PROF. DR. NELSON JOSÉ FREITAS DA SILVEIRA - DCC

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

24 de agosto de 2020

2

Transcrito com muito zelo por José Carlos Tobias da Silva. *Ciência da Computação - 2016.1.08.007 -* ***UNIFAL-MG***.

**Conteúdo**

**1 Conjuntos 11** 1.1 Conceitos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11 1.1.1 Conjuntos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11 1.1.2 Elementos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11 1.1.3 Pertinência . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11 1.2 Representação de um conjunto . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11 1.2.1 Por enumeração . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12 1.2.2 Por propriedade . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12 1.2.3 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12 1.3 Diagrama de Venn . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13 1.4 Igualdade entre conjuntos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14 1.5 Conjunto unitário . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14 1.6 Conjunto vazio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14 1.7 Principais símbolos lógicos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15 1.8 Subconjuntos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15 1.9 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16 1.9.1 Solução dos Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17

**2 Conjuntos 19** 2.1 Conjunto Universo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19 2.2 Conjunto das partes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19 2.3 Reunião de conjuntos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

2.3.1 Intersecção de conjuntos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21 2.3.2 Diferença de conjuntos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22 2.3.3 Complementar de B em A . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22

2.4 Propriedades . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23 2.4.1 Inclusão (*⊂*) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23 2.4.2 União (*∪*) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23 2.4.3 Intersecção (*∩*) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23

2.5 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24 2.5.1 Solução dos Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

3

4 *Conteúdo*

**3 Conjuntos Numéricos 25** 3.1 Conjunto dos Números Naturais N . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25 3.2 Conjunto dos Números Inteiros Z . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25 3.3 Conjunto dos Números Racionais Q . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26 3.4 Números Irracionais R*−*Q . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27 3.5 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27 3.6 Números Reais R . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28 3.7 Relação de ordem no conjunto R . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29 3.8 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29 3.8.1 Solução dos Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29

**4 Intervalos 31** 4.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32 4.2 Sistema Cartesiano . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

4.2.1 Par Ordenado . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34 4.3 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35 4.3.1 Solução dos Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

**5 Produto Cartesiano 37** 5.0.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37 5.0.2 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39 5.0.3 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

5.1 Número de Elementos do Produto Cartesiano . . . . . . . . . . . . . . . . . 40 5.2 Relação Binária . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41 5.2.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

**6 Domínio e Imagem 43** 6.0.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43 6.0.2 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44

6.1 Relação Inversa . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46 6.1.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46 6.1.2 Propriedades . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46 6.2 Funções . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47

**7 Polinômios 49** 7.1 Nomenclatura . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49 7.2 Igualdade . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50 7.3 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50 7.4 Operações . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51

*Conteúdo* 5

7.4.1 Adição . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51 7.4.2 Substração . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52 7.4.3 Multiplicação . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52

**8 Polinômios - Continuação 55** 8.1 Propriedades . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55 8.2 Divisão . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55

8.2.1 Método da Chave . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56 8.2.2 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57 8.2.3 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58

8.3 Produtos Notáveis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58 8.3.1 Quadrado da soma de dois termos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58 8.3.2 Quadrado da diferença de dois termos . . . . . . . . . . . . . . . . . 59 8.3.3 Cubo da soma de dois termos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59 8.3.4 Cubo da diferença de dois termos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59 8.3.5 Produto da soma pela diferença de dois termos . . . . . . . . . . . 59 8.3.6 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59

8.4 Triângulo de Pascal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60 8.4.1 Exemplos de uso . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60

**9 Funções e Não Funções 61** 9.1 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62 9.2 Notação de Funções . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65

9.2.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65 9.2.2 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66 9.2.3 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67

9.3 Domínio e Imagem de Funções . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67 9.3.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68 9.3.2 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69

**10 Função do Primeiro Grau 71** 10.1 Função Constante . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71 10.1.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71 10.2 Função Identidade . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72 10.3 Função Linear . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72 10.3.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 73 10.3.2 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74 10.3.3 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74 10.4 Função Afim . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 75

6 *Conteúdo*

10.4.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 75 10.4.2 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 76

**11 Função do Primeiro Grau 79** 11.1 Coeficientes da Função Afim . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79 11.1.1 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79 11.2 Zero da Função Afim . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 80 11.3 Funções Crescentes ou Decrescentes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 81 11.3.1 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 82 11.3.2 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83

**12 Função do Primeiro Grau 85** 12.1 Teorema . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85 12.2 Sinal da Função Afim . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85 12.3 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88 12.4 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 89

**13 Função Quadrática 91** 13.0.1 Gráfico . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91 13.0.2 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 93

13.1 Concavidade . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 93 13.2 Zero da Função Quadrática . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 94 13.2.1 Discussão quanto aos zeros da função quadrática . . . . . . . . . . 94 13.2.2 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 95 13.2.3 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 96

**14 Função quadrática 97** 14.1 Vértice da Parábola . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 97 14.1.1 As coordenadas do vértice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 97 14.1.2 Demonstração . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99 14.1.3 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99 14.2 Conjunto Imagem da Função Quadrática . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 101 14.2.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 101

**15 Funções quadráticas crescentes e decrescentes 105** 15.0.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 105 15.0.2 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 108

*Conteúdo* 7

**16 Função Modular 109** 16.1 Módulo de um número real . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109 16.1.1 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109 16.2 Equações que envolvem módulo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110 16.2.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111 16.2.2 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 112 16.2.3 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 113 16.3 Função Modular . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 114 16.3.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 115 16.3.2 Exemplo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 116

**17 Função Modular 117** 17.0.1 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 117 17.0.2 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 118 17.0.3 Exemplo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 119 17.0.4 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 120 17.0.5 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 121

**18 Função Exponencial 123** 18.1 Potência de Expoente Natural . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123 18.1.1 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123 18.1.2 Propriedades . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 124 18.2 Função Exponencial . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 124 18.2.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 124 18.3 Equação Exponencial . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 124 18.3.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 125 18.4 Método de Resolução de Equações Exponenciais . . . . . . . . . . . . . . . 125 18.4.1 Método de Redução a Uma Base Comum . . . . . . . . . . . . . . . 125 18.4.2 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 125 18.4.3 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 126 18.5 Gráficos de Funções Exponenciais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 126 18.5.1 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 127

**19 Logaritmos 129** 19.1 Símbolos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 129 19.1.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 129 19.2 Consequências da Definição . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 130 19.2.1 Exemplo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 130 19.2.2 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 130

8 *Conteúdo*

19.3 sistemas de Logaritmos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 131 19.4 Propriedades dos Logaritmos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 131 19.4.1 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 132 19.5 Mudança de Base . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 132 19.5.1 Propriedades . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 132 19.5.2 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 132 19.6 Observações . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 133 19.7 Função Logarítmica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 133 19.7.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 133 19.7.2 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 133

**20 Inequações Simultâneas 135** 20.0.1 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 136 20.0.2 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 137

20.1 Inequação Produto . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 137 20.1.1 Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 138 20.2 Método Prático . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 138

**21 Funções Trigonométricas 141** 21.1 Unidades . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 141 21.1.1 Exemplo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 142 21.1.2 Exercícios . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 142 21.2 Círculo Trigonométrico . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 143

**22 Funções Circulares 147** 22.1 Noções Gerais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 147 22.1.1 Exemplo Preliminar . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 148 22.2 Função Seno . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 150 22.2.1 Definição . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 150 22.2.2 Propriedades . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 150 22.2.3 Gráfico . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 151 22.2.4 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 152 22.2.5 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 155 22.2.6 Solução dos Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 155 22.3 Função Cosseno . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 158 22.3.1 Definição . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 158 22.3.2 Propriedades . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 158 22.3.3 Gráfico . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 159 22.3.4 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 159

*Conteúdo* 9

22.3.5 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 160 22.3.6 Solução dos Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 160 22.4 Função Tangente . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 162 22.4.1 Definição . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 162 22.4.2 Propriedades . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 162 22.4.3 Gráfico . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 163 22.4.4 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 164 22.4.5 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165 22.4.6 Solução dos Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165 22.5 Função Cotangente . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 166 22.5.1 Definição . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 166 22.5.2 Propriedades . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 166 22.5.3 Gráfico . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 167 22.6 Função Secante . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 167 22.6.1 Definição . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 167 22.6.2 Propriedades . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 167 22.6.3 Gráfico . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 168 22.7 Função Cossecante . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 169 22.7.1 Definição . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 169 22.7.2 Propriedades . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 169 22.7.3 Gráfico . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 170 22.8 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 170 22.8.1 Solução dos Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 171

**23 Relações Fundamentais 173** 23.1 Introdução . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 173 23.2 Relações Fundamentais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 174

23.2.1 Teorema . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 174 23.2.2 Relações . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 174 23.2.3 Teoremas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 175 23.2.4 Relações . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 176 23.2.5 Corolários . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 176

23.3 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 177 23.4 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 178 23.4.1 Solução dos Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 179

10 *Conteúdo*

**24 Triângulos Retângulos 181** 24.1 Elementos Principais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 181 24.2 Propriedades Trigonométricas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 182

24.2.1 Observações . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 183 24.3 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 184 24.4 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 186 24.4.1 Solução dos Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 186

**25 Triângulos Quaisquer 189** 25.1 Lei dos Cossenos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 189 25.1.1 Demonstração . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 189 25.1.2 Exercícios Resolvidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 190 25.2 Resolução de Triângulos Quaisquer . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 191 25.3 Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 193 25.3.1 Solução dos Exercícios Propostos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 194

**Bibliografia 195**

NOTAS DE AULA 1

**Conjuntos**

**1.1 Conceitos**

**1.1.1 Conjuntos**

Sinônimo de agrupamento, coleção, classe, etc. representado com letras maiúsculas. **Exemplo 1**:

A,B,F

**1.1.2 Elementos**

Objetos que constituem determinado conjunto, são chamados de elementos do con junto e representados por letras minúsculas.

