Gabriel Ribeiro 2024.1.08.010

Lista 5 - GA

1.

a) $\overrightarrow{BF}$ (indo de B até F)

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = -\vec{b} + \vec{f}$

b) $\overrightarrow{AG}$ (indo de A até G)

$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
$= \vec{f} - \vec{b} + \vec{c}$

c) $\overrightarrow{AE}$ (indo de A até E)

$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = \vec{f} - \vec{b}$

d) $\overrightarrow{BG}$ (indo de B até G)

$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$
$= -\vec{b} + \vec{c} - \vec{b} + \vec{f}$

e) $\overrightarrow{MB}$ (indo de M até B)

$= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$
$= -(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) - (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{f} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{b}$

f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{b} - \vec{b} + \vec{c}$
$= \vec{c}$

g) $\vec{AD} + \vec{MG}$

$= \vec{BC} + \vec{AB} = -\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AB} = \vec{c}$

h) $\vec{MF} + \vec{AG} - \vec{EF}$

$= \vec{MG} + \vec{GF} + \vec{AG} - \vec{EF} = \vec{MG} + \vec{CB} + \vec{AF} + \vec{FG} - \vec{EF}$
$= \vec{AB} + \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{AF} - \vec{AB} + \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{f}$

i) $2\vec{AD} - \vec{FG} - \vec{BM} + \vec{GM}$

$= 2\vec{BC} - \vec{BC} + \vec{MB} - \vec{AB} = 2(-\vec{AB} + \vec{AC}) + \vec{AB} - \vec{AC}$
$+ \vec{AB} - \vec{AF} + \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{AB} - \vec{AB} = -2\vec{AB} + 2\vec{AC} + 3\vec{AB} - 2\vec{AC}$
$- \vec{AF} = \vec{AB} - \vec{AF} = \vec{b} - \vec{f}$

2.

a) $\vec{DF}$

$= \vec{DC} + 2\vec{DE}$

b) $\vec{DA}$

$= 2DC + 2\vec{DE}$

c) $\vec{DB}$

$= \vec{DC} + \vec{CO} + \vec{OB} = \vec{DC} + \vec{DE} + \vec{DC} = 2\vec{DC} + \vec{DE}$

d) $\vec{DO}$

$= \vec{DC} + \vec{CO} = \vec{DC} + \vec{DE}$

e) $\vec{EC}$

$= \vec{EO} + \vec{OC} = \vec{DC} - \vec{DE}$

f) $\vec{EB}$

$= \vec{EO} + \vec{OB} = \vec{DC} + \vec{DC} = 2\vec{DC}$

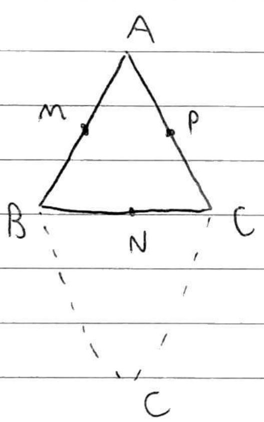
g) $\vec{OB}$

$= \vec{DC}$

h) $\vec{AF}$

$= \vec{AB} + \vec{BO} + \vec{OF} = -\vec{DE} - \vec{DC} + \vec{DE} = -\vec{DC}$

3.



$\vec{BP} = \vec{BA} + \vec{AP}$
$= -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

$\vec{AN} = \frac{1}{2}(AB + AC)$

$\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{AM}$
$= -\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

4.

a) $\vec{CD} = \vec{CB} + \vec{BA} + \vec{AD} = -\vec{BC} - \vec{AB} + \vec{AD}$
$= -3\vec{u} - 2\vec{v} + 5\vec{u} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$

$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = 3\vec{u} + 2\vec{u} - 2\vec{v}$
$= 5\vec{u} - 2\vec{v}$

$\vec{CA} = \vec{CB} + \vec{BA} = -\vec{BC} - \vec{AB} = -3\vec{u} - 2\vec{v}$

$\frac{5}{5} - 1 \quad \frac{5-6}{6} \quad \frac{1}{6}$

5. $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{4}\vec{c} - \vec{a} + \vec{b} + \frac{5}{6}\vec{a}$

