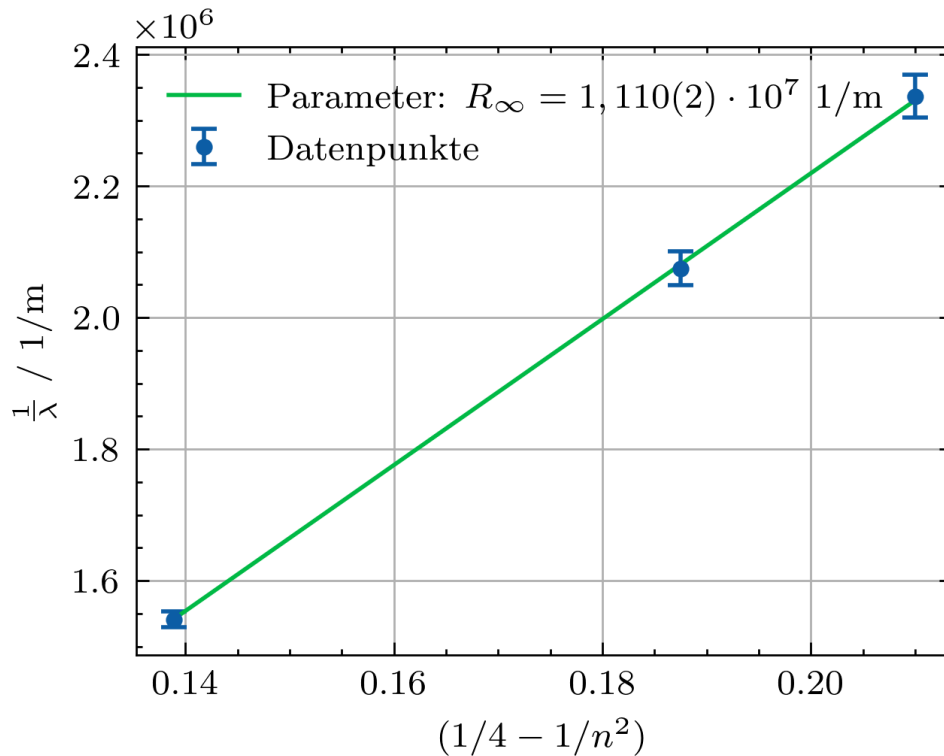


Abbildung 10: Geraden-Anpassung zur Bestimmung der Rydbergkonstanten

### 3.3.4. Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums

Nach [3] lässt sich das Plancksche Wirkungsquantum über die soeben experimentell bestimmte Rydberg-Konstante wie folgt bestimmen:

$$h = \sqrt[3]{\frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 R_\infty c}}.$$

Hierbei ist  $m_e$  die Elektronenmasse,  $e$  die Elementarladung,  $\epsilon_0$  die elektrische Feldkonstante und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit. Diese Werte werden [2] entnommen. Die zugehörige Unsicherheit berechnet sich mit  $\delta h = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 R_\infty^4 c}} \delta R_\infty$ . Damit ergibt sich für das Plancksche Wirkungsquantum:

$$h = 6,600(4) \cdot 10^{-34} \text{ J s.}$$

Auch hier ist die Unsicherheit sehr klein, weshalb der Literaturwert für das Plancksche Wirkungsquantum ( $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ ) außerhalb der 3- $\sigma$ -Umgebung des experimentell bestimmten Wertes liegt. Dennoch ist das Ergebnis bis auf die erste Nachkommastelle genau, weshalb ein gutes Ergebnis erzielt wurde. Der hier bestimmte Wert für das Plancksche Wirkungsquantum stimmt auch im Rahmen der Unsicherheiten mit dem bestimmten Wert des Versuchsteils zum photoelektrischen Effekt überein, da bei diesem eine wesentlich größere Unsicherheit vorhanden ist.

### 3.3.5. Weitere Überlegungen

Bei der Versuchsdurchführung wurden bei der Betrachtung der Balmer-Linien noch weitere Spektrallinien im Hintergrund erkannt. Das Auftreten dieser zusätzlichen Spektrallinien ist dadurch zu erklären, dass die Balmer-Lampe eine Gasentladung im Wasserdampf erzeugt, sodass sich zusätzlich zum Wasserstoff (und Deuterium) noch Sauerstoff in der Lampe befindet, welcher zusätzlich schwache Linien vom roten bis grünen Spektralbereich erzeugt. Außerdem kann es eventuell passieren, dass bei dem Herstellungsprozess weitere Fremdatome in die Lampe geraten, sodass der Wasserstoff bzw. das Deuterium in der Lampe nicht rein ist.