**Exemplo 2**:

*a*,*b*, *f*

**1.1.3 Pertinência**

Um elemento pode pertencer ou não a um conjunto. Para indicar pertinência, utiliza mos o símbolo *∈*, e quando não pertence utilizamos o *∉*.

• X *∈* A (Lê-se: X pertence a A)

• X *∈* B (Lê-se: X não pertence a B)

\*Tais símbolos são usados para representar a relação de elemento com conjunto.

**1.2 Representação de um conjunto**

Um conjunto pode ser representado por 2 formas:

11

12 *Notas de Aula 1. Conjuntos*

**1.2.1 Por enumeração**

Podemos representar um conjunto enumerando seus elementos.

**Exemplo 1**: Conjunto dos números positivos pares, menores que 10:

A *=* {2, 4, 6, 8}

**1.2.2 Por propriedade**

Podemos representar por meio de uma prioridade que caracteriza seus elementos. **Exemplo 2**:

• A *=* {*x | x ∈* N e *x <* 8}

• B *=* {*x | x* é vogal}

A propriedade permite estabelecer se um dado elemento, pertence ou não a um conjunto.

**1.2.3 Exemplos**

**Exemplo 1**: Sendo N *=* {0, 1, 2, 3,...}, dar por enumeração, os seguintes conjuntos:

a) A *=* {*x ∈* N *| x =* 3*k*,*k ∈* N}

*•* **Solução**: É determinado pela expressão *x =* 3*k*, com *k ∈* N, logo:

*k =* 0 *=⇒ x =* 3 *·* 0 *=* 0

*k =* 1 *=⇒ x =* 3 *·* 1 *=* 3

*k =* 2 *=⇒ x =* 3 *·* 2 *=* 6

...

Logo: A *=* {0, 3, 6,...}

b) B *=* {*x ∈* N *| x =* 2*k*,*k ∈* N}

*•* **Solução**: Os elementos são determinados pela expressão *x =* 2*k*, com *k ∈* N, logo:

*k =* 0 *=⇒ x =* 20 *=* 1

*k =* 1 *=⇒ x =* 21 *=* 2

*k =* 2 *=⇒ x =* 22 *=* 4

...

Logo: B *=* {1, 2, 4,...}

*1.3. Diagrama de Venn* 13

**Exemplo 2**: Representar o conjunto A *=* {0, 4, 8, 12,...} por meio de uma propriedade. *•* **Solução**: Os elementos de A variam de 4 em 4, logo:

A *=* {*x ∈* N *| x =* 4*k*,*k ∈* N}

**Exercício:** Escrever por enumeração o conjunto:

A *=* {*x ∈* R *| x*2 *−*5*x +*6 *=* 0}

*•* **Solução**: Os elementos de A são raízes da equação:

*x*2 *−*5*x +*6 *=* 0

∆ *= b*2 *−*4*ac =* 25*−*24 *=* 1

*x =*5*±*1

2

*x =* 2 ou *x =* 3

Logo, A *=* {2, 3}.

**1.3 Diagrama de Venn**

Toda figura utilizada para representar um conjunto é chamada diagrama de Venn.

**Exemplo 1**: O conjunto A *=* {1, 2, 3, 4} pode ser representado por:

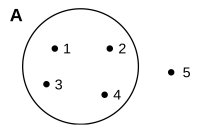


Figura 1.1: Demonstração de membros de um conjunto.

Observe que:

2 *∈* A (ponto interno a A)

5 *∉* A (ponto externo a A)

14 *Notas de Aula 1. Conjuntos*

**1.4 Igualdade entre conjuntos**

Sejam:

A *=* {1, 2, 3, 4} e

B *=* {4, 3, 2, 1}

Nota-se que A e B possuem os mesmo elementos. Para:

A *=* {*x|x* é par e menor que 10} e

B *=* {2, 4, 6, 8}

Novamente A e B possuem os mesmo elementos.

Logo, A *=* B, pois possuem os mesmos elementos. A negação da igualdade é indi cada por A *=* B.

**Exemplo 1**:

A *=* {1, 3, 5}

B *=* {0, 1, 4, 8}A *=* B (1.1)

**1.5 Conjunto unitário**

Definição: chama-se conjunto unitário aquele que possui um único elemento. **Exemplo 1**:

1. Conjunto das soluções da equação: 3*x +*1 *=* 10

*•* **Solução**: {3}

2. Conjunto dos estados brasileiros que fazem fronteira com o Uruguai: *•* **Solução**: {Rio Grande do Sul}

**1.6 Conjunto vazio**

**Definição**: Conjunto que não possui elemento algum. O símbolo usual para o conjunto vazio é . Um conjunto vazio é obtido quando descrevemos um conjunto através de uma propriedade P logicamente falsa.

**Exemplo 1**:

*1.7. Principais símbolos lógicos* 15

1. {*x|x = x*} *=*

2. {*x|x* é ímpar e múltiplo de 2 } *=*

3. {*x|x <* 0 e *x >* 0} *=*

**1.7 Principais símbolos lógicos**

• *|*: tal que

• *∃*: existe ao menos um

• *∃*!: existe um único

• *∀*: qualquer que seja ou para todo

• *=⇒* : implicação ou então

• *⇐⇒* : equivalente ou se e somente se

**1.8 Subconjuntos**

Definição: Dados 2 conjuntos A e B, dizemos que A é subconjunto de B, se e somente se, cada elemento do conjunto A, é também um elemento do conjunto B. Indicamos por:

A *⊂* B (Lê-se A está contido em B)



Figura 1.2: Demonstração de um conjunto A contido em um conjunto B.

Em símbolos:

A *⊂* B *⇐⇒* (*∀x*)(*x ∈* A *=⇒ x ∈* B)

**Exemplo 1**:

16 *Notas de Aula 1. Conjuntos*

• {*a*,*b*} *⊂* {*a*,*b*,*c*,*d*} • {*a*} *⊂* {*a*,*b*}

• {*a*,*b*} *⊂* {*a*,*b*}

• {*x|x* é inteiro e par} *⊂* {*x|x* é inteiro}

Também podemos escrever B *⊃* A (Lê-se B contém A).

Com a notação A *⊂* B, indicamos que A não está contido em B, logo, existe ao menos 1 elemento de A que não pertence a B.

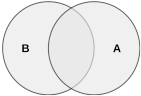


Figura 1.3: A *⊂* B Figura 1.4: A *⊂* B

Com a igualdade de conjuntos podemos representar como:

A *=* B *⇐⇒* (*∀x*)(*x ∈* A *⇐⇒ x ∈* B)

Todo elemento de A é elemento de B e vice-versa, ou seja, A *⊂* B eB *⊂* A, logo: A *=* B *⇐⇒* (A *⊂* B e B *⊂* A)

**1.9 Exercícios Propostos**

1. Dados A *=* {1, 2, 3, 4} e B *=* {2, 4}, pede-se:

a) Reescrever com os símbolos da teoria dos conjuntos as seguintes sentenças: 1*o*) 3 é elemento de A

*•* **Solução**: 3 *∈* A

2*o*) 1 não está em B

*•* **Solução**: 1 *∉* B

3*o*) B é parte de A

*•* **Solução**: B *⊂* A ou A *⊃* B

4*o*) B é igual a A

*•* **Solução**:

5*o*) 4 pertence a B

*•* **Solução**: 4 *∈* B

b) Classificar as sentenças anteriores em V ou F

*1.9. Exercícios Propostos* 17

1*o*) (V) 2*o*) (V) 3*o*) (V)

4*o*) (F) 5*o*) (V)

2. Sendo A *=* {1,2}, B *=* {2,3}, C *=* {1,3,4} e D *=* {1,2,3,4}, classificar em V ou F cada sentença abaixo e justificar

a) A *⊂* D:

b) A *⊂* B:

c) B *⊂* C:

d) D *⊃* B:

e) C *=* D:

f ) A *⊂* C:

**1.9.1 Solução dos Exercícios Propostos**

1. (V), pois 1 *∈* A, 1 *∈* D, 2 *∈* A e 2 *∈* D.

2. (F), pois 1 *∈* A e 1 *∉* B.

3. (F), pois 2 *∈* B e 2 *∉* C.

4. (V), pois 2 *∈* B e 2 *∈* D, 3 *∈* B e 3 *∈* D.

5. (F), pois 2 *∈* D e 2 *∉* C.

6. (V), pois 2 *∈* A e 2 *∉* C.

18 *Notas de Aula 1. Conjuntos*

NOTAS DE AULA 2

**Conjuntos**

**2.1 Conjunto Universo**

**Definição**: O conjunto que contém todos os outros conjuntos chama-se conjunto universo (U).

**2.2 Conjunto das partes**

**Definição**: O conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto A é deno minado conjunto das partes de A, sendo indicado por P(A), onde:

P(A) *=* {*x | x ∈* A}

**Exemplo 1**: Se A *=* {*a*} os elementos de P(A) são e {*a*}, isto é:

P(A) *=* {, {*a*}}

Se A *=* {*a*,*b*} os elementos de P(A) são , {*a*}, {*b*} e {*a*,*b*} isto é:

P(A) *=* {, {*a*}, {*b*}, {*a*,*b*}}

Se A *=* {1, 2, 3}, os elementos de P(A) são:

{, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}} *=* P(A)

Logo, *|*P(A)*| =* 2*n* onde *n* é o número de elementos do conjunto.

19

20 *Notas de Aula 2. Conjuntos* **2.3 Reunião de conjuntos**

**Definição**: Dados dois conjuntos A e B, chama-se reunião de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

A*∪*B *=* {*x | x ∈* A ou *x ∈* B}

O conjunto A *∪* B (lê-se A união B) é formado pelos elementos que pertencem a pelos menos um dos conjuntos A ou B.