$\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{4}\vec{c} + \vec{b} - \frac{1}{6}\vec{a}$

6.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -\vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{a} + X\vec{b}$$
$$= 4\vec{a} + \vec{b}(X-2)$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = -3\vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{a} + X\vec{b}$$
$$= 2\vec{a} + \vec{b}(X-2)$$

Hipótese: ~~$\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\}$ é L.I~~ $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ é L.I

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \\ \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \text{ (necessariamente)} \end{cases}$

Escalares W, Y $\in \mathbb{R}$ tais que:

$W\overrightarrow{AC} + Y\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ $\quad W(4\vec{a} + \vec{b}(X-2)) + Y(2\vec{a} + \vec{b}(X-2))$

$4W\vec{a} + W\vec{b}(X-2) + 2Y\vec{a} + Y\vec{b}(X-2) = \vec{0}$

$(4W + 2Y)\vec{a} + (W + Y)\vec{b}(X-2) = \vec{0}$

$(4W + 2Y)\vec{a} + (W(X-2) + Y(X-2))\vec{b} = \vec{0}$

Mas $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ é L.I., ou seja,

$\begin{cases} 4W + 2Y = 0 \\ (X-2)W + (X-2)Y = 0 \end{cases}$ Sistema homogêneo: SPD ou SPI

Cramer:

$$\det \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ x-2 & x-2 \end{vmatrix} = 4(x-2) - 2(x-2) = 4x - 8 - 2x + 4 = 2x - 4$$

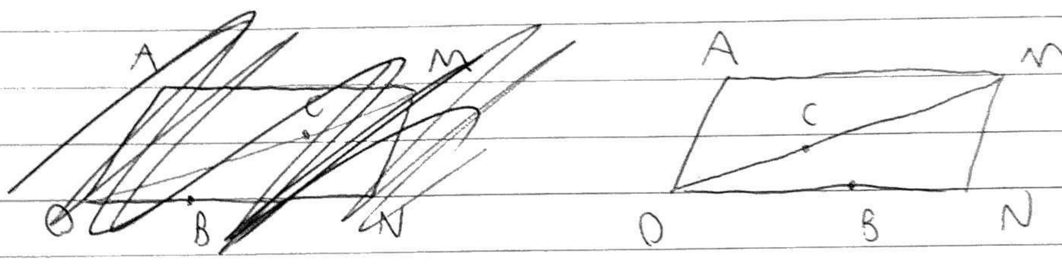
Para o sistema ser possível e indeterminado, admitindo assim infinitas soluções:

$\det = 0$

Para determinar x de modo que $\vec{AC}$ e $\vec{BC}$ sejam L.D.

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow \underline{x = 2}$$

7.



$$\vec{OB} = \frac{1}{n}\vec{ON} \; ; \; \vec{OC} = \frac{1}{1+n}\vec{OM}$$

Hipótese: $\{\vec{ON}, \vec{OM}\}$ é L.I.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\vec{ON} + \beta\vec{OM} = \vec{0} \\ \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \end{cases}$$

Escalares $W, Y \in \mathbb{R}$ tais que:

$$W\vec{OB} + Y\vec{OC} = \vec{0} \quad W\left(\frac{1}{n}\vec{ON}\right) + Y\left(\frac{1}{1+n}\vec{OM}\right) = \vec{0}$$

 $\frac{1}{n}W\vec{ON} + \frac{1}{1+n}Y\vec{OM} = \vec{0}$

$\left(\frac{1}{n}W\right)\overrightarrow{ON} + \left(\frac{1}{1+n}Y\right)\overrightarrow{OM} = \vec{0}$

Mas $\{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}\}$ é L.I., ou seja,

$$\begin{cases} \frac{1}{n}W = 0 \\ \frac{1}{1+n}Y = 0 \end{cases}$$

Cramer:

$$\det \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+n} \end{vmatrix} = 0$$

Solução: Com o determinante resultando em 0, os pontos A, B e C estão alinhados, sendo colineares.

8.