Die natürliche Linienbreite (welche durch die Energie-Zeit-Unschärfe bestimmt wird) wird durch den

Doppler-Effekt (die Atome in der Balmer-Lampe bewegen sich in unterschiedliche Richtungen) verbreitert. Nun soll diese Doppler-Verbreiterung der Linien abgeschätzt werden, welche mit folgender Formel (entnommen aus [2]) bestimmt werden kann:

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{8k_B T \ln(2)}{m}}.$$

Die Unsicherheit berechnet sich gemäß

$$\delta(\Delta\lambda_D) = \frac{\delta\lambda}{c} \sqrt{\frac{8k_B T \ln(2)}{m}}.$$

Hier ist die Temperatur der Balmer-Lampe in [5] mit  $T = 1000$  K angegeben. Die Masse von Wasserstoff H entspricht  $1u = 1,66 \cdot 10^{-27}$  kg und die von Deuterium D etwa  $2u = 3,32 \cdot 10^{-27}$  kg. Die Boltzmann-Konstante wird [2] entnommen. Die abgeschätzten Werte sind in Tabelle 12 dargestellt.

Tabelle 12: Abschätzung der Doppler-Verbreiterung der Balmer-Spektrallinien

Spektrallinie	$\lambda$ / nm	$\Delta\lambda_D(\text{H})$ / nm	$\delta(\Delta\lambda_D(\text{H}))$ / nm	$\Delta\lambda_D(\text{D})$ / nm	$\delta(\Delta\lambda_D(\text{D}))$ / nm
$\text{H}_\alpha$	649	0,0147	0,0002	0,0104	0,0001
$\text{H}_\beta$	482	0,0109	0,0002	0,0077	0,0001
$\text{H}_\gamma$	428	0,0097	0,0002	0,0068	0,0001

Ein Vergleich mit Literaturwerten ist hier nicht nötig, da die verwendete Formel der Literatur selber entnommen ist und die eingesetzten Wellenlängen im Rahmen der Unsicherheiten mit den Wellenlängen der Literatur übereinstimmen.

Die natürliche Linienbreite wird nach [2] mit  $\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau}$  bestimmt, wobei  $\tau$  die typische mittlere Lebensdauer optischer Übergänge ist. Diese beträgt nach [2]  $1 \cdot 10^{-8}$  s. Mit  $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ ,  $c = \lambda\nu$  und einer Wellenlänge in etwa der Mitte der betrachteten Balmer-Spektrallinien von 500 nm folgt:

$$\Delta\nu \approx 16 \text{ MHz},$$

$$\Delta\lambda = \lambda^2 \frac{\Delta\nu}{c} \approx 1,33 \cdot 10^{-5} \text{ nm}.$$

Im Vergleich mit der Doppler-Verbreiterung fällt auf, dass die natürliche Linienbreite um etwa 3 Größenordnungen kleiner ist. Somit ist für die Messung nur die Doppler-Verbreiterung der Spektrallinien entscheidend.

Die Doppler-Verbreiterung kann auch aus den Gauß-Anpassungen der mit der CCD-Kamera aufgenommenen Messwerte bestimmt werden, da sich die Doppler-Verbreiterung auf die Halbwertsbreite einer an die Spektrallinie angepassten Gauß-Kurve bezieht. Dafür wird die Standardabweichung  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$  benötigt, je nachdem ob die Doppler-Verbreiterung der Wasserstoff-Linie oder der Deuterium-Linie bestimmt werden soll. Die Werte für die Standardabweichungen der Gauß-Kurven werden aus Tabelle 10 entnommen. Die Halbwertsbreite einer Gauß-Kurve berechnet sich bekanntlich gemäß

$$\Delta\beta_{1/2} = 2\sqrt{2\ln(2)}\sigma_{1/2}$$

mit der Unsicherheit

$$\delta(\Delta\beta_{1/2}) = 2\sqrt{2\ln(2)}\delta\sigma_{1/2}.$$

Die entsprechende Doppler-Verbreiterung kann mit 7 und der zugehörigen Unsicherheit berechnet werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 13 dargestellt.