**Exemplos 1**:

• {*a*,*b*}*∪*{*c*,*d*} *=* {*a*,*b*,*c*,*d*}

• {*a*,*b*}*∪*{*a*,*b*,*c*,*d*} *=* {*a*,*b*,*c*,*d*}

• {*a*,*b*,*c*}*∪ =* {*a*,*b*,*c*}

**Em diagrama**:

a) A *=* {0, 1, 2, 3, 4}

B *=* {1, 3, 5, 7}

A*∪*B *=* {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7}

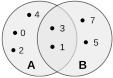


Figura 2.1: Diagrama de Venn para A*∪*B *=* {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7}

b) A *=* {0, 1, 2}

B *=* {0, 1, 2, 3, 4}

A*∪*B *=* {0, 1, 2, 3, 4} *=* B

*2.3. Reunião de conjuntos* 21 

Figura 2.2: Diagrama de Venn para A*∪*B *=* {0, 1, 2, 3, 4} *=* B

**2.3.1 Intersecção de conjuntos**

**Definição**: Dados dois conjuntos A e B, chama-se intersecção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertençam a A e B.

A*∩*B *=* {*x | x ∈* A e *x ∈* B}

**Exemplos**:

**Exemplo 1**: A *=* {0, 1, 2, 3, 4} B *=* {1, 3, 5, 7}

A*∩*B *=* {1, 3}

**Exemplo 2**: A *=* {0, 1, 2} B *=* {0, 1, 2, 3, 4}

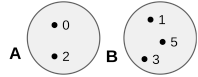
A*∩*B *=* {0, 1, 2} *=* A



**Exemplo 3**: A *=* {0, 2}

B *=* {1, 3, 5}

A*∩*B *=*

**

22 *Notas de Aula 2. Conjuntos*

**2.3.2 Diferença de conjuntos**

**Definição**: Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

A*−*B *=* {*x | x ∈* A e *x ∉* B}

**Exemplo 1:**

a) {*a*,*b*,*c*}*−*{*b*,*c*,*d*,*e*} *=* {*a*}

b) {*a*,*b*,*c*}*−*{*b*,*c*} *=* {*a*}

c) {*a*,*b*}*−*{*c*,*d*,*e*, *f* } *=* {*a*,*b*}

d) {*a*,*b*}*−*{*a*,*b*,*c*,*d*,*e*} *=*

**2.3.3 Complementar de B em A**

**Definição**: Dados dois conjuntos A e B, tais que B *⊂* A, chama-se complementar de B em relação a A, o conjunto A *−* B, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.

**Símbolo**:

CBAou A

Esta simbologia indica **"o complemento de B em relação a A"**. Notemos que CBA só é definido para B *⊂* A e aí temos:

CBA *=* A*−*B

**Exemplo 1:**:

a) Se A *=* {*a*,*b*,*c*,*d*,*e*} e B *=* {*c*,*d*,*e*}, então:

CBA *=* A*−*B *=* {*a*,*b*}

b) Se A *=* {*a*,*b*,*c*,*d*} *=* B então:

CBA *=*

**Observação**: O complementar de B em relação a A é o que falta para B ficar igual a A.

*2.4. Propriedades* 23 **2.4 Propriedades**

**2.4.1 Inclusão** (*⊂*)

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades: 1. *⊂* A

2. A *⊂* A (reflexiva)

3. A *⊂* B e B *⊂* A *=⇒* A *=* B (anti-simétrica)

4. A *⊂* B e B *⊂* C *=⇒* A *⊂* C (transitiva)

**2.4.2 União** (*∪*)

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades: 1. A*∪* A *=* A (idempotente)

2. A*∪ =* A (elemento neutro)

3. A*∪*B *=* B*∪* A (comutativa)

4. (A*∪*B)*∪*C *=* A*∪*(B*∪*C) (associativa)

**2.4.3 Intersecção** (*∩*)

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades: 1. A*∩* A *=* A (idempotente)

2. A*∩*U *=* A (elemento neutro)

3. A*∩*B *=* B*∩* A (comutativa)

4. A*∩*(B*∩*C) *=* (A*∩*B)*∩*C (associativa)

24 *Notas de Aula 2. Conjuntos*

**2.5 Exercícios Propostos**

1. Construir o conjunto das partes do conjunto A *=* {*a*,*b*,*c*,*d*}

2. Dados os conjuntos A *=* {1,2,3}, B *=* {3,4} e C *=* {1,2,4} determinar o conjunto X tal que:

a) X *∪*B *=* A*∪*C:

b) X *∩*B *=* :

**2.5.1 Solução dos Exercícios Propostos**

1. *n*P(A) *=* 24 *=* 16, logo:

P(A) *=*{, {*a*}, {*b*}, {*c*}, {*d*},

{*a*,*b*}, {*a*,*c*}, {*a*,*d*}, {*b*,*c*},

{*b*,*d*}, {*c*,*d*}, {*a*,*b*,*c*}, {*a*,*b*,*d*},

{*b*,*c*,*d*}, {*c*,*d*,*a*}, {A}}

2. a) X *∪*B *=* {1, 2, 3, 4}, então, os possíveis elementos de X são: 1, 2, 3 e 4

b) X *∩*B *= =⇒* 3 *∉* X e 4 *∉* X

Conclusão:

X *=* {1, 2}

NOTAS DE AULA 3

**Conjuntos Numéricos**

**3.1 Conjunto dos Números Naturais** N

N *=* {0, 1, 2, 3, 4, 5,...}

Um subconjunto importante de N é o conjunto N*∗*:

N *=* {1, 2, 3, 4, 5, 6,...} *=⇒* zero foi excluído

Ordenando sobre uma reta, temos:



Figura 3.1: Demonstração de N sobre a reta real

**3.2 Conjunto dos Números Inteiros** Z

Z *=* {...,*−*3.*−*2,*−*1, 0, 1, 2, 3,...}

Além do N convém destacar os seguintes subconjuntos de Z:

• Z*∗ =* Z*−*{0}

• Z*+ =* Conjunto dos inteiros positivos

• Z*− =* Conjunto dos inteiros negativos

Observe que Z*+ =* N.

Ordenando Z sobre uma reta, temos:

25

26 *Notas de Aula 3. Conjuntos Numéricos*

**

Figura 3.2: Demonstração de Z sobre a reta real

**3.3 Conjunto dos Números Racionais** Q

Acrescentando as frações positivas e negativas aos números inteiros, teremos os núme ros racionais Q.

**Então**: *−*2,*−*54,*−*1,*−*13, 0, 35, 1, 32por exemplo são números racionais. Todo número racional pode ser colocado na forma *ab*, com *a ∈* Z e *b ∈* Z e *b =* 0. **Exemplo 1**:

• *−*2 *= −*21*= −*42*= −*63

• 0 *=*01*=*02*=*03

• 1 *=*11*=*22*=*33

Assim podemos escrever:

Q *=*

*x | x =ab*, com *a ∈* Z, *b ∈* Z e *b =* 0

Consideremos a representação decimal de um número racional *ab*, que se obtém dividindo-se *a* por *b*

1. 12*=* 0, 5 *−*54*= −*1, 25 7520 *=* 3, 75

Estes exemplos referem-se aos decimais exatos ou finitos.

2. 13*=* 0, 333... 76*=* 1, 1666... 67*=* 0, 857142857142...

Estes exemplos referem-se aos decimais periódicos ou infinitos.

Então todo decimal exato ou periódico pode ser representado na forma de um número racional *ab*. Os números racionais podem ser expressos sobre a reta, como segue:

Observando o gráfico notamos que:

1. Entre dois inteiros nem sempre existe outro inteiro

2. Entre dois racionais sempre existe outro racional

*3.4. Números Irracionais* R*−*Q 27



Figura 3.3: Reta real com números racionais Q.

**3.4 Números Irracionais** R*−*Q

Consideremos, por exemplo, os número 2 e3, e vamos determinar sua representa ção decimal:

2 *=* 1, 14142135...

3 *=* 1, 73205080...

Observamos que existem decimais infinitos, não periódicos, as quais damos o nome de números irracionais que não podem ser escritos na forma *ab*.

Um número irracional bastante conhecido é o número π *=* 3, 1415926535....

**3.5 Exercícios Resolvidos**

1. Assinale V ou F a cada uma das seguintes afirmações:

a) *−*7 *∈* N:

*•* **Solução**: (F)

b) 2 *∈* Q:

*•* **Solução**: (F)

c) 4 *∈* Z:

*•* **Solução**:(V)

d) *−*6 *∈* Q:

*•* **Solução**: (V)

e) 10 *∈* {irracionais}: *•* **Solução**: (V)

f ) 3π *∈* Q:

*•* **Solução**: (F)

g) *−*π *∈* {irracionais}: *•* **Solução**: (V)

h) 12*∈* Z:

*•* **Solução**: (F)

i) *−*5 *∈* R*−*Q:

*•* **Solução**: (F)

j) 9 *∈* Q:

*•* **Solução**: (V)

k) 38 *∈* N:

*•* **Solução**: (V)

l) 0, 16666... *∈* Q: *•* **Solução**: (V)

28 *Notas de Aula 3. Conjuntos Numéricos*

m) 0, 202002000... *∈* Q:

*•* **Solução**: (V)

n) 94*∈* Q:

*•* **Solução**: (V)

o) 0, 010010001... *∈* R*−*Q: *•* **Solução**: (F)

**3.6 Números Reais** R

p) *−*2 *∈* Z:

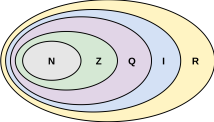
*•* **Solução**: (V)

q) π *∈* {irracionais}: *•* **Solução**: (V)

r) π3 *∈* Q:

*•* **Solução**: (F)

Dados Q e {irracionais}, define-se o conjunto dos números reais como: R *=* Q*∪*{irracionais} *=* {*x | x* é racional ou *x* é irracional} Assim, são números reais:

• Os N 

• Os Z

• Os Q

• Os {irracionais} \*indicados pela letra I no diagrama

Figura 3.4: Representação dos conjuntos numéricos

Como subconjuntos importantes de R temos: • R*∗ =* R*−*{0}

• R*+ =* = Conjunto dos reais positivos • R*− =* = Conjunto dos reais negativos Logo chegamos a representação da reta real:

*3.7. Relação de ordem no conjunto* R 29



Figura 3.5: Representação da reta nos números reais

**3.7 Relação de ordem no conjunto** R

Sejam dois números reais quaisquer *a* e *b*:

• Entre *a* e *b*, poderá ocorrer uma e somente uma das relações:

*a = b* ou *a > b* ou *a < b*

• *a ≤ b* (lê-se *a* menor ou igual a *b*)

• *a ≥ b* (lê-se *a* maior ou igual a *b*)

• Um número real *c* está entre *a* e *b* se e somente se *a < c* e *c < b*. Podemos representar como: *a < c < b*.