Dado: $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.I. $\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \\ \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \end{cases}$

Logo, $\{2\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - 2\vec{v}\}$ é L.I.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha(2\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\vec{u} - 2\vec{v}) = \vec{0} \\ \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha(2\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\vec{u} - 2\vec{v}) = \vec{0}$$
$$\Longleftrightarrow 2\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{u} - 2\beta\vec{v} = \vec{0}$$
$$\Longleftrightarrow (2\alpha + \beta)\vec{u} + (\alpha - 2\beta)\vec{v} = \vec{0}$$

Mas $2\alpha + \beta = 0$ e $\alpha - 2\beta = 0$, então $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.I.

Conclusão: $\{2\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - 2\vec{v}\}$ L.I

$\Rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}\}$ L.I

9.

a)

Dado: $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ L.I

$\iff \begin{cases} \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0} \\ \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{cases}$

Se, $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\}$ L.I

$\iff \begin{cases} \alpha(\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) + \gamma(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0} \\ \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{cases}$

$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) + \gamma(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

$\iff \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v} + \beta \vec{u} - \beta \vec{v} + \beta \vec{w} + \gamma \vec{u} + \gamma \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$

$\iff (\alpha + \beta + \gamma)\vec{u} + (\alpha - \beta + \gamma)\vec{v} + (\beta + \gamma)\vec{w} = \vec{0}$

mas $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha - \beta + \gamma = 0$ e $\beta + \gamma = 0$, então:

$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ L.I $\Rightarrow \{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\}$ L.I

b)

$\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

$\{\vec{u} + \vec{t}, \vec{v} + \vec{t}, \vec{w} + \vec{t}\}$ é L.I.

$\iff \begin{cases} \alpha(\vec{u} + \vec{t}) + \beta(\vec{v} + \vec{t}) + \gamma(\vec{w} + \vec{t}) = \vec{0} \\ \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{cases}$

$\alpha \vec{u} + \alpha \vec{t} + \beta \vec{v} + \beta \vec{t} + \gamma \vec{w} + \gamma \vec{t} = \vec{0}$

$(\alpha)\vec{u} + (\beta)\vec{v} + (\gamma)\vec{w} + (\alpha + \beta + \gamma)\vec{t}$

 mas $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$, então:

$\frac{2}{3} - 3 \quad \frac{2-9}{3} = -\frac{7}{3}$

$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ L.I

10.

a)

$\vec{AB} = B - A = \vec{OB} - \vec{OA} = (1,0,-1)_{E_3} - (1,3,2)_{E_3}$
$= (1-1, 0-3, -1-2)_{E_3} = (0,-3,-3)_{E_3}$

$\vec{BC} = C - B = \vec{OC} - \vec{OB} = (1,1,0)_{E_3} - (1,0,-1)_{E_3}$
$= (1-1, 1-0, 0-(-1))_{E_3} = (0,1,1)_{E_3}$

$\vec{CA} = A - C = \vec{OA} - \vec{OC} = (1,3,2)_{E_3} - (1,1,0)_{E_3}$
$= (1-1, 3-1, 2-0)_{E_3} = (0,2,2)_{E_3}$

b)

$\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} = B - A + \frac{2}{3} C - B = \vec{OB} - \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OC} - \vec{OB}$
$= (1,0,-1)_{E_3} - (1,3,2)_{E_3} + \frac{2}{3}(1,1,0)_{E_3} - (1,0,-1)_{E_3}$
$= (1-1, 0-3, -1-2)_{E_3} + \left(\frac{2}{3}-1, \frac{2}{3}-0, 0-(-1)\right)_{E_3}$
$= (0,-3,-3)_{E_3} + \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)_{E_3}$
$= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, -2\right)_{E_3}$

c)

$C + \frac{1}{2}\vec{AB} = (1,1,0)_{E_3} + \frac{1}{2}(0,-3,-3)_{E_3}$

$= \left(1+0, 1-\frac{3}{2}, 0-\frac{3}{2}\right)_{E_3} = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)_{E_3}$

d)

$A - 2\vec{BC} = (1,3,2)_{E_3} - 2(0,1,1)_{E_3}$

$= (1-0, 3-2, 2-2)_{E_3} = (1,1,0)_{E_3}$

11.

a) $\{(2,3),(0,2)\}$

$\{(2,3),(0,2)\}$ é L.I. se $\det\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\det\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (2.2 - 3.0) = 4 \neq 0$

Conclusão: $\{(2,3),(0,2)\}$ é L.I.

b) $\{(3,0),(-2,0)\}$

$\det\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (3.0 - 0.(-2)) = 0$

Conclusão: $\{(3,0),(-2,0)\}$ não é L.I.

c) $\{(2,3,4),(0,3,3)\}$

$\det\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1 \leftarrow l_1/2 \\ l_2 \leftarrow l_2/3 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \; l_1 \leftarrow l_1 - \frac{3}{2} l_2$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Conclusão: Como a forma escalonada reduzida não tem uma linha de zeros, os vetores são L.I.