Tabelle 13: Bestimmung der Doppler-Verbreiterung der Balmer-Spektrallinien aus den Halbwertsbreiten der angepassten Gauß-Kurven

Spektrallinie	$\Delta\beta_1$ / °	$\delta(\Delta\beta_1)$ / °	$\Delta\beta_2$ / °	$\delta(\Delta\beta_2)$ / °	$\Delta\lambda_D(\text{H}) \pm 0,0001$ / nm	$\Delta\lambda_D(\text{D}) \pm 0,0001$ / nm
$\text{H}_\alpha$	0,018	0,002	0,014	0,003	0,0264	0,0205
$\text{H}_\beta$	0,011	0,001	0,008	0,002	0,0388	0,0276
$\text{H}_\gamma$	0,023	0,001	/	/	0,0954	/

Die Unsicherheit für die experimentell bestimmte Doppler-Verbreiterung wurde hier zusätzlich etwas größer abgeschätzt als eigentlich berechnet, da die Unsicherheit ansonsten verglichen mit den minimalen systematischen Unsicherheiten des Versuchsaufbaus zu klein ist. Werden die experimentell bestimmten Werte für die Doppler-Verbreiterung aus Tabelle 13 mit den theoretisch abgeschätzten Werten aus Tabelle 12 verglichen, so fällt auf, dass die experimentell bestimmten Werte bis zu einer Größenordnung breiter sind. Dies legt nahe, dass der Versuchsaufbau nicht optimal justiert war. Außerdem hätte die Spaltbreite besser eingestellt werden müssen. Dies war jedoch in der vorgegebenen Durchführungszeit nicht zu erreichen, da eine so genaue Justierung viel Zeit benötigt. Es musste schließlich der Fokus darauf gelegt werden, die Spektrallinien überhaupt ausreichend gut genug zu erkennen und vermessen zu können.

Das Auflösungsvermögen des verwendeten Reflexionsgitters berechnet sich nach [1] ungefähr nach  $A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$ , wobei  $\lambda$  die beobachtete Wellenlänge ist,  $\Delta\lambda$  die gerade noch auflösbare Wellenlängendifferenz,  $m$  die Beugungsordnung und  $N$  die Anzahl der ausgeleuchteten Spalte. Bei der Versuchsdurchführung wurde nur die erste Beugungsordnung beobachtet, womit  $m = 1$  ist. Das Auflösungsvermögen ist gegeben durch:

$$A = N = \frac{\text{beleuchtete Gitterbreite}}{\text{Gitterkonstante}} = \frac{d}{g}, \quad \delta A = \frac{d}{g^2} \delta g.$$

In der Versuchsanleitung [5] ist die beleuchtete Gitterbreite mit  $d = 25 \text{ mm}$  angegeben, womit für das Auflösungsvermögen des Gitters folgt:

$$A = 61\,400(800).$$

Die gerade noch auflösbare Wellenlängendifferenz berechnet sich nun mit  $\Delta\lambda = \lambda \frac{g}{d}$  und  $\delta(\Delta g) = \lambda \frac{\delta g}{d}$  (hier wird wieder eine Wellenlänge von  $\lambda = 500 \text{ nm}$  eingesetzt):

$$\Delta\lambda = 8,1(1) \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

Somit wäre es mit diesem Gitter bei voller Ausleuchtung möglich gewesen, die Isotopieaufspaltung vollständig aufzulösen. Jedoch wurde das Gitter nicht voll ausgeleuchtet, wodurch das tatsächliche Auflösungsvermögen des Gitters bei der Versuchsdurchführung geringer war als hier berechnet. Auch war die Spaltbreite nicht bei jeder Messung optimal eingestellt, was dazu geführt hat, dass die Isotopieaufspaltung nicht immer scharf zu erkennen war.

## 4. Fazit

Im ersten Versuchsteil wurde mithilfe des Photoeffekts das Plancksche Wirkungsquantum bestimmt. Dabei wurde eine Photozelle mit Licht unterschiedlicher Wellenlängen bestrahlt und mit der Gegenfeldmethode der dabei entstehende Photostrom gemessen. Für jede Wellenlänge wurde die Grenzspannung aus der dazugehörigen Kennlinie bestimmt, wobei hier für hohe Wellenlängen die hierfür benötigte Spannung deutlich kleiner war als zur Verfügung stand, weswegen hier die Messung zu ungenau ausfiel und eine potentielle Fehlerquelle darstellt. Durch Variation der angeschlossenen Widerstände würde es sich anbieten, hier die maximale Spannung zu minimieren um die Messung empfindlicher zu machen.

