Integral de Choquet Discreta:

E sua utilização como função de agregação

Gabriel Rosa

Apresentação da Integral

- Foi criada pelo matemático Gustave Choquet em 1953;
- Usada inicialmente na mecânica estatística e teoria do potencial, mas a partir dos anos 80 adentrou na área de teoria de decisões;
- É usada para medir a utilidade esperada de um evento incerto;
- Utiliza de ferramentas da Lógica fuzzy em sua definição, tais como as funções de pertinência, capacidade de conjuntos e a **medida fuzzy**;

Medida Fuzzy

Considerando $N = \{1, \ldots, n\}$, para $n > 0$ e $A \subseteq N$:

- Uma função $m: 2^N \to [0, 1]$ é uma *medida fuzzy* se para todo $X, Y \subseteq N$, forem verdadeiras as seguintes propriedades:
  - $m(\varnothing) = 0$ e $m(N) = 1$
  - se $X \subseteq Y$, então $m(X) <= m(Y)$
- Conceitos e tipos de Medidas Fuzzy:
  - Cardinalidade da medida uniforme -> $m(A) = |A| / n$
  - Medida de Dirac -> $m(A) = \{ 1$ se $i \in A$; 0 se $i \notin A\}$

Medida Fuzzy

Para o restante de tipos de medidas, considere o vetor de pesos (w1, w2, …, wn) $\in [0,1]^n$ tal que $\Sigma^n_{i=1} w_i = 1$:

- Média Ponderada: considerando os valores $m(\{1\}) = w_1; \ldots ; m(\{n\}) = w_n$ para a medida fuzzy. Para $|A| > 1 \rightarrow m(A) = \sum_{i \in A} m(\{i\})$;
- Média Ponderada Ordenada (OWA): Considere os valores $m(\{i\}) = w_j$, com i sendo o j-th maior componente a ser agregado, para essa medida fuzzy. Para $|A| > 1 \rightarrow m(A) = \sum_{i \in A} m(\{i\})$;
- Poder de Medida: $m(A) = (|A| / n)^q$, com $q > 0$;

Definição da Integral de Choquet Discreta

Sendo **m**: 2^N ->[0, 1] como medida fuzzy, a integral de choquet se define por C_m: $[0,1]^n$ -> [0, 1]:

$$C_m(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}(x_{(i)} - x_{(i-1)}) \cdot m(A_{(i)}) ,$$

sendo ***x*** uma permutação crescente $(x_1, \ldots, x_n)$, ou seja $0 <= x_1 <= \ldots <= x_n$ e $A_{(i)} = \{(i), \ldots, (n)\}$ é um subset de índices que correspondem ao n -i + 1 maior componente de ***x***.

Exemplificação de seu uso no modelo FARC-HD

Retomando o Exemplo:

- Nesta tabela temos 3 classes (C1, C2, C3) e 3 regras fuzzy genéricas (R1, R2, R3);
- Os números inseridos na tabela já são referentes a etapa 2 do processo de uma FRM(Fuzzy Reasoning Method), ou seja, já são os graus de associação positivos obtidos de cada regra.
- A partir disso podemos calcular os valores resultantes pela Integral de Choquet para cada classe e realizar a predição do dado;

	C_1	C_2	C_3
R_a	0.94	0.15	0.89
R_b	0.1	0.4	0.88
R_c	0.25	0.1	0.85

Exemplificação de seu uso no modelo FARC-HD

$$C_m(\boldsymbol{x}) = \sum^{n}_{i=1}(x_{(i)} - x_{(i-1)}) \cdot m(A_{(i)})$$

- C_m (C1)= ((0.1 - 0) * 3 / 3) + ((0.25 - 0.1) * 2 / 3) + ((0.94 - 0.25) * 1/ 3) = 0.43
- C_m (C2) = ((0.1 - 0) * 3 / 3) + ((0.15 - 0.1) * 2 / 3) + ((0.4 - 0.15) * 1 / 3) = 0.21
- C_m(C3) = ((0.85 - 0) * 3 / 3) + ((0.88 - 0.85) * 2 / 3) + ((0.89 - 0.88) * 1 / 3) = 0.87

	C_1	C_2	C_3
R_a	0.94	0.15	0.89
R_b	0.1	0.4	0.88
R_c	0.25	0.1	0.85

Aplicando a última etapa da FRM, em que é selecionado o arg max[0.43, 0.21, 0.87], temos que a classe que será prevista para o determinado dado de entrada é a **Classe 3 (C3)**

Referências

LUCCA, Giancarlo. **Aggregation and pre-aggregation functions in fuzzy rule-based classification systems**. 2018. 184 p. Dissertação de Doutorado — Universidad Pública de Navarra, Pamplona, 2018.

SOUZA NETO, Luiz Alves de. **Integral de Choquet Discreta: Perspectiva Pedagógica**. 2022.

RIBEIRO, Alexandre Moretto; DA SILVA, Circe Mary Silva. **Medidas Fuzzy**. **Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas**, v. 16, n. 4, p. 505-512, 1995.