FORON:

d) $\{(1,-1,2),(1,1,0),(1,-1,1)\}$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(-1.1 - 2.(-1)) + 1(1.1 - 2.1) = -2 \neq 0$$

Conclusão: $\{(1,-1,2),(1,1,0),(1,-1,1)\}$ é L.I.

e) $\{(1,-1,1),(-1,2,1),(-1,2,2)\}$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1.(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+1.(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.(-1.2 - 1.2) + 2(1.2 - 1.(-1)) - 1(1.2 - 1)$$

$$= 1 \neq 0$$

Conclusão: $\{(1,-1,1),(-1,2,1),(-1,2,2)\}$ é L.I.

f) $\{(1,0,1),(0,0,1),(2,0,5)\}$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -1.0 = 0$$

Conclusão: $\{(1,0,1),(0,0,1),(2,0,5)\}$ não é L.I.

12.

a)
$$\vec{m} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$$

$$(1,1) = a\cdot(2,-1) + b\cdot(1,-1)$$

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \;\ldots ① \\ -a - b = 1 \;\ldots ②\;(\cdot 2) + ① \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 \\ -2a - 2b = 2 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\; b = -1 \qquad 2a + (-1) = 1 \rightarrow 2a = 1 + 1$$
$$a = 1$$

Logo: $m = 1\cdot\vec{u} - 1\cdot\vec{v}$

b)
$$\vec{z} = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b} + m\cdot\vec{c}$$

$$(1,2,3) = x\cdot(1,1,1) + y\cdot(0,1,1) + m\cdot(1,1,0)$$

$$\begin{cases} x + y + m = 1 \;\ldots ① \\ 0 + y + m = 2 \;\ldots ② \\ x + 0 + m = 3 \;\ldots ③ \end{cases}$$

② $y = 2 - m \rightarrow$ ① $x + (2 - m) + m = 1 \rightarrow x + 2 = 1$
$x = -1$

③ $-1 + m = 3 \rightarrow m = 4$ ② $y + 4 = 2 \rightarrow y = -2$

Logo: $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ m = 4 \end{cases}$, são os componentes do vetor z.

FORONI:

$\frac{1}{m} = \frac{m}{4}$

13.

a) Para $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ ser L.D.:

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$

$\Longleftrightarrow (1, m-1, m) = \lambda(m, 2n, 4)$
$(1, m-1, m) = (\lambda m, 2\lambda n, 4\lambda)$

$$\begin{cases} 1 = \lambda m \rightarrow \lambda = \frac{1}{m} \\ m-1 = 2\lambda n \\ m = 4\lambda \rightarrow \lambda = \frac{m}{4} \end{cases}$$

$\frac{1}{m} \times \frac{m}{4} \rightarrow 4 = m^2 \rightarrow m = \pm 2$

p/ $m = +2$ p/ $m = -2$

$2 - 1 = 2 \cdot \frac{2}{4} n$ $-2 - 1 = 2 \cdot \left(\frac{-2}{4}\right) n$

$n = 1$ $-3 = -n \cdot (-1) \rightarrow n = 3$

Solução: $\begin{cases} m = (-2, 2) \\ n = (1, 3) \end{cases}$

b) Para $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ ser L.D.:

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$

$\Longleftrightarrow (1, m, n+1) = \lambda(m, n+1, 8)$
$(1, m, n+1) = (\lambda m, \lambda(n+1), 8\lambda)$

$$\begin{cases} 1 = \lambda m \rightarrow \lambda = \frac{1}{m} \\ m = \lambda(n+1) \rightarrow \cancel{m = \lambda \cdot 8\lambda = 8\lambda^2} \quad \lambda = \frac{m}{(n+1)} \\ n+1 = 8\lambda \end{cases}$$