**3.8 Exercícios Propostos**

1. Usando a notação de desigualdade, escreva as seguintes relações:

a) *x* está situado à direita de 10 na reta real:

b) *y* está situado entre *−*1 e 6 na reta real:

c) *x* está situado à esquerda de *−*2 na reta real:

d) *z* é um número positivo, ou seja, está situado à direita de 0 na reta real: e) *x* está situado entre 2 e 7 na reta real:

f ) *x* é um número negativo, ou seja, está situado à esquerda de 0 na reta real: **3.8.1 Solução dos Exercícios Propostos**

1. a) *x >* 10 b) *−*1 *< y <* 6

c) *x < −*2

d) *z >* 0

e) 2 *< x <* 7 f ) *x <* 0

30 *Notas de Aula 3. Conjuntos Numéricos*

NOTAS DE AULA 4

**Intervalos**

Dados dois números reais *a* e *b*, com *a < b*, definimos:

a) Intervalo aberto de extremos *a*,*b* é o conjunto:

]*a*,*b*[*=* {*x ∈* R *| a < x < b*}



Figura 4.1: Representação gráfica para ]*a*,*b*[

b) Intervalo fechado de extremos *a*,*b* é o conjunto:

[*a*,*b*] *=* {*x ∈* R *| a ≤ x ≤ b*}



Figura 4.2: Representação gráfica para [*a*,*b*]

c) Intervalo fechado à esquerda (ou aberto à direita) de extremos *a*,*b* é o conjunto: [*a*,*b*[*=* {*x ∈* R *| a ≤ x < b*}

d) Intervalo fechado à direita (ou aberto à esquerda) de extremos *a*,*b* é o conjunto: ]*a*,*b*] *=* {*x ∈* R *| a < x ≤ b*}

31

32 *Notas de Aula 4. Intervalos*

**

Figura 4.3: Representação gráfica para [*a*,*b*[



Figura 4.4: Representação gráfica para ]*a*,*b*]

**4.1 Exemplos**

**Exemplo 1**: ]2, 5[*=* {*x ∈* R *|* 2 *< x <* 5}, intervalo aberto

**Exemplo 2**: [*−*1, 4] *=* {*x ∈* R *| −*1 *≤ x ≤* 4}, intervalo fechado

**Exemplo 3**: [25, 7[*=* {*x ∈* R *|*25*≤ x <* 7}, intervalo fechado à esquerda

**Exemplo 4**: ]*−*13,2] *=* {*x ∈* R *| −* 13*< x ≤*2, intervalo fechado à direita

Definimos como intervalos infinitos os seguintes subconjuntos de R, com sua re presentação na reta real:

1*o*. {*x ∈* R *| x > a*} *=*]*a*,*+∞*[



Figura 4.5: Representação gráfica para *x > a*

2*o*. {*x ∈* R *| x ≥ a*} *=* [*a*,*+∞*[



Figura 4.6: Representação gráfica para *x ≥ a*

3*o*. {*x ∈* R *| x < a*} *=*]*−∞*,*a*[

*4.2. Sistema Cartesiano* 33



Figura 4.7: Representação gráfica para *x < a*

4*o*. {*x ∈* R *| x ≤ a*} *=*]*−∞*,*a*]



Figura 4.8: Representação gráfica para *x ≤ a*

5*o*. Logo, o intervalo ]*−∞*,*+∞ =* R.

**4.2 Sistema Cartesiano**

**Definição**: É um sistema constituído por dois eixos, *x* e *y*, perpendiculares entre si. O eixo *x* é denominado eixo das abscissas.

O eixo *y* é denominado eixo das ordenadas.

Estes eixos dividem o plano em quadrantes.

**Exemplo 1**: Localização no plano do ponto P com coordenadas (*x*, *y*) *=* (*a*,*b*): 

Figura 4.9: Demonstração do plano cartesiano com ponto P de coordenadas (*x*, *y*) *=* (*a*,*b*)

34 *Notas de Aula 4. Intervalos*

**4.2.1 Par Ordenado**

**Definição**: Para cada elemento *a* e cada elemento *b*, admitiremos a existência de um terceiro elemento (*a*,*b*) que denominamos par ordenado de modo que se tenha:

(*a*,*b*) *=* (*c*,*d*) *⇐⇒ a = c* e *b = d*

**Exemplos**:

**Exemplo 1**: Localize os pontos no plano cartesiano:

A(0, 2),B(0,*−*3),C(2, 5),D(*−*3, 4)



Figura 4.10: Localização dos pontos A, B, C e D no plano cartesiano

**Exemplo 2**: Calcular *x* e *y* de modo que os pares ordenados

(*x + y*,*x − y*) e (3, 5) sejam iguais:



(4.1)



Então:

*x + y =* 3 (I)

*x − y =* 5 (II) 2*x =* 8 (I + II)

*x =* 4 (4.2)

Pela equação (I) (*x + y =* 3):

4*+ y =* 3

*y =* 3*−*4

*y = −*1

Então (*x + y*,*x − y*) *=* (4*−*1, 4*+*1) *=* (3, 5).

(4.3)

*4.3. Exercícios Propostos* 35

**4.3 Exercícios Propostos**

1. Descrever, conforme a notação da teoria dos conjuntos, os seguintes intervalos:

a) [*−*1, 3]

b) [0, 2[

c) ]*−*3, 4[

d) ]*−∞*, 5[

e) [1,*+∞*[

2. Utilizando a representação gráfica dos intervalos sobre a reta real, determinar A*∩*B e A*∪*B, sendo A *=* [0, 3] e B *=* [1, 4]

3. Descrever os seguintes conjuntos:

a) [0, 2] *∩* [1, 3]

b) [0, 2] *∩* ]1, 3[

c) ]*−*1, 23[ *∩* ]0, 43[

d) ]*−∞*, 2] *∩* [0,*+∞*[

4. Determinar os seguintes conjuntos:

a) [*−*1, 3] *∪* [0, 4]

b) ]*−*2, 1] *∪* ]0, 5[

c) [*−*1, 3] *∪* [3, 5]

d) [*−*12, 0[ *∪* ]*−*32,*−*14]

5. Sendo A *=* [0, 5[ e B *=*]1, 3[, determinar CBA

**4.3.1 Solução dos Exercícios Propostos**

1. a) [*−*1, 3] *=* {*x ∈* R *| −*1 *≤ x ≤* 3}

b) [0, 2[*=* {*x ∈* R *|* 0 *≤ x <* 2}*x*

c) ]*−*3, 4[*=* {*x ∈* R *| −*3 *< x <* 4}

d) ]*−∞*, 5[*=* {*x ∈* R *| x <* 5}

e) [1,*+∞*[*=* {*x ∈* R *| x ≥* 1}

36 *Notas de Aula 4. Intervalos* 2. 

3. a) 

b) 

5. 

Logo, CBA*=* [0, 1]*∪*[3, 5[

NOTAS DE AULA 5

**Produto Cartesiano**

**Definição**: Sejam dois conjuntos não vazios A e B, denomina-se produto cartesiano de A por B o conjunto formado pelos pares ordenados nos quais o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.

A*×*B *=* {(*x*, *y*) *| x ∈* A e *y ∈* B}

**Observações**:

1. Se A *=* ou B *=* por definição: A*×*B *=* , isto é, A*× =* ou *×*B *=*

2. Se A *=* B, podemos escrever o produto cartesiano A*×*A como A2, isto é, A*×*A *=* A2 3. Sendo A e B não vazios, temos A*×*B *=* B*×* A. Ou seja, não há comutatividade

4. Se A e B são conjuntos finitos com *m* e *n* elementos respectivamente, então A*×*B é um conjunto finito com *m ×n* elementos

5. Se A ou B for infinito e nenhum deles for vazio, então A*×*B é um conjunto infinito

**5.0.1 Exemplos**

**Exemplo 1**: Se A *=* {1, 2, 3} e B *=* {1, 2} temos:

A*×*B *=* {1, 1, (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)}

B*×* A *=* {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)}

As representações no plano cartesiano são as seguintes:

37

38 *Notas de Aula 5. Produto Cartesiano *Figura 5.1: Representação de A*×*B Figura 5.2: Representação de B*×* A **Exemplo 2**: Se A *=* {*x ∈* R *|* 1 *≤ x <* 3 e B *=* {2}, logo A*×*B *=* {(*x*, 2)*|x ∈* A e 2 *∈* B.

A representação gráfica de A*×*B dá como resultado o conjunto de pontos paralelo ao eixo *x* da figura abaixo:



Figura 5.3: Representação no plano cartesiano

de A*×*B *=* {(*x*, 2) *| x ∈* A e 2 *∈* B}

**Exemplo 3**: Se A *=* {*x ∈* R *|* 1 *≤ x ≤* 3} e B *=* {*x ∈* R *|* 1 *≤ x ≤* 5} temos A*×*B *=* {(*x*, *y*) *∈* R2*|* 1 *≤ x ≤* 3 e 1 *≤ y ≤* 5}.

Graficamente é representado por um retângulo, distinto do anterior:

39



Figura 5.4: Representação no plano

cartesiano de A*×*B

**5.0.2 Exercícios Resolvidos**

**Observação**: Como A e B são intervalos e produto cartesiano, neste caso será o conjunto dos pontos do plano hachurado na figura.