Die Messung wurde für Lichteinstrahlung mit 365 nm bei erhöhter Intensität wiederholt, um die Intensitätsabhängigkeit der Kennlinie zu untersuchen. Dabei konnte die Quantenhypothese bestätigt werden, da die Steigung der Kennlinie eine Proportionalität zur Intensität des Lichts aufweisen konnte, die Grenzspannung jedoch unverändert blieb. Dies zeigt, dass Lichtenergie gequantelt an die Elektronen abgegeben wird mit der Relation  $E = h\nu$ . Des Weiteren konnte die Austritsarbeit der Platin-Rhodium-Anode auf

$$W_A = 1,75(11) \text{ eV}$$

bestimmt werden, was mit keinem Literaturwert verglichen werden konnte. Eine potentielle Fehlerquelle nach unten ist hierbei die Raumtemperatur, die durch die Wechselwirkung mit den Elektroden ihre Austritsarbeit minimiert.

Das in diesem Versuch bestimmte Wirkungsquantum ist

$$h = 6,4(3) \cdot 10^{-34} \text{ J s},$$

wodurch der Literaturwert  $h = 6,626 \text{ J s}$  im  $1\sigma$ -Bereich der Messung liegt.

In dem Versuchsteil zur Balmer-Serie wurde zunächst die Gitterkonstante des verwendeten Reflexionsgitters mithilfe der bekannten Spektrallinien der Hg-Dampflampe bestimmt. Durch eine Geraden-Anpassung ergab sich

$$g = 407(5) \text{ nm}.$$

Jedoch wurden für diese Geraden-Anpassung die Messergebnisse für die drei roten Spektrallinien der Hg-Spektrallampe nicht berücksichtigt, da diese aufgrund ihrer zu geringen Intensität nur sehr ungenau vermessen werden konnten, was in der Auswertung zu unbrauchbaren Ergebnissen führte. Dies hätte eventuell durch eine präzisere Justierung und Einstellung des Spaltes behoben werden können.

Mithilfe dieser experimentell bestimmten Gitterkonstante lässt sich sofort mit den angegebenen Abmessungen des Reflexionsgitters dessen Auflösungsvermögen zu  $A = 61\,400(800)$  bestimmen, was einer gerade noch auflösbaren Wellenlängendifferenz von

$$\Delta\lambda = 8,1(1) \cdot 10^{-12} \text{ nm}$$

entspricht. Mit diesem Auflösungsvermögen wäre es theoretisch möglich, die später zu bestimmende Isotopieaufspaltung der Balmer-Spektrallinien genau zu beobachten. Jedoch wurde bei der Versuchsdurchführung nicht das gesamte Gitter ausgeleuchtet, was zu einem geringeren Auflösungsvermögen geführt hat. Damit war es dann z.B. nicht mehr möglich, die Isotopieaufspaltung der  $H_\gamma$ -Linie aufzulösen. Auch dieses Problem hätte durch eine präzisere Einstellung des Spaltes gelöst werden können.

Außerdem wurde die nun bestimmte Gitterkonstante verwendet, um die unbekannten Wellenlängen der  $H_\alpha$ -,  $H_\beta$ - und  $H_\gamma$ -Linien der Balmer-Serie zu bestimmen. Hierbei ergaben sich die Werte

$$\lambda_{H_\alpha} = 649(5) \text{ nm}, \quad \lambda_{H_\beta} = 482(6) \text{ nm}, \quad \lambda_{H_\gamma} = 428(6) \text{ nm},$$

welche im Rahmen der Unsicherheiten gut mit den Literaturwerten übereinstimmen (siehe Tabelle 8). Ebenso wurden gute Ergebnisse bei der Bestimmung der Isotopieaufspaltung erzielt, was in Tabelle 9 einzusehen ist. Mit einer präziseren Einstellung des Spaltes hätte gegebenenfalls noch die Isotopieaufspaltung der  $H_\gamma$ -Linie aufgelöst werden können.