FORONI

(/ /)

$$\frac{1}{m} \times \frac{m}{(n+1)} \rightarrow (n+1) = m^2 \rightarrow 8\lambda = m^2$$

$$8\,\frac{1}{m} = m^2 \rightarrow \frac{8}{m} = m^2 \rightarrow m^3 = 8 \Rightarrow m = 2$$

p/ $m = 2$

$1 = \lambda m$

$\lambda = \frac{1}{2}$

p/ $\lambda = \frac{1}{2}$

$n+1 = 8\lambda$

$n+1 = 4$

$n = 3$

Solução: $\begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$

14.

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$$

$$a(m, -1, m^2+1) + b(m^2+1, m, 0) + c(m, 1, 1) = \vec{0}$$

$$\begin{cases} am + b(m^2+1) + cm = 0 \\ -a + bm + c = 0 \\ a(m^2+1) + 0 + c = 0 \end{cases}$$

Sendo $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ L.I:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Conclusão: Por serem L.I. os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ formam uma base para o espaço independentemente do valor de m.

15.

a) Para $C = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ ser base de $\mathbb{V}^3$:

$\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ é L.I

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \vec{f}_1 + \beta \vec{f}_2 + m \vec{f}_3 = \vec{0} \\ \Rightarrow \alpha = \beta = m = 0 \end{cases}$$

$$\alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + m(0,1,-1) = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 0 = 0 \\ \alpha + 0 + m = 0 \\ 0 + \beta - m = 0 \end{cases} \qquad \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ para ser L.I.}$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(1.(-1) - 0.1) - 1(1.1 - 1.0) = 0$$

Conclusão: $C = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ não é base de $\mathbb{V}^3$.

b)

$$\vec{u} = (2,3,7)_C = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

matriz de C para B:

FORON:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vec{f}_3 \end{pmatrix}^T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \right]^T$$

$$(\vec{f}_1 \ \vec{f}_2 \ \vec{f}_3) = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Então:

$$= (\vec{f}_1 \ \vec{f}_2 \ \vec{f}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{f}_1 \ \vec{f}_2 \ \vec{f}_3) \begin{pmatrix} 2+3+0 \\ 2+0+7 \\ 0+3-7 \end{pmatrix} = (\vec{f}_1 \ \vec{f}_2 \ \vec{f}_3) \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= (5, 9, -4)_B$$

c)

$$\vec{v} = (2, 3, 7)_B = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

matriz de B para C:

$$\cancel{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \vec{f}_1 \;\ldots\; (1)}$$
$$\cancel{\vec{e}_1 + \vec{e}_3 = \vec{f}_2 \;\ldots\; (2)}$$
$$\cancel{\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = \vec{f}_3 \;\ldots\; (3)}$$

$$\cancel{(2) + (3) : \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \vec{f}_2 + \vec{f}_3 - (3)}$$

$$\cancel{\vec{e}_1 + \vec{e}_3 = \vec{f}_2 + \vec{f}_3 - \vec{f}_3}$$

$$\cancel{(2) - (1) : \vec{e}_3 - \vec{e}_2 = \vec{f}_2 - \vec{f}_1}$$

Na base B:

$$V = 2 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 + 7 \cdot \vec{e}_3$$

Na base C:

$$V = x \cdot \vec{f}_1 + y \cdot \vec{f}_2 + z \cdot \vec{f}_3$$

$$\begin{cases} 2 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 + 7 \cdot \vec{e}_3 = x \cdot (1,1,0)_B + y \cdot (1,0,1)_B + z(0,1,-1)_B \\ 2 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 + 7 \cdot \vec{e}_3 = (x+y,\ x+z,\ y-z)_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = x + y \rightarrow x = 2 - y \\ 3 = x + z \rightarrow z = 3 - 2 + y \\ 7 = y - z \rightarrow y - 3 + 2 - y = 7 \rightarrow y - y = 7 + 3 - 2 \end{cases}$$

$$x = 3 - z \qquad 3 - z = 2 - y \rightarrow z = 2 - y - 3$$