1. Dados A *=* {1,3,4}, B *=* {*−*2,1} e C *=* {1,2}, determine e represente-os pelo gráfico cartesiano

a) A*×*B

*•* **Solução**: A*×*B *=* {(1,*−*2), (1, 1), (3,*−*2), (3, 1), (4,*−*2), (4, 1)}

b) B*×*C

*•* **Solução**: B*×*C *=* {(*−*2, 1), (*−*2, 2), (1, 1), (1, 2)}

c) B2

*•* **Solução**: B2 *=* {(*−*2,*−*2), (*−*2, 1), (1,*−*2), (1, 1)}

**5.0.3 Exercícios Propostos**

1. Dados os conjuntos A *=* {1, 2, 3}, B *=* {2, 4, 6} e

C *=* {1, 2} determine:

a) A*×*(B*−*C)

b) B*×*CCA

c) (A*−*B)*×*(A*−*C)

40 *Notas de Aula 5. Produto Cartesiano* 2. Dados os conjuntos:

A *=* {*x ∈* R *|* 1 *≤ x ≤* 3}

B *=* {*x ∈* R *| −*2 *≤ x ≤* 2}

C *=* {*x ∈* R *| −*4 *≤ x ≤* 1}

Representar graficamente os produtos:

a) A*×*B

b) A*×*C

c) B*×*C

d) C *×*B

**Solução dos Exercícios Propostos**

1. a) {(1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6)}

b) {(2, 3), (4, 3), (6, 3)}

c) {(1, 3), (3, 3)}

**5.1 Número de Elementos do Produto Cartesiano Observe**:

• A *=* {0, 1, 2} *=⇒ n*(A) *=* 3

• B *=* {2, 4} *=⇒ n*(B) *=* 2

• A*×*B *=* {(0, 2), (0, 4), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4)}

A*×*B *=⇒ n*(A*×*B) *=* 3.2 *=* 6

Logo:

*n*(A*×*B) *= n*(A).*n*(B)

**Exemplo 1**: Sabendo que {(1,2),(4,2)} *⊂* A2e *n*(A2) *=* 9, represente pelos elementos o conjunto A2.

*5.2. Relação Binária* 41

*•* **Solução**: A2representa o quadrado do número de elementos de A, logo: *n*(A2) *=* [*n*(A)]2 *=⇒* [*n*(A)]2 *=* 9 *=⇒ n*(A) *=* 3

Se A é um conjunto de 3 elementos, (1,2) *∈* A2e (4,2) *∈* A2, logo concluímos que A *=* {1, 2, 4}, sendo assim:

A2 *=* A*×* A *=*{(1, 1), (1, 2), (1, 4),

(2, 1), (2, 2), (2, 4),

(4, 1), (4, 2), (4, 4)}

**Exercício**: Se {(1,*−*2), (3, 0)} *⊂* A2e *n*(A2) *=* 16, represente A2 pelos seus elementos.

**5.2 Relação Binária**

**Definição**: Dados dois conjuntos A e B, chama-se relação binária de A em B todo sub conjunto R de A*×*B:

R é uma relação binária de A em B *⇐⇒* R *⊂* A*×*B

Se eventualmente os conjuntos A e B forem iguais, todo subconjunto de A *×* A é chamado de relação binária em A.

R é relação binária em A *⇐⇒* R *∈* A*×* A

**Nomenclatura**:

• A, conjunto de partida da relação R

• B, conjunto de chegada ou contradomínio da relação R

• Quando o par (*x*, *y*) *∈* R, escrevemos *x*R*y*

• Quando o par (*x*, *y*) *∉* R escrevemos *x*✓R*y*.

**5.2.1 Exemplos**

**Exemplo 1**: Se A *=* {1,2,3,4,5} e B *=* {1,2,3,4} quais são os elementos da relação R *=* {(*x*, *y*) *| x < y*} de A em B?

*•* **Solução**: Temos:

R *=*{(1, 2), (1, 3), (1, 4),

(2, 3), (2, 4), (3, 4)}

42 *Notas de Aula 5. Produto Cartesiano*

**Exemplo 2**: Se A *=* {1,2,3,4,5} e B *=* {1,2,3,4,5,6} quais os elementos da relação binária R de A em B, assim definida: *x*R*y ⇐⇒ y = x +*2

*•* **Solução**: Fazem parte da relação todos os pares ordenados (*x*, *y*), tais que *x ∈* A e *y ∈* B tal que *y = x +* 2. Utilizando as representações gráficas, temos:



Figura 5.6: Domínio e imagem de R

Figura 5.5: Representação de ARB

NOTAS DE AULA 6

**Domínio e Imagem**

**Definição**: Se R é uma relação de A em B

• Chama-se domínio de R o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

*x ∈* D *⇐⇒ ∃y*, *y ∈* B *|* (*x*, *y*) *∈* R

• Chama-se imagem de R o conjunto I*m* de todos os segundo elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

*y ∈* I*m ⇐⇒ ∃x*,*x ∈* A *|* (*x*, *y*) *∈* R

Da definição, temos:

D *⊂* A e I*m ⊂* B

**6.0.1 Exemplos**

**Exemplo 1**: Se A *=* {0,2,3,4} e B *=* {1,2,3,4,5,6} qual é o domínio e imagem da relação R *=* {(*x*, *y*) *∈* A*×*B *| y* é múltiplo de *x*}

*•* **Solução**: Pelo esquema das flechas, notamos que D é o conjunto dos elementos de A, dos quais partem flechas e quem I*m* é o conjunto dos elementos de B aos quais chegam as flechas, logo:

R *=* {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)}

D *=* {2, 3, 4} e I*m =* {2, 3, 4, 6}

**Exemplo 2**: Se A *=* {*x ∈* R *|* 1 *≤ x ≤* 3} e B *=* {*y ∈* R *|* 1 *≤ y ≤* 4} qual o domínio e a imagem da relação R *=* {(*x*, *y*) *∈* A*×*B *| y =* 2*x*}?

*•* **Solução**: Pela representação cartesiana temos:

D *=* {*x ∈* R *|* 1 *≤ x ≤* 2} e

I*m =* {*y ∈* R *|* 2 *≤ x ≤* 4}

43

44 *Notas de Aula 6. Domínio e Imagem *

Figura 6.1: Representação de conjuntos para A*×*B



Figura 6.2: Representação cartesiana da relação R

**6.0.2 Exercícios Resolvidos**

1. Estabelecer o domínio(D) e a imagem(I*m*) das seguintes relações: a) {(1, 1), (1, 3), (2, 4)}

D *=* {1, 2}

I*m =* {1, 3, 4}

b) (2, 1), (1,*−*3), (5,2)

D *=* {1, 2, 5}

I*m =*

*−*3, 1,2

45

c) (1*+*2, 2), (1*−*3, 1)

D *=*

1*+*2, 1*−*3

I*m =*

1,2

2. Sejam os conjuntos A *=* {*−*2,*−*1,0,1,2,3,4,5} e B *=* {*−*2,*−*1,0,1,2} e R a relação binária de A e B, definida por:

*x*R*y ⇐⇒ x = y*2

Pede-se:

a) Enumerar os pares ordenados de R

R *=* {(0, 0), (1,*−*1), (1, 1), (4,*−*2), (4, 2)}

b) Enumerar os elementos do domínio e imagem de R

D *=* {0, 1, 4}

I*m =* {*−*2,*−*1, 0, 1, 2}

c) Fazer o gráfico cartesiano de R

*y*2*x* (*x*, *y*) 

(*−*2)2 4 (4,*−*2)

(*−*1)2 1 (1,*−*1)

(0)2 0 (0, 0)

(1)2 1 (1, 1)

(2)2 4 (4, 2) Figura 6.3: Representação gráfica da relação R entre os conjuntos A

e B.

46 *Notas de Aula 6. Domínio e Imagem*

**6.1 Relação Inversa**

**Definição**: Seja uma relação binária R de A em B, consideramos o conjunto R*−*1 *=* {(*y*,*x*) *∈* B*×* A *|* (*x*, *y*) *∈* R}

Como R*−*1é um subconjunto de B*×* A, então R*−*1é uma relação binária de B em A a qual chamamos de relação inversa de R.

(*y*,*x*) *∈* R*−*1 *⇐⇒* (*x*, *y*) *∈* R

Ou seja, da definição que R*−*1é o conjunto dos pares ordenados obtidos à partir dos pares ordenados de R, invertendo-se a ordem dos termos em cada par.

**6.1.1 Exemplos**

**Exemplo 1**: Se A *=* {2,3,4,5} e B *=* {1,3,5,7}, quais são os elementos de R, sendo R *=* {(*x*, *y*) *∈* A*×*B *| x < y*} e de R*−*1?

*•* **Solução**:



Figura 6.4: Esquema de flechas para (*x < y*)

Figura 6.5: Esquema de flechas para (*y > x*)

R *=* {(2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7), (4, 5), (5, 7)}

R*−*1 *=* {(3, 2), (5, 2), (7, 2), (5, 3), (7, 3), (5, 4), (7, 5)}

**6.1.2 Propriedades**

1. D(R*−*1 *=* I*m*(R)

*6.2. Funções* 47

2. I*m*(R*−*1) *=* D(R)

3. (R*−*1)*−*1 *=* R

**6.2 Funções**

**Definição**: Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma relação *f* de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B, se e so mente se, para todo *x ∈* A existe um só *y ∈* B, tal que (*x*, *y*) *∈ f* .