Diese Balmer-Spektrallinien wurden auch mit einer CCD-Kamera und dem zugehörigen Computer-Programm aufgezeichnet. Damit konnte ebenfalls die Isotopieaufspaltung berechnet werden (siehe Tabelle 11), indem an die Messwerte eine Überlagerung zweier Gauß-Kurven angepasst wurde, was aber zu wesentlich schlechteren Ergebnissen führte. Auch dies ist wieder auf eine zu ungenaue Justierung des Spaltes und des gesamten Versuchsaufbaus zurückzuführen. Anhand der Gauß-Kurven konnte eingesehen werden, dass die bei der Messung beobachtete Linienbreite der Spektrallinien hauptsächlich durch

die Doppler-Verbreiterung bestimmt wird, da diese im Vergleich zu der natürlichen Linienbreite wesentlich größer ist (3 Größenordnungen). Details hierzu sind in Tabelle 12 einzusehen. Aus den bestimmten Wellenlängen der Balmer-Serie wurde dann die Rydberg-Konstante und damit das Plancksche Wirkungsquantum zu

$$h = 6,600(4) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

bestimmt. Dieser Wert weicht leicht von dem Literaturwert ( $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ ) ab, da die Unsicherheit sehr klein ist. Eventuell wurden die Messunsicherheiten zu klein abgeschätzt. Zusammengefasst konnten bei diesem Versuchsteil gute Ergebnisse erzielt werden, jedoch hätte eine noch präzisere Justierung einen Zugang zu besseren Ergebnissen verschafft.

## A. Messwerte: Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums

Tabelle 14: Kennlinie 436 nm

erste Messung		zweite Messung	
$U/\text{mV}$	$I/\text{pA}$	$U/\text{mV}$	$I/\text{pA}$
0	510(3)	0	510(10)
87	428(2)	65	440(10)
153	361(2)	159	360(10)
231	290(1)	228	290(10)
318	226(5)	362	191(3)
403	165(3)	428	148(3)
501	112(5)	525	96(1)
616	62(4)	658	46(1)
691	38(2)	736	25(2)
758	22(2)	815	10(2)
837	6(1)	914	-4,4(3)
888	-0,5(3)	1030	-16,4(4)
950	-8,5(5)	1105	-20,4(2)
1032	-16,2(2)	1169	-21,2(1)
1134	-20,6(2)	1302	-21,7(1)
1291	-21,1(1)	2782	-21,8(1)
2783	-21,3(1)		

Tabelle 15: Kennlinie 405 nm

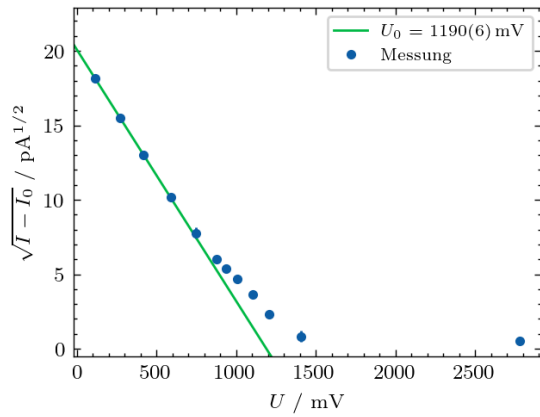
erste Messung		zweite Messung	
$U/\text{mV}$	$I/\text{pA}$	$U/\text{mV}$	$I/\text{pA}$
115	307,6(2)	0	388(3)
273	218(3)	154	281(2)
416	148(2)	311	200,5(2)
590	82(2)	415	147,5(3)
745	39(3)	529	100,0(2)
937	7,4(4)	575	83,5(4)
879	15,0(5)	627	68,2(4)
1006	0,8(4)	699	48,0(2)
1104	-8,2(2)	761	38,0(5)
1208	-16,1(2)	846	21(1)
1406	-20,7(3)	958	4,3(3)
1670	-21,4(4)	1026	-1(1)
2782	-21,1(1)	1121	-10,0(3)
		1206	-16,0(3)
		1388	-20,9(3)
		1677	-21,2(2)
		2183	-21,1(2)

Tabelle 16: Kennlinie 578 nm

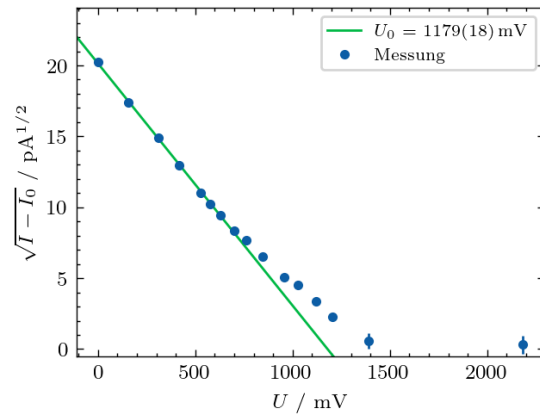
erste Messung		zweite Messung	
$U/\text{mV}$	$I/\text{pA}$	$U/\text{mV}$	$I/\text{pA}$
0	85(5)	0	78(4)
31	67(2)	33	65(1)
56	51(1)	68	44(5)
89	37(1)	104	30(3)
120	26(1)	156	12(1)
149	14,5(3)	202	0,0(3)
174	8(2)	257	-9(1)
191	3(1)	318	-17,0(2)
242	-6,1(2)	434	-22,2(2)
276	-11,5(5)	676	-23,4(2)
337	-18,0(5)	2783	-23,4(2)
443	-21,7(1)		
845	-22,7(1)		
2783	-22,7(1)		

Tabelle 17: Kennlinie 546 nm

erste Messung		zweite Messung	
$U/\text{mV}$	$I/\text{pA}$	$U/\text{mV}$	$I/\text{pA}$
0	280(10)	0	210(10)
34	224,5(5)	71	135(5)
92	155(1)	119	96(3)
131	111(2)	170	56(1)
167	80(1)	214	33(1)
215	49(1)	249	19(1)
264	25,3(3)	277	10(1)
313	7,8(2)	307	2,6(4)
350	-1,3(1)	358	-8(1)
399	-10,5(2)	417	-15,2(2)
451	-16,4(1)	508	-20,8(2)
539	-20,9(1)	557	-22,1(1)
688	-22,3(3)	697	-23,2(3)
976	-22,6(2)	812	-22,9(4)
		2783	-23,5(1)

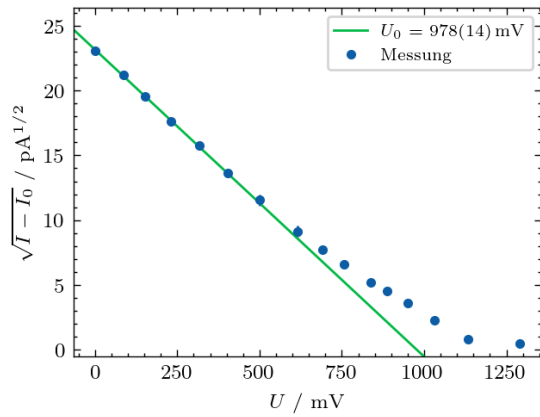


(a) erste Messung

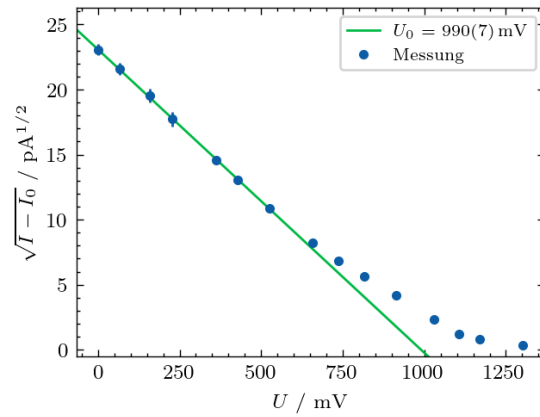


(b) zweite Messung

Abbildung 11: Bestimmung der Grenzspannung 405 nm

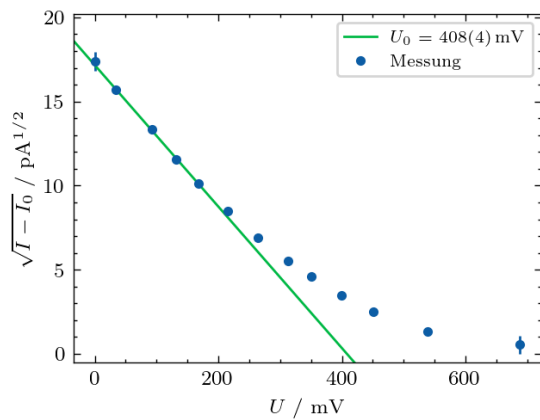


(a) erste Messung

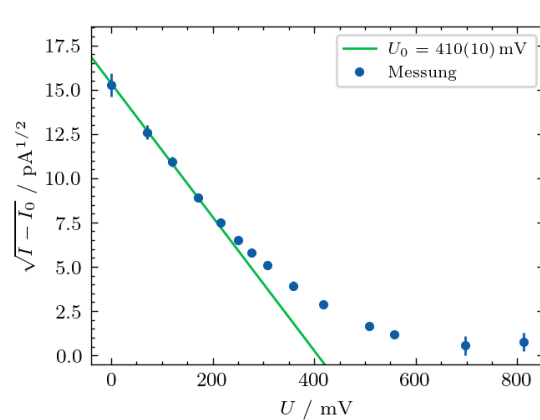


(b) zweite Messung

Abbildung 12: Bestimmung der Grenzspannung 436 nm



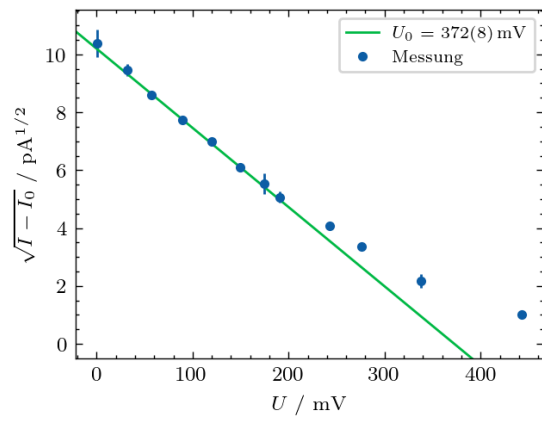
(a) erste Messung



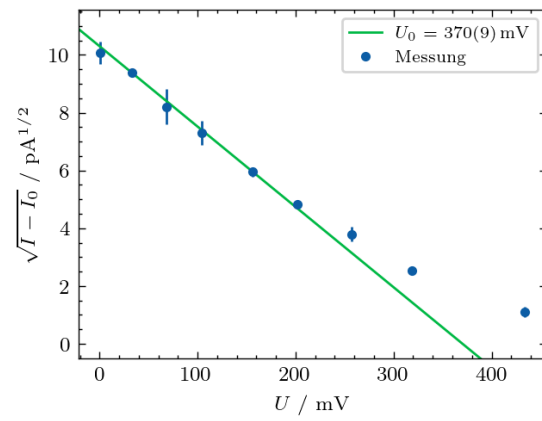
(b) zweite Messung

Abbildung 13: Bestimmung der Grenzspannung 546 nm





(a) erste Messung



(b) zweite Messung

Abbildung 14: Bestimmung der Grenzspannung 578 nm

## Literaturverzeichnis

- [1] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik; 3rd ed.* Berlin: Springer, 2004. URL: <https://cds.cern.ch/record/829122>.
- [2] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper; 3rd ed.* Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer, 2005. URL: <https://cds.cern.ch/record/829119>.
- [3] LD Didactic. *Beobachtung der Aufspaltung der Balmerlinien an deuteriertem Wasserstoff (Isotopieaufspaltung)*. [https://www.ld-didactic.de/literatur/hb/d/p6/p6213\\_d.pdf](https://www.ld-didactic.de/literatur/hb/d/p6/p6213_d.pdf). Zugriff: 24.10.2023.
- [4] Scipy. *Orthogonal distance regression*. [Online; Datum: 25.11.2023]. URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/odr.html>.
- [5] Physikalisches Institut der Universität Bonn. *Physikalisches Praktikum Teil IV: Atome, Moleküle, Festkörper. Versuchsbeschreibungen*. 2023.
- [6] Wikipedia. *Austrittsarbeit* — *Wikipedia, -Die freie Enzyklopädie*. [Online; Datum: 25.11.2023]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Austrittsarbeit>.
- [7] Wikipedia. *Fehlerfortpflanzung* — *Wikipedia, -Die freie Enzyklopädie*. [Online; Datum: 25.11.2023]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Fehlerfortpflanzung>.
- [8] Wikipedia. *Kontaktelektrizität* — *Wikipedia, -Die freie Enzyklopädie*. [Online; Datum: 25.11.2023]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Kontaktelektrizit%C3%A4t>.
- [9] Wikipedia. *Reduced chi-squared statistic* — *Wikipedia, -Die freie Enzyklopädie*. [Online; Datum: 25.11.2023]. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Reduced\\_chi-squared\\_statistic](https://en.wikipedia.org/wiki/Reduced_chi-squared_statistic).