*f* é aplicação de A em B *⇐⇒* (*∀x ∈* A,*∃y ∈* B *|* (*x*, *y*) *∈ f* )

Com o auxílio do esquema de flechas, que condições deve satisfazer uma relação *f* de A em B para ser aplicação:

1. Todo *x ∈* A participe de pelo menos um par (*x*, *y*) *∈ f* , isto é, todo elemento de A deve servir como ponto de partida de flecha

2. É necessário que cada elemento *x ∈* A participe de apenas um único par (*x*, *y*) *∈ f* , isto é, cada elemento de A deve servir como ponto de partida de uma única flecha

1. Se existir um elemento de A do qual não parta flecha alguma



2. Se existir um elemento de A do qual partam 2 ou mais flechas

48 *Notas de Aula 6. Domínio e Imagem*

**Observação**: Uma relação *f* não é aplicação (ou função) se não satisfazer uma das condições acima.

NOTAS DE AULA 7

**Polinômios**

**Definição**: Um polinômio em *x* é qualquer expressão na forma

*f* (*x*) *= a*0 *+ a*1*x + a*2*x*2 *+*...*+ anxn*

*f*1(*x*) *= anxn + an−*1*xn−*1 *+*...*+ ax*1 *+ a*0

Onde *n* é um número inteiro não negativo e *an =* 0. Os número *an−*1,...,*a*1,*a*0 são números reais chamados coeficientes. O grau do polinômio é *n*. O coeficiente principal é *an* e *a*0 é o termo independente.

**7.1 Nomenclatura**

Os polinômios com um, dois ou três termos são chamados monômios, binômios ou trinômios, respectivamente.

A forma padrão de um polinômio é com potências de *x* na ordem crescente. **Exemplo 1**:

P(*x*) *= x*4 *−*3*x*3 *+*5*x*2 *−*3*x +*2

Onde: *a*0 *=* 2 (termo independente) ,*a*1 *=* 1,*a*2 *=* 5,

*a*3 *=* 3 e *a*4 *=* 1 tendo-se o grau do polinômio igual a 4.

**Exemplo 2**: Identifique os polinômios pelos termos que os compõe:

a) 3*x* = monômio

b) 5*abc* = monômio

c) 3*x + y* = binômio

d) 5*ab +*3*cd*2 = binômio

e) *x*2 *+*3*x +*7 = trinômio

f ) 3*ab +*4*x y −*10*y* = trinômio

49

50 *Notas de Aula 7. Polinômios*

**Observações**: Os trinômios são compostos por três monômios (3 termos), separa dos por operação de soma ou subtração.

Chama-se valor numérico de *f* em *x* a imagem de *x* pela função *f* , assim como por exemplo, dado o polinômio:

*f* (*x*) *=* 2*+ x + x*2 *+*3*x*3

Onde o valor de *x =* 2, então:

*f* (2) *=* 2*+*(2)*+*(2)2 *+*3(2)3

*f* (2) *=* 2*+*2*+*4*+*24

*f* (2) *=* 32

Logo, a imagem de *f* no ponto *x =* 2 é 32.

Em particular, se *x* é um número real e *f* é um polinômio, tal que *f* (*x*) *=* 0 dizemos que *x* é "uma raiz"ou "um zero"de *f* . Por exemplo, os número -2 e -1 são raízes de:

*f* (*x*) *=* 2*x +*3*x*2 *+ x*3

pois:

*f* (*−*2) *=* 2(*−*2)*+*3(*−*2)2 *+*(*−*2)3 *=* 0

*f* (*−*1) *=* 2(*−*1)*+*3(*−*1)2 *+*(*−*1)3 *=* 0

**7.2 Igualdade**

**Definição**: Dizemos que dois polinômios *f* e *g* são igual (ou idênticos) quando assu mem valores numéricos iguais para todo *x ∈* R, ou seja:

*f = g =⇒ f* (*x*) *= g* (*x*),*∀x ∈* R

**7.3 Exercícios Resolvidos**

1. Quais das expressões abaixo representam um polinômio na variável x?

a) *x*5 *+ x*3 *+*2, Sim

b) 0*x*4 *+*0*x*2, Sim

c) 3, Sim

*7.4. Operações* 51

d) *x*52 *+*3*x*2, Não

e) (*~~x~~*~~)~~4 *+ x +*2, Sim

f ) *x~~x~~ + x*2, Não

g) *x*15, Sim

h) *x +*2, Sim

i) *x*2 *+*2*x +*3, Sim

2. Dada a função polinomial

*f* (*x*) *= x*3 *+ x*2 *+ x +*1

pede-se para calcular: *f* (*−*3), *f* (2*x*) e *f* (*f* (*−*1))

*•* **Solução**:

Temos que:

*f* (*−*3) *=* (*−*3)3 *+*(*−*3)2 *+*(*−*3)*+*1 *= −*20

*f* (2*x*) *=* (2*x*)3 *+*(2*x*)2 *+*(2*x*)*+*1 *=* 8*x*3 *+*4*x*2 *+*2*x +*1

*f* (*f* (*−*1)) *=⇒*

*f* (*−*1) *=* (*−*1)3 *+*(*−*1)2 *+*(*−*1)*+*1 *=* 0 *=⇒*

*f* (*f* (*−*1)) *= f* (0) *=* 1

**7.4 Operações**

**7.4.1 Adição**

Dados dois polinômios *f* e *g* , onde:

*f = a*0 *+ a*1*x + a*2*x*2 *+*...*+ anxn =n*

*i=*0

*g = b*0 *+b*1*x +b*2*x*2 *+*...*+bnxn =n*

*i=*0

Chama-se soma de *f* com *g* o polinômio:

*ai xi bi xi*

(*f + g* )(*x*) *=* (*a*0 *+b*0)*+*(*a*1 *+b*1)*x +*...*+*(*an +bn*)*xn*

52 *Notas de Aula 7. Polinômios*

isto é:

(*f + g* )(*x*) *=*

*n*

*i=*0

(*ai +bi*)*xi*

**Exemplo 1**: Somar *f* (*x*) *=* 4*+*3*x + x*2e *g* (*x*) *=* 5*+*3*x*2 *+ x*4:

*f* (*x*) *=* 0*x*4 *+*0*x*3 *+*1*x*2 *+*3*x +*4

*g* (*x*) *=* 1*x*4 *+*0*x*3 *+*3*x*2 *+*0*x +*5

(*f + g* )(*x*) *=* 1*x*4 *+*0*x*3 *+*4*x*2 *+*3*x +*9

**7.4.2 Substração**

Dados dois polinômios *f* e *g* , segue pela definição anterior de adição, que: (*f − g* )(*x*) *=* (*a*0 *−b*0)*+*(*a*1 *−b*1)*x +*...*+*(*an −bn*)*xn*

isto é:

(*f − g* )(*x*) *=*

**7.4.3 Multiplicação**

Dados dois polinômios *f* e *g* , onde:

*n*

*i=*0

(*ai −bi*)*xi*

*f = a*0 *+ a*1*x + a*2*x*2 *+*...*+ anxn =n*

*i=*0

*g = b*0 *+b*1*x +b*2*x*2 *+*...*+bnxn =n*

*i=*0

Chama-se produto *f* .*g* o polinômio:

*ai xi bi xi*

(*f* .*g* )(*x*) *= a*0*b*0 *+*(*a*0*b*1 *+ a*1*b*1)*x +*(*a*2*b*0 *+ a*1*b*0 *+ a*0*b*2)*x*2 *+*...*+ ambnxm+n* **Exemplo 1**:

*7.4. Operações* 53

1. Multiplicar *f* (*x*) *=* 3*x*3 *+*2*x + x* e *g* (*x*) *=* 6*x*2 *+*5*x +*4, temos:

(*f* .*g* )(*x*) *=* (3*x*3 *+*2*x + x*)(6*x*2 *+*5*x +*4)

(*f* .*g* )(*x*) *=* 3*x*3(6*x*š*+*5*x +*4)*+*2*x*(6*x*2 *+*5*x +*4)*+ x*(6*x*2 *+*5*x +*4)

*=* 18*x*5 *+*15*x*4 *+*12*x*3 *+*12*x*3 *+*10*x*2 *+*8*x +*6*x*3 *+*5*x*2 *+*4*x*

*=* 18*x*5 *+*15*x*4 *+*30*x*3 *+*15*x*2 *+*12*x*

54 *Notas de Aula 7. Polinômios*

NOTAS DE AULA 8

**Polinômios - Continuação**

**Aviso**: Estudar os dispositivos práticos 1 e 2 página 55F do livro Fundamentos de matemática elementar: Polinômios.

**8.1 Propriedades**

as operações seguem as propriedades:

1. Associativa: *f* (*g h*) *=* (*f g* )*h*,*∀f* , *g* ,*h ∈* P

2. Comutativa:*f g = g f* ,*∀f* , *g ∈* P

3. Elemento Neutro: *∃en ∈* P *| f* .*en = f* ,*∀f ∈* P

4. Distributiva: *f* (*g +h*) *= f g + f h*,*∀f* , *g* ,*h ∈* P

**8.2 Divisão**

**Definição**: Dados dois polinômios *f* (dividendo) e *g =* 0 (divisor), dividir *f* por *g* é determinar dois outros polinômios *q* (quociente) e *r* (resto), de modo que se atenda as seguintes condições:

i) *q*.*g +r = f*

ii) δ*r <* δ*g* (ou *r =* 0 para divisão exata)

55

56 *Notas de Aula 8. Polinômios - Continuação*

Dividendo Divisor

Resto Quociente

Tabela 8.1: Método da chave para divisão de números reais e para polinômios

**8.2.1 Método da Chave**

O método da chave descreve o procedimento usado para divisões de números reais, ou seja:

Logo, para divisão de polinômios usando tal método, temos:

*f* (*x*) *=* 2*x*3 *−*7*x*2 *+*4*x −*1 dividendo

*g* (*x*) *= x −*4 divisor

Logo:

✟2*x*✟3 *−*7*x*2 *+*4*x −*1 *x −*4

✘✘✘ *−*2*x*3 *+*8*x*2 2*x*2 *+ x +*8

*x*2 *+*4*x −*1

✟*−x*✟2 *+*4*x*

✚8✚*x −*1

✘*−*8✘*x +*32

31

Tabela 8.2: Divisão de polinômios *f* por *g* utilizando método da chave

Logo, a divisão de *f* por *g* nos dá 2*x*2 *+ x +*8 como coeficiente e resto *r =* 31. Neste tipo de divisão, *r* é um polinômio constante, pois:

δ*g =* 1 *=⇒* δ*r =* 0 ou *r =* 0

*8.2. Divisão* 57

Notemos, finalmente que:

*f* (4) *=* 2(4)3 *−*7(4)2 *+*4(4)*−*1

*=* 128*−*112*+*16*−*1

*=* 31 *= r*

**8.2.2 Exercícios Resolvidos**

1. Dividir *f* (*x*) *=* 3*x*5 *−*6*x*4 *+*13*x*3 *−*9*x*2 *+*11*x −*1 por *g* (*x*) *= x*2 *−*2*x +*3. *•* **Solução**:

Temos a operação dada por:

✟3*x*✟5 *−*6*x*4 *+*13*x*3 *−*9*x*2 *+*11*x −*1 *x*2 *−*2*x +*3

✘✘✘ *−*3*x*5 *+*6*x*4 *−*9*x*3 3*x*3 *+*4*x −*1

✟4*x*✟3 *−*9*x*2 *+*11*x −*1

✘✘✘ *−*4*x*3 *+*8*x*2 *−*12*x*

✟*−x*✟2 *− x −*1

*x*2 *−*2*x +*3

*−*3*x +*2

Com resultado:

*f* (*x*)

*g* (*x*)*=* 3*x*3 *+*4*x −*1*+−*3*x +*2

*x*2 *−*2*x +*3

2. Determinar *a* de modo que a divisão de *f* (*x*) *= x*4 *−*2*ax*3 *+*(*a +*2)*x*2 *+*3*a +*1 por *g* (*x*) *= x −*2 apresente resto igual a 7.

*•* **Solução**:

Quando temos a divisão de um polinômio *f* com δ*f ≥* 1, por um outro polinômio *g* com δ*g =* 1, notamos que *f* aplicada à raiz de *g* , nos dá o resto da divisão de *f* po *g* . Assim:

58 *Notas de Aula 8. Polinômios - Continuação*

*g* (*x*) *= x −*2

0 *= x −*2

*x =* 2 *=⇒ f* (2) *=* 7

E assim:

(2)4 *−*2*a*(2)3 *+*(*a +*2)(2)2 *+*3*a +*1 *=* 7

16*−*16*a +*4*a +*8*+*3*a +*1 *=* 7

*−*9*a +*25 *=* 7

*−*9*a = −*18

*a =*189

*a =* 2

**8.2.3 Exercícios Propostos**

1. Dividir *f* (*x*) *=* 2*x*5 *−*3*x*4 *+*4*x*3 *−*6*x +*7 por *g* (*x*) *= x*3 *− x*2 *+ x −*1

**Solução dos Exercícios Propostos**

1.

**8.3 Produtos Notáveis**

Os produtos notáveis obedecem a leis especiais de formação, e por isso sua utilização permite agilizar determinados tipos de cálculos que, pelas regras normais da multipli cação de expressões, ficariam mais longos. Os produtos notáveis apresentam-se em grande número e dão origem a um conjunto de identidades de grande aplicação.

**8.3.1 Quadrado da soma de dois termos**

Seja *a*,*b ∈* R, tais que:

(*a +b*)2 *=* (*a +b*)(*a +b*) *= a*2 *+*2*ab +b*2

*8.3. Produtos Notáveis* 59

**8.3.2 Quadrado da diferença de dois termos**

Seja *a*,*b ∈* R, tais que:

(*a −b*)2 *=* (*a −b*)(*a −b*) *= a*2 *−*2*ab +b*2

**8.3.3 Cubo da soma de dois termos**

Seja *a*,*b*,*c ∈* R, tais que:

(*a +b*)3 *= a*3 *+*3*a*2*b +*3*ab*2 *+b*3

notemos que o número de termos é 4, pois obedecemos *n +*1, com *n =* 3 neste caso. O sinal de positivo se mantém e decrescemos a potência a partir do primeiro elemento *a* e a partir do primeiro elemento*b*.

**8.3.4 Cubo da diferença de dois termos**

Seja *a*,*b ∈* R, tais que:

(*a −b*)3 *= a*3 *−*3*a*2*b +*3*ab*2 *−b*3

**8.3.5 Produto da soma pela diferença de dois termos**

O produto da soma pela diferença dos mesmos dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo, ou seja:

(*a +b*)(*a −b*) *= a*2 *−b*2

**8.3.6 Exemplos**

**Exemplo 1**: (*x +*7)2 *= x*2 *+*2*x*7*+*72 *= x*2 *+*14*x +*49

**Exemplo 2**: (*x −*4)2 *= x*2 *+*2*x*4*+*42 *= x*2 *+*8*x +*16

**Exemplo 3**: (*x +*7)3 *= x*3 *+*3*x*27*+*3*x*72 *+*73 *= x*3 *+*21*x*2 *+*147*x +*343

**Exemplo 4**: (*x −*4)3 *= x*3 *−*3*x*24*+*3*x*42 *+*42 *= x*3 *−*12*x*2 *+*48*x +*16

**Exemplo 5**: (*x +*7)(*x −*7) *= x*2 *−*72 *= x*2 *−*49

60 *Notas de Aula 8. Polinômios - Continuação*

**8.4 Triângulo de Pascal**

Para se obter a soma ou diferença de dois termos elevados à potências superiores, utilizamos um método prático chamado de triângulo de Pascal. Logo, segue:



Figura 8.1: Triângulo de Pascal

**8.4.1 Exemplos de uso**

**Exemplo 1**: (*a +b*)4 *= a*4 *+*4*a*3*b +*6*a*2*b*2 *+*4*ab*3 *+b*4

**Exemplo 2**: (*a −b*)5 *= a*5 *−*5*a*4*b +*10*a*3*b*2 *−*10*a*2*b*3 *+*5*ab*4 *+b*5

Os produtos notáveis têm aplicação direta na fatoração para cálculo usando funções polinomiais.

NOTAS DE AULA 9

**Funções e Não Funções**

1. A relação de *f* de A em R, com A *=* {*x ∈* R *| −*1 *≤ x ≤* 3} é função pois toda reta vertical conduzida pelos pontos *x ∈* A encontra o gráfica de *f* num só ponto.



Figura 9.1: Demonstração de função *f*

2. A relação *f* de A em R, onde A *=* {*x ∈* R *| −*2 *≤ x ≤* 2} não é função, pois há retas verticais que encontra o gráfico de *f* em 2 pontos.

61

62 *Notas de Aula 9. Funções e Não Funções *Figura 9.2: A *=* {*x ∈* R *| −*2 *≤ x ≤* 2}

3. A função *f* de A em R, com A *=* {*x ∈* R *|* 0 *≤ x ≤* 4} não é função de A em R, pois a reta vertical conduzida pelo ponto (1,0) não encontra o gráfico de *f* . Se *f* fosse função de B em R, onde B *=* {*x ∈* R *|* 2 *≤ x ≤* 4} poderíamos observar uma função *f* .



Figura 9.3: Função *f* de A em R

**9.1 Exercícios Resolvidos**

1. Quais dos esquemas abaixo definem uma função de A *=* {0,1,2} em B *=* {*−*1,0,1,2}?

*9.1. Exercícios Resolvidos* 63 a) 

b) 

c) 

*•* **Solução**: Esta é a alternativa cor

d) 

reta, pois o conjunto de partida é A *=* {0,1,2} e o conjunto de che gada é B *=* {*−*1, 0, 1, 2}.

2. Quais das relações de R em R, cujos gráficos aparecem abaixo, são funções? Justifique.

64 *Notas de Aula 9. Funções e Não Funções* a) *•* **Solução**: É função. b) *•* **Solução**: Não é função. c) *•* **Solução**: Não é função. d) *•* **Solução**: É função.

*9.2. Notação de Funções* 65 e) *•* **Solução**: É função. f ) *•* **Solução**: Não é função. **9.2 Notação de Funções**

Existe uma sentença aberta *y = f* (*x*) que expressa a lei mediante a qual dado *x ∈* A determina-se *y ∈* B tal que (*x*, *y*) *∈ f* , então *f =* {(*x*, *y*) *| x ∈* A, *y ∈* B e *f* (*x*) *= y* e significa que dados ons conjuntos A e B a função *f* tem a lei de correspondência *y = f* (*x*). Indicando tal correspondência *y = f* (*x*), temos:

*f* : A *→* B

*x → f* (*x*)

**9.2.1 Exemplos**

ou *f* : A*f−→* B *x → f* (*x*)

**Exemplo 1**: Associa *x ∈* A e *y ∈* B tal que *y =* 2*x*: *•* **Solução**:

*f* : A *→* B

*x →* 2*x*

**Exemplo 2**: A cada *x ∈* R e *y ∈* R, associa *y = x*2:

66 *Notas de Aula 9. Funções e Não Funções*

*•* **Solução**:

*f* : R *→* R

*x → x*2

**Exemplo 3**: A cada *x ∈* R*+* e *y ∈* R associa *y =~~x~~*:

*•* **Solução**:

*f* : R*+ →* R

*x →x*

**9.2.2 Exercícios Resolvidos**

1. Seja a função:

*f* : R *→* R

*x →* 2*x +*1

então calcule a imagem de 0 pela aplicação *f* .

*f* (0) *=* 2(0)*+*1

*f* (0) *=* 1

2. Qual a notação das seguintes funções de R em R:

a) *f* associa a cada número real ao seu oposto:

*•* **Solução**:

*f* : R *→* R

*x → −x*

b) *g* associa cada úmero real ao seu cubo:

*•* **Solução**:

*g* : R *→* R

*x → x*3

*9.3. Domínio e Imagem de Funções* 67

**9.2.3 Exercícios Propostos**

1. Seja a função:

*f* : R *→* R

*x →* 2*x +*1

então calcule a imagem de *−*2 pela aplicação de *f* .

2. Qual a notação das seguintes funções de R em R:

a) *h* associa a cada número real ao seu quadrado menos *−*1:

b) *k* associa a cada número real ao número 2:

**Solução dos Exercícios Propostos**

1.

*f* (*−*2) *=* 2(*−*2)*+*1

*= −*4*+*1

*f* (*−*2) *= −*3

2. a)

*h* : R *→* R

*x → x*2 *−*1

b)

*k* : R *→* R

*x →* 2

**9.3 Domínio e Imagem de Funções**

**Definição**: Domínio é o conjunto D dos elementos *x ∈* A, para os quais *∃y ∈* B *|* (*x*, *y*) *∈ f* . Domínio é o conjunto de partida, D *=* A.

Imagem é o conjunto I*m* dos elementos *y ∈* B, para os quais *∃x ∈* A *|* (*x*, *y*) *∈ f* . Imagem é o subconjunto do contradomínio, logo notado por I*m ⊂* B.

68 *Notas de Aula 9. Funções e Não Funções *

Pela representação cartesiana, temos:

• D é o conjunto dos pontos da abscissa, tais que as retas verticais conduzidas por estes pontos interceptam o gráfico de *f* .

• I*m* é o conjunto dos pontos da ordenada, tais que as retas horizontais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de *f* .

**9.3.1 Exemplos**

**Exemplo 1**: D *=* {*x ∈* R *| −*2 *≤ x ≤* 1} I*m =* {*y ∈* R *|* 0 *≤ y ≤* 4}

*9.3. Domínio e Imagem de Funções* 69

**Exemplo 2**: D *=* {*x ∈* R *| −*2 *≤ x ≤* 3} I*m =* {*y ∈* R *| −*1 *≤ y ≤* 4} 

**Exemplo 3**: D *=* {*x ∈* R *| x =* 0} 

I*m =* {*y ∈* R *| −*2 *< y <* 0 ou 1 *< y <* 2}

**Exemplo 4**: D *=* {*x ∈* R *| −*2 *< x <* 2} I*m =* {1, 2} 

**9.3.2 Exercícios Propostos**

1. Dar o domínio da seguintes funções reais:

70 *Notas de Aula 9. Funções e Não Funções*

a) *f* (*x*) *=* 3*x +*2:

b) *f* (*x*) *=x−*1

*x*~~2~~*−*4:

c) *f* (*x*) *=*1*x+*1:

**Solução dos Exercícios Propostos**

1. a) D(*f* ) *=* R

b) D(*f* ) *=* {*x ∈* R *| x =* 2}

c) D(*f* ) *=* {*x ∈* R *| x ≥* 1}

d) *f* (*x*) *=*32*x −*1: e) *f* (*x*) *=*3*x+*2

*x−*3:

f ) *f* (*x*) *=*1

*x+*2:

d) D(*f* ) *=* R

e) D(*f* ) *=* R*−*{3} f ) D(*f* ) *=* R*−*{*−*2}

NOTAS DE AULA 10

**Função do Primeiro Grau**

**10.1 Função Constante**

**Definição**: Uma aplicação de *f* de R em R recebe o nome de função constante, quando a cada elemento *x ∈* R associa sempre o elemento *k ∈* R:

*f* : R *→* R

*x → k*

O gráfico da função constante é uma reta passando pelo ponto (0,*k*)



Figura 10.1: I*m =* {*k*}

**10.1.1 Exemplos**

Construir os gráficos das aplicações de R em R definida por:

**Exemplo 1**: *y =* 3

*•* **Solução**:

71

72 *Notas de Aula 10. Função do Primeiro Grau *

**Exemplo 2**: *y = −*1

*•* **Solução**:



**10.2 Função Identidade**

**Definição**: *f* : R *→* R recebe o nome de função identidade quando cada elemento *x ∈* R, associa o próprio *x*, isto é:

*f* : R *→* R

*x → x*

O gráfico é uma reta que contém as bissetrizes de 1*o*e 3*o* quadrantes:

**10.3 Função Linear**

**Definição**: *f* : B *→* R recebe o nome de função linear quando a cada elemento *x ∈* R associa o elemento de *ax ∈* R dado:

*f* : R *→* R

*x → ax*,*a =* 0

*10.3. Função Linear* 73 

Figura 10.2: I*m =* R

**10.3.1 Exemplos**

**Exemplo 1**: Construir o gráfico da função *y =* 2*x* considerando que dois pontos destintos determinam uma reta e, no caso da função linear, um dos pontos é a origem, logo basta atribuir a *x* um valor não nulo e calcular o correspondente *y =* 2*x*.

*•* **Solução**:

*x* 2*x* 

0 0

1 2

Pelos pontos P(0, 0 e Q(1, 2), traçamos a reta PQ que é o gráfico da função. **Exemplo 2**: Construir o gráfico da função *y = −*2*x*. Logo, temos:

*•* **Solução**:

74 *Notas de Aula 10. Função do Primeiro Grau*

*x* 2*x* 

0 0

1 *−*2

**10.3.2 Exercícios Resolvidos**

1. Construir o gráfico das funções de R em R

a) *y =* 2

*•* **Solução**:

b) *y =*2

*•* **Solução**:

**10.3.3 Exercícios Propostos**

1. Construir, num mesmo sistema cartesiano, so gráficos das funções

*10.4. Função Afim* 75

(a) *y = x*

(b) *b =* 3*x*

**Solução dos Exercícios Propostos** 1. **10.4 Função Afim**

(c) *y = −x* (d) *y = −*3*x*

**Definição**: *f* : R *→* R recebe o nbome de função afim quando cada *x ∈* R estiver a ssociado a um elemento (*ax +b*) *∈* R, com *a =* 0, ou seja:

*f* : R *→* R

*x → ax +b*,*a =* 0

**10.4.1 Exemplos**

**Exemplo 1**: *y =* 3*x +*2

*•* **Solução**: *a =* 3 e *b =* 2

**Exemplo 2**: *−*2*x +*1

*•* **Solução**: *a = −*2 e *b =* 1

**Exemplo 3**: *y = x −*3

*•* **Solução**: *a =* 1 e *b = −*3

76 *Notas de Aula 10. Função do*

*Primeiro Grau*

**Exemplo 4**: *y =* 4*x*

*•* **Solução**: *a =* 4 e *b =* 0

**10.4.2 Exercícios Propostos**

1. Construir o gráfico cartesiano das funções de R em R:

a) *y =* 2*x −*1 b) *y = x +*2

c) *y =* 3*x +*2 d) *y =*2*x−*3 2

2. Resolver analiticamente e graficamente o sistema de equações:

*x − y = −*3 (I)

2*x +*3*y =* 4 (II)

**Solução dos Exercícios Propostos**

1. a) b)

*10.4. Função Afim* 77 c) d) 2. Temos duas maneiras distintas para resolução: a) por substituição e b) por adição. a) *x − y = −*3 *=⇒ x = y −*3. Substituindo em (II), temos:

2(*y −*3)*+*3*y =* 4

2*y −*6*+*3*y =* 4

5*y =* 10

*y =* 2

Logo, substituindo *y =* 2 em (I), temos:

*x −*2 *= −*3

*x = −*1

Assim (*x*, *y*) *=* (*−*1, 2)

b) Multiplicando-se (I) por 3 e somando-se as duas expressões termo a termo, obtemos:

3*x −*✚3✚*y = −*9 (I)

2*x +*✚3✚*y =* 4 (II)*=⇒* 5*x = −*5

Então, substituindo-se *x = −*1 em (I) e/ou (II) temos:

(I) *−*1*− y = −*3 *=⇒ −y = −*2 *=⇒ y =* 2

(II) 2(*−*1)*+*3*y =* 4 *=⇒ −*2*+*3*y =* 4 *=⇒* 3*y =* 6 *=⇒ y =* 2 Assim (*x*, *y*) *=* (*−*1, 2)

78 *Notas de Aula 10. Função do Primeiro Grau*

NOTAS DE AULA 11

**Função do Primeiro Grau**

**11.1 Coeficientes da Função Afim**

O coeficiente a da função *f* (*x*) *= ax+b*, é denominado coeficiente angular ou declividade da reta representada no plano cartesiano.

O coeficiente b da função *f* (*x*) *= ax +b* é denominado coeficiente linear.

**11.1.1 Exercícios Resolvidos**

1. Obter a equação da reta que passa pelo ponto (1,3) e tem coeficiente angular igual a 2.

*•* **Solução**

A equação de interesse é *f* (*x*) *= ax +b* ou *y = ax +b*. Se o coeficiente angular é 2, temos *a =* 2.

Substituindo-se *x =* 1, *y =* 3 e *a =* 2 em *y = ax +b*, temos:

3 *=* (2)(1)*+b*

*b =* 1

Logo, a equação procurada é:

*y =* 2*x +*1

2. Obter a equação da reta que passa pelo ponto (*−*2,4) e tem coeficiente angular ingual a *−*3.

*•* **Solução**

Se *x = −*2, *y =* 4 e *a = −*3, logo *f* (*x*) *= ax +b* ou *y = ax +b* é gual a: 4 *=* (*−*3)(*−*2)*+b*

*b = −*2

79

80 *Notas de Aula 11. Função do Primeiro Grau*

Logo, a equação procurada é:

*y = −*3*x −*2

3. Obter a equação da reta que passa pelo ponto (*−*2,1) e tem coeficiente linear igual a 4.

*•* **Solução**

Tendo-se *y = ax +b*, logo *x = −*2, *y =* 1 e *b =* 4 nos dando:

1 *= a*(*−*2)*−*4

*a =*32

E assim:

**11.2 Zero da Função Afim**

*y =*32*x +*4

O zero de uma função é todo ponto *x*, onde a função é nula, ou seja, a imagem no ponto *x* é igual a zero.

*x* é zero de *y = f* (*x*) *⇐⇒ f* (*x*) *=* 0

Logo, para determinarmos o zero da função afim, basta resolver a equação do primeiro grau:

*ax +b =* 0

Que apresenta uma única solução dada por:

*x = −ba*

De fato, resolvendo a equação, temos:

*ax +b =* 0*a=*0 *←−→ ax = −b*

*x = −ba*

**Exemplo